第十二章　系统的状态变量分析

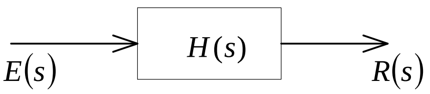
江禹生

12.0 信号流图

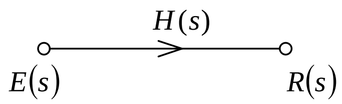
一、信号流图的基本概念

1、什么是信号流图？

信号流图：由结点与支路构成的表征系统中信号流动方向与系统功能的图，称为信号流图，简称流图。



方框图



信号流图

利用方框图描述系统的功能比用微分方程更为直观。对于零状态系统，其时域框图与变换域框图有相同的形式（仅是积分器对应于s^{-1}）。信号流图实际上是用有向的线图描述线性方程组变量间因果关系的一种图。用它来描述系统较方框图更为简便，而且通过梅森公式将系统函数与相应的信号流图联系起来，信号流图简明地沟通了描述系统的方程、系统函数以及框图等之间的联系，这不仅有利于系统分析，而且也便于系统模拟。

2、信号流图的一些术语定义

结点：表示信号变量的点，在流图中用小圆点表示。

源结点（输入结点）：只有输出支路的结点，通常源结点表示该信号为输入激励信号。

汇结点（输出结点、阱点）：只有输入支路的结点，通常用汇结点表示输出响应信号。为了把输出信号表示为汇结点，有时需要加上一根传输值为 1 的有向线段。

支路：表示信号变量间因果系统的有向线段。在流图中是连接两个结点之间的有向线段。支路的起点为因，支路的终点为果。支路的方向表示信号流动的方向。同时在支路上标注上信号的传输值。

支路传输值：支路因果变量间的转移函数。

入支路：流向结点的支路。

出支路：流出结点的支路。

混合结点：既有输入支路又有输出支路的结点。

开通路：通路与任一结点相交不多于一次。

环路：如果通路的终点就是通路的起点，并且与任何其它结点相交不多于一次。环路又称闭通路。

自环：仅包含有一支路的闭环。

前向通路：从输入结点到输出结点方向的通路上，通过任何结点不多于一次的全部路径。

前向通路增益：前向通路中，各支路转移函数的乘积。

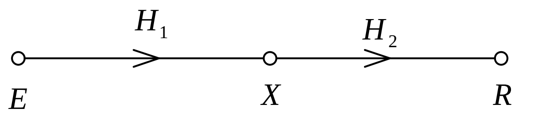
二、信号流图的基本性质

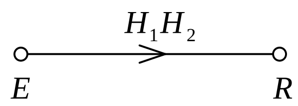
1、信号只能沿支路箭头方向传输，支路的输出是该支路输入与支路增益的乘积。

2、当结点有几个输入时，结点将所有输入支路的信号相加，并将其和传送给所有与该结点相连的输出支路。

三、信号流图化简的基本规则

1、支路串联的化简



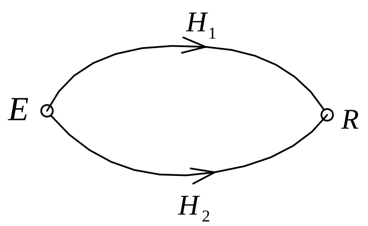


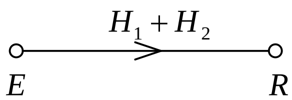
证明：$\because\ X = H_1E$

$R = H_2X$

$\therefore\ R = H_2X = H_1H_2E$

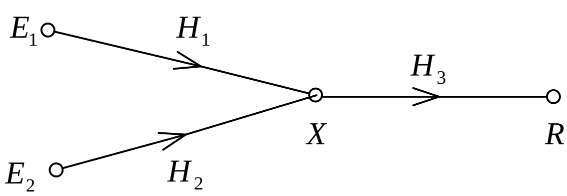
2、支路并联的化简

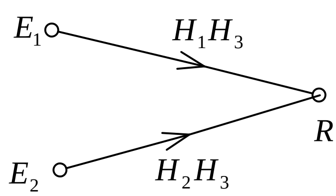




证明：$R = H_1E + H_2E = (H_1 + H_2)E$

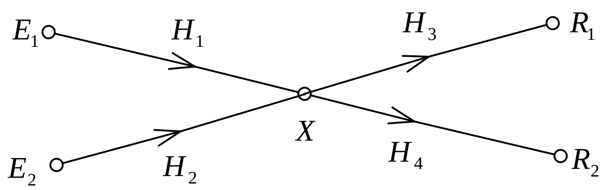
3、混合结点消除

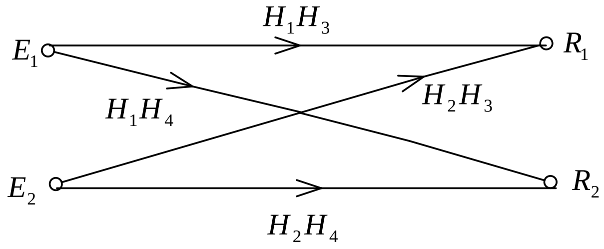




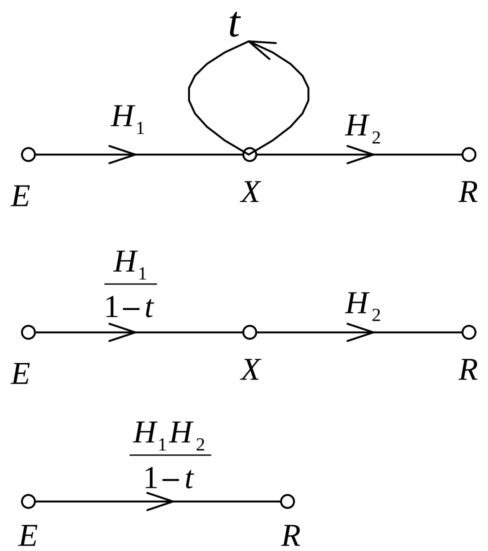
证明：$X = H_1E_1 + H_2E_2$

$R = H_3X = H_1H_3E_1 + H_2H_3E_2$





4、自环消除

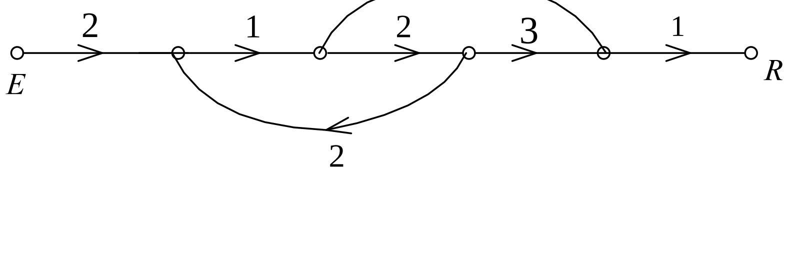


证明：$\because\ X = H_1E + tX$

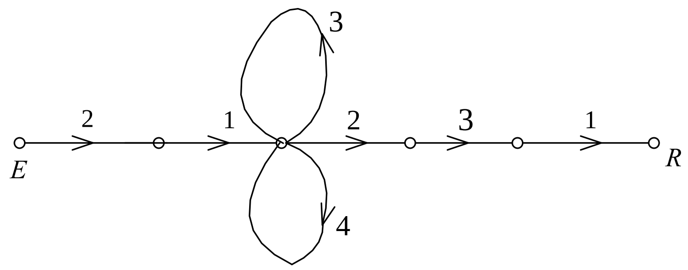
$R = H_2X$

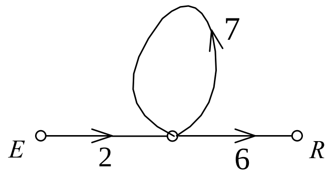
$\therefore\ R = H_2X = H_2\dfrac{H_1}{1-t}E = \dfrac{H_1H_2}{1-t}E$

