Колебания цепочек

Гебриал Ибрам Есам Зекри НПИ-01-18

Каримов Зуфар Исматович НПИ-01-18

Волков Тимофей Евгеньевич НПИ-01-18

Гаджиев Нурсултан Тофик оглы НПИ-01-18

Содержание

# Цель работы

Рассмотрение алгоритма задачи математического маятника.

# Введение

Гармонический осциллятор, к изучению которого мы сейчас перейдем, будет встречаться нам почти всюду; хотя мы начнем с чисто механических примеров грузика на пружинке, малых отклонений маятника или каких-то других механических устройств, на самом деле мы будем изучать некое дифференциальное уравнение. Это уравнение непрестанно встречается в физике и в других науках и фактически описывает столь многие явления, что стоит того, чтобы изучить его получше. Такое уравнение описывает колебания грузика на пружинке, колебания заряда, текущего взад и вперед по электрической цепи, колебания камертона, порождающие звуковые волны, аналогичные колебания электронов в атоме, порождающие световые волны. Мы привели неполный список явлений, которые описы¬ваются почти теми же уравнениями, что и механический осциллятор. Эти уравнения называются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

# Математический маятник

Рассмотрим математический маятник: небольшой1 грузик массы m на нерастяжимой невесомой нити длины l. Пусть этот маятник совершает малые колебания вблизи положения равновесия и в некоторый момент времени нить маятника составляет угол с вертикалью (рис. 1). Трение, включая сопротивление среды, в системе отсутствует. Учитывая, что сила натяжения нити всегда перпендикулярна скорости движения маятника и поэтому не совершает работу, запишем для данной колебательной системы закон сохранения энергии:

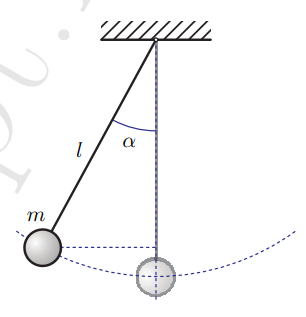


Figure 1: Рисунок 1. Математический маятник.

+ mgl(1-cos)=

где ноль потенциальной энергии принят в положении равновесия. Воспользовавшись условием, что колебания происходят с малой амплитудой (т. е. угол мал), используем приближение cos = 1 - . Скорость движения грузика v = l = l, где — мгновенная угловая скорость вращения. Тогда уравнение (1) принимает вид

+ =, или + \* =

После дифференцирования имеем

+ \* = 0

или, вводя обозначение = , получаем

+ \* = 0 (2)

аналогичное уравнению

x’’ + x = 0

Период колебаний такого маятника:

T== 2

Рассмотрим математический маятник длины l и массы m, совершающий малые колебания вблизи положения равновесия и испытывающий со стороны окружающей среды воздействие силы трения, величина которой пропорциональна скорости грузика маятника (коэффициент пропорциональности ). Запишем для грузика маятника второй закон Ньютона в проекции на ось x (рис. 2):

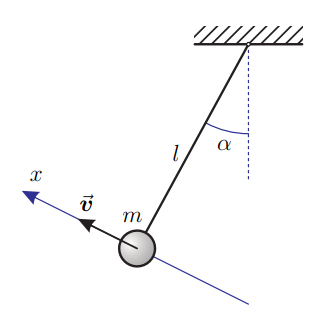


Figure 2: Рисунок 2. Математический маятник.

m\*v’’ = - v - mg sin

учитывая, что v=l , а колебания малые, получаем

’’ + \* ’ + g \* l \* = 0

или вводя обозначения = и = , находим ’’ + 2 + = 0 (3)

В обоих приведенных примерах мы пришли к уравнению свободных затухающих гармонических колебаний:

X’’ + 2 x’ + x =0. (4)

В зависимости от соотношения между и уравнение (4) будет иметь различные решения:

1. При > решение уравнения (4) имеет вид

x(t) = cos( t +), = (5)

где величины — амплитуда колебаний и — начальная фаза колебаний определяются из начальных условий. График таких затухающих колебаний, а также изображение на фазовой плоскости приведены (рис. 3): Для характеристики того, насколько быстро происходит затухание колебаний, вводят характерное время затухания T= , представляющее собой время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

