大学物理第十四章学习笔记

by zijeff

14.1 电磁感应的基本定律

- **电磁感应现象**：不论是用什么方法，只要使得闭合线圈中的**磁通量**发生变化，线圈中就会出现**感应电流**。感应电流的出现，说明回路中有电动势的存在，这种电动势被称为**感应电动势**。
- **楞次定律**：闭合回路中**感应电流的方向**，总是使得感应电流所激发的磁场**阻碍**引起感应电流的**磁通量变化**。
- **法拉第电磁感应定律**：不论是什么原因，只要使得穿过导体回路中的磁通量发生变化，回路中就会有感应电动势的产生，其大小与通过该回路的磁通量的变化率成正比。在国际单位制下，其数学表达式为：

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

> ⓘ Note
>
> 上述公式里的**负号**体现的是楞次定律中的**阻碍作用**。所以在实际解决问题的时候，我们可以先确定回路的**绕行正方向**，根据计算出的结果的正负来判断电动势的方向。或者直接先计算电动势的**数值大小**，再利用**楞次定律**直接判断其**实际方向**。

应该明确的是，如果构成回路的不是导体，则**不存在感应电动势**，但$\frac{d\Phi}{dt}$仍可能存在。换句话说，**感应电动势只能存在于导体或导体回路中**。

如果导体回路由N匝线圈构成，显然通过每一圈的磁通量均相等，则总感应电动势为：

$$\varepsilon=-N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}(N\Phi)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

式中，$\Psi=N\Phi$称为**磁链**。

如果闭合回路电阻为R，则回路中的总感应电流为：

$$I_i=\frac{\varepsilon_i}{R}=-\frac{N}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

利用$I=\frac{dq}{dt}$，可得在从t_1至t_2时间内通过导线上任一横截面的感应电荷量为：

$$q=\int_{t_1}^{t_2}I_i\mathrm{d}t=-\frac{1}{R}\int_{\Psi_1}^{\Psi_2}\mathrm{d}\Psi=\frac{1}{R}(\Psi_1-\Psi_2)=\frac{N}{R}(\Phi_1-\Phi_2)$$

式中的Φ_1,Φ_2分别是t_1,t_2时刻通过**导线回路所围面积**的磁通量。

> 💡 Tip
>
> 比较上述式子可知：**感应电流**与回路中磁通量的变化率**有关**，而通过导线横截面的**感应电荷**与磁通量的变化率**无关**。

14.2 动生电动势

动生电动势是指：在恒定磁场中，导体回路或一段导线相对于磁场运动产生的感应电动势。

我们首先假设一个最简单的动生电动势情景。在均匀磁场B中有一个矩形导体滑轨，磁场方向垂直纸面向里，长度为l的导线AB在滑轨上以速度$\boldsymbol{v}$向右做**匀速直线运动**，始终与导轨保持良好接触，速度方向与导线AB垂直。

显然，由高中学的知识，我们可以很容易得到产生的**动生电动势**大小，为：

$$\varepsilon = Blv$$

再使用一下**楞次定律**，可以判断感应电流方向为逆时针。但是，我们应该思考这样的**两个问题**：该感应电动势存在于回路的哪个部分？产生该动生电动势的非静电力是什么？

显然，该电动势只存在于相对于磁场有相对运动的导线AB上，而在其他三段导线上没有。这是因为，当导线AB段以速度$\boldsymbol{v}$向右做匀速直线运动时，导线内的自由电子收到**洛伦兹力**的作用，产生了定向移动。

单个电子受到的洛伦兹力为：

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

所以作用于**单位正电荷**的洛伦兹力为：

$$\boldsymbol{E_k} = \frac{\boldsymbol{F}}{-e} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

再根据**电动势的定义**，AB上的动生电动势等于把单位正电荷沿着导线从$A \to B$时，非静电力所做的功，即：

$$\varepsilon = \int_A^B (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^l vB\mathrm{d}l = Blv$$

上述推导出的动生电动势的**大小**和**方向**与我们用法拉第电磁感应定律得到的结果**一致**，说明**产生动生电动势的非静电力就是洛伦兹力**。

更一般地，磁场可以不均匀，导线上各部分的运动速度也可以不相同。所以在具体计算动生电动势的时候，首先在导线上任取一个以速度$\boldsymbol{v}$移动的线元$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，则该**线元**产生的**动生电动势**为：

$$\mathrm{d}\varepsilon = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

所以整个导线上的**动生电动势**即为对这根导线的线积分：

$$\varepsilon = \int_L \mathrm{d}\varepsilon = \int_L (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

> **Important**
>
> 值得注意的是，动生电动势的**方向**由ε的**符号**所确定。当$\varepsilon > 0$，方向与$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$的方向（**积分方向**）相同；当$\varepsilon < 0$，方向相反。

