Existenz und Eindeutigkeit

der Lösungen von Anfangswertproblemen

Zijian Wang

Hauptseminar Numerik
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
29. April 2021

Motivation

- Gewöhnliche Differentialgleichungen zur Modellierung von naturwissenschaftlichen Prozessen:

$$L \cdot \ddot{Q} + \frac{1}{C} Q = 0$$

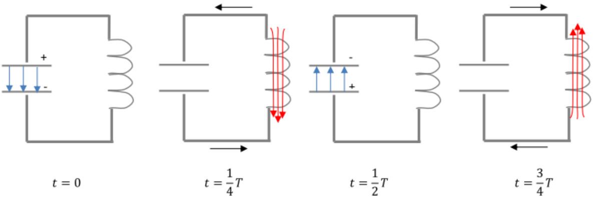


Abbildung: Elektromagnetischer Schwingkreis

- Bei neuartigen Phänomenen: Modellannahme richtig?
  $\rightarrow$ Frage nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Übersicht

Definition Anfangswertproblem

Definition

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $(t_0, x_0) \in \Omega$. Wir nennen

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

ein *Anfangswertproblem*.

Zeitvariable $t \in \mathbb{R}$, Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^d$, erweiterter Zustandsraum Ω.

Eine *Lösung des Anfangswertproblems* auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in J$ ist eine Abbildung $x \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$ derart, dass

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in J \quad \text{und} \quad x(t_0) = x_0.$$

Maximale Fortsetzbarkeit von Lösungen

Definition

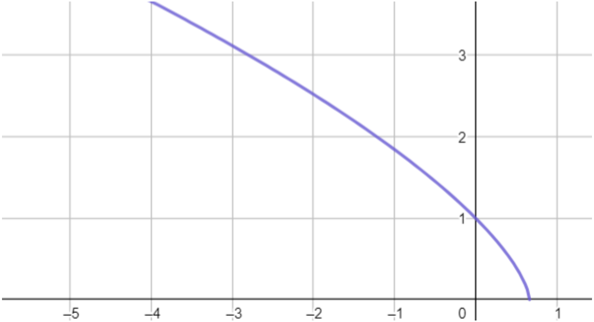
Eine Lösung $x \in C^1([t_0, t_1), \mathbb{R}^d)$ des Anfangswertproblems heißt *in der Zukunft bis an den Rand von Ω fortsetzbar*, wenn es eine Fortsetzung $x^* \in C^1([t_0, t_+), \mathbb{R}^d)$ von x mit $t_1 \leq t_+ \leq \infty$ gibt, sodass x^* ihrerseits Lösung ist und einer der drei folgenden Fälle vorliegt:

1. $t_+ = \infty$
2. $t_+ < \infty$ und $\lim\limits_{t \uparrow t_+} |x^*(t)| = \infty$
3. $t_+ < \infty$ und $\lim\limits_{t \uparrow t_+} \operatorname{dist}((t, x^*(t)), \partial\Omega) = 0$

Eine solche Lösung x^* bezeichnen wir als *maximal fortgesetzt*, denn sie lässt sich nicht als Lösung für $t \geq t_+$ fortsetzen.

Maximal fortgesetzte Lösung - Beispiel zum 3. Fall

- Die Lösung „kollabiert“ nach endlicher Zeit am Rand von Ω:
  $t_+ < \infty$ und $\lim_{t \uparrow t_+} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial\Omega) = 0$
- Beispiel: $x' = -x^{-1/2}$, $x(0) = 1$
  $\Rightarrow f(t, x) = -x^{-1/2}$ höchstens auf $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ definiert
- Lösung: $x(t) = (1 - 3t/2)^{2/3}$ für $t \in (-\infty, 2/3)$



Übersicht

Globaler Existenzsatz von Peano

Theorem (Peano)

Ein Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

mit rechter Seite $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *und Anfangsdaten* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *besitzt mindestens eine Lösung. Jede Lösung lässt sich in der Vergangenheit und in der Zukunft bis an den Rand von* Ω *fortsetzen.*

Wiederholung Lipschitz-Stetigkeit

Definition

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen. Eine Abbildung $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ heißt in der Zustandsvariablen *(global) Lipschitz-stetig*, wenn eine Konstante $L > 0$ existiert, sodass

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

für alle $(t, x_1), (t, x_2) \in \Omega$ gilt.

