Université Lille 1 **U.F.R. de Mathématiques**

M1 ingé
TIAD **Année 2019–2020**

Fiche 6: Put et Call

Exercice 1 : Put et Call

Le call C (prix d'une option d'achat) et le put P (prix d'une option de vente) à échéance d'un an sont donnés par les formules :

$$C = \mathbb{E}[S_0 e^{\sigma N - \sigma^2/2 + r} - K]_+ \quad \text{et} \quad P = \mathbb{E}[K - S_0 e^{\sigma N - \sigma^2/2 + r}]_+$$

où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, S_0 est le prix du sous-jacent (ce que l'on veut acheter, une action ou des devises par exemple), $K > 0$ le prix d'exercice, c'est à dire le prix où on veut vendre ou acheter le sous-jacent dans un an, $r > 0$ le taux d'intérêt instantanné et $\sigma > 0$ la volatilité.

1) Si $\sigma = 0$, le prix de la devise ou de l'action n'est pas aléatoire. Dans un an, il vaudra $S_0 e^r$. Que valent C et P dans ce cas ?
2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathbb{E}e^{aN}$ et Var $\left(e^{aN}\right)$.

   Solution: $\mathbb{E}\exp(aN) = e^{a^2/2}$, $\mathrm{Var}\left(\exp(AN)\right) = \mathbb{E}\exp(2aN) - (\mathbb{E}\exp(aN))^2 = e^{2a^2} - e^{a^2}$.

3) Soit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Calculer en fonction de ϕ où ϕ est la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. $\mathbb{E}[e^{aN} - b]_+$ et $\mathbb{E}[b - e^{aN}]+$.

   Solution: On a que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{aN} - b]_+ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ax} e^{-x^2/2} - b e^{-x^2}\right) \mathbf{1}_{x \geq \ln(b)/a}/2dx \\
&= \int_{\ln(b)/a}^{+\infty} \frac{e^{-(x-a)^2/2} e^{a^2/2} - b e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_{\ln(b)/a - a}^{\infty} \frac{e^{a^2/2} e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy - b \int_{\ln(b)/a}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= e^{a^2/2} \left(1 - \phi\left(\frac{\ln(b)}{a} - a\right)\right) - b\left(1 - \phi\left(\frac{\ln(b)}{a}\right)\right) \\
&= e^{a^2/2} \phi\left(a - \frac{\ln(b)}{a}\right) - b\phi\left(-\frac{\ln(b)}{a}\right)
\end{aligned}$$

   et

$$\mathbb{E}[b - e^{aN}]_+ = b\phi\left(\frac{\ln(b)}{a}\right) - e^{a^2/2} \phi\left(\frac{\ln(b)}{a} - a\right)$$

4) En déduire C et P.

Solution:

$$C = S_0 e^r \left(1 - \phi\left(\ln(K/S)/\sigma - r/\sigma - \sigma/2\right)\right) - K\left(1 - \phi\left(\ln(K/S_0)/\sigma - r/\sigma + \sigma/2\right)\right)$$

$$P = K\phi\left(\ln(K/S_0)/\sigma - r/\sigma + \sigma/2\right) - S_0 e^r \phi\left(\ln(K/S)/\sigma - r/\sigma - \sigma/2\right)$$

5) que vaut $C - P$?

Solution: $S_0 e^r - K$.

6) Que valent C et P si $K = S_0 e^r$? Vers quoi tend cette quantité si $\sigma \to 0$? Si $\sigma \to \infty$?

Solution: Si $K = S_0 e^r$: $P = C = S_0 e^r(\phi(\sigma/2) - \phi(-\sigma/2))$. Tend vers 0 ou vers $S_0 e^r$.

7) On pose maintenant $K = S_0 e^{r+\sigma^2/2}$. Que valent C et P ? Montrer que

$$C = S_0 e^r (\phi(\sigma) - 1/2).$$

Comment se comportent ces quantités si $\sigma \to 0$? Si $\sigma \to \infty$?