> 此外确定动生电动势的方向也可以用我们**高中学过的右手定则**来判断，这里便不过多赘述。

14.3 感生电动势和感生电场

当导体回路静止不动时，仅仅是因为磁场变化所产生的感应电动势，我们将这种电动势称为**感生电动势**。

随时间变化的磁场在其周围空间要激发一种电场，这种电场称为**感生电场**，或称**涡旋电场**，从而我们可以解释**产生感生电动势的非静电力就是感生电场力**。

若用符号E_i表示变化的磁场所激发的感生电场的电场强度。根据电动势的定义，在一段长为$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$的**导体棒元**上的感生电动势为：

$$\mathrm{d}\varepsilon_i = \boldsymbol{E_i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

其方向就是感生电场$\boldsymbol{E_i}$在长为$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$的**导体棒元**上的投影方向，于是一段导线ab上的感生电动势为：

$$\varepsilon_i = \int \mathrm{d}\varepsilon_i = \int_a^b \boldsymbol{E_i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

那对于一个闭合回路L，回路内的感生电动势为：

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \oint_L \boldsymbol{E_i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

由于磁通量$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，同时考虑回路$L$及其所围的曲面静止不动，即**不随时间的变化而变化**，将其代回上面的式子中：

$$\oint_L \boldsymbol{E_i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

式中的S是以闭合曲线L为周界的**任意曲面**，曲面S的法线正方向与回路L的绕行方向成**右手螺旋关系**。上式给出了感生电场与磁感应强度对时间的变化率$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$之间的**积分关系**，同时揭示了感生电场的一个重要性质：**感生电场是保守力场**。

> **Note**
>
> 对于上面这个式子的理解如下：
>
> 首先，我们已知$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \oint_L \boldsymbol{E_i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$和$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，我们的目标是将后式带入前式中。
>
> 所以我们来思考磁通量对时间的变化率，这个变化可能有两种来源：
>
> - 磁场本身随时间变化，同时磁感应强度通常与空间位置相关，即$B(\boldsymbol{x}, t)$，其中$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$代表在$n$维空间下的位置坐标。
> - 积分区域随时间变化，即回路$L(t)$或曲面$S(t)$随时间运动或变形。

> 综上所述的两种变化原因，同时注意考虑回路L及其所围的曲面静止不动，意味着第二个变化原因对磁通量对时间的变化率不起作用，所以我们只需要考虑第一个原因，最后我们得到了如下式子：
>
> $$\oint_L \boldsymbol{E_i}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

结合我们前面的论述，我们引入了感生电场，那么感生电场具有哪些性质，与我们之前学习的**由静电荷产生的静电场性质**有何不同呢？

静电场的性质是由静电场的环路定理和高斯定理所描述，即对于静电场总有下面两个式子成立：

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0}$$

从上面两个式子可知：静电场是有源的保守力场，静电场的电场线从正电荷开始，止于负电荷，不会形成闭合回路。

而感生电场是由变化的磁场所激发产生的，与静电荷无关，它的性质满足如下两式：

$$\oint_L \boldsymbol{E_i}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oint_S \boldsymbol{E_i}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

上述两式表明：感生电场为无源的非保守力场，所以感生电场的电场线都为闭合曲线。正因如此，感生电场又被称为**涡旋电场**。

感生电场与静电场唯一的相同点在于对电荷的作用规律相同，即两种电场力均可以用$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$来表示。

14.4 自感与互感

- **自感电动势与自感**

  自感现象是指通过线圈的电流发生变化时，引起穿过线圈自身回路的的磁通量发生变化，由此产生的电磁感应现象成为**自感现象**，对应的电动势成为**自感电动势**。

  假设线圈的匝数为N，线圈中的电流为I，由毕奥-萨伐尔定律可知，该电流在空间任意一点产生的磁感应强度B的大小都与I成正比，因此穿过线圈自身回路所围面积的磁通量Φ与磁链Ψ也与I成正比，即：

  $$\Psi = LI$$

  式中L为比例系数，称为**自感系数**，简称自感（值得注意的是，在电工，电子技术中，常把线圈的自感称为电感）。上式还可改写为：

$$L=\frac{\Psi}{I}$$

它表明，**线圈的自感（或电感）在数值上等于线圈中的电流为1个单位时，该电流产生的磁场穿过自身线圈的磁链**。

根据法拉第电磁感应定律，线圈中的自感电动势为：

$$\varepsilon_L=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=-\frac{L\mathrm{d}I+I\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

如果线圈回路的形状，大小，匝数和线圈内介质的磁导率均不随着时间变化，则L为一常量，$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=0$，因而：

$$\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

上式表明：一个给定的**线圈的自感在数值上还等于当线圈中的电流随时间变化率为1个单位时，在自身线圈中产生的自感电动势**。

> **Tip**
>
> 上式中的负号是楞次定律的数学表示，它表示自感电动势总是要反抗线圈中电流的变化。

- **自感的计算**

  一般来说，线圈的自感与线圈的形状，大小，匝数以及线圈内介质的磁导率有关，当上述参量给定后，线圈的自感也就随之确定了，与**线圈是否通电无关**。通常，线圈自感大小由实验测出，只是在某些简单情况下，才可以通过定义来计算。

