

Отчёт по лабораторной работе 5

дисциплина: Математическое моделирование

Каримов Зуфар, НПИбд-01-18

Содержание

1	Цель работы	3
2	Задание	4
3	Выполнение лабораторной работы	5
3.1	Постановка задачи	5
3.2	Выполнение работы	7
4	Выводы	11

1 Цель работы

Ознакомление с простейшей моделью взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры и построение графиков на языке Modelica.

2 Задание

Вариант 38

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.7x(t) + 0.06x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.6x(t) - 0.07x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8$, $y_0 = 15$. Найдите стационарное состояние системы.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Постановка задачи

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двухвидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории).
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает.
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными.
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается.
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) + bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = cx(t) - dx(t)y(t) \end{cases}$$

(1)

В этой модели x – число жертв, y – число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

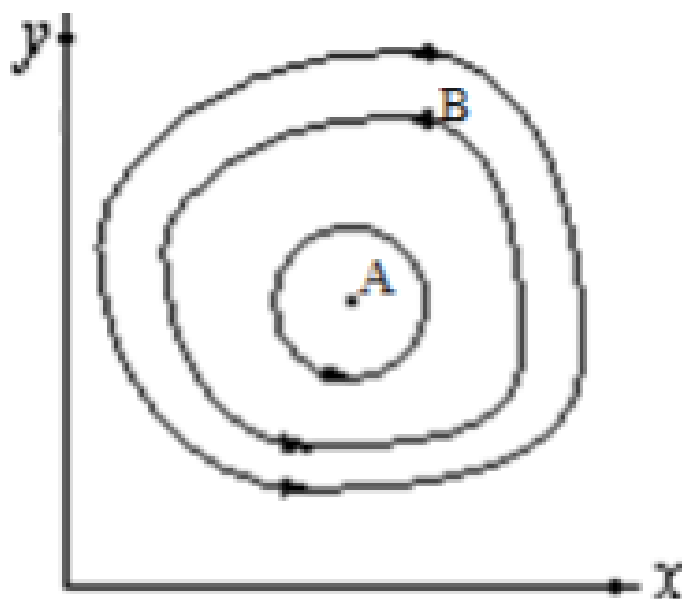


Figure 3.1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис. 3.1), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

Стационарное состояние системы (1) (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{b}{d}$, $y_0 = \frac{a}{c}$.

Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

3.2 Выполнение работы

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) + bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = cx(t) - dx(t)y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.7x(t) + 0.06x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.6x(t) - 0.07x(t)y(t) \end{cases}$$

Начальные условия:

a - коэффициент естественной смертности хищников

b - коэффициент естественного прироста жертв

c - коэффициент увеличения числа хищников

d - коэффициент смертности жертв

У нас дано:

$a = 0.7$ (коэффициент естественной смертности хищников)

$b = 0.6$ (коэффициент увеличения числа хищников)

$c = 0.06$ (коэффициент естественного прироста жертв)

$d = 0.07$ (коэффициент смертности жертв)

Начальное число хищников – $x_0 = 8$,

начальное число жертв – $y_0 = 15$.

Код программы

```
model Predator
parameter Real a = 0.7; // коэффициент естественной смертности хищников
parameter Real b = 0.6; // коэффициент естественного прироста жертв
parameter Real c = 0.06; // коэффициент увеличения числа хищников
parameter Real d = 0.07; // коэффициент смертности жертв

//parameter Real x0 = 8; // начальные условия
//parameter Real y0 = 15; // начальные условия

parameter Real x0 = 0.6/0.07; //(b/d)
parameter Real y0 = 0.7/0.06; // (a/c)

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

equation

der(x) = -a*x + c*x*y;
der(y) = b*y - d*x*y;

end Predator;
```

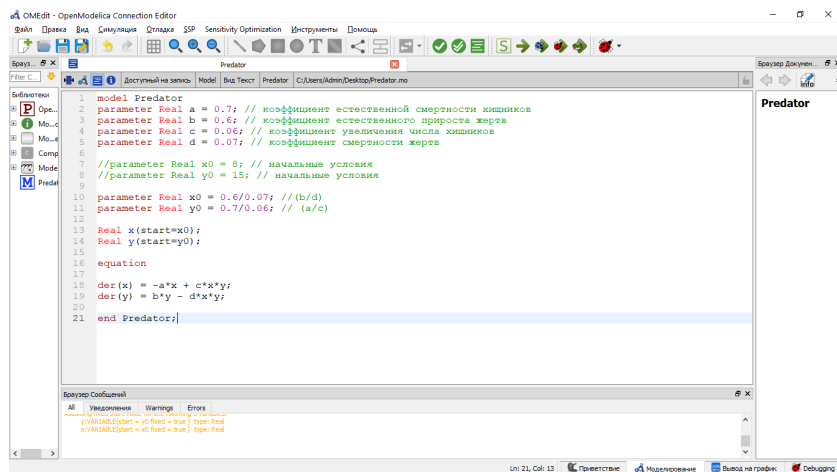



Figure 3.2: Код программы

1. Построил график зависимости численности хищников от численности жертв (рис. 3.3)