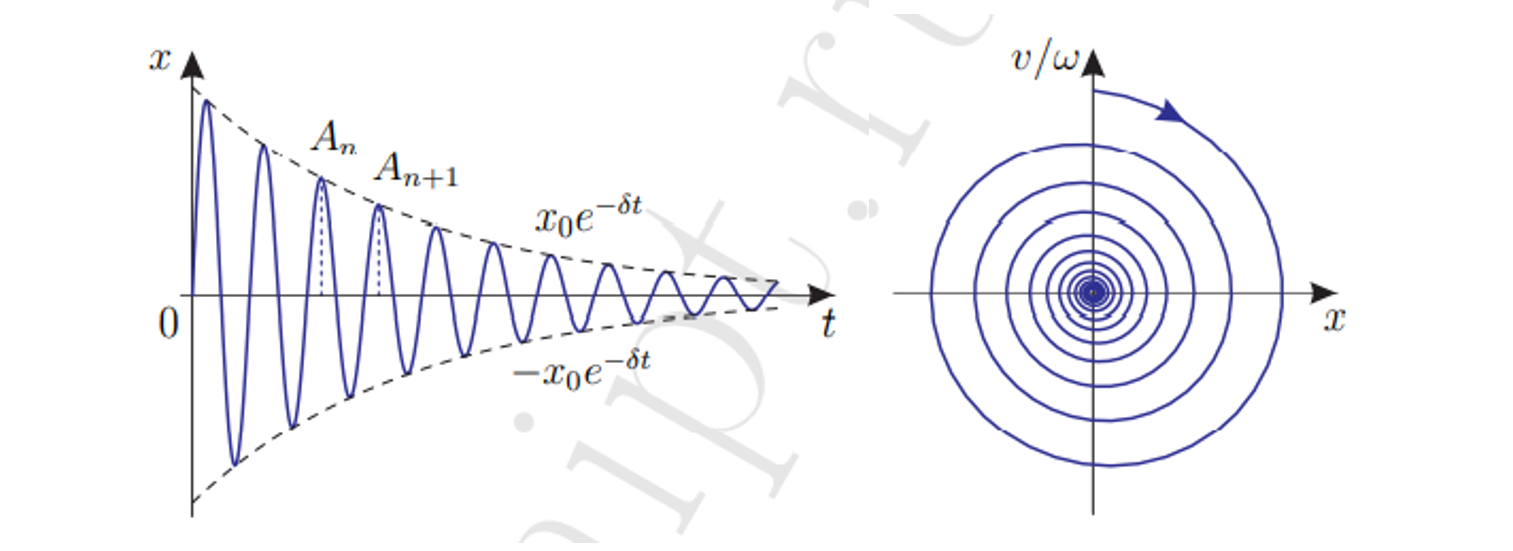


Figure 3: Рис 3 и 4. Зависимость координаты x от времени t и фазовая диаграмма затухающих колебаний

б) При < решение уравнения (4) имеет вид

x(t) = + (6)

в) При = решение уравнения (4) имеет вид

Величины и также определяются из начальных условий

x(t) = + t (7) Зависимости (6) и (7) носят апериодический характер и не являются колебаниями. Графики этих зависимостей приведены (рис. 4). Дальше мы будем рассматривать только случай >

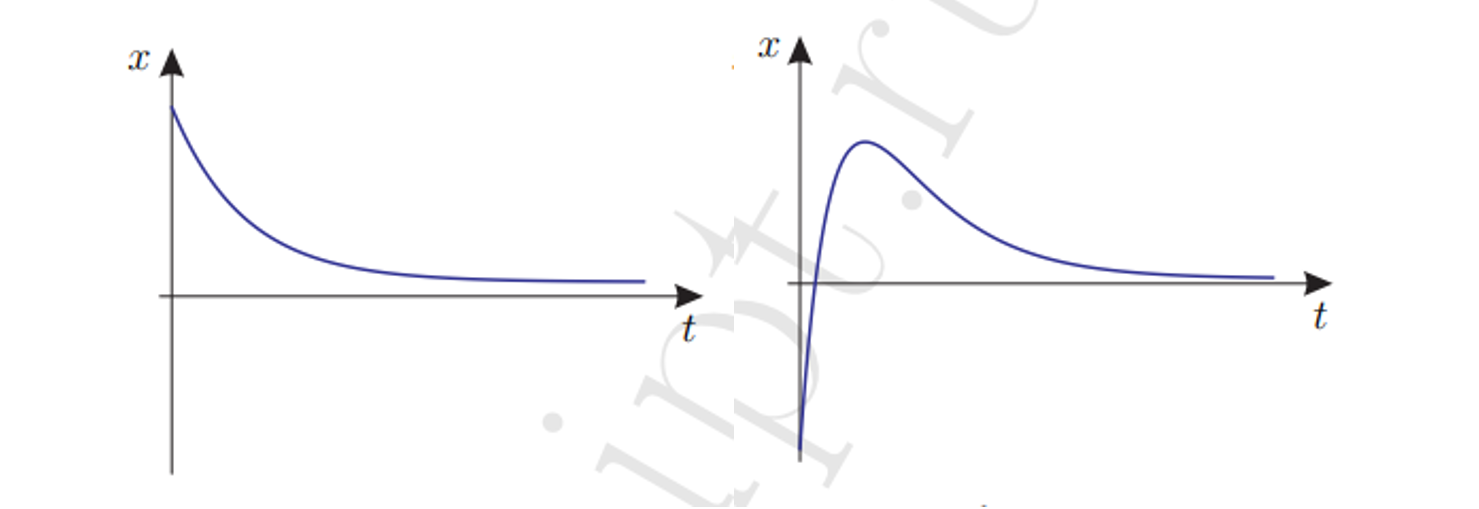


Figure 4: Рис 5 и 6. Пример осциллограмм в случае большого трения

# Выводы

Рассмотрели алгоритм задачи математического маятника.