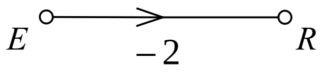
例 12.0.1　求下图所示信号流图的增益$\dfrac{R}{E}$。



解：

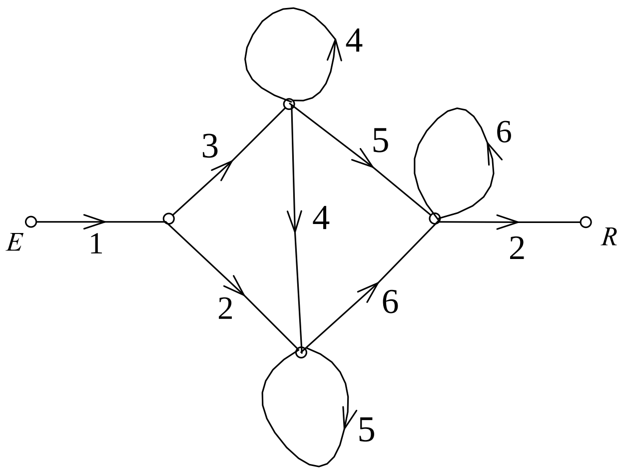




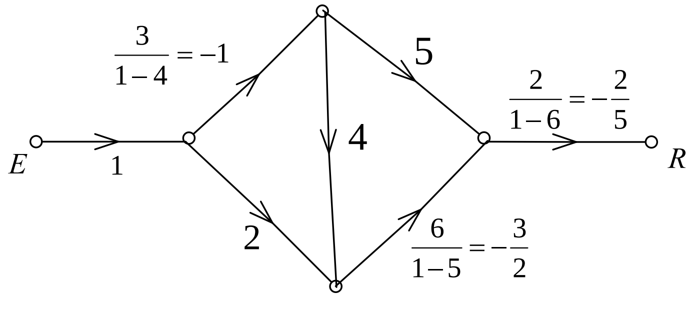


所以 $\dfrac{R}{E}=-2$

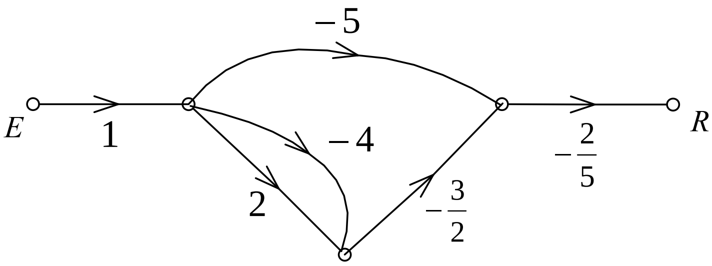
例 12.0.2　化简下列信号流图，求增益 $\dfrac{R}{E}$。



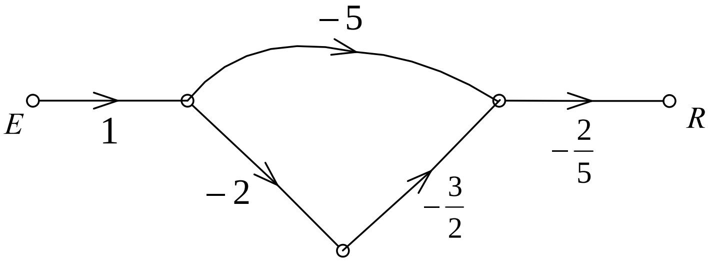
解：（1）消除自环



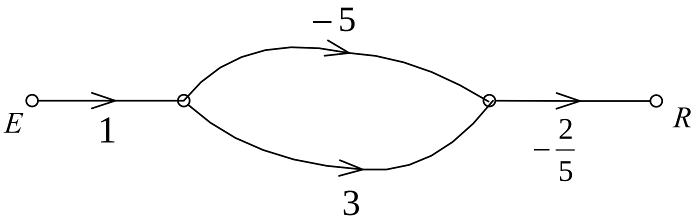
（2）消除上面混合结点



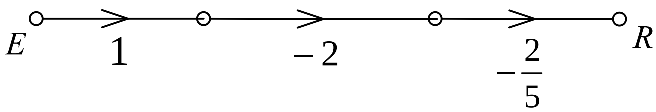
（3）合并并联支路



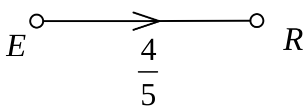
（4）消除下面结点



（5）再次合并并联支路

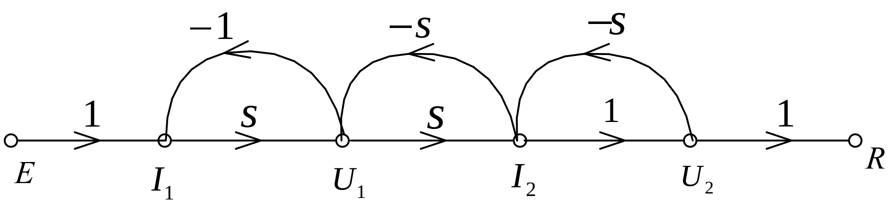


（6）合并串联支路

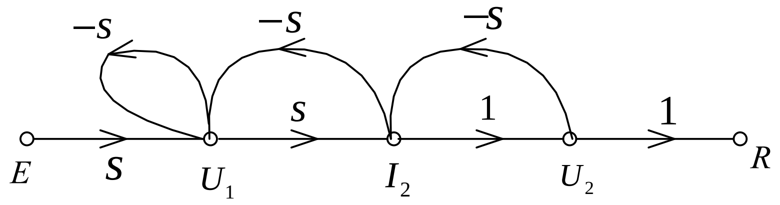


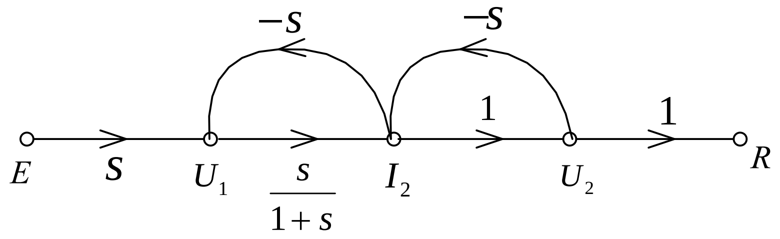
所以 $\frac{R}{E}=\frac{4}{5}$

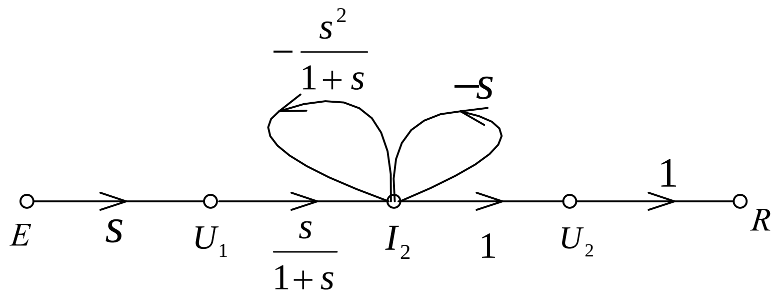
例 12.0.3 化简以下信号流图，求系统函数 $H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}$。

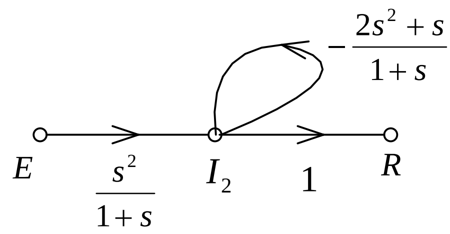


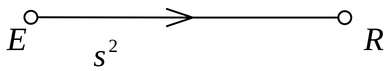
解：











$$\frac{\frac{s^2}{1+s}}{1+\frac{2s^2+s}{1+s}}=\frac{s^2}{2s^2+2s+1}$$

故　$H(s)=\dfrac{s^2}{2s^2+2s+1}$

四、梅森公式

用上述方法简化信号流图，求输入输出间的系统函数比较复杂，利用梅森公式可以根据流图很方便地求得输入输出间的系统函数。

梅森公式的形式为

$$H=\frac{1}{\Delta}\sum_{k}g_k\Delta_k$$

式中：H 为总传输值；

Δ 为信号流图所表示的方程组的系数矩阵行列式，称为流图的特征行列式；

$\Delta=1$－（所有不同环路的增益之和）

＋（各个可能的互不接触的两环路增益乘积之和）

－（各个可能的互不接触的三环路增益乘积之和）

＋······

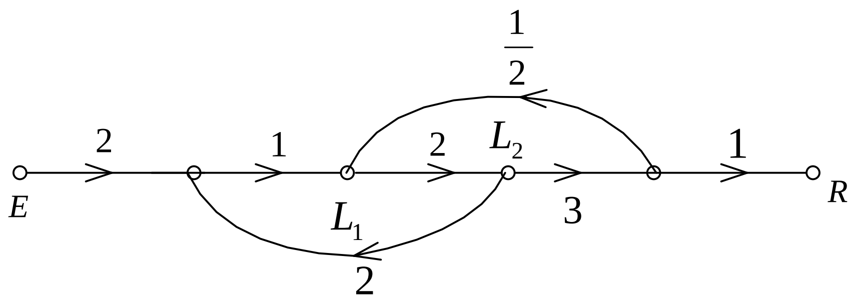
$$=1-\sum_{a}L_a+\sum_{b,c}L_bL_c-\sum_{d,e,f}L_dL_eL_f+\cdots$$

k 表示由源点到阱点之间第 k 条前向通路的标号；

g_k 表示由源点到阱点之间第 k 条前向通路的增益；

Δ_k 称为对于第 k 条前向通路特征行列式的余因子。它是除去与第 k 条前向通路相接触的环路外，所余下图的图行列式。

例 12.0.4　用梅森公式化简下面信号流图，求 $H=\frac{R}{E}$。



解：此信号流图共有两个环路，一条前向通路。

$$L_1=4\text{，}\quad L_2=3$$

没有互不接触的环路。

$$\Delta=1-(3+4)=-6$$

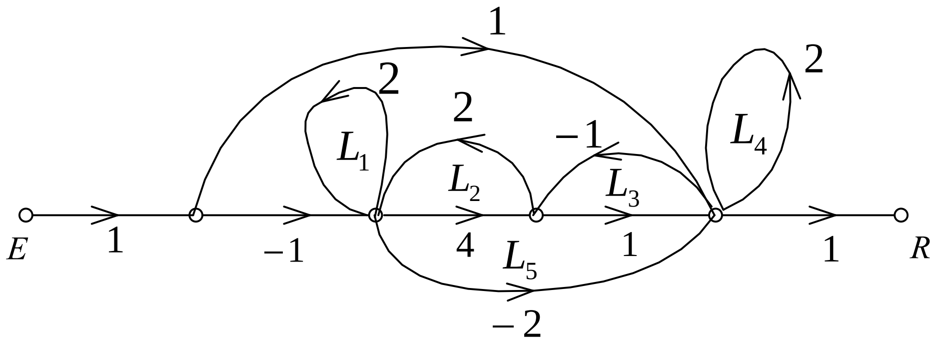
仅有的一条前向通路的增益为 $g_1=12$

除去与前向通路相互接触的环路外，没有环路。

$$\Delta_1=1$$

$$\therefore\quad H=\frac{1}{\Delta}\sum_{k}g_k\Delta_k=\frac{g_1\Delta_1}{\Delta}=\frac{12}{-6}=-2$$

例 12.0.5　用梅森公式化简下面信号流图，求总传输值$H=\dfrac{Y}{X}$。



解：此信号流图共有五个环路，三条前向通路。

各环路的增益为：

$$L_1=2$$

$$L_2=2\times 4=8$$

$$L_3=1\times(-1)=-1$$

$$L_4=2$$

$$L_5=-2\times(-1)\times 2=4$$

互不接触的两环路有：

$$L_1L_3=-2$$

$$L_1L_4=4$$

$$L_2L_4=16$$

没有三个及三个以上互不接触环路。

$$\Delta=1-\sum_i L_i+\sum_{i,j}L_iL_j$$

$$=1-(2+8-1+2+4)+(-2+4+16)=4$$

第一条前向通路增益为$g_1=1$

除去与第一条前向通路相接触的环路L_3，L_4外，余下图的因子为

$$\Delta_1=1-(2+8)=-9$$

第二条前向通路增益为$g_2=1\times(-1)\times 4\times 1\times 1=-4$

除去与第二条前向通路相接触的环路外，没有环路，所以

$\Delta_2 = 1$

第三条前向通路增益为 $g_3 = 1 \times (-1) \times (-2) \times 1 = 2$

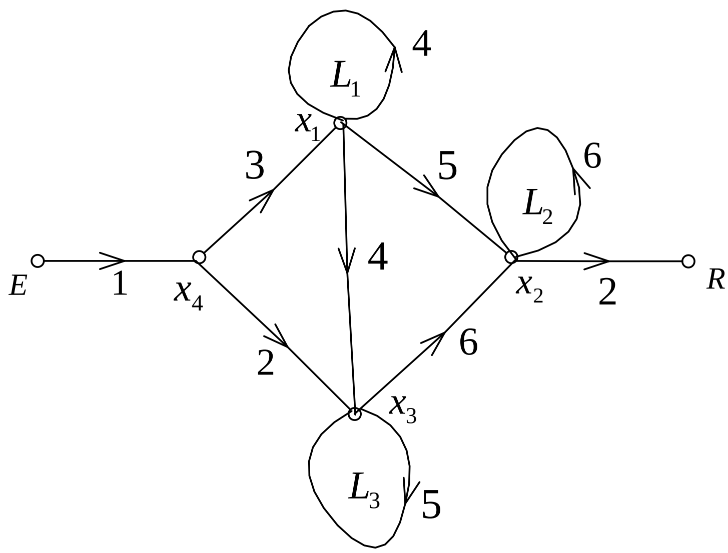
所有环路也都与第三条前向通路相接触，所以

$\Delta_3 = 1$

故

$$H = \frac{1}{\Delta}\sum_k g_k \Delta_k = \frac{g_1\Delta_1 + g_2\Delta_2 + g_3\Delta_3}{\Delta} = \frac{-9-4+2}{4} = -\frac{11}{4}$$

例 12.0.6 用梅森公式化简下面信号流图，求增益 $H = \dfrac{Y}{X}$。



解： 此信号流图共有三个环路，三条前向通路。

x_1 处的环路：$L_1 = 4$

x_2 处的环路：$L_2 = 6$

x_3 处的环路：$L_3 = 5$

有三对两两互不接触的环路：

$L_1 L_2 = 24$

$L_1 L_3 = 20$

$L_2 L_3 = 30$

有一个三个都互不接触的环路： $L_1L_2L_3=120$

$$\Delta=1-\sum_i L_i+\sum_{i,j}L_iL_j-\sum_{i,j,k}L_iL_jL_k$$

$$=1-(4+6+5)+(24+20+30)-120=-60$$

第一条前向通路 $E-x_4-x_1-x_2-R$ 增益为 $g_1=30$

与第一条前向通路相接触的环路有 x_3 处的环路 L_3，

$$\Delta_1=1-5=-4$$

第二条前向通路 $E-x_4-x_3-x_2-R$ 增益为 $g_2=24$

与第二条前向通路不接触的环路有 x_1 处的环路 L_1

$$\Delta_2=1-4=-3$$

第三条前向通路 $E-x_4-x_1-x_3-x_2-R$ 增益为 $g_3=144$

所有环路都与第三条前向通路相接触 $\Delta_3=1$

故

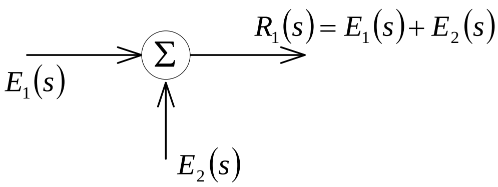
$$H=\frac{1}{\Delta}\sum_k g_k\Delta_k=\frac{g_1\Delta_1+g_2\Delta_2+g_3\Delta_3}{\Delta}=\frac{-30\times4-24\times3+144\times1}{-60}=\frac{4}{5}$$

五、系统模拟

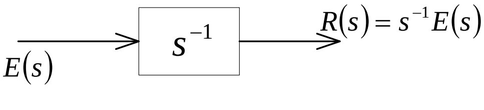
系统框图：一个系统是由许多部件或单元组成的，将这些部件或单元各用能完成相应运算功能的方框表示，然后将这些方框按系统的功能要求及信号流动的方向连接起来而构成的图，称为系统的框图表示，简称系统框图。