Sie heißt in der Zustandsvariablen *lokal Lipschitz-stetig*, wenn es um jeden Punkt $(t_0, x_0) \in \Omega$ eine Umgebung $U \subseteq \Omega$ gibt, sodass die Einschränkung von f auf U Lipschitz-stetig ist.

Wiederholung Lipschitz-Stetigkeit

Lemma

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *offen und* $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^d)$*. Dann gilt:*

1. *Falls* $D_x f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d})$*, so ist* f *in der Zustandsvariablen lokal Lipschitz-stetig.*
2. *Falls* Ω *konvex und* $D_x f : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ *beschränkt ist, so ist* f *in der Zustandsvariablen Lipschitz-stetig.*

Beweis.

Folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. □

Globaler Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Theorem (Picard-Lindelöf, 1. Version)

Gegeben sei ein Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

mit $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *und* $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Falls f *auf* Ω *stetig und in der Zustandsvariablen lokal Lipschitz-stetig ist, so besitzt das Anfangswertproblem eine maximal fortgesetzte Lösung. Diese ist eindeutig bestimmt, d.h. Fortsetzung jeder weiteren Lösung.*

Globaler Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

In der Literatur findet man oftmals die folgende nützliche Version des Satzes von Picard-Lindelöf.

Theorem (Picard-Lindelöf, 2. Version)

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall und* $f \in C^0(J \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ *in der Zustandsvariablen Lipschitz-stetig. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

für jedes $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^d$ *eine eindeutige Lösung* $x \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$.

Beweisidee von Picard-Lindelöf

- Äquivalentes Problem: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$
- Kontraktion $x \mapsto Tx$, $(Tx)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$
  im unendlichdimensionalen Funktionenraum $\big(C^0(I, \mathbb{R}^d), d_\infty\big)$
- Fixpunktsatz $\Rightarrow$ lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
- „Verkleben" lokaler Lösungen zu einer globalen Lösung
- Beweisstruktur ist in vielen numerischen Verfahren wiederzufinden

Übersicht

Lineare Differentialgleichungen

Definition

Eine *lineare Differentialgleichung* ist von der Form

$$x' = A(t)x + b(t),$$

wobei $A \in C^0(J, \mathbb{R}^{d \times d})$ und $b \in C^0(J, \mathbb{R}^d)$ auf einem offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind.

- Die Abbildung $x \mapsto f(t, x) := A(t)x + b(t)$ ist affin-linear.
- Es wird implizit $\Omega := J \times \mathbb{R}^d$ gefordert.

Eine Anwendung von Picard-Lindelöf

Satz

Zu jedem Paar von Anfangsdaten $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^d$ *existiert eine eindeutige Lösung* $x \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$ *der linearen Differentialgleichung*

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Beweis.

Schritt 1:

- $f(t,x) = A(t)x + b(t)$ und $D_x f(t,x) = A(t)$ stetig auf $J \times \mathbb{R}^d$
  $\Rightarrow$ f ist in der Zustandsvariablen lokal Lipschitz-stetig.
- Picard-Lindelöf (Version 1)
  $\Rightarrow$ Es gibt eine **eindeutige, maximal fortgesetzte** Lösung $x \in C^1((t_-, t_+), \mathbb{R}^d)$ mit $t_0 \in (t_-, t_+) \subseteq J$.

$\square$

Eine Anwendung von Picard-Lindelöf

Beweis.

Schritt 2: Es bleibt $J = (t_-, t_+)$ zu zeigen.

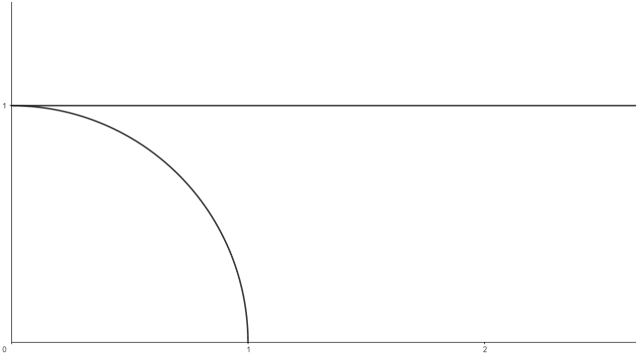
- Angenommen, es gilt $t_+ < \sup J$. Dann wählen wir $s \in (t_+, \sup J)$.
- $\tilde{\Omega} := (t_0 - \varepsilon, s) \times \mathbb{R}^d$ ist konvex und $D_x f(t,x) = A(t)$ ist auf $\tilde{\Omega}$ beschränkt, da $t \mapsto \|A(t)\|$ als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[t_0 - \varepsilon, s]$ ein Maximum annimmt.
  $\Rightarrow$ f ist auf $\tilde{\Omega}$ in der Zustandsvariablen Lipschitz-stetig.
- Picard-Lindelöf (Version 2)
  $\Rightarrow$ Es gibt eine Lösung auf $(t_0 - \varepsilon, s)$, aber $(t_0 - \varepsilon, s) \not\subseteq (t_-, t_+)$. ↯