- **互感电动势与互感**

  若有两个邻近的线圈1和线圈2，当线圈1中的电流I_1变化时，引起穿过**线圈2**回路的的磁通量发生变化，由此产生的电磁感应现象成为**互感现象**，对应的电动势成为**互感电动势**。

  显然，与自感现象类似，由毕奥-萨伐尔定律可知线圈1电流产生的磁场分布为$\boldsymbol{B_1}$与电流I_1成正比，所以它通过线圈2的磁通量Φ_{21}以及磁链Ψ_{21}均与电流I_1成正比，即：

$$\Psi_{21}=M_{21}I_1$$

  反之，从线圈2的角度出发考虑，得到的结论一致：

$$\Psi_{12}=M_{12}I_2$$

  上两式中M_{21}和M_{12}均为比例系数，分别称为线圈1对线圈2的互感系数和线圈2对线圈1互感系数。理论和实验都表明，M_{21}和M_{12}的大小相等，可以用统一的符号M表示，称为两个线圈之间的**互感系数**，简称为**互感**。于是，两线圈之间**互感系数**的定义为：

$$M=\frac{\Psi_{12}}{I_2}=\frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

  上式表明，两线圈之间的**互感在数值上等于当其中一个线圈的电流为1个单位时，它在另一个线圈中产生的磁链**。

此外由法拉第电磁感应定律可知互感电动势为：

$$\varepsilon_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$
$$\varepsilon_{12} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{12}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

由此可得互感系数的**另一种定义**为：

$$M = -\frac{\varepsilon_{21}}{\mathrm{d}I_1/\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon_{12}}{\mathrm{d}I_2/\mathrm{d}t}$$

此定义表明，**两个线圈的互感在数值上还等于当其中一个线圈中的电流随时间的变化率为1个单位时在另一个线圈中所产生的互感电动势的大小**。

- **互感的计算**

  与自感类似，只有在某些简单情况下可以**通过定义估算**，除此之外只能利用**实验测定**。

14.5 磁场的能量

- **线圈中的自感磁能**

  在电场中，我们知道是电容器存储了电能，电场的能量存在于充电电容器产生的电场中。而在磁场中，存储能量的原件是线圈。

  考虑一个含有电阻R和线圈L的电路，由于自感现象的存在，当闭合开关后，回路中的电流是逐渐增大到一个稳定的值。我们设线圈自感系数为L，电源电动势为ε，立刻有如下分析。

  考虑自感电动势后，回路中电动势为：

$$\varepsilon + (-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t})$$

  有闭合回路欧姆定律可得：

$$\varepsilon + (-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}) = IR$$

  经过代数变形后得：

$$\varepsilon I\mathrm{d}t = LI\mathrm{d}I + I^2R\mathrm{d}t$$

  等式两边对时间$0 \to t$，电流$0 \to I$积分得：

$$\int_0^t \varepsilon I\mathrm{d}t = \frac{1}{2}LI^2 + \int_0^t I^2R\mathrm{d}t$$

  这个等式左边是电源这段时间内提供得总能量，等式右边的$\int_0^t I^2R\mathrm{d}t$是这段时间内电阻所产生的焦耳热，而$\frac{1}{2}LI^2$则是转化为了线圈内所存储的能量。由此可见，对一个自感为L的线圈通以大小为I的电流时，线圈内部存储的能量为：

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

这个公式被称为线圈的**自感磁能公式**，形式上与电容器储能公式类似。

- **磁场的能量和能量密度**

  我们知道，磁场的性质是用磁感应强度$\boldsymbol{B}$来表示的，既然如此，通电线圈中的能量问题也应该与$\boldsymbol{B}$密切相关。我们接下来以长直螺线管为例，讨论磁场能量问题。

  当长直螺线管通以电流$\boldsymbol{I}$时，螺线管中磁场的磁感应强度为$B = \mu nI$，自感系数为$L = \mu n^2V$，将其全部带入**自感磁能公式**。

$$W_m = \frac{1}{2}(\mu n^2 V)(\frac{B}{\mu n})^2 = \frac{B^2}{2\mu}V$$

  从上述公式可导出单位体积内的磁场能量——**磁场的能量密度**为:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu}$$

  对于各向同性的磁介质而言，又有$B = \mu H = \mu_0\mu_r H$，所以上式等价于:

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}HB$$

  虽然上式是通过长直螺线管这一特例导出的，但是经过证明，上式对于任意磁场均适用。

  同时我们还可以得到求解**磁场能量的微分形式**:

$$\mathrm{d}W_m = w_m \mathrm{d}V$$

  所以求解一个给定体积内的磁场能量问题，只需要对上式积分即可。