系统模拟图：由加法器、积分器和数乘器连接而成的图称为系统模拟图。

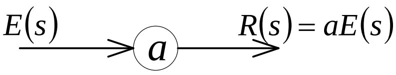
加法器：



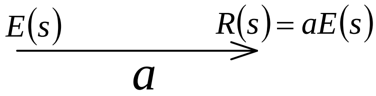
积分器：



数乘器：



或



模拟图与系统微分方程或系统函数$H(s)$在描述系统特性方面是等价的。

系统函数表征了系统的输入输出特性，而且它是有理分式函数，运算较为简便，因而系统模拟常通过系统函数进行。

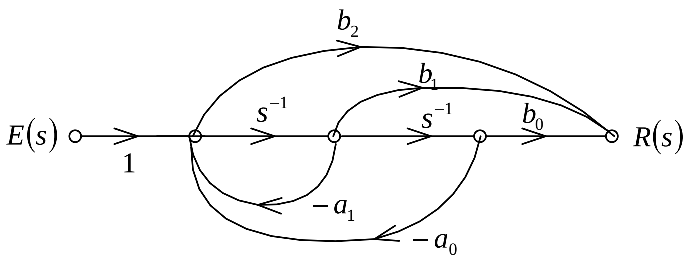
对于同一系统函数，通过不同的运算，可以得到多种形式的实现方案。常用的有直接形式、串联形式和并联形式。

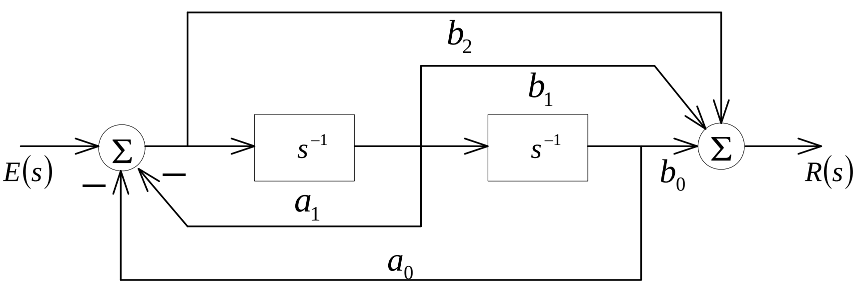
（1）直接实现

设二阶系统的系统函数

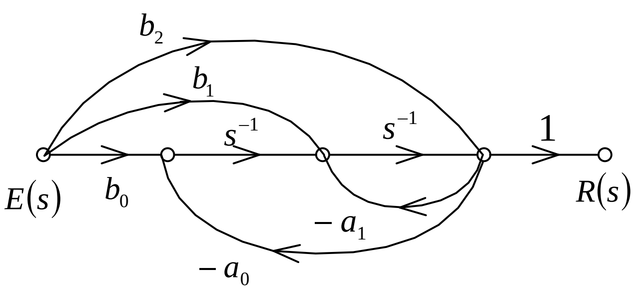
$$H(s)=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}=\frac{b_2+b_1s^{-1}+b_0s^{-2}}{1+a_1s^{-1}+a_0s^{-2}}=\frac{b_2+b_1s^{-1}+b_0s^{-2}}{1-\left(-a_1s^{-1}-a_0s^{-2}\right)}$$

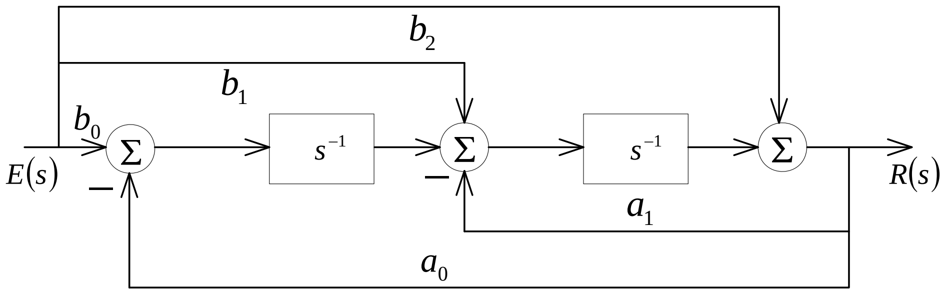
根据梅森公式，可得如下形式的信号流图。





另一种形式的信号流图如下图所示。



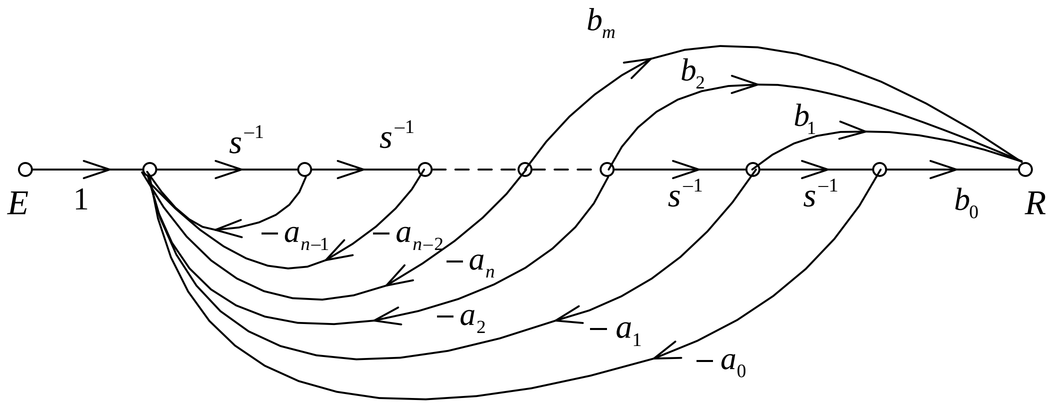


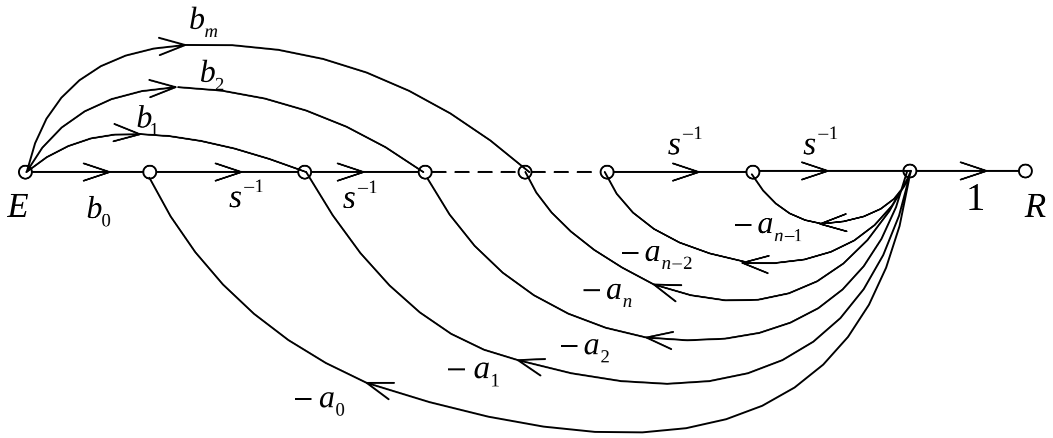
以上的分析方法可以推广到高阶系统的情形。如系统函数（式中 $m \le n$ ）

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$= \frac{b_m s^{-(n-m)} + b_{m-1} s^{-(n-m+1)} + \cdots + b s^{-(n-1)} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-(n-1)} + a_0 s^{-n}}$$

由梅森公式，上式的分母可看作是个环路组成的特征行列式，而且各环路都互相接触；分子可看作是（ $m+1$ ）条前向通路的增益，而且各前向通路都没有不接触环路。这样，就得到下图所示的两种直接形式的信号流图。

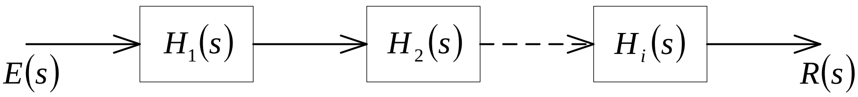




（2）串（级）联实现

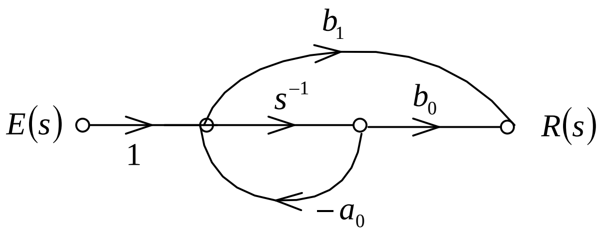
串联实现是将系统函数$H(s)$分解为若干一阶或二阶子系统函数的乘积。

$$H(s)=H_1(s)H_2(s)\cdots H_i(s)$$

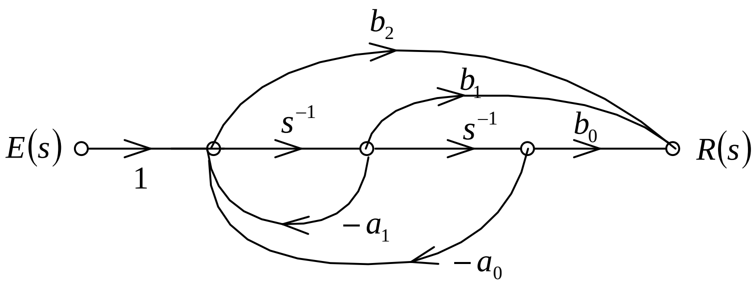


因此，系统由若干一阶或二阶子系统串（级）联构成。

一阶子系统 $H_i(s)=\dfrac{b_1 s+b_0}{s+a_0}=\dfrac{b_1+b_0 s^{-1}}{1+a_0 s^{-1}}=\dfrac{b_1+b_0 s^{-1}}{1-\left(-a_0 s^{-1}\right)}$



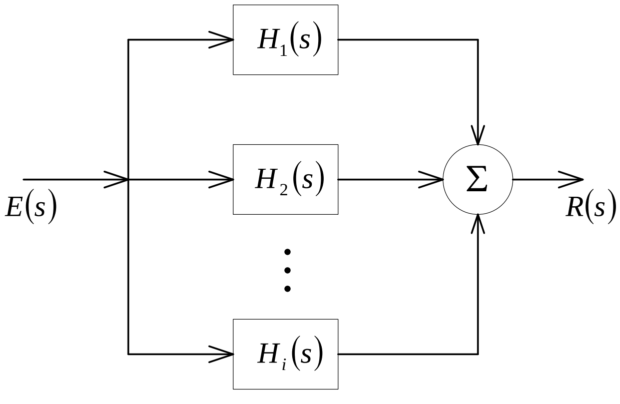
二阶子系统 $H_i(s)=\dfrac{b_2 s^2+b_1 s+b_0}{s^2+a_1 s+a_0}=\dfrac{b_2+b_1 s^{-1}+b_0 s^{-2}}{1+a_1 s^{-1}+a_0 s^{-2}}=\dfrac{b_2+b_1 s^{-1}+b_0 s^{-2}}{1-\left(-a_1 s^{-1}-a_0 s^{-2}\right)}$



（3）并联实现

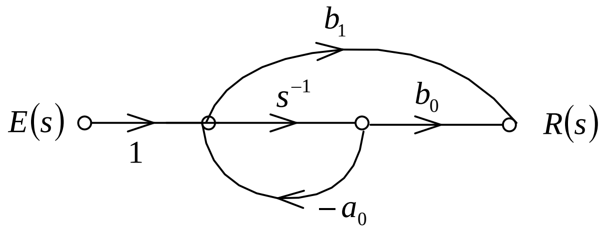
并联实现是将系统函数$H(s)$分解为若干一阶或二阶子系统函数之和。

$$H(s)=H_1(s)+H_2(s)+\cdots+H_i(s)$$

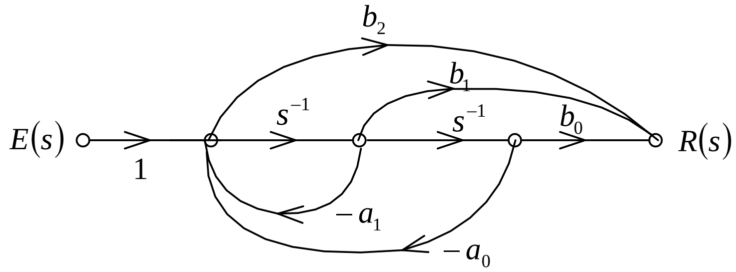


因此，系统由若干一阶或二阶子系统并联构成。

一阶子系统 $H_i(s)=\frac{b_1 s+b_0}{s+a_0}=\frac{b_1+b_0 s^{-1}}{1+a_0 s^{-1}}=\frac{b_1+b_0 s^{-1}}{1-(-a_0 s^{-1})}$