Solution:
Si $K = S_0 e^{r+\sigma^2/2}$: $C = S_0 e^r (1/2 - e^{\sigma^2/2}(1 - \phi(\sigma))$ et $P = S_0 e^r (e^{\sigma^2/2}\phi(\sigma) - 1/2)$. On a que $e^{x^2/2}\phi(-x) = 1/2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}$. On obtient donc : $C = S_0 e^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}$. Le put tend vers l'infini, le call tend vers 0.

8) On pose $K = S_0 e^{r-\sigma^2/2}$. Calculer P et C (on donnera l'expression exacte de P).

Solution: Si $K = S_0 e^{r-\sigma^2/2}$: $C = S_0 e^r (\phi(\sigma) - e^{-\sigma^2/2}/2$ et $P = S_0 e^r e^{-\sigma^2/2}/2 - S_0 e^r \phi(-\sigma)$. $K = S_0 e^r e^{-\sigma^2/2}/(\sqrt{2\pi}\sigma)$ Le call tend vers l'infini, le put tend vers 0 (plus vite même que précédemment).

Exercice 2 : Calcul du put et du call.

1) On fixe pour l'instant $S = 1$ et $r = 0$. Écrire deux fonctions `call` et `put` qui calculent le put et le call en fonction de σ et de K.
2) Tracer l'évolution du call et du put en fonction du taux d'intérêt instantanné lorsque $K = 1$, puis lorsque $K = e^{\sigma^2/2}$ et lorsque $K = e^{-\sigma^2/2}$. Pour chaque cas, n fera varier σ de 0 à 1. Que remarque-t-on ?

Exercice 3 : Loi des grands nombres

Pour éviter de devoir calculer $\phi(x)$ très précisément, on peut utiliser une méthode de Monte-Carlo. Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On note $Y_i = [e^{\sigma X_i - \sigma^2/2} - K]_+$ et $Z_i = [K - e^{\sigma X_i - \sigma^2/2}]_+$. D'après la loi des grands nombres, on a que

$$\bar{Y}_n \to C \quad \text{et} \quad \bar{Z}_n \to P$$

On peut donc calculer des valeurs approchées de C et de P de cette façon.

1) Créer une fonction `rcallput` qui simule n réalisations de couples (Y_i, Z_i).
2) Simuler $n = 1000$ réalisations de $(Y_1, \dots, Y_n)$ et de $(Z_1, \dots, Z_n)$ pour $\sigma = 1$ et $K = 1$.
3) Calculer les moyennes partielles

$$\bar{Y}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Y_i$$

pour m variant de 1 à 10000. **Indication:** : Construire d'abord le vecteur des 10000 premiers entiers.
Utiliser ensuite la fonction `cumsum` et utiliser le vecteur que l'on vient de construire pour la division.
4) Représenter sur un graphique (commande `plot`) l'évolution de $\bar{Y}_m$ en fonction de m. On ne tracera pas les points, la courbe obtenue serait trop grosse.
5) Superposer la valeur calculée du call C. Qu'observe-t-on ? Répéter l'expérience.
6) Faire la même chose avec le put P et les Z_i.
7) Que se passe-t-il si $\sigma = 3$ et $K = 1$? $\sigma = 0.1$ et $K = 1$? $\sigma = 1$ et $K = 1,2$? $\sigma = 1$ et $K = 0.8$?
8) Le put et le call sont liés par une formule simple. Il suffit donc d'estimer l'un d'entre eux. Calculer les variances empiriques et dire pour chaque cas s'il vaut mieux estimer le put ou le call.
9) Dans le cas $k = 1$, $\sigma = 1$, pour quelles valeurs de X a-t-on $Y = 0$ ou $Z = 0$? Est-ce que cela explique la différence entre les variances ?

   Solution: Y est positif si $x \geq \sigma/2$ alors que X est positif si $X \leq \sigma/2$.

Exercice 4 : Convergence en loi
On fixe $m = 1000$, $n = 100$. On note toujours $Y_i = [e^{\sigma X_i - \sigma^2/2} - K]_+$ et $Z_i = [K - e^{\sigma X_i - \sigma^2/2}]_+$. Pour cet exercice, on fixe $\sigma = 1$, $r = 0$ et $K = 1$.

