Eléments de correction du TD1
Espérance conditionnelle

Erick Herbin

27 septembre 2019

Exercice 1 *Soient X une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Déterminer $E[X \mid \mathcal{G}]$ dans chacun des cas :*

1. *X est $\mathcal{G}$-mesurable.*
2. *X est indépendant de $\mathcal{G}$.*
3. *Comment s'expriment les deux questions précédentes lorsque $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ où Y est une variable aléatoire ?*

L'espérance conditionnelle de X par rapport à la sous-tribu $\mathcal{G}$ ne peut être considérée que si X est intégrable ou positive p.s. (non précisé dans l'énoncé).

1. Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors X vérifie les deux conditions (i) et (ii) de la définition de l'espérance conditionnelle dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou $L^+(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On en déduit que $E[X \mid \mathcal{G}] = X$ p.s.
2. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors
$$\forall A \in \mathcal{G}, \quad E[X.\mathbb{1}_A] = E[X]\ E[\mathbb{1}_A] = E(E[X].\mathbb{1}_A).$$
On en déduit que $E[X \mid \mathcal{G}] = E[X]$ p.s. (autrement dit, la variable aléatoire $E[X \mid \mathcal{G}]$ est constante presque sûrement).
3. On reprend les 2 cas précédents lorsque $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ pour une certaine v.a. Y.
   (a) Si X est $\sigma(Y)$-mesurable, alors X peut s'écrire $X = h(Y)$ pour une certaine fonction h mesurable. Dans ce cas, $E[h(Y) \mid Y] = h(Y)$ p.s.
   (b) X est indépendant de $\sigma(Y)$ si et seulement si les v.a. X et Y sont indépendantes. Dans ce cas, $E[X \mid Y] = E[X]$ p.s.

Exercice 2 *Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Montrer que, si l'on pose $\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G}) = E[(X - E[X \mid \mathcal{G}])^2 \mid \mathcal{G}]$ alors on a*
$$\mathrm{Var}(X) = E(\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G})) + \mathrm{Var}(E[X \mid \mathcal{G}]).$$

On écrit

$$X - E[X] = X - E[X \mid \mathcal{G}] + E[X \mid \mathcal{G}] - E[X].$$

La variable aléatoire $E[X \mid \mathcal{G}] - E[X]$ est $\mathcal{G}$-mesurable. Or par définition de l'espérance conditionnelle dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X - E[X \mid \mathcal{G}]$ est orthogonale à toute v.a. qui est $\mathcal{G}$-mesurable.

On en déduit

$$\begin{aligned} E\left[(X - E[X])^2\right] &= E\left[(X - E[X \mid \mathcal{G}])^2\right] + E\left[(E[X \mid \mathcal{G}] - E[X])^2\right] \\ &= E\left[\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G})\right] + \mathrm{Var}\left(E[X \mid \mathcal{G}]\right). \end{aligned}$$

Exercice 3 (facultatif) *Soient X, Y, Z des v.a. à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, telles que les couples (X, Z) et (Y, Z) aient même loi.*

1. *Montrer que si f est une fonction réelle positive (ou telle que $f(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$), on a*
$$E[f(X) \mid Z] = E[f(Y) \mid Z] \quad p.s.$$
2. *Soient g une application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $\mathbb{R}$ positive (ou telle que $g(Z) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$), et h_1, h_2 deux fonctions telles que*
$$h_1(X) = E[g(Z) \mid X], \qquad h_2(Y) = E[g(Z) \mid Y].$$
Montrer que $h_1 = h_2$ μ-p.s., où μ est la loi de X et Y.

1. Pour toute application $\varphi : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable positive (resp. bornée), l'égalité des lois de (X, Z) et (Y, Z) implique
$$E\left[\varphi(Z) f(Y)\right] = E\left[\varphi(Z) f(X)\right].$$
Or,
$$E\left[\varphi(Z) f(X)\right] = E\left(\varphi(Z) E[f(X) \mid Z]\right).$$
On en déduit $E[f(X) \mid Z] = E[f(Y) \mid Z]$ p.s.
2. Pour toute application $\varphi : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable positive (resp. bornée), l'égalité des lois de (X, Z) et (Y, Z) implique
$$E\left[g(Z)\varphi(Y)\right] = E\left[g(Z)\varphi(X)\right].$$
Or, par définition de $h_1(X)$,
$$E\left[g(Z)\varphi(X)\right] = E\left[h_1(X)\varphi(X)\right] = E\left[h_1(Y)\varphi(Y)\right],$$
en utilisant le fait que X et Y ont la même loi.
On en déduit $h_1(Y) = E[g(Z) \mid Y]$ p.s. Ainsi $h_1(Y) = h_2(Y)$ p.s., ce qui entraine $h_1 = h_2$ sauf sur un ensemble de μ-mesure nulle.

Exercice 4 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose que X est une v.a. indépendante de $\mathcal{G}$ et Y une v.a. $\mathcal{G}$-mesurable. Montrer que pour toute fonction réelle f mesurable positive ou telle que $f(X,Y) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on a*

$$E[f(X,Y) \mid \mathcal{G}] = \psi(Y)$$

où ψ est définie par $\psi(y) = E[f(X,y)]$.