二阶子系统 $H_i(s)=\frac{b_2 s^2+b_1 s+b_0}{s^2+a_1 s+a_0}=\frac{b_2+b_1 s^{-1}+b_0 s^{-2}}{1+a_1 s^{-1}+a_0 s^{-2}}=\frac{b_2+b_1 s^{-1}+b_0 s^{-2}}{1-(-a_1 s^{-1}-a_0 s^{-2})}$



12.1 引言

一、系统模型描述的两种方法

1、输入一输出法

着眼于激励函数和响应函数之间的直接关系。建立起来的数学模型是n阶微分方程。适用于单输入单输出系统。

2、状态变量法

以状态变量为独立完备变量，以状态方程与输出方程为研究对象，对多输入多输出系统进行的方法，称为状态变量法。

状态变量法不仅考虑激励、响应的变化，而且对系统内部的一些变量同时感兴趣。建立起来的数学模型是n个一阶微分方程组。适用于多输入多输出系统。

二、状态和状态变量

1、状态

状态：描述系统所必须且数目最少的一组数$\lambda_1(t_0)$，$\lambda_2(t_0)$，$\cdots$，$\lambda_k(t_0)$，根据这组数，连同系统的模型和给定在$t\ge t_0$的输入函数，就可以唯一地确定在$t>t_0$的任意时刻t的状态$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\cdots$，$\lambda_k(t)$。根据在时刻t的状态和输入就能唯一地确定在时刻的任一输出值。

2、状态变量

状态变量：描述状态随时间变化的一组变量，它们在某时刻的值就组成了系

统在该时刻的状态。

3、状态矢量与状态空间

状态矢量：k 个状态变量作分量构成的矢量。

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_k(t) \end{bmatrix}$$

状态矢量所有可能值的集合称为状态空间。系统在任意时刻的状态都可用状态空间的一点来表示。

状态矢量在状态空间中，矢量所包含的状态变量的个数即相当于空间的维数，它也是系统的阶数。

三、状态方程和输出方程

状态方程：状态变量的一阶导数与状态变量和激励函数之间的关系方程。（独立的一阶方程）

输出方程：输出与状态变量和激励之间的关系方程。（代数方程）

通常将状态方程和输出方程总称为系统方程和动态方程。

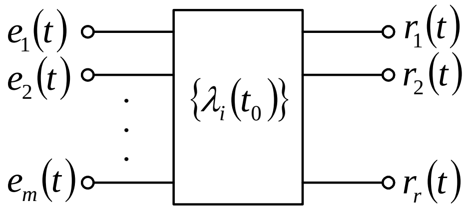
注意：状态变量的选择并不是唯一的。对于同一个系统，选择不同的状态变量可能得出不同的状态方程。

12.2 连续时间系统状态方程的建立

一、状态方程和输出方程的一般形式

1、状态方程

多输入—多输出线性时不变连续时间系统如下图所示：



状态方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\lambda_1(t) = a_{11}\lambda_1(t) + a_{12}\lambda_2(t) + \cdots + a_{1k}\lambda_k(t) + b_{11}e_1(t) + b_{12}e_2(t) + \cdots + b_{1m}e_m(t) \\ \dfrac{d}{dt}\lambda_2(t) = a_{21}\lambda_1(t) + a_{22}\lambda_2(t) + \cdots + a_{2k}\lambda_k(t) + b_{21}e_1(t) + b_{22}e_2(t) + \cdots + b_{2m}e_m(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d}{dt}\lambda_k(t) = a_{k1}\lambda_1(t) + a_{k2}\lambda_2(t) + \cdots + a_{kk}\lambda_k(t) + b_{k1}e_1(t) + b_{k2}e_2(t) + \cdots + b_{km}e_m(t) \end{cases}$$

其中　$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\cdots$，$\lambda_k(t)$为系统的k个状态变量。

$e_1(t)$，$e_2(t)$，$\cdots$，$e_m(t)$为系统的m个输入信号。

状态方程矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\lambda_1(t) \\ \frac{d}{dt}\lambda_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\lambda_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_m(t) \end{bmatrix}$$

状态方程矩阵形式简写为：

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = A\lambda(t) + Be(t)$$

其中：

状态矢量　$\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_k(t) \end{bmatrix}$

状态矢量的一阶导数　$\frac{d}{dt}\lambda(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\lambda_1(t) \\ \frac{d}{dt}\lambda_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\lambda_k(t) \end{bmatrix}$

激励函数矢量　$e(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_m(t) \end{bmatrix}$

矩阵A称为系统矩阵，A为$k \times k$方阵　$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$

矩阵B称为控制矩阵，B为$k \times m$矩阵　$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix}$

2、输出方程

$$\begin{cases} r_1(t)=c_{11}\lambda_1(t)+c_{12}\lambda_2(t)+\cdots+c_{1k}\lambda_k(t)+d_{11}e_1(t)+d_{12}e_2(t)+\cdots+d_{1m}e_m(t) \\ r_2(t)=c_{21}\lambda_1(t)+c_{22}\lambda_2(t)+\cdots+c_{2k}\lambda_k(t)+d_{21}e_1(t)+d_{22}e_2(t)+\cdots+d_{2m}e_m(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_r(t)=c_{r1}\lambda_1(t)+c_{r2}\lambda_2(t)+\cdots+c_{rk}\lambda_k(t)+d_{r1}e_1(t)+d_{r2}e_2(t)+\cdots+d_{rm}e_m(t) \end{cases}$$

其中：$r_1(t)$，$r_2(t)$，…，$r_r(t)$为系统的r个输出信号。

输出方程矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_r(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_k(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_m(t) \end{bmatrix}$$

输出方程矩阵形式简写为

$$r(t)=C\lambda(t)+De(t)$$

其中：矩阵C称为输出矩阵。

C为$r\times k$矩阵 $$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rk} \end{bmatrix}$$

D为$r\times m$矩阵 $$D=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix}$$

二、状态方程的建立

1、由电路图直接建立状态方程

为建立电路的状态方程，先要选定状态变量，通常选电容两端电压和流经电感的电流为状态变量。

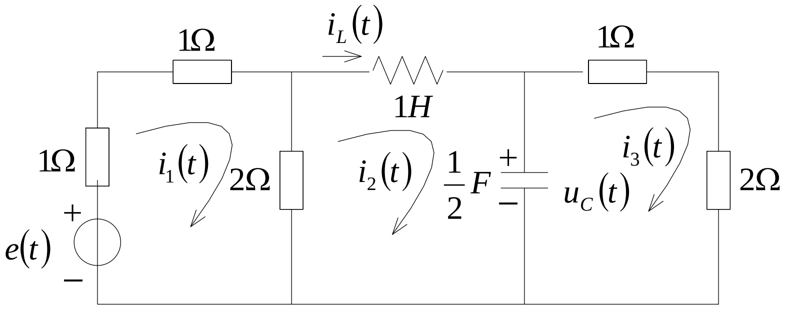
列写状态方程的步骤：

（1）选取所有独立电容电压和电感电流作为状态变量。

（2）对每一个独立电容，写出独立节点电流方程；对每一个独立电感，写出独立回路电压方程。

（3）在按上述步骤所列写的方程中，若含有除激励以外的非状态变量，则应利用适当的节点电流方程或回路电压方程将它们消去，然后整理成标准形式。

例 12.2.1 写出下图所示电路的状态方程。



解：

（1）选电感电流$i_L(t)$和电容电压$u_C(t)$作为状态变量。

令 $\lambda_1(t)=i_L(t)$

$\lambda_2(t)=u_C(t)$

（2）写出包含有$\dot{\lambda}_1(t)=\frac{d}{dt}i_L(t)$的回路电压方程和包含有$\dot{\lambda}_2(t)=\frac{d}{dt}u_C(t)$节点电流方程。

$$\frac{d}{dt}i_L(t)=-u_C(t)-2\left[i_L(t)-i_1(t)\right]=-u_C(t)-2i_L(t)+2i_1(t)$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}u_C(t)=i_L(t)-i_3(t)$$

（3）上两式中$i_1(t)$和$i_3(t)$不是状态变量，要把它们表示状态变量，由第一个回路有

$$e(t)=4i_1(t)-2i_L(t) \qquad \text{即} \qquad i_1(t)=\frac{1}{4}e(t)+\frac{1}{2}i_L(t)$$

由第三个回路有

$$u_C(t)=3i_3(t) \qquad \text{即} \qquad i_3(t)=\frac{1}{3}u_C(t)$$

代入前两式并整理得

$$\frac{d}{dt}i_L(t)=-u_C(t)-i_L(t)+\frac{1}{2}e(t)$$
$$\frac{d}{dt}u_C(t)=2i_L(t)-\frac{2}{3}u_C(t)$$

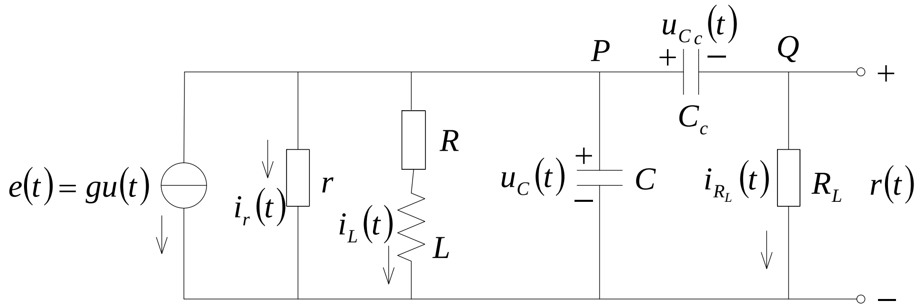
写成矩阵形式得

$$\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}i_L(t)\\ \frac{d}{dt}u_C(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L(t)\\ u_C(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}e(t)$$

整理成标准形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1(t)\\\dot{\lambda}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\2 & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\\lambda_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}e(t)$$

例 12.2.2　下图所示一小信号调谐放大器的等效电路，激励函数$e(t)$是一压控电流源$gu(t)$，输出电压$r(t)$由耦合电路的电阻R_L上取得。写出电路的状态方程。



解：（1）选电感电流$i_L(t)$、电容 C 上的电压$u_C(t)$和电容C_c上的电压$u_{C_c}(t)$作为状态变量。

令　$\lambda_1(t)=i_L(t)$

$\lambda_2(t)=u_C(t)$

$\lambda_3(t)=u_{C_c}(t)$

（2）列写方程

$$L\frac{d}{dt}i_L(t)+Ri_L(t)=u_C(t)$$

对于节点 P 有

$$C\frac{d}{dt}u_C(t)+C_c\frac{d}{dt}u_{C_c}(t)+i_L(t)+i_r(t)=-gu(t)=-e(t)$$

对于节点 Q 有

$$C_c\frac{d}{dt}u_{C_c}(t)=i_{R_L}(t)$$

（3）消去非状态变量

$i_r(t)$和$i_{R_L}(t)$两个为非状态变量，由图可知

$$i_r(t)=\frac{u_C(t)}{r}$$

$$i_{R_L}(t)=\frac{u_C(t)-u_{C_c}(t)}{R_L}$$

整理得：

$$\frac{d}{dt}i_L(t)=-\frac{R}{L}i_L(t)+\frac{1}{L}u_C(t)$$

$$\frac{d}{dt}u_C(t)=-\frac{1}{C}i_L(t)-\frac{R_L+r}{R_LrC}u_L(t)+\frac{1}{R_LC}u_{C_c}(t)-\frac{1}{C}e(t)$$

$$\frac{d}{dt}u_{C_c}(t)=\frac{1}{R_LC_c}u_C(t)-\frac{1}{R_LC_c}u_{C_c}(t)$$

写出矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}i_L(t)\\ \frac{d}{dt}u_C(t)\\ \frac{d}{dt}u_{C_c}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & \frac{1}{L} & 0\\ -\frac{1}{C} & -\frac{R_L+r}{R_LrC} & \frac{1}{R_LC}\\ 0 & \frac{1}{R_LC_L} & -\frac{1}{R_LC_c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L(t)\\ u_C(t)\\ u_{C_c}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{C}\\ 0\end{bmatrix}e(t)$$