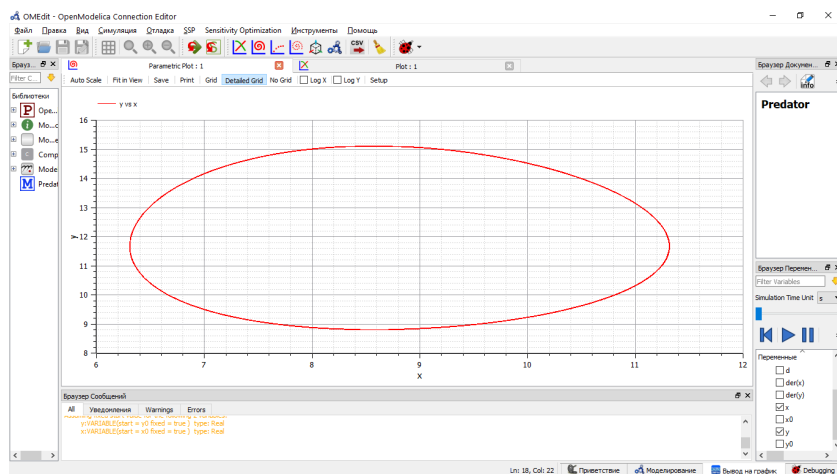


Figure 3.3: График зависимости численности хищников от численности жертв

2. Построил графики изменения численности популяции хищников и численности жертв с течением времени (рис. 3.4)

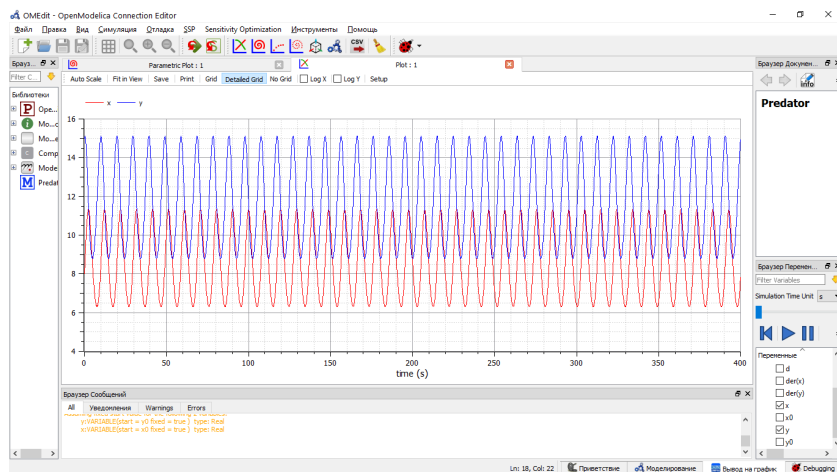


Figure 3.4: График изменения численности хищников и численности жертв с течением времени

3. Для того, чтобы найти стационарное состояние системы, необходимо приравнять производные каждой из функций x и y к нулю и выразить значения y и x соответственно.

Получим следующие значения: $x_0 = \frac{b}{d}, y_0 = \frac{a}{c}, x_0 = \frac{0.6}{0.07} = 8.57, y_0 = \frac{0.7}{0.06} = 11.66$ При стационарном состоянии значений числа и хищников не меняется во времени. (рис. 3.5)

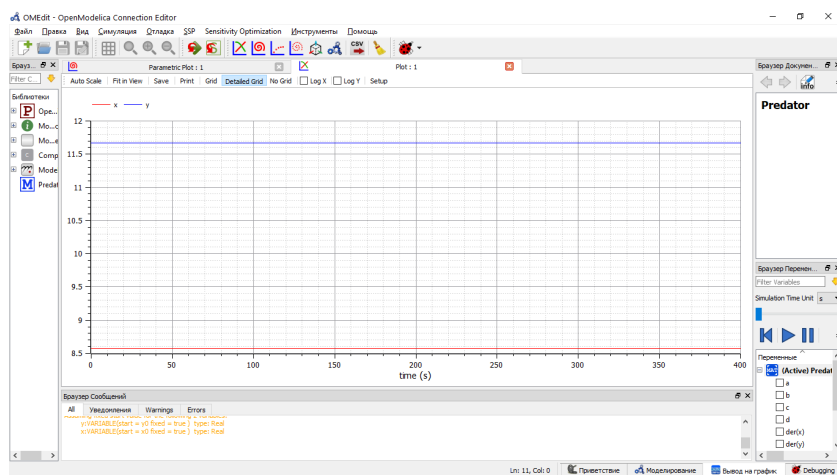


Figure 3.5: Стационарное состояние системы

4 Выводы

Ознакомился с простейшей моделью взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры и построил графики на языке Modelica.