(Indication : on considèrera une v.a. $\mathcal{G}$-mesurable Z et on déterminera $E[Zf(X,Y)]$.)

On suppose f mesurable positive. Soit Z une v.a. positive $\mathcal{G}$-mesurable.
On note μ_X et $\mu_{Z,Y}$ les lois de X et (Z,Y). On a $\psi(y) = E\left[f(X,y)\right] = \int f(x,y)\ \mu_X(dx)$.

Comme X et (Z,Y) sont indépendantes,

$$\begin{aligned} E\left[Z\ f(X,Y)\right] &= \int z\ f(x,y)\ \mu_X(dx)\ \mu_{Z,Y}(dz,dy) \\ &= \int z \underbrace{\left(\int f(x,y)\ \mu_X(dx) \right)}_{\psi(y)} \mu_{Z,Y}(dz,dy) \\ &= E\left[Z\ \psi(Y)\right]. \end{aligned}$$

Comme $\psi(Y)$ est $\mathcal{G}$-mesurable, on en déduit que $E\left[f(X,Y) \mid \mathcal{G}\right] = \psi(Y)$ p.s.

Le cas $f(X,Y) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est traité de manière analogue.

Exercice 5 *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_k,\ k \leq n)$.

Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mesurable bornée et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E[f(S_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}] = E[f(S_n) \mid S_{n-1}]$$

et exprimer cette quantité en fonction de la loi de X_n.

(Indication : on utilisera l'application ψ définie par $\psi(x) = E[f(X_n + x)]$ et l'exercice précédent.)

En écrivant $S_n = X_n + S_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, et en remarquant que S_{n-1} est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable et X_n est indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$, on est en mesure d'appliquer l'exercice précédent

$$\forall n \geq 1, \quad E\left[f(X_n + S_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] = \psi(S_{n-1}),$$

où ψ est définie par $\psi(x) = E[f(X_n + x)]$.

La v.a. $\psi(S_{n-1})$ est $\sigma(S_{n-1})$-mesurable (comme fonction de S_{n-1}), donc

$$\begin{aligned} E\left[f(S_n) \mid S_{n-1}\right] &= E\left(E\left[f(S_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] \mid \sigma(S_{n-1})\right) \\ &= E\left[\psi(S_{n-1}) \mid S_{n-1}\right] \\ &= \psi(S_{n-1}). \end{aligned}$$

Dans la suite du cours, on verra que cette relation exprime la propriété de Markov, satisfaite par la marche aléatoire $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Eléments de correction du TD2
Processus aléatoires

Paul Balança

4 décembre 2019

Exercice 1 (Indistingabilité) *Soient* $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *et* $\{Y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *deux processus stochastiques sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad P\{X_n = Y_n\} = 1.$$

Montrer que

$$P\{\forall n \in \mathbb{N};\ X_n = Y_n\} = 1.$$

Ce résultat reste-il vrai pour des processus indexés par $\mathbb{R}$ *?*

Il suffit de remarquer que

$$P\{\forall n \in \mathbb{N};\ X_n = Y_n\} = 1 - P\{\exists n \in \mathbb{N};\ X_n \neq Y_n\} = 1.$$

Or, P étant une mesure de probabilité, on a

$$P\{\exists n \in \mathbb{N};\ X_n \neq Y_n\} = P\{\cup_{n\in\mathbb{N}}(X_n \neq Y_n)\} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P\{X_n \neq Y_n\} = 0.$$

On a donc bien $P\{\forall n \in \mathbb{N};\ X_n = Y_n\} = 1$.

Ce résultat n'est plus vérifié en toute généralité pour des processus indexés par $\mathbb{R}$. En effet, soit $\{X_t;\ t \in \mathbb{R}\}$ un processus stochastique et $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ une variable aléatoire. On définit alors le processus Y indexé par $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}; \quad Y_t = X_t + \mathbb{1}_{U=t}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P\{X_t = Y_t\} = P\{U \neq t\} = 1$.

Cependant, $P\{\forall t \in \mathbb{R};\ X_t = Y_t\} = P\{\forall t \in \mathbb{R};\ U \neq t\} = P\{U \notin \mathbb{R}\} = 0$.

Le processus Y est donc une modification de X, mais X et Y ne sont pas indistingables.

Exercice 2 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ *un espace de probabilité filtré, et soient* S *et* T *deux temps d'arrêt pour la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$*. On note* $\mathcal{F}_S$ *(resp.* $\mathcal{F}_T$*) la tribu des évènements antérieurs à* S *(resp.* T*).*

Montrer que

1. $S \wedge T$, $S \vee T$ *et* $S + T$ *sont des temps d'arrêt.*
2. *Si* $S(\omega) = n$ *pour tout* $\omega \in \Omega$*, alors* $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_n$*.*
3. *Si* $S \leq T$ *alors* $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$*.*
4. $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$*.*
5. $\{S < T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ *et* $\{S = T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$*.*

On rappelle la définition de $\mathcal{F}_T$:

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F};\ \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