□

Übersicht

Wenn Picard-Lindelöf nicht anwendbar ist ...

- Anfangswertproblem: $x' = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x(0) = 1$
- $\phi_1(t) = 1$, $t \in (-\infty, \infty)$
- $\phi_2(t) = \sqrt{1-t^2}$, $t \in (-1, 1)$



Integralkurven, Schnitt durch den Integraltrichter

Definition

Zu gegebenem Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

und ausgewähltem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge

$$\mathcal{L}_t \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^d \colon \text{es gibt eine Lösung } \phi \in C^1([t_0, t], \mathbb{R}^d) \text{ mit } \phi(t) = x\}$$

als *Schnitt durch den Integraltrichter*.

Satz von H. Kneser

Satz

Sei die rechte Seite f des Anfangswertproblems

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

auf Ω stetig. Sei t ein Zeitpunkt, zu dem sämtliche maximal fortgesetzten Lösungen des Anfangswertproblems noch existieren. Dann ist $\mathcal{L}_t$ kompakt und zusammenhängend.

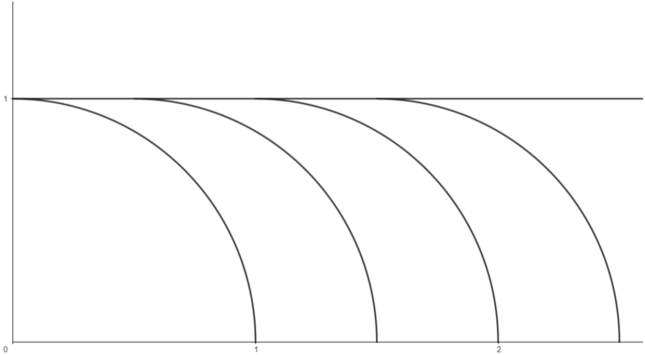
Im Fall $d = 1$ ist

$$\mathcal{L}_t = [\phi^-(t), \phi^+(t)]$$

ein kompaktes Intervall, wobei $\phi^-, \phi^+ \in C^1$ zwei maximal fortsetzbare Lösungen des Anfangswertproblems sind. ϕ^- heißt Minimal- und ϕ^+ Maximallösung.

Beispiel zu Satz von H. Kneser

- Anfangswertproblem: $x' = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x(0) = 1$
- In der Tat: $\phi^+ = \phi_1$ und $\phi^- = \phi_2$
- Für $t \in [0,1)$ ist $\mathcal{L}_t = [\phi^-(t), 1]$ ein kompaktes Intervall.



Zusammenfassung

- Unterteilung maximal fortgesetzter Lösungen in 3 Klassen
- Peano: Stetigkeit $\Rightarrow$ globale Existenz
- **Picard-Lindelöf**: Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit in der Zustandsvariablen $\Rightarrow$ globale Existenz und Eindeutigkeit
- Anwendung auf lineare Differentialgleichungen
- Lösungsstruktur im Falle fehlender Eindeutigkeit

Literaturverzeichnis

- Peter Deuflhard, Folkmar Bornemann: Numerische Mathematik 2, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4. Auflage, De Gruyter Verlag, Berlin 2013
- Sergio Conti: Skript zur Vorlesung Analysis II, Universität Bonn, Sommersemester 2020
- https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Picard-Lindelöf
- https://de.wikipedia.org/wiki/Lipschitzstetigkeit
- https://www.abiweb.de/physik-elektromagnetismus/elektromagnetische-schwingungen/elektromagnetischer-schwingkreis.html