Residuale a posteriori Fehlerschätzer

Zijian Wang

Graduate Seminar on Scientific Computing
Adaptive Finite Element Methods
15. November 2022

Motivation und Zielsetzung

- FE-Approximation ungenauer in bestimmten Teilgebieten
  $\Longrightarrow$ Lokale Netzverfeinerung
- A priori Fehlerabschätzung:

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq ch\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}$$

- Wollen a posteriori berechenbare Schätzer mit der Eigenschaft:

$$\text{Globaler Fehler} \leq c \cdot \text{Globaler Schätzer}$$
$$\text{Lokaler Schätzer} \leq c \cdot \text{Lokaler Fehler}$$

Übersicht

Mathematisches Modell

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offenes polygonales Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$
- Poisson-Gleichung mit homogener Dirichlet-Randbedingung:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\
u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

- In der schwachen Formulierung sucht man $u \in H_0^1(\Omega)$ mit:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)$$

$\Longrightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit mittels Lax-Milgram

Notation für Skalarprodukte / Normen

- Wir unterscheiden zwischen 3 Skalarprodukten:

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega uv\,dx, \quad (u,v)_{H_0^1(\Omega)} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx,$$
$$(u,v)_{H^1(\Omega)} := (u,v)_{L^2(\Omega)} + (u,v)_{H_0^1(\Omega)}$$

- Induzierte Normen: $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$
- Hilbertraum $\left(H_0^1(\Omega), (\cdot\,,\cdot)_{H_0^1(\Omega)}\right)$
- Kontinuierliches Problem: $(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = (f,v)_{L^2(\Omega)}$

Triangulierung

- Zerlegung $\mathcal{T}_h$ von Ω in Dreieckselemente
  - $h_T := \text{diam}(T)$, $h_e := \text{diam}(e)$ für $T \in \mathcal{T}_h$, $e \in \mathcal{E}(T)$
  - $\Gamma_h := \{\text{Innere Kanten } e \subset \Omega\}$
  - Umgebungen ω_T, ω_e von Elementen bzw. Kanten

- Quasiuniforme Familie von Triangulierungen $\{\mathcal{T}_h\}$:

$$\sup_h \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T/\rho_T \leq \kappa \quad \text{mit Regularitätsparameter } \kappa \in (0, \infty)$$

Finite-Elemente-Lösung

- FE-Raum $V_h := S_0^1(\mathcal{T}_h)$ oder $S_0^2(\mathcal{T}_h)$ besteht aus stetigen und stückweise linearen / quad. Funktionen, die auf $\partial\Omega$ verschwinden

  $\Longrightarrow$ Konforme Elemente $V_h \subset H_0^1(\Omega)$

- Finde die eindeutig bestimmte Funktion $u_h \in V_h$ mit:

$$(u_h, v_h)_{H_0^1(\Omega)} = (f, v_h)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v_h \in V_h$$

Übersicht

Definition von Residuen

Definition 1

Für die FE-Lösung u_h betrachten wir die **flächenbezogenen Residuen**:

$$R_T := \Delta u_h + f \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_h$$

sowie die **kantenbezogenen Sprünge** der Ableitungen:

$$R_e := (\nabla u_{h,r} - \nabla u_{h,l}) \cdot n_r \quad \text{für } e \in \Gamma_h$$

Bemerkungen:

- Es gilt $R_T \in L^2(T)$ und $R_e \in \Pi_1(e)$.
- R_e hängt nicht von der Orientierung der Kante e ab.

Residuale Fehlerschätzer

Definition 2

Basierend auf den Residuen bilden wir die lokalen Größen:

$$\eta_{T,R}^2 := h_T^2 \|R_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(T) \cap \Gamma_h} \frac{h_e}{2} \|R_e\|_{L^2(e)}^2 \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_h$$

und bauen sie zu einer globalen Größe zusammen:

$$\eta_R^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{T,R}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|R_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h} h_e \|R_e\|_{L^2(e)}^2$$

Bemerkungen:

- Größen sind a posteriori berechenbar
- $\eta_{T,R} \;\widehat{=}\;$ Auf ein Element T bezogener Fehler, $\eta_R \;\widehat{=}\;$ Gesamtfehler
  $\Longrightarrow$ Hauptfehlerquellen im Netz lokalisieren

Übersicht

Globale obere Fehlerschranke

Satz 3 (Zuverlässigkeit)

Sei $\{\mathcal{T}_h\}$ eine quasiuniforme Triangulierung mit Regularitätsparameter κ. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\kappa)$ mit

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\eta_R.$$

Beweis (Dualitätsprinzip):