1. $S \wedge T$, $S \vee T$ et $S + T$ sont bien des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. De plus $\{S \wedge T \leq n\} = \{S \leq n\} \cup \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, $\{S \vee T \leq n\} = \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{S + T \leq n\} = \cup_{i=0}^{n}(\{S \leq i\} \cup \{T \leq n - i\}) \in \mathcal{F}_n$. Ce sont donc bien des temps d'arrêt.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\{S \leq m\} = \emptyset$ ou Ω. Donc $\mathcal{F}_S = \{A \in \mathcal{F};\ \forall k < n\ A \cap \emptyset \in \mathcal{F}_n$ et $\forall k \geq n\ A \cap \Omega \in \mathcal{F}_k\} = \{A \in \mathcal{F};\ \forall k \geq n\ A \in \mathcal{F}_k\} = \mathcal{F}_n$ étant donné que $(\mathcal{F}_n)_n$ est une filtration.
3. Soit $A \in \mathcal{F}_S$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap \{T \leq n\} = (A \cap \{S \leq n\}) \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, T étant un temps d'arrêt et $A \in \mathcal{F}_S$. Donc $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
4. $S \wedge T \leq S$ et $S \wedge T \leq T$, donc d'après la question précédente, $\mathcal{F}_{S\wedge T} \subset \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. Soit $A \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap \{S \wedge T \leq n\} = A \cap (\{S \leq n\} \cup \{T \leq n\}) = (A \cap \{S \leq n\}) \cup (A \cap \{T \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$. Donc $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{S < T\} \cap \{S \wedge T \leq n\} = \{S < T\} \cap \{S \leq n\} = \cup_{i=0}^{n}(\{S = i\} \cap \{T > i\}) \in \mathcal{F}_n$. Donc $\{S < T\} \in \mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
   Pour la seconde appartenance, on remarque que $\{S = T\} = \Omega \setminus (\{S < T\} \cup \{T < T\}) \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.

Exercice 3 *Soit* E *un espace dénombrable et soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$ *l'espace canonique des applications de* $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ *dans* E*, où le processus* $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *à valeurs dans* E *est défini par*

$$\forall \omega \in E^{\mathbb{N}}; \quad X_n(\omega) = \omega(n),$$

et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *est sa filtration naturelle.*

On considère l'opérateur de translation $\theta : \Omega \to \Omega$*, défini par*

$$\forall \omega \in E^{\mathbb{N}}; \quad \theta(\omega) = (n \mapsto \omega(n + 1)).$$

On considère également la suite $(\theta^n)_{n\geq 0}$ *définie par* $\theta^0 = Id$ *et* $\theta^{n+1} = \theta^n \circ \theta$*.*

1. *Montrer que* $X_n \circ \theta^m = X_{n+m}$ *et que* $(\theta^n)^{-1}(\mathcal{F}_m) = \sigma(X_n, \dots, X_{n+m})$*, pour tous* $n, m \in \mathbb{N}$.
2. *Soient* S *et* T *deux temps d'arrêt de la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
   (a) *Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $k + S \circ \theta^k$ *est un temps d'arrêt.*
   (b) *Montrer que* $U = T + S \circ \theta^T$ *est un temps d'arrêt (avec la convention* $U = +\infty$ *sur* $\{T = +\infty\}$*).*
   Montrer que, si l'on suppose de plus S *et* T *finis, alors* $X_S \circ \theta^T = X_U$.
   (c) *Pour tout* $A \subset E$*, on note*

$$\begin{aligned} \tau_A &= \inf\{n \geq 0;\ X_n \in A\} \\ \sigma_A &= \inf\{n \geq 1;\ X_n \in A\} \end{aligned}$$

   les temps d'entrée et de retour dans A*. Montrer que si* T *est un temps d'arrêt, alors*

$$\begin{aligned} T + \tau_A \circ \theta^T &= \inf\{n \geq T;\ X_n \in A\} \\ T + \sigma_A \circ \theta^T &= \inf\{n > T;\ X_n \in A\} \end{aligned}$$

   et que si $A \subset B$*, alors* $\tau_A = \tau_B + \tau_A \circ \theta^{\tau_B}$.

1. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ et $\omega \in E^{\mathbb{N}}$, on a

$$(X_n \circ \theta^m)(\omega) = X_n(\theta^m(\omega)) = X_n(k \mapsto \omega(k+m)) = \omega(n+m) = X_{n+m}(\omega).$$

   Pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $A \subset E$, $(\theta^m)^{-1}\{X_n \in A\} = \{X_n \circ \theta^m \in A\} = \{X_{n+m} \in A\}$. Or, la tribu $\mathcal{F}_m$ est engendrée par des éléments de la forme

$$B = \{X_0 \in A_0\} \cap \cdots \cap \{X_m \in A_m\},$$

   où $A_0, \dots, A_m \in E$. Donc $(\theta^n)^{-1}(\mathcal{F}_m)$ est engendrée par les éléments

$$\begin{aligned} (\theta^n)^{-1}(B) &= (\theta^n)^{-1}\{X_0 \in A_0\} \cap \cdots \cap (\theta^n)^{-1}\{X_m \in A_m\} \\ &= \{X_n \in A_0\} \cap \cdots \cap \{X_{n+m} \in A_m\}, \end{aligned}$$