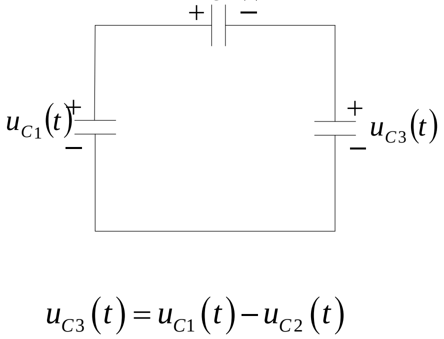
写成标准形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\\ \dot{\lambda}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & \frac{1}{L} & 0\\ -\frac{1}{C} & -\frac{R_L+r}{R_LrC} & \frac{1}{R_LC}\\ 0 & \frac{1}{R_LC_L} & -\frac{1}{R_LC_c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{C}\\ 0\end{bmatrix}e(t)$$

状态变量的个数等于系统的阶数。必须注意，所选的状态变量必须是相互独立的（即线性无关的）。

有几个电容互连或电容与电源互连的电路，有几个电感互连或电感与电源互连的电路，一般独立状态变量数要减少。

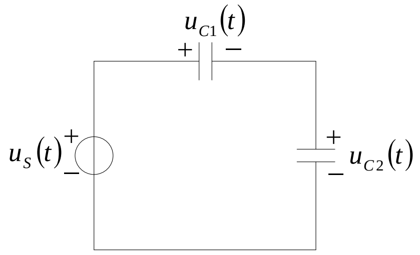
（1）只含有电容的回路



$$u_{C3}(t)=u_{C1}(t)-u_{C2}(t)$$

任一电容电压都能由其余两个电容电压表示，因而若选电容电压为状态变量，则它们之中只有两个是独立的。

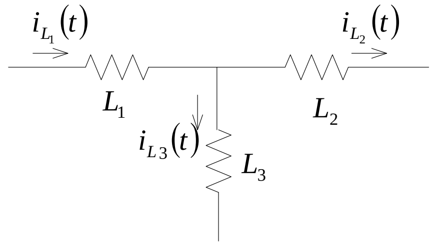
（2）只含有电容和理想电压源的回路



$$u_{C2}(t)=u_S(t)-u_{C1}(t)$$

两个电容电压只能选其中之一为独立的状态变量。

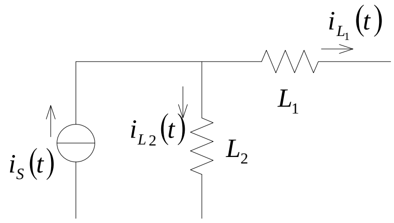
（3）只含有电感的节点



$$i_{L1}(t)=i_{L2}(t)+i_{L3}(t)$$

任一电感电流都能由其余两个电感电流表示，因而若选电感电流为状态变量，则它们之中只有两个是独立的。

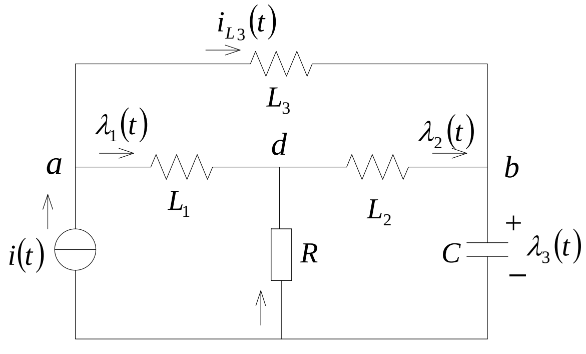
（4）只含有电感和理想电流源的节点



$$i_S(t)=i_{L1}(t)+i_{L2}(t)$$

两个电感电流中只能选其中之一为独立的状态变量。

例 12.2.3　写出下图所示电路的状态方程。



解：

选电感电流 $i_{L_1}(t)$、$i_{L_2}(t)$ 和电容电压 $u_C(t)$ 作为状态变量。

令 $\lambda_1(t)=i_{L_1}(t)$

$$\lambda_2(t)=i_{L_2}(t)$$

$$\lambda_3(t)=u_C(t)$$

对于接有电容 C 的结点 b，可列出电流方程

$$C\frac{d\lambda_3}{dt}=i_{L_3}(t)+\lambda_2(t) \qquad (1)$$

选包含 L_2 的回路 bcdb 和包含 L_1 的回路 abcda，列出两个独立电压方程得

$$L_2\frac{d\lambda_2}{dt}+\lambda_3(t)+R\left[C\frac{d\lambda_3}{dt}-i(t)\right]=0 \qquad (2)$$

$$L_3\frac{di_{L_3}}{dt}+\lambda_3(t)+R\left[C\frac{d\lambda_3}{dt}-i(t)\right]-L_1\frac{d\lambda_1}{dt}=0 \qquad (3)$$

又对结点 a 有

$$\lambda_1(t)+i_{L_3}(t)=i(t) \qquad (4)$$

（4）式代入（1）得：$C\frac{d\lambda_3}{dt}=-\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+i(t)$

$$\frac{d\lambda_3}{dt}=-\frac{1}{C}\lambda_1(t)+\frac{1}{C}\lambda_2(t)+\frac{1}{C}i(t) \qquad (5)$$

（1）代入（2）得：

$$L_2\frac{d\lambda_2}{dt}+\lambda_3(t)+R\left[i_{L_3}(t)+\lambda_2(t)-i(t)\right]=0$$

把（4）代入上式得：

$$L_2\frac{d\lambda_2}{dt}+\lambda_3(t)+R\left[\lambda_2(t)-\lambda_1(t)\right]=0$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt}=\frac{R}{L_2}\lambda_1(t)-\frac{R}{L_2}\lambda_2(t)-\frac{1}{L_2}\lambda_3(t) \qquad (6)$$

把（4）和（1）代入（3）得：

$$L_3\frac{di(t)}{dt}-L_3\frac{d\lambda_1}{dt}+\lambda_3(t)+Ri_{L_3}(t)+R\lambda_2(t)-Ri(t)-L_1\frac{d\lambda_1}{dt}=0$$

再把（4）代入上式得：

$$L_3\frac{di(t)}{dt}-(L_1+L_3)\frac{d\lambda_1}{dt}+\lambda_3(t)+Ri(t)-R\lambda_1(t)+R\lambda_2(t)-Ri(t)=0$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt}=-\frac{R}{L_1+L_3}\lambda_1(t)+\frac{R}{L_1+L_3}\lambda_2(t)+\frac{1}{L_1+L_3}\lambda_3(t)+\frac{L_3}{L_1+L_2}\frac{di(t)}{dt} \qquad (7)$$

联立（7）（6）（5）得状态方程

$$\frac{d\lambda_1}{dt}=-\frac{R}{L_1+L_3}\lambda_1(t)+\frac{R}{L_1+L_3}\lambda_2(t)+\frac{1}{L_1+L_3}\lambda_3(t)+\frac{L_3}{L_1+L_2}\frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt}=\frac{R}{L_2}\lambda_1(t)-\frac{R}{L_2}\lambda_2(t)-\frac{1}{L_2}\lambda_3(t)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt}=-\frac{1}{C}\lambda_1(t)+\frac{1}{C}\lambda_2(t)+\frac{1}{C}i(t)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot\lambda_1\\ \dot\lambda_2\\ \dot\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R}{L_1+L_3} & \frac{R}{L_1+L_3} & \frac{1}{L_1+L_3}\\ \frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} & -\frac{1}{L_2}\\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \frac{L_3}{L_1+L_2}\\ 0 & 0\\ \frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i(t)\\ \frac{di(t)}{dt}\end{bmatrix}$$

2、由系统输入－输出方程列写状态方程

状态方程和输出方程可根据描述系统的微分方程或系统函数、模拟框图、信号流图等列出，由于它们之间有十分简明的对应关系，而信号流图更为简洁、直观，因而按系统的信号流图建立状态方程和输出方程是很方便的。

由于状态方程描述的是状态变量的一阶导数与各状态变量和输入的关系，因此可选各积分器输出端的信号为状态变量。这样，根据系统的框图或信号流图，就可列出其状态方程和输出方程。

例 12.2.4 已知一个系统的微分方程

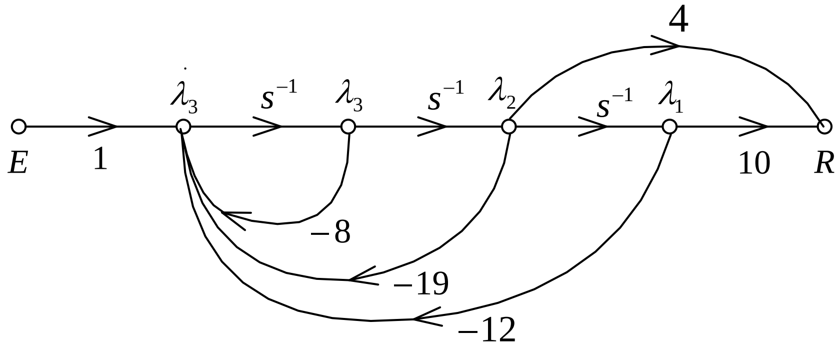
$$\left(p^3+8p^2+19p+12\right)r(t)=(4p+10)e(t)$$

分别列出它的状态方程和输出方程。

解：系统函数为

$$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}=\frac{4s^{-2}+10s^{-3}}{1-\left(-8s^{-1}-19s^{-12}-12s^{-3}\right)}$$

按系统函数可画出其信号流图和框图如下



选各积分器（即s^{-1}）的输出端信号为状态变量，则其输入端信号就是相应状态变量的一阶导数。如图中所示。

由图可列出状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 = \lambda_3 \\ \dot{\lambda}_3 = -12\lambda_1 - 19\lambda_2 - 8\lambda_3 + e(t) \end{cases}$$

$$r(t) = 10\lambda_1 + 4\lambda_2$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

$$r(t) = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

相变量：在根据系统函数采用直接模拟法得到的信号流图中，选积分器输出端作为状态变量，这种状态变量称为相变量。

同一系统流图形式不同，状态变量的选择就可以不一样。因而对于一个给定系统而言，状态变量选择并非唯一。

根据系统函数分母分解因式，则信号流图可以有并联形式与串联形式，下面举例讨论这种情形的状态方程。

例 12.2.5　求用并联结构和串联结构表示下式的状态方程和输出方程。

$$H(s) = \frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}$$

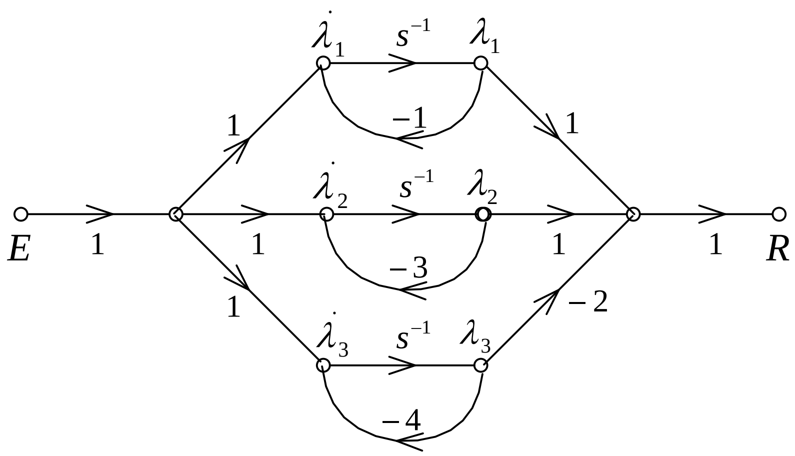
解：（1）并联结构

$$H(s)=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}$$

$$=\frac{4s+10}{(s+1)(s+3)(s+4)}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}-\frac{2}{s+4}$$

$$=\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}+\frac{s^{-1}}{1+3s^{-1}}-\frac{2s^{-1}}{1+4s^{-1}}$$