Eine Hilfsaussage

Lemma 4

Für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ *gilt die folgende Darstellung:*

$$(u - u_h, v)_{H_0^1(\Omega)} = \sum\nolimits_{T \in \mathcal{T}_h} (R_T, v)_{L^2(T)} + \sum\nolimits_{e \in \Gamma_h} (R_e, v)_{L^2(e)}$$

Beweis:

Beweis von Satz 3

Beh: $\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c(\kappa)\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|R_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e\in\Gamma_h} h_e\|R_e\|_{L^2(e)}^2\Big)^{1/2}$

Fortsetzung des Beweises:

Bemerkungen zu Satz 3

Satz 3 (Zuverlässigkeit)

Sei $\{\mathcal{T}_h\}$ eine quasiuniforme Triangulierung mit Regularitätsparameter κ. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\kappa)$ mit

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\eta_R.$$

Bemerkungen:

- Konstante $c = c(\kappa)$ wird nicht schlechter bei Verfeinerung des Netzes $h \downarrow 0$, solange κ beibehalten wird
- Misst man den Fehler $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$, so hängt c auch von Ω ab
- P_1-Elemente: Flächenanteil R_T a priori berechenbar & wird durch Kantenanteil R_e dominiert

Übersicht

Lokale untere Fehlerabschätzung

Satz 5 (Effizienz)

Sei $\{\mathcal{T}_h\}$ eine quasiuniforme Triangulierung mit Regularitätsparameter κ. Dann existiert eine Konstante $c = c(\kappa)$ derart, dass

$$\eta_{T,R} \leq c\Big(|u - u_h|^2_{H^1(\omega_T)} + \sum_{T' \subset \omega_T} h^2_{T'} \|f - f_h\|^2_{L^2(T')}\Big)^{1/2}$$

für alle $T \in \mathcal{T}_h$ gilt.

Bemerkungen:

- Mit $f_h \coloneqq P_h f \in V_h$ bezeichnen wir die L^2-Projektion von f in V_h.
- Wegen $(f - f_h, v_h)_{L^2(\Omega)} = 0$ für $v_h \in V_h$ haben die Poisson-Probleme mit f bzw. f_h dieselbe FE-Lösung in V_h.

Etwas Vorarbeit

Wir führen folgende Abschneidefunktionen ein:

- Kubische Blasenfunktion $\psi_T \in [0,1]$ bzgl. $T \in \mathcal{T}_h$:

$$\operatorname{supp} \psi_T = T, \quad \psi_T = 0 \text{ auf } \partial T, \quad \psi_T(m_T) = 1$$

- Stetige, stückweise quad. Blasenfunktion $\psi_e \in [0,1]$ bzgl. $e \in \Gamma_h$:

$$\operatorname{supp} \psi_e = \omega_e, \quad \psi_e = 0 \text{ auf } \partial \omega_e, \quad \psi_e(m_e) = 1$$

Betrachte außerdem den Fortsetzungsoperator $E\colon L^2(e) \to L^2(\omega_e)$:

Noch mehr Vorarbeit

Lemma 6

Sei $\{\mathcal{T}_h\}$ eine quasiuniforme Triangulierung. Dann gibt es nur vom Parameter κ abhängende Konstanten $c_1, \ldots, c_5$, sodass für alle $T \in \mathcal{T}_h$, $e \in \mathcal{E}(T) \cap \Gamma_h$ gilt:

(i) $\|\psi_T^{1/2} p\|_{L^2(T)} \geq c_1 \|p\|_{L^2(T)}$ für $p \in \Pi_2(T)$

(ii) $\|\nabla(\psi_T p)\|_{L^2(T)} \leq c_2 h_T^{-1} \|\psi_T p\|_{L^2(T)}$ für $p \in \Pi_2(T)$

(iii) $\|\psi_e^{1/2} \sigma\|_{L^2(e)} \geq c_3 \|\sigma\|_{L^2(e)}$ für $\sigma \in \Pi_2(e)$

(iv) $c_4^{-1} h_e^{1/2} \|\sigma\|_{L^2(e)} \leq \|\psi_e E\sigma\|_{L^2(T)} \leq c_4 h_e^{1/2} \|\sigma\|_{L^2(e)}$ für $\sigma \in \Pi_2(e)$

(v) $\|\nabla(\psi_e E\sigma)\|_{L^2(T)} \leq c_5 h_T^{-1} \|\psi_e E\sigma\|_{L^2(T)}$ für $\sigma \in \Pi_2(e)$

Beweisidee: Zunächst für T_{ref} (Nutze $\dim \Pi_2 < \infty \implies$ Äquivalenz von Normen). Übertrage dann auf beliebige Dreiecke mit Skalierungsargumenten.