   qui correspondent aux éléments engendrant la tribu $\sigma(X_n, \dots, X_{n+m})$.
2. (a) Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, $\{k + S \circ \theta^k \leq n\} = \{S \circ \theta^k \leq n-k\} = (\theta^k)^{-1}\{S \leq n-k\}$. Or, d'après la question précédente, $(\theta^k)^{-1}(\mathcal{F}_{n-k}) = \sigma(X_k, \dots, X_n) \subset \mathcal{F}_n$ et S étant un temps d'arrêt, on a bien $\{k + S \circ \theta^k \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et donc $k + S \circ \theta^k$ est un temps d'arrêt.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T + S \circ \theta^T \leq n\} = \cup_{k=0}^n (\{k + S \circ \theta^k \leq n\} \cap \{T = k\}) \in \mathcal{F}_n$, $T + S \circ \theta^T$ est donc bien un temps d'arrêt. Si S et T sont finis, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} (X_S \circ \theta^T)(\omega) &= X_{S(\theta^{T(\omega)}(\omega))}(\theta^{T(\omega)}(\omega)) \\ &= X_{T(\omega)+S(\theta^{T(\omega)}(\omega))}(\omega) \\ &= X_{U(\omega)}(\omega) = (X_U)(\omega). \end{aligned}$$

   Donc $X_S \circ \theta^T = X_U$.

(c) Pour tous $A \subset E$ et $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) < +\infty$, on a

$$\begin{aligned} T(\omega) + (\tau_A \circ \theta^T)(\omega) &= T(\omega) + \inf\{n \geq 0;\ X_n(\theta^{T(\omega)}(\omega)) \in A\} \\ &= T(\omega) + \inf\{n \geq 0;\ X_{T(\omega)+n}(\omega) \in A\} \\ &= \inf\{m \geq T(\omega);\ X_m(\omega) \in A\}. \end{aligned}$$

De plus, la relation est également bien vérifiée si $T(\omega) = +\infty$, donc on a bien $T + \tau_A \circ \theta^T = \inf\{n \geq T;\ X_n \in A\}$ et on obtient de la même manière $T + \sigma_A \circ \theta^T = \inf\{n > T;\ X_n \in A\}$.

On sait que $\tau_B + \tau_A \circ \theta^{\tau_B} = \inf\{n \geq \tau_B;\ X_n \in A\}$. Or, comme $A \subset B$, on a forcément $\tau_B \leq \tau_A$, et donc $\inf\{n \geq \tau_B;\ X_n \in A\} = \inf\{n \geq 0;\ X_n \in A\} = \tau_A$.

Eléments de correction du TD3
Martingales

Lisandro Fermin

5 décembre 2019

Exercice 1 *1. Soit $X = \{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ une surmartingale telle que $E[X_n]$ soit constante. Montrer que X est une martingale.*

2. Soit $X = \{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ un processus intégrable adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Montrer que X est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale si et seulement si pour tout temps d'arrêt borné T, on a $E[X_T] = E[X_0]$.

1. Si X est une surmartingale alors X vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq X_n.$$

Donc, la v.a $U_n = X_n - E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq 0$ p.s. On en déduit, puisque $E[U_n] = 0$, que $U_n = 0$ p.s., autrement dit $E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$ p.s.

2. Si X est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale, alors par le théorème d'arrêt on a que $E[X_T] = E[X_0]$ pour tout temps d'arrêt borné T.

Réciproquement, on suppose que pour tout temps d'arrêt borné T on a $E[X_T] = E[X_0]$, alors pour montre la propriété de martingale il suffit de montrer que

$$\forall A \in \mathcal{F}_n; \quad E[X_{n+1}\mathbb{1}_A] = E[X_n\mathbb{1}_A].$$

Soit $A \in \mathcal{F}_n$, on pose $T_1(\omega) = n\mathbb{1}_A(\omega) + (n+1)\mathbb{1}_{A^c}(\omega)$ et $T_2 = n+1$, T_1 et T_2 sont bien de temps d'arrêt et

$$\{T_1 \leq k\} = \begin{cases} \emptyset & si \quad k \leq n-1, \\ A & si \quad k = n, \\ \Omega & si \quad k \geq n+1. \end{cases}$$

donc, $\{T_1 \leq k\}$ est $\mathcal{F}_k$-mesurable.

Par définition de T_1, on a $X_{T_1} = X_n\mathbb{1}_A + X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c}$, alors

$$\begin{aligned} E[X_n\mathbb{1}_A] + E[X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c}] &= E[T_1] \\ &= E[X_{n+1}] \\ &= E[X_{n+1}\mathbb{1}_A] + E[X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c}]. \end{aligned}$$

Donc $E[X_n\mathbb{1}_A] = E[X_{n+1}\mathbb{1}_A]$.

Exercice 2 *Soient* $X = \{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *et* $Y = \{Y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *deux martingales sur l'espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$. *Soit* T *un temps d'arrêt tel que sur* $\{T < +\infty\}$, *on a* $X_T = Y_T$.

On pose $Z_n = X_n$ *sur* $\{n \geq T\}$ *et* $Z_n = Y_n$ *sur* $\{n < T\}$. *Montrer que* $\{Z_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *est une martingale par rapport à* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

En écrivant $Z_n = X_n \mathbb{1}_{n\geq T} + Y_n \mathbb{1}_{n<T}$, Z_n est integrable car $\mid Z_n \mid \leq \mid X_n \mid + \mid Y_n \mid$.