按系统函数可画出信号流图如下



选积分器的输出为状态变量

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\lambda_1+e(t)\\ \dot{\lambda}_2=-3\lambda_2+e(t)\\ \dot{\lambda}_3=-4\lambda_3+e(t)\end{cases}$$

$$r(t)=\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3$$

写成矩阵形式

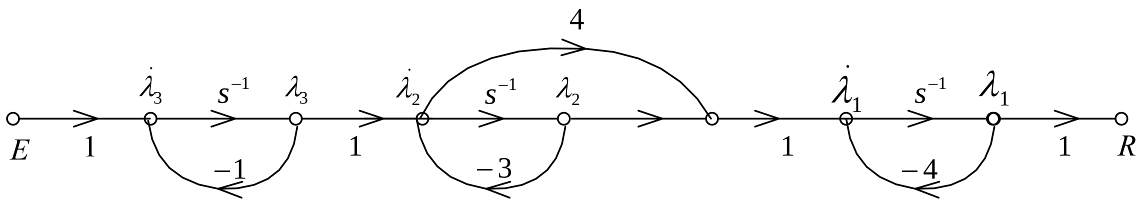
$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\\ \dot{\lambda}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}e(t)$$

$$r(t)=\begin{bmatrix}1&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}$$

系统矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$ 为一对角矩阵，其对角线上元素的值就是转移函数的极点。这种状态方程中的状态变量称为对角线变量。

（2）串联结构

$$\begin{aligned}H(s)&=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}\\&=\frac{4s+10}{(s+1)(s+3)(s+4)}\\&=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{4s+10}{s+3}\cdot\frac{1}{s+4}\\&=\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}\cdot\frac{4+10s^{-1}}{1+3s^{-1}}\cdot\frac{s^{-1}}{1+4s^{-1}}\end{aligned}$$



选积分器的输出为状态变量

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-4\lambda_1-2\lambda_2+4\lambda_3\\ \dot{\lambda}_2=-3\lambda_2+\lambda_3\\ \dot{\lambda}_3=-\lambda_3+e(t)\end{cases}$$

$$r(t)=\lambda_1$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\\ \dot{\lambda}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}e(t)$$

$$r(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}$$

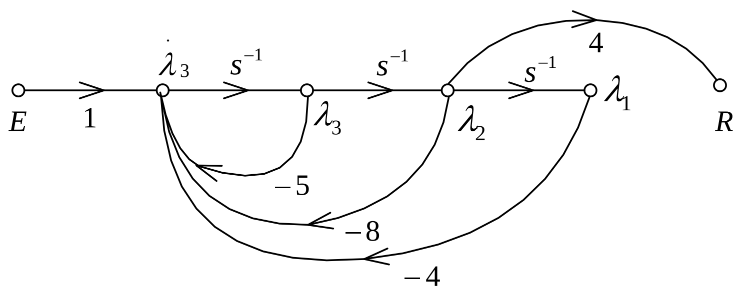
由上式可见，系统矩阵 $A=\begin{bmatrix}-4 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ 是三角矩阵，而对角元素为系统函数的极点。

例 12.2.6 已知系统函数为 $H(s)=\dfrac{4s}{(s+1)(s+2)^2}$

试分别列写系统的相变量的状态方程与输出方程，对角线变量的状态方程与输出方程。

解：（1）相变量状态方程

$$H(s)=\frac{4s}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{4s}{s^3+5s^2+8s+4}=\frac{4s^{-2}}{1+5s^{-1}+8s^{-2}+4s^{-3}}$$



选各积分器输出为状态变量。

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=\lambda_2\\ \dot{\lambda}_2=\lambda_3\\ \dot{\lambda}_3=-4\lambda_1-8\lambda_2-5\lambda_3+e(t)\end{cases}$$

$$r(t)=4\lambda_2$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\\ \dot{\lambda}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -4 & -8 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}e(t)$$

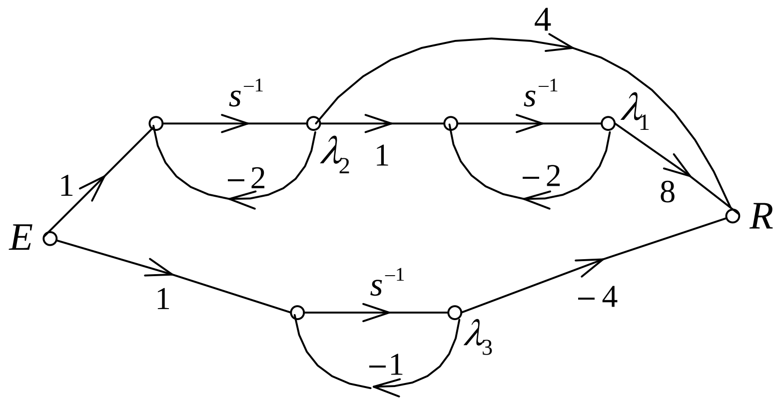
$$r(t)=\begin{bmatrix}0 & 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}$$

（2）对角线变量的状态方程

$$H(s)=\frac{4s}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{K_{11}}{(s+2)^2}+\frac{K_{12}}{s+2}+\frac{K_2}{s+1}$$

$$=\frac{8}{(s+2)^2}+\frac{4}{s+2}+\frac{-4}{s+1}=\frac{1}{s+2}\cdot\frac{8}{s+2}+\frac{4}{s+2}+\frac{-4}{s+1}$$

$$=\frac{s^{-1}}{1+2s^{-1}}\cdot\frac{8s^{-1}}{1+2s^{-1}}+\frac{4s^{-1}}{1+2s^{-1}}+\frac{-4s^{-1}}{1+s^{-1}}$$



选各个积分器的输出为状态变量，如图所示。

状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-2\lambda_1+\lambda_2\\ \dot{\lambda}_2=-2\lambda_2+e(t)\\ \dot{\lambda}_3=-\lambda_3+e(t)\end{cases}$$

输出方程为

$$r(t)=8\lambda_1+4\lambda_2-4\lambda_3$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\\ \dot{\lambda}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}e(t)$$

$$r(t)=\begin{bmatrix}8 & 4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}$$

此例说明当系统函数用部分分式展开时，具有重根的情况，则 A 矩阵导致为约当阵的形式。

一般而言，如有n阶微分方程

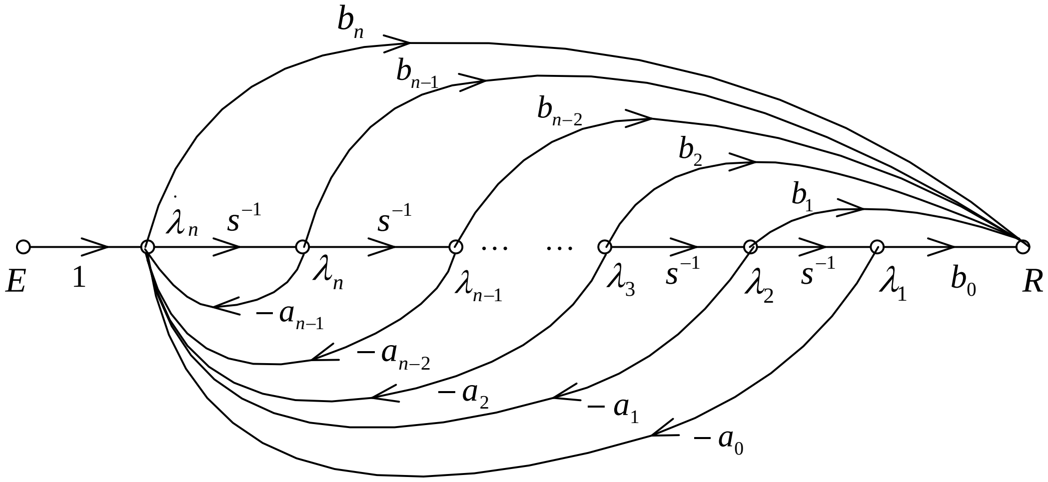
$$\left(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0\right) r(t) = \left(b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0\right) e(t)$$

则其系统函数可写为

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

为更具有一般性，设其分子、分母中s的最高幂次相同（即$m = n$）。若分子幂次低于分母幂次，则只要令某些系数为 0 即可。

画出信号流图：



选各积分器输出端信号（各s^{-1}的终端）为状态变量，则

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 = \lambda_3 \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_{n-1} = \lambda_n \\ \dot{\lambda}_n = -a_0\lambda_1 - a_1\lambda_2 - \cdots - a_{n-2}\lambda_{n-1} - a_{n-1}\lambda_n + e(t) \end{cases}$$

和

$$r(t) = b_0\lambda_1 + b_1\lambda_2 + \cdots + b_{n-2}\lambda_{n-1} + b_{n-1}\lambda_n + b_n\left[-a_0\lambda_1 - a_1\lambda_2 - \cdots - a_{n-2}\lambda_{n-1} - a_{n-1}\lambda_n + e(t)\right]$$

$$= \left(b_0 - a_0 b_n\right)\lambda_1 + \left(b_1 - a_1 b_n\right)\lambda_2 + \cdots + \left(b_{n-1} - a_{n-1}b_n\right)\lambda_n + b_n e(t)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\\ \vdots\\ \dot{\lambda}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}e(t)$$

$$r(t)=\begin{bmatrix}b_0-a_0b_n & b_1-a_1b_n & \cdots & b_{n-1}-a_{n-1}b_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}+b_ne(t)$$

如果将前面信号流图转置，得另一种信号流图。

例 12.2.7 一个 LTI 系统有两个输入$e_1(t)$、$e_2(t)$和两个输出$r_1(t)$、$r_2(t)$，描述该系统的方程组为

$$\dot{r}_1(t)+2r_1(t)-3r_2(t)=e_1(t)$$

$$\ddot{r}_2(t)+3\dot{r}_2(t)+r_2(t)-2\dot{r}_1(t)=3e_1(t)$$

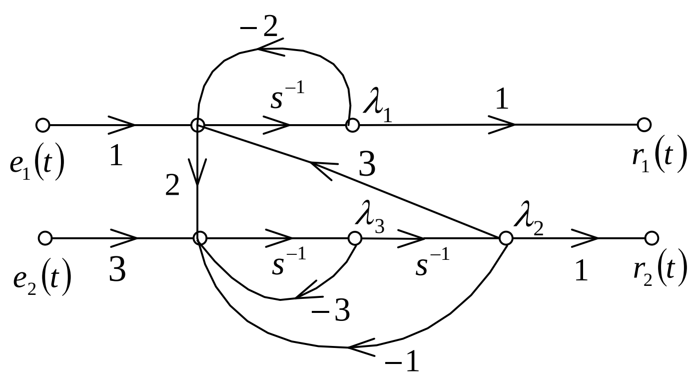
写出该系统的状态方程和输出方程。

解：将以上二式改写为

$$\dot{r}_1=-2r_1+3r_2+e_1$$

$$\ddot{r}_2=-3\dot{r}_2-r_2+2\dot{r}_1+3e_2$$

按上式令$\lambda_1=r_1$，$\lambda_2=r_2$，不难画出其信号流图如下图所示。



选各积分器（s^{-1}）输出端信号为状态变量，如图所示。可列出各积分器输入端信号为

$$\dot{\lambda}_1 = -2\lambda_1 + 3r_2 + e_1 \qquad (1)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_3 \qquad (2)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -3\lambda_3 - \lambda_2 + 2\dot{\lambda}_1 + 3e_2 \qquad (3)$$

将（1）式代入到（3）消去 $\dot{\lambda}_1$，得

$$\dot{\lambda}_3 = -4\lambda_1 + 5\lambda_2 - 3\lambda_3 + 2e_1 + 3e_2 \qquad (4)$$