1) Simuler $m \times n$ vecteurs Y_i. Les stocker dans une matrice Y à m lignes et n colonnes.
2) Construire le vecteur y tel que :

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} y_{i,j}$$

Le vecteur y est un vecteur de m lignes. Chaque coordonnée du vecteur est la moyenne d'une ligne de la matrice Y.
3) Faire la même chose en remplaçant les Y_i par Z_i.
4) Que donne la commande `qqnorm(y)` puis `qqline(y)` ? Est-ce que c'était prévisible théoriquement ? Que représentent l'intersection à l'origine et la pente de la droite ? Représenter en dessous le diagramme quantile/quantile du vecteur z.

5) Tracer l'histogramme de y : `hist(y,20,freq=FALSE,border='red')`
6) Sur le même graphique, ajouter la densité de la loi adaptée. On pourra simplement estimer la variance.
7) Représenter en dessous l'histogramme du vecteur z. On tracera l'histogramme en rouge.
8) Donner un intervalle de confiance approché à 95% pour estimer C et P lorsque $S = 1, r = 0, \sigma = 1, K = 1$ et qu'on simule 100 données.

   Solution: 0.38 ± 0.06 pour le put, 0.38 ± 0.2 pour le call.

Exercice 5 : Méthode de Monte-Carlo et réduction de la variance
On veut estimer le call C lorsque $r = 0, S = 1, K = 1, \sigma = 1$ par une méthode de Monte-Carlo. Pour cela, on va regarder comment les différentes méthodes vues en cours permettent de diminuer la variance.

1) Créer une fonction I qui étant donné un vecteur de n réalisations de X $x = (x_1, \dots, x_n)$, renvoie l'intervalle de confiance à 95% sur $\mathbb{E}X$.
2) Simuler 1000 réalisations de Y_i. Calculer l'intervalle de confiance obtenu.
3) Proposer une variable de contrôle très simple pour le call. Simuler 1000 réalisations en suivant cette méthode. Calculer l'intervalle de confiance obtenu.

Échantillonage préférentiel

4) On veut calculer

$$P = e^{-\sigma^2/2} \int_{\mathbb{R}} [Ke^{\sigma^2/2} - e^{\sigma x}]_+ \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$
$$= e^{-\sigma^2/2} \int_0^\infty ([Ke^{\sigma^2/2} - e^{\sigma x}]_+ + [Ke^{\sigma^2/2} - e^{-\sigma x}]_+) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

   Cette fonction est positive. On va essayer de remplacer les variables aléatoires X par des variables aléatoires V positives. On fait le changement de variable $y = x^2$. On obtient :

$$P = e^{-\sigma^2/2} \int_0^\infty (\frac{[Ke^{\sigma^2/2} - e^{\sigma\sqrt{x}}]_+ + [Ke^{\sigma^2/2} - e^{-\sigma\sqrt{x}}]_+)}{\sqrt{2\pi x}} \frac{e^{-x/2}}{2} dx$$

   Soit $V \sim \mathcal{E}(1/2)$, alors

$$P = \mathbb{E} \frac{[K - e^{\sigma\sqrt{V} - \sigma^2/2}]_+ + [K - e^{-\sigma\sqrt{V} - \sigma^2/2}]_+)}{\sqrt{2\pi V}}$$

   Simuler 1000 réalisations de V et calculer l'intervalle de confiance obtenu pour P. Est-ce que l'intervalle de confiance est meilleur ?

variables antithétiques

5) Étudier la monotonie de $f(x) = [k - e^{\sigma x - \sigma^2/2}]$.

6) Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Proposer une transformation T décroissante telle que $T(X) \sim \mathcal{N}(0,1)$.

7) Expliquer comment calculer plus efficacement P par une méthode de Monte-Carlo.

8) Simuler un estimateur de P grâce à cette méthode. La taille de l'intervalle de confiance a-t-elle diminué ?