Sur l'ensemble $\{T = n+1\}$ on vérifie $Y_{n+1} = Y_T = X_T = X_{n+1}$, alors

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= X_{n+1}\mathbb{1}_{n+1\geq T} + Y_{n+1}\mathbb{1}_{n+1<T} \\ &= X_{n+1}\mathbb{1}_{n+1=T} + X_{n+1}\mathbb{1}_{n\geq T} + Y_{n+1}\mathbb{1}_{n+1<T} \\ &= Y_{n+1}\mathbb{1}_{n+1=T} + X_{n+1}\mathbb{1}_{n\geq T} + Y_{n+1}\mathbb{1}_{n+1<T} \\ &= X_{n+1}\mathbb{1}_{n\geq T} + Y_{n+1}\mathbb{1}_{n<T}. \end{aligned}$$

Comme $\{n < T\}$ and $\{n \geq T\}$ sont $\mathcal{F}_n$-mesurable et X et Y sont des martinagales, on en déduit

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]\mathbb{1}_{n\geq T} + E[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]\mathbb{1}_{n<T} \\ &= X_n\mathbb{1}_{n\geq T} + Y_n\mathbb{1}_{n<T} \\ &= Z_n \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

Le processus Z est donc une martingale.

Exercice 3 *On dit qu'un processus* $\{M_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *est à accroissements indépendants si, pour tout* $n \geq 0$, *la v.a.* $M_{n+1} - M_n$ *est indépendante de la tribu* $\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, \ldots, M_n)$.

1. *Soit* $\{M_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *une martingale de carré intégrable et à accroissements indépendants. On pose* $\sigma_0^2 = \mathrm{Var}(M_0)$ *et, pour* $n \geq 1$, $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(M_n - M_{n-1})$.
   (a) *Montrer que* $\mathrm{Var}(M_n) = \sum_{k=0}^n \sigma_k^2$, *pour tout* $n \geq 0$.
   (b) *Soit* $\langle M\rangle = \{\langle M\rangle_n;\ n \geq 0\}$ *le processus croissant associé à* $\{M_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. *Calculer* $\langle M\rangle_n$.
2. *Soit* $\{M_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *une martingale gaussienne.*
   (a) *Montrer que* $\{M_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *est à accroissements indépendants*
   (b) *Montrer que pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$ *fixé, le processus* $\{Z_n^\theta;\ n \in \mathbb{N}\}$ *défini par*

$$\forall n \geq 0; \quad Z_n^\theta = \exp\left(\theta M_n - \frac{\theta^2}{2}\langle M\rangle_n\right)$$

   est une martingale.

1. (a) Pour tout $n \geq 0$, on peut écrire $M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})$, c.á.d. M_n peut être écrit comme une somme de v.a. indépendantes. Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(M_n) &= \mathrm{Var}(M_0) + \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(M_k - M_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sigma_n^2. \end{aligned}$$

(b) Le processus $\langle M \rangle$ est caractérise par $\langle M \rangle_0 = 0$ et

$$E[(M_{k+1} - M_k)^2 \mid \mathcal{F}_k] = \langle M \rangle_{k+1} - \langle M \rangle_k \quad p.s.$$

Comme $M_{k+1} - M_k$ est indépendante de $\mathcal{F}_k$, on a

$$E[(M_{k+1} - M_k)^2 \mid \mathcal{F}_k] = E[(M_{k+1} - M_k)^2] = \sigma_k^2,$$

donc,

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_n^2.$$

2. (a) Pour montrer que $M_n - M_{n-1}$ est indépendante de $\mathcal{F}_n$, il suffit de montrer que $M_n - M_{n-1}$ est indépendante de $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$.
On a que $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ est une vecteur gaussien car il est une transformation du vecteur gaussien $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$, donc $M_n - M_{n-1}$ et M_k sont v.a. gaussiennes pour $k = 1, \ldots, n$. Maintenant, il suffit de remarque que $M_n - M_{n-1}$ et M_k ne sont pas corrélées pour $k = 1, \ldots, n$, i.e.

$$E[(M_n - M_{n-1})M_k] = E[E[(M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_n]M_k] = 0,$$

car $E[(M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_n] = 0$.

(b) Soit θ fixé, (rappelons que si X est une v.a. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors $E[e^{\theta X}] = e^{\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}$), alors

$$\begin{aligned}
E\left[Z_n^\theta \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] &= E\left[e^{\theta M_n - \frac{\theta^2}{2}\langle M \rangle_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] \\
&= e^{\theta M_{n-1} - \frac{\theta^2}{2}\langle M \rangle_n} E\left[e^{\theta(M_n - M_{n-1})} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] \\
&= e^{\theta M_{n-1} - \frac{\theta^2}{2}\langle M \rangle_n} e^{\frac{\theta^2}{2}\sigma_n^2} \\
&= e^{\theta M_{n-1} - \frac{\theta^2}{2}\langle M \rangle_n} e^{\frac{\theta^2}{2}(\langle M \rangle_n - \langle M \rangle_{n-1})} \\
&= Z_{n-1}.
\end{aligned}$$

Le processus Z est donc une martingale.

Eléments de correction du TD4
Convergence de martingales

Erick Herbin, Alexandre Richard

9 décembre 2019

Exercice 1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ *un espace de probabilité filtré et* $M = \{M_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *une martingale réelle telle que pour tout* $n \geq 0$, $|M_n| \leq K$.