（1）、（2）、（4）式就是该系统的状态方程，将它写为矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

系统的输出方程为

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

需要指出，同一个微分方程或系统函数，由于实现方法（如直接、级联、并联实现等）不同，其信号流图与框图也不同，因而所选的状态变量也将不同，其状态方程和输出方程也不相同。但是，它们的特征根、特征方程相同，所以对同一系统而言，其系统矩阵相似。

12.3 连续时间系统状态方程的求解

状态方程求解可以采用时域方法或变换域方法。

一、用拉普拉斯变换法求解状态方程

单边拉普拉斯变换是求解线性微分方程的有力工具，现在用它来解状态方程和输出方程。

设

$$\mathrm{L}\left[\lambda_i(t)\right] = \Lambda_i(s) \qquad i = 1, 2, \cdots, k$$

$$\mathrm{L}\left[\lambda(t)\right] = \mathrm{L}\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{L}\left[\lambda_1(t)\right] \\ \mathrm{L}\left[\lambda_2(t)\right] \\ \vdots \\ \mathrm{L}\left[\lambda_k(t)\right] \end{bmatrix} = \Lambda(s) \qquad k \text{ 维列矢量}$$

同样地

$$E(s)=\mathcal{L}\left[e(t)\right]=\mathcal{L}\begin{bmatrix}e_1(t)\\e_2(t)\\\vdots\\e_m(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathcal{L}\left[e_1(t)\right]\\\mathcal{L}\left[e_2(t)\right]\\\vdots\\\mathcal{L}\left[e_m(t)\right]\end{bmatrix}\qquad m\text{ 维列矢量}$$

$$R(s)=\mathcal{L}\left[r(t)\right]=\mathcal{L}\begin{bmatrix}r_1(t)\\r_2(t)\\\vdots\\r_r(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathcal{L}\left[r_1(t)\right]\\\mathcal{L}\left[r_2(t)\right]\\\vdots\\\mathcal{L}\left[r_r(t)\right]\end{bmatrix}\qquad r\text{ 维列矢量}$$

连续时间系统状态方程和输出方程的一般矩阵形式为：

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=A\lambda(t)+Be(t)$$

$$r(t)=C\lambda(t)+De(t)$$

$A_{k\times k}$ 系统矩阵　　　　$B_{m\times r}$ 控制矩阵

$C_{r\times k}$ 输出矩阵　　　　$D_{r\times m}$

以上四个矩阵是系数矩阵，对于 LTI 系统，它们都是常量矩阵。

定解条件还包括起始条件：

$$\lambda(0_-)=\begin{bmatrix}\lambda_1(0_-)\\\lambda_2(0_-)\\\vdots\\\lambda_k(0_-)\end{bmatrix}$$

1、状态方程的拉普拉斯变换

状态方程　　$\frac{d}{dt}\lambda(t)=A\lambda(t)+Be(t)$

对上式两端取拉普拉斯变换得

$$s\Lambda(s)-\lambda(0_-)=A\Lambda(s)+BE(s)$$

式中，$\lambda(0_-)$ 为起始条件

$$\lambda(0_-)=\begin{bmatrix}\lambda_1(0_-)\\\lambda_2(0_-)\\\vdots\\\lambda_k(0_-)\end{bmatrix}$$

移项整理得

$$(sI-A)\Lambda(s)=\lambda(0_-)+BE(s)$$

上式两端左乘$(sI-A)^{-1}$得

$$\Lambda(s)=(sI-A)^{-1}\lambda(0_-)+(sI-A)^{-1}BE(s)$$

定义：$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}$称为预解矩阵，也称为系统的特征矩阵。

则

$$\Lambda(s)=\Phi(s)\lambda(0_-)+\Phi(s)BE(s)$$

上式左端是状态矢量$\lambda(t)$的拉普拉斯变换，右端第一项是状态矢量的s域零输入解，第二项是状态矢量的s域零状态解。

用时域表示为

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=\mathrm{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\lambda(0_-)\right]+\mathrm{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}BE(s)\right]\\&=\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi(s)\lambda(0_-)\right]+\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi(s)BE(s)\right]\end{aligned}$$

第一项是状态矢量的零输入解，第二项是状态矢量的零状态解。

2、输出方程的拉普拉斯变换

输出方程　$r(t)=C\lambda(t)+De(t)$

对上式取拉普拉斯变换得

$$\begin{aligned}R(s)&=C\Lambda(s)+DE(s)\\&=C\left[(sI-A)^{-1}\lambda(0_-)+(sI-A)^{-1}BE(s)\right]+DE(s)\\&=C(sI-A)^{-1}\lambda(0_-)+\left[C(sI-A)^{-1}B+D\right]E(s)\\&=C\Phi(s)\lambda(0_-)+\left[C\Phi(s)B+D\right]E(s)\end{aligned}$$

上式右端第一项是零输入响应的像函数矩阵，第二项是零状态响应的像函数矩阵。

记　$R_{zs}(s)=\left[C(sI-A)^{-1}B+D\right]E(s)=\left[C\Phi(s)B+D\right]E(s)=H(s)E(s)$

式中　$H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=C\Phi(s)B+D$

$H(s)$是一个$r\times m$矩阵，称为系统函数矩阵。

$$H(s)=\begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1m}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{r1}(s) & H_{r2}(s) & \cdots & H_{rm}(s) \end{bmatrix}$$

矩阵中元素$H_{ij}(s)$是第i个输出分量对第j个输入分量的转移函数。

其物理意义为：

$$H_{ij}(s)=\left.\frac{\text{第}i\text{个输出}R_i(s)\text{中对第}j\text{个输入的响应}}{\text{第}j\text{个输入}E_j(s)}\right|_{\text{其它输入量都为零}}$$

零状态响应为

$$r_{zs}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[H(s)E(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[E(s)\right]=h(t)*e(t)$$

其中

$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right]$称为冲激响应矩阵。

例 12.3.1 某 LTI 系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

试求系统的特征矩阵$\Phi(s)$和冲激响应矩阵$h(t)$。

解：从状态方程和输出方程知：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}，\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}，\quad D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$sI-A=s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

其行列式和伴随矩阵分别为

$$|sI-A|=\begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix}=(s-1)(s+1)$$

$$(sI-A)^* = adj[sI-A] = \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

所以系统的特征矩阵（预解矩阵）为

$$\Phi(s) = [sI-A]^{-1} = \frac{adj[sI-A]}{|sI-A|} = \frac{1}{(s-1)(s+1)}\begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s-1)(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

系统函数矩阵为

$$H(s) = C\Phi(s)B + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s+1)(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-1} \\ 0 & -\frac{1}{s+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-1} \\ -\frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s}{s-1} & \frac{1}{s-1} \\ \frac{s}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

冲激响应矩阵为

$$h(t) = \mathrm{L}^{-1}[H(s)] = \begin{bmatrix} \delta(t)+e^{t} & e^{t} \\ \delta(t)-e^{-t} & 0 \end{bmatrix}$$

例 12.3.2 已知系统的状态方程与输出方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[e(t)]$$

$$[r(t)] = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$$

起始状态 $\begin{bmatrix}\lambda_1(0_-)\\ \lambda_2(0_-)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，激励$e(t)=u(t)$。

试求：（1）状态矢量$\lambda(t)$；

（2）响应$r(t)$；

（3）转移函数矩阵$H(s)$；

（4）单位冲激响应$h(t)$。

解：从状态方程和输出方程知：

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}，\quad B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}，\quad D=0$$

（1）求状态矢量$\lambda(t)$

$$sI-A=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+2 & -1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}$$

其行列式和伴随矩阵分别为

$$|sI-A|=\begin{vmatrix}s+2 & -1\\ 0 & s+1\end{vmatrix}=(s+2)(s+1)$$

$$(sI-A)^*=adj[sI-A]=\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}$$

所以预解矩阵为

$$\Phi(s)=[sI-A]^{-1}=\frac{adj[sI-A]}{|sI-A|}=\frac{1}{(s+2)(s+1)}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ 0 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

故得状态矢量的s域零输入解

$$=\Phi(s)\lambda(0_-)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

进而得状态矢量的时域零输入解$=\begin{bmatrix}e^{-t}u(t)\\ e^{-t}u(t)\end{bmatrix}$

状态矢量的s域零状态解

$$=\Phi(s)BE(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\frac{1}{2}}{s}-\frac{\frac{1}{2}}{s+2}\\ 0\end{bmatrix}$$

进而得状态矢量的时域零状态解

$$=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)\\ 0\end{bmatrix}$$

故得状态矢量为

$$\lambda(t)=\text{零输入解}+\text{零状态解}=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)\\ e^{-t}u(t)\end{bmatrix}$$

（2）求响应$r(t)$

$$\left[r(t)\right]=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}=\left(\frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

（3）转移函数矩阵为

$$H(s)=C\Phi(s)B+D=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{s+2}$$

（4）单位冲激响应为 $h(t)=e^{-2t}u(t)$

例 12.3.3 已建立状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}\lambda_1(t)\\ \frac{d}{dt}\lambda_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1(t)\\ e_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

起始状态为：$\begin{bmatrix} \lambda_1(0_-) \\ \lambda_2(0_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

输入矩阵（激励函数矩阵）为：$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix}$

用拉普拉斯变换法求状态矢量$\lambda(t)$、转移函数矩阵$H(s)$和响应$r(t)$。

解：

（1）求特征矩阵$\Phi(s)$

$$sI - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

其行列式和伴随矩阵分别为

$$|sI - A| = (s-1)(s+1)$$

$$adj(sI - A) = \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

所以特征矩阵$\Phi(s)$为

$$\Phi(s) = \frac{adj(sI - A)}{|sI - A|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s-1)(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

（2）求状态矢量$\lambda(t)$

$$\Lambda(s) = \Phi(s)\lambda(0_-) + \Phi(s)BE(s)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s-1)(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s-1)(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

取上式拉普拉斯逆变换得状态矢量的时域解

$$\lambda(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^t u(t)-u(t)\\ 0\end{bmatrix}$$

（3）求状态转移函数矩阵$H(s)$

$$H(s)=C\Phi(s)B+D$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s-1)(s+1)}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{s}{s-1} & \frac{1}{s-1}\\ \frac{s}{s+1} & 0\end{bmatrix}$$

（4）求输出矩阵$r(t)$

$$R(s)=C\Phi(s)\lambda(0_-)+H(s)E(s)$$

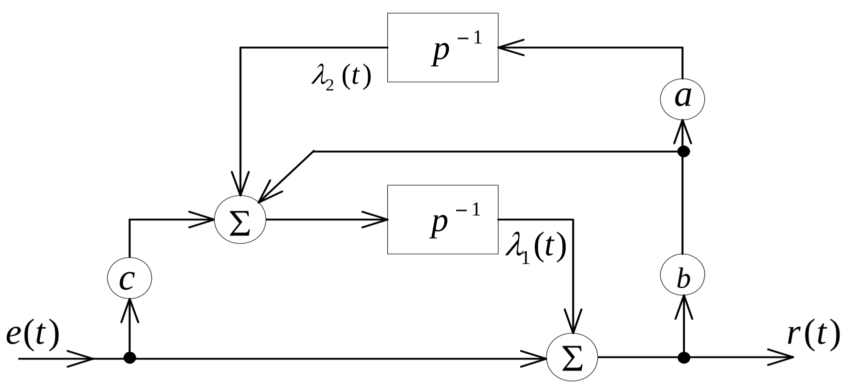
$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s-1)(s+1)}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{s}{s-1} & \frac{1}{s-1}\\ \frac{s}{s+1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{s}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{s-1}-\frac{1}{s}\\ 0\end{bmatrix}$$

所以

$$r(t)=\begin{bmatrix}r_1(t)\\ r_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^t u(t)-u(t)\\ 0\end{bmatrix}$$

例 12.3.4 如下图所示为模拟系统，取积分器输出为状态变量。



1、列写系统的状态方程和输出方程；

2、设 $\lambda_1(0_-)=0$，$\lambda_2(0_-)=0$，已知系统在单位阶跃信号 $e(t)=u(t)$ 作用下有

$$\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-t}-1\\ 3e^{-2t}-4e^{-t}+1\end{bmatrix}u(t)$$