Beweis von Satz 5

Beh: $$\eta_{T,R}^2 = h_T^2 \|R_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum\nolimits_{e \in \mathcal{E}(T) \cap \Gamma_h} \frac{h_e}{2} \|R_e\|_{L^2(e)}^2$$
$$\leq c(\kappa) \Big(|u - u_h|_{H^1(\omega_T)}^2 + \sum\nolimits_{T' \subset \omega_T} h_{T'}^2 \|f - f_h\|_{L^2(T')}^2 \Big)$$

Beweis:

Abschließende Bemerkungen zu Fehlerabschätzungen

Wir haben Zuverlässigkeit & Effizienz des residualen Schätzers gezeigt:

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\eta_R$$

$$\eta_{T,R} \leq c\left(|u - u_h|^2_{H^1(\omega_T)} + \sum_{T' \subset \omega_T} h^2_{T'} \|f - f_h\|^2_{L^2(T')}\right)^{1/2}$$

- I.d.R. kann man annehmen, dass die Datenoszillation einen Term höherer Ordnung darstellt
- Unter dieser Annahme ist der Schätzer η_R global äquivalent zum tatsächlichen Fehler
- Lokale Effizienz: Schätzer $\eta_{T,R}$ groß $\Longrightarrow$ Lokaler Fehler groß

Übersicht

Adaptive Netzverfeinerung

Adaptiver FE-Algorithmus (Solve $\rightarrow$ Estimate $\rightarrow$ Mark $\rightarrow$ Refine):

1. Initialisiere ein grobes Gitternetz $\mathcal{T}_0$. Setze $k := 0$.
2. Löse das diskrete Problem auf $\mathcal{T}_k$.
3. Berechne den Fehlerschätzer $\eta_{T,R}$ für jedes Element $T \in \mathcal{T}_k$.
4. Falls für den globalen Schätzer $\eta_R < \varepsilon$ gilt, stopp.
   Ansonsten entscheide anhand der $\eta_{T,R}$, welche Elemente verfeinert werden sollen, und erstelle das nächste Netz $\mathcal{T}_{k+1}$.
   Erhöhe k um 1 und gehe zu Schritt 2.

Adaptive Netzverfeinerung

- Mark (Dörfler-Marking):
  1. Sortiere die Elemente in $\mathcal{T}_k := \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ derart, dass $\eta_{T_1,R} \geq \eta_{T_2,R} \geq \cdots \geq \eta_{T_N,R}$.
  2. Ermittle das minimale $n \leq N$, sodass $\sum_{j=1}^{n} \eta_{T_j,R}^2 > \theta \eta_R^2$ gilt.
  3. Markiere $\mathcal{M}_k := \{T_1, \dots, T_n\}$ zur Verfeinerung.
- Refine (Newest Vertex Bisection):

Übersicht

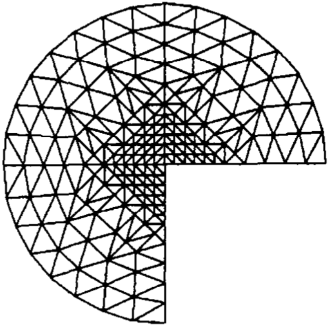
Zusammenfassung

- Definition von Residuen R_T und R_e
- Konstruktion von a posteriori Fehlerschätzern $\eta_{T,R}$ und η_R
- Zentrale Eigenschaften:
  - Zuverlässigkeit, d.h. globale obere Fehlerschranke
  - Effizienz, d.h. lokale untere Fehlerabschätzung
- Anwendung zur adaptiven Netzverfeinerung

Ausblick

- Andere Klassen von a posteriori Schätzern, z.B.
    - Schätzung über ein lokales Neumann- bzw. Dirichlet-Problem
    - Ziel-orientierte Schätzer
- Geometrische Aspekte der Gitterverfeinerung
- Konvergenzbeweise und Optimalität

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!
Ich freue mich auf eure Fragen und euer Feedback!



Grafik entnommen aus Verfürth [1994]

Literaturverzeichnis

- D. Braess. Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 5. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013
- Babuška, I., Durán, R. and Rodríguez, R. (1992): Analysis of the Efficiency of an a Posteriori Error Estimator for Linear Triangular Finite Elements. SIAM Journal on Numerical Analysis, 29(4), 947–964
- Hannukainen, A., Korotov, S. and Křížek, M. (2012): The maximum angle condition is not necessary for convergence of the finite element method. Numer. Math. 120, 79-88
- Morin, P., Nochetto, R.H. and Siebert, K.G. (2002): Convergence of adaptive finite element methods. SIAM Rev. 44, No. 4, 631-658
- Verfürth, R. (1994): A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. J. Comp. Appl. Math. 50, 67-83