On pose pour tout $n \geq 1$

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(M_k - M_{k-1}).$$

Montrer que $\{X_n;\ n \geq 1\}$ *est une* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$*-martingale qui converge p.s. et dans* L^2.

Correction Soit $n \in \mathbb{N}$. On justifie que X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et $X_n \in L^1$. Enfin,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(M_k - M_{k-1}) + \frac{1}{n+1}\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(M_k - M_{k-1}) + 0 \\
&= X_n
\end{aligned}$$

le deuxième terme de l'égalité de droite étant nulle puisque $\{M_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une martingale. Ainsi, $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une martingale.

Appliquons à $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ le résultat de convergence des martingales bornées dans L^2. Pour commencer, remarquons que, pour $1 \leq k < l$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((M_k - M_{k-1})(M_l - M_{l-1})) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}((M_k - M_{k-1})(M_l - M_{l-1})|\mathcal{F}_{l-1})\big) \\
&= \mathbb{E}\big((M_k - M_{k-1})\mathbb{E}((M_l - M_{l-1})|\mathcal{F}_{l-1})\big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Maintenant, calculons $\mathbb{E}(X_n^2)$:

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(M_k - M_{k-1})\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}(M_k - M_{k-1})^2\Big]$$

grâce à la remarque précédente. Et comme, $\forall k \geq 0$, $(M_k - M_{k-1})^2 \leq 4K^2$,

$$\mathbb{E}[X_n^2] \leq 4K^2 \sum_{k=1}^{n} \leq 4K^2 \frac{\pi^2}{6}.$$

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans L^2, et par le théorème de convergence L^p $(p \geq 2)$, elle converge p.s. et dans L^2.

Exercice 2 (Loi 0-1 de Kolmogorov) *Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On définit*

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n), \quad \mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\right)$$
$$\mathcal{F}^n = \sigma(Y_n, Y_{n+1}, \dots), \quad \mathcal{F}^\infty = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}^n.$$

1. *Soit $A \in \mathcal{F}^\infty$.*
   (a) *Justifier que le processus $\{Z_n;\ n \geq 0\}$ défini par $Z_n = E[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_n]$ pour tout $n \geq 0$, est une martingale.*
   (b) *Montrer que A est indépendant de $\mathcal{F}_n$.*
   (c) *En déduire $E[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_n]$.*
   (d) *Etudier la convergence de $\{Z_n;\ n \geq 0\}$.*
   (e) *Montrer que $P(A) = 0$ ou 1.*
2. *Soit X une variable aléatoire réelle $\mathcal{F}^\infty$-mesurable. En utilisant la fonction de répartition de X, montrer qu'il existe un réel a tel que $X = a$ p.s.*

Correction

1. (a) Soit $A \in \mathcal{F}^\infty$. $\forall n \in \mathbb{N}$, Z_n est bien définie car $\mathbb{1}_A \in L^1$.
   Montrons que $\{Z_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une martingale.
   Pour tout n, Z_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et $Z_n \in L^1$ (pourquoi ?). Enfin, presque sûrement,

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n\Big) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n) = Z_n.$$

   (b) Fixons $n \in \mathbb{N}$. $A \in \mathcal{F}^\infty$ donc en particulier, $A \in \mathcal{F}^{n+1} = \sigma(Y_{n+1}, Y_{n+2}, ...)$ qui est indépendante de $\sigma(Y_1, ..., Y_n) = \mathcal{F}_n$ car les Y_i sont indépendantes. Donc A est indépendant de $\mathcal{F}_n$.
   (c) Comme A est indépendant de $\mathcal{F}_n$, pour tout n on a $Z_n = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
   (d) Etudions maintenant la convergence de Z_n, en oubliant momentanément le résultat de la question précédente. $\{Z_n;\ n \geq 0\}$ est une martingale de la forme

$\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$, on montre facilement qu'elle est uniformément bornée dans L^1 et donc converge presque sûrement vers une variable intégrable Z_∞. Montrons que

$$Z_\infty = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_\infty).$$

Z_∞ est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable puisque limite d'une suite de variables aléatoires $\mathcal{F}_\infty$-mesurables. Comme pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout $B \in \mathcal{F}_n$,

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(Z_n\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(Z_\infty\mathbb{1}_B)$$

(la dernière égalité provient de l'écriture : $Z_n = \mathbb{E}(Z_\infty|\mathcal{F}_n)$), et comme la dernière égalité reste vraie pour tout $B \in \sigma(\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n) = \mathcal{F}_\infty$, il en résulte l'écriture recherchée de Z_∞.
Enfin, $A \in \mathcal{F}^\infty \subset \mathcal{F}_\infty$, donc :

$$Z_\infty = \mathbb{1}_A$$

(e) Il découle de (c) et (d) que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{1}_A \in \{0,1\}$.

2. $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X^{-1}(-\infty, t])$$

X étant $\mathcal{F}^\infty$-mesurable, $\{X \leq t\} \in \mathcal{F}^\infty$ et donc d'après la question précédente, $\mathbb{P}(\{X \leq t\}) \in \{0,1\}$.
Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X < a) = 0$ et $\mathbb{P}(X \geq a) = 1$. Or F est continue à droite (c'est une fonction de répartition), donc $\mathbb{P}(X = a) = 1$, ce qui est le résultat attendu.