求题图中 a，b，c 各参数。

解：1、列写状态方程

$$r(t)=\lambda_1(t)+e(t)$$

$$\dot{\lambda}_1(t)=br(t)+\lambda_2(t)+ce(t)=b\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+(b+c)e(t)$$

$$\dot{\lambda}_2(t)=abr(t)=ab\lambda_1(t)+abe(t)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1(t)\\ \dot{\lambda}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & 1\\ ab & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b+c\\ ab\end{bmatrix}e(t)$$

$$r(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}+e(t)$$

2、求系统的状态变量

因为 $(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s-b & -1\\ -ab & s\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{s^2-bs-ab}\begin{bmatrix}s & 1\\ ab & s-b\end{bmatrix}$

$$E(s)=\frac{1}{s}$$

$$\begin{bmatrix}\Lambda_1(s)\\ \Lambda_2(s)\end{bmatrix}=(sI-A)^{-1}\lambda(0_-)+(sI-A)^{-1}BE(s)$$

$$=\frac{1}{s^2-bs-ab}\begin{bmatrix}s & 1\\ ab & s-b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b+c\\ ab\end{bmatrix}\frac{1}{s}=\frac{1}{s(s^2-bs-ab)}\begin{bmatrix}(b+c)s+ab\\ abc+abs\end{bmatrix}$$

又根据题意得

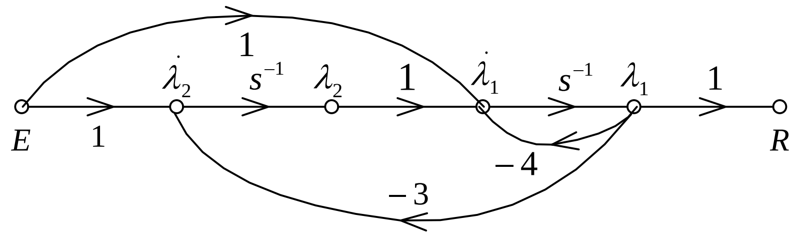
$$\begin{bmatrix}\Lambda_1(s)\\ \Lambda_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{3}{s+2}-\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s}\\ \dfrac{3}{s+2}-\dfrac{4}{s+1}+\dfrac{1}{s}\end{bmatrix}=\frac{1}{s(s^2+3s+2)}\begin{bmatrix}-4s-2\\ -2s+2\end{bmatrix}$$

比较以上两种结果可得

$$\begin{cases} b+c=-4 \\ -b=3 \\ -ab=2 \end{cases}$$

所以 $a=\dfrac{2}{3}$，$b=-3$，$c=-1$

例 12.3.5 设有一如下图所示的连续系统。



（1）列写系统的状态方程与输出方程；

（2）求系统的微分方程；

（3）系统在 $e(t)=u(t)$ 作用下，全响应为 $r(t)=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}e^{-t}-\dfrac{5}{6}e^{-3t}\right)u(t)$，求系统的零输入响应 $r_{zi}(t)$；

（4）求系统的单位冲激响应 $h(t)$。

解：（1）列写系统的状态方程与输出方程

取积分器的输出为状态变量，如图中所标，则有

$$\dot{\lambda}_1(t)=-4\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+e(t)$$

$$\dot{\lambda}_2(t)=-3\lambda_1(t)+e(t)$$

$$r(t)=\lambda_1(t)$$

表示成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e(t)$$

$$r(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$$

各系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\quad D=0$$

（2）系统函数为

$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=\frac{s+1}{s^2+4s+3}$$

所以系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+4\frac{d}{dt}r(t)+3r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+e(t)$$

（3）求系统的零输入响应 $r_{zi}(t)$

$$e(t)=u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{s}$$

$$R_{zs}(s)=H(s)E(s)=\frac{s+1}{s^2+4s+3}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s+3}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+3}$$

故零状态响应为

$$r_{zs}(t)=\frac{1}{3}\left(1-e^{-3t}\right)u(t)$$

所以，零输入响应为

$$r_{zi}(t)=r(t)-r_{zs}(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)u(t)$$

（4）求系统的单位冲激响应 $h(t)$

因为 $H(s)=\dfrac{s+1}{s^2+4s+3}=\dfrac{1}{s+3}$

所以 $h(t)=e^{-3t}u(t)$

本题中 $H(s)$ 有零极点相消现象。在求微分方程时，必须保留系统全部的零极点，这样才能保证系统的微分方程所应有的阶数。

12.4 系统的可控性与可观测性

系统的可控制性也称为能控制性，简称可控性或能控性。

系统的可观测性也称为能观测性，简称可观性或能观性。

可控性和可观性是现代控制理论中两个很重要的基本概念。在经典理论中，研究的对象是单变量系统，其输出与输入之间的关系是通过微分方程直接联系的，在这种情况下，被观测的量是输出，同时它也受输入的控制，而系统内部的其它状态都被掩盖了。

对于一个复杂的系统，特别是多输入多输出系统，利用状态变量分析法分析系统时，用状态方程和输出方程描述系统，这就揭示了系统的状态变化情况。系统的状态变量决定了系统内部各个大于起始时间的时刻的状态，从而决定了系统的运行情况。

状态方程描述了输入作用引起系统状态变化的情况，这就存在一个问题，输入对系统的全部状态是否都能控制，即系统能否在输入的作用下从某一状态转移到另一指定的状态，这就是可控制性问题。

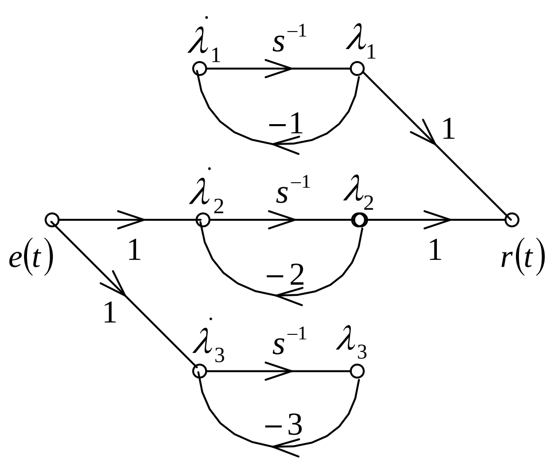
输出方程描述了状态变化引起输出变化的情况，那么，系统的输出能否反映全部状态的情况，即能否根据输出的观测值确定出系统的状态，这就是可观测性问题。

下面从一个典型实例直观认识可控性与可观性。

例 12.4.1 如下图所示系统，若选择 $\lambda_1(t)$、$\lambda_2(t)$、$\lambda_3(t)$ 为状态变量。

（1）建立该系统的状态方程和输出方程；

（2）判断系统可控性和可观性。



解：（1）由图可列写出状态方程

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1(t)=-\lambda_1(t)\\ \dot{\lambda}_2(t)=-2\lambda_2(t)+e(t)\\ \dot{\lambda}_3(t)=-3\lambda_3(t)+e(t)\end{cases}$$

输出方程

$$r(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1(t)\\ \dot{\lambda}_2(t)\\ \dot{\lambda}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \lambda_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}e(t)$$

$$r(t)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \lambda_3(t)\end{bmatrix}$$

各系数矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad D=0$$

（2）根据状态方程和输出方程可知：

$\lambda_2(t)$直接受$e(t)$控制，而且可从$r(t)$观测到它的变化情况，所以，它既可控又可观。

$\lambda_1(t)$不受$e(t)$作用的影响，所以是不可控的；但可从输出$r(t)$了解到它的变化，所以是可观测的；

$\lambda_3(t)$受$e(t)$的控制，是可控的；但不能从$r(t)$观测其变化，是不可观的。

结论：$\lambda_1(t)$是不可控的、可观的，$\lambda_3(t)$是可控的、不可观的，$\lambda_2(t)$既可控又可观；整个系统是不完全可控的，也是不完全可观的。

一、系统可控性

1、系统可控性定义

可控制性问题涉及一个线性系统的输入能在多大程度上影响该系统内部状态的行为；或者说，从系统的初始状态出发，在有限时间内，利用某种输入控制函数$e(t)$，能够控制到状态空间的哪一部分。

可控性定义：当系统用状态方程描述时，给定系统的任意初始状态，可以找到容许的输入量（即控制矢量），在有限时间之内把系统的所有状态引向状态空间的原点（即零状态），如果可以做到这一点，则称系统是完全可控制的。

如果只有对部分状态变量可以做到这一点，则称系统不完全可控制的。即：一个系统中如果只有部分状态可控制，而另有一部分状态不可控制，则称此系统是不完全可控制的。

2、可控阵M满秩判别法

矩阵$M=\left[B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \cdots \vdots A^{k-1}B\right]$称为系统的可控性判别矩阵，简称可控阵。

系统完全可控的充要条件：在给定系统状态方程时，只要可控阵M满秩，则系统完全可控。

例 12.4.2 若 LTI 系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1(t)\\ \dot{\lambda}_2(t)\\ \dot{\lambda}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \lambda_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}e(t)$$

$$r(t)=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \lambda_3(t)\end{bmatrix}$$

试判断系统的可控性。

解：从状态方程和输出方程知各系数矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}，\quad B=\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\end{bmatrix}，\quad D=0$$

因为系统阶数$k=3$，构建可控性判别矩阵M 如下：

$$M=\left[B\vdots AB\vdots A^2B\right]$$

$$\because \quad B=\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -6\\ -2\end{bmatrix}$$

$$A^2B=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4 & 3\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\ -18\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad M=\begin{bmatrix}2 & 1 & 13\\ -2 & -6 & -18\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

又$\because$ $$|M|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 13\\ -2 & -6 & -18\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=0$$

$\therefore$ M 矩阵不满秩，系统不完全可控。

二、系统可观性

1、系统可观性定义

可观测性问题涉及一个线性系统的状态能在多大程度上影响该系统的输出。能够影响输出的状态都能在输出端观测到。

可观性定义：如果系统用状态方程来描述，在给定控制后，能在有限时间间隔内（$0<t<t_1$）根据系统输出唯一地确定系统的所有起始状态，则称系统完全可观；若只能确定部分起始状态，则称系统不完全可观。即：一个系统中如果只有部分状态可观测，而另有一部分状态不可观测，则称此系统是不完全可观测的。

2、可观阵 N 满秩判别法

矩阵 $N=\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ CA \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$ 称为系统的可观性判别矩阵，简称可观阵。

系统完全可观的充要条件：在给定系统状态方程时，只要可观阵 N 满秩，则系统完全可观。

例 12.4.3 若 LTI 系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

$$r(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix}$$

试判断系统的可观性。

解：从状态方程和输出方程知各系数矩阵为：

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}，\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}，\ D = 0$$

因为系统阶数 $k=3$，构建可观性判别矩阵 N 如下：

$$N = \begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ CA \\ \cdots \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$\because \quad C=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\end{bmatrix}$

$$CA=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$CA^2=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}^2==\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$\therefore \quad N=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$

又$\because \quad |N|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$

$\therefore \quad N$ 矩阵不满秩，系统不完全可观。

例 12.4.4 给定线性时不变系统的状态方程和输出方程

$$\dot{\lambda}(t)=A\lambda(t)+Be(t)$$

$$r(t)=C\lambda(t)$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

试检查该系统的可控性和可观性。

解：按系统可控性判据，判断 M 是否满秩。为此求

$$M=\left(B \vdots AB \vdots A^2B\right)$$

$$AB=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ -4\end{bmatrix}$$

$$A^2B=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10\\ 4\\ -7\end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix}0 & 1 & -10\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & -4 & -7\end{bmatrix}$$

因为$rankM=3$，所以该系统完全可控。

检查可观性，判断N是否满秩。求得

$$N=\begin{bmatrix}C\\ \cdots\\ CA\\ \cdots\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 3 & -4 & 2\end{bmatrix}$$

此式的第 3 列乘以（－2）等于第 2 列。因而$rankN=2\neq 3$，即N不是满秩的，故系统不完全可观。