Exercice 3 *Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires intégrables à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes et de même loi μ. On suppose que $E[Y_i] = m < 0$ et $P(Y_i = 1) > 0$, $P(Y_i \geq 2) = 0$. On pose $X_0 = 0$, $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ pour tout $n \geq 1$ et*

$$W = \sup_{n\geq 0} X_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la loi de W.

1. *Montrer que $W < +\infty$ presque surement.*
2. *Soit X une v.a. réelle. On note $M(\lambda) = E[e^{\lambda.X}]$ sa transformée de Laplace et $\psi(\lambda) = \log M(\lambda)$. Montrer que ψ est une fonction convexe (utiliser l'inégalité de Hölder).*
3. (a) *On pose $M(\lambda) = E[e^{\lambda.Y_1}]$ et $\psi(\lambda) = \log M(\lambda)$. Montrer que $\psi(\lambda) < +\infty$ pour tout $\lambda \geq 0$.*
   (b) *Que vaut $\psi'(0+)$?*
   (c) *Montrer que $\psi(\lambda) \to +\infty$ lorsque $\lambda \to +\infty$ et qu'il existe un unique $\lambda_0 > 0$ tel que $\psi(\lambda_0) = 0$.*
4. *Soit λ_0 comme dans 3(c). Montrer que le processus $Z = \{Z_n;\ n \geq 0\}$ défini par $Z_n = e^{\lambda_0 X_n}$ pour tout $n \geq 0$, est une martingale. Justifier que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$ p.s.*
5. *Soient $k \in \mathbb{N}$ et τ_k le premier temps de passage de $\{X_n;\ n \geq 1\}$ par k. Montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} Z_{n\wedge\tau_k} = e^{\lambda_0 k}\mathbb{1}_{\{\tau_k<+\infty\}}.$$

6. *Calculer $P(\tau_k < +\infty)$ et en déduire la loi de W. Préciser cette loi si les v.a. Y_i sont telles que $P(Y_i = 1) = p < \frac{1}{2}$ et $P(Y_i = -1) = q = 1 - p$.*

Correction

1. Par la loi forte des grands nombres, on a presque surement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = m < 0,$$

et donc $\lim_{n\to\infty} Y_n = -\infty$. On en déduit facilement que $W = \sup_{n\geq 0} Y_n < +\infty$ p.s.

2. D'après l'inégalité de Hölder, pour tous $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, on a

$$M(\alpha s + \beta t) = E\left[(e^{sX})^\alpha (e^{tX})^\beta\right] \leq \left(E[e^{sX}]\right)^\alpha \left(E[e^{tX}]\right)^\beta = [M(s)]^\alpha [M(t)]^\beta,$$

ce qui montre la convexité de ψ.

3. (a) Comme $Y_1 \leq 1$ p.s., on a pour tout $\lambda \geq 0$, $e^{\lambda Y_1} \leq e^\lambda$ p.s. D'où $M(\lambda) < +\infty$ p.s.

   (b) En dérivant sous le signe $\int .dP$, on montre que $M'(0+) = E[Y_i] = m$. On en déduit
$$\psi'(0+) = \frac{M'(0+)}{M(0)} = m < 0,$$
en utilisant $M(0) = 1$.

   (c) On a $M(\lambda) \geq e^\lambda P(Y_1 = 1)$, par définition de $E[e^{\lambda Y_1}]$.
On en déduit $\lim_{\lambda\to+\infty} \psi(\lambda) = +\infty$.
La fonction $\lambda \mapsto \psi(\lambda)$ est continue, nulle en 0 avec une dérivée à droite strictement négative et converge vers $+\infty$ pour $\lambda \to +\infty$. Il existe donc un réel $\lambda_0 > 0$ tel que $\psi(\lambda_0) = 0$ (pourquoi ?). Par convexité, ce λ_0 est unique (pourquoi ?).

4. On considère la filttration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Pour tout $n \geq 0$, Z_n est évidemment $\mathcal{F}_n$-mesurable et intégrable car les Y_i sont intégrables. De plus,

$$E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[Z_n e^{\lambda_0 Y_{n+1}}|\mathcal{F}_n] = Z_n E[e^{\lambda_0 Y_{n+1}}|\mathcal{F}_n] = Z_n E[e^{\lambda_0 Y_{n+1}}] = Z_n,$$

car $\psi(\lambda_0) = \log E[e^{\lambda_0 Y_{n+1}}] = 0$.
Comme $\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$ p.s., on a $\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$ p.s.

5. On distingue les deux cas :

$$\lim_{n\to\infty} Z_{n\wedge\tau_k} = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} Z_n = 0 & \text{sur } \{\tau_k = +\infty\} \\ Z_{\tau_k} = e^{\lambda_0 k} & \text{sur } \{\tau_k < +\infty\} \end{cases}$$

Comme X_n fait un incrément d'au plus 1 à chaque transition $n \to n+1$, on a nécessairement $X_{\tau_k} = k$.

6. La martingale $(Z_{n\wedge\tau_k})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $e^{\lambda_0 k}$ donc on peut écrire

$$1 = E[Z_0] = \lim_{n\to\infty} E[Z_{n\wedge\tau_k}] = e^{\lambda_0 k}\ P\{\tau_k < +\infty\}.$$

On en déduit

$$P(W \geq k) = P\{\tau_k < +\infty\} = e^{-\lambda_0 k}.$$

Avec la loi de Y_i donnée, on calcule

$$M(\lambda) = qe^{-\lambda} + pe^{\lambda},$$

et on détermine $\lambda_0 > 0$ tel que $M(\lambda_0) = 0$. On trouve $\lambda_0 = \log \frac{q}{p}$, ce qui donne pour la loi de W

$$P(W \geq k) = \left(\frac{p}{q}\right)^k.$$

Eléments de correction du TD5
Chaînes de Markov

Pierre-Emmanuel Lévy

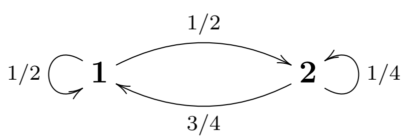
18 décembre 2019 et 6 janvier 2020

Exercice 1 *On dispose dans une maison individuelle de deux systèmes de chauffage, l'un de base et l'autre d'appoint. On dira qu'on est dans l'état* 1 *si seul le chauffage de base fonctionne, dans l'état* 2 *si les deux systèmes fonctionnent.*

Si un jour on est dans l'état 1*, on estime qu'on y reste le lendemain avec probabilité* $\frac{1}{2}$ *; par contre, si l'on est dans l'état* 2*, le lendemain la maison est chaude et on passe à l'état* 1 *avec la probabilité* $3/4$*. Soit* X_n *l'état du système au jour numéro* n *; on admet que* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une chaîne de Markov homogène.*

1. *Déterminer sa matrice de transition et son graphe.*
2. *On pose* $p_n = P(X_n = 1)$*. Déterminer une relation de récurrence entre* p_n *et* p_{n+1}*, puis exprimer* p_n *en fonction de* p_0*. Que vaut* $\lim_{n\to+\infty} p_n$ *?*
3. *Sachant qu'on est dans l'état* 1 *un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant.*
4. *Montrer que si un jour on se trouve dans l'état* 1 *avec probabilité* $\frac{3}{5}$*, alors il en est de même tous les jours qui suivent.*
5. *Chaque journée dans l'état* 1 *coûte* 10 *euros, dans l'état* 2 *coûte* 20 *euros, et chaque transition de l'état* 1 *à l'état* 2 *ou inversement coûte* 5 *euros.*
   Calculer le coût moyen d'une journée dans la situation précédente.

1. La lecture de l'énoncé permet d'établir le graphe suivant pour la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$:



   Les lignes de la matrice de transition Q correspondent aux différentes flèches partant de chaque état :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2. On écrit $p_{n+1} = E\left[1_{X_{n+1}=1}\right]$ et on conditionne par rapport à X_n :
$$\begin{aligned} p_{n+1} &= E\left[E\left[\mathbb{1}_{X_{n+1}=1}|X_n\right]\right] \\ &= E\left[Q(X_n, 1)\right] \\ &= \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{3}{4}P(X_n = 2) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}p_n \end{aligned}$$
Notons que ce raisonnement revient à appliquer la formule de probabilités totales pour décomposer l'événement $\{X_{n+1} = 1\}$ suivant le système complet d'événements $\{X_n = 1\}, \{X_n = 2\}$.

   La relation obtenue montre que la suite (p_n) est arithmético-géométrique ; la suite $(p_n - 3/5)$ est géométrique de raison $-1/4$ et on obtient :
$$p_n = \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(p_0 - \frac{3}{5}\right)$$
En particulier $p_\infty := \lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{5}$, et ce quelle que soit la valeur de p_0 : la chaîne finit par oublier sa loi initiale.

3. On cherche donc la probabilité de se retrouver à nouveau dans l'état 1 après 7 transitions de la chaîne, sachant qu'on était parti de l'état 1, c'est-à-dire $Q^7(1, 1)$.
Autrement dit, on cherche la valeur de p_7 lorsque $p_0 = 1$. La question précédente montre que la probabilité obtenue est $p_7 = \frac{3}{5} - \frac{2^{-13}}{5}$; on remarque que cette valeur est déjà très proche de p_∞ (la différence est inférieure à 10^{-5}).

4. Il suffit de remarquer que $3/5$ est un (le) point fixe de la relation de récurrence établie à la question 2.
On peut exprimer ce resultat d'une autre manière : si μ est la (matrice-ligne représentant la) loi de X_n lorsque $p_n = 3/5$, alors on sait que la loi de X_{n+p} est μQ^p. Dans le cas où $\mu = (3/5,\ 2/5)$, on a $\mu Q = \mu$ et par récurrence $\mu Q^p = \mu$ pour tout $p \in \mathbb{N}$; on dit que μ est une mesure invariante pour la chaîne.

5. Notons C_n la variable aléatoire égale au coût en euros de la journée n. D'après l'énoncé, on a
$$C_n = 10 \cdot \mathbb{1}_{X_n=1} + 20 \cdot \mathbb{1}_{X_n=2} + 5 \cdot \mathbb{1}_{X_n \neq X_{n-1}}$$
En passant aux espérances :
$$E(C_n) = 10p_n + 20(1 - p_n) + 5 \cdot P(X_n \neq X_{n-1})$$
En raisonnant comme dans la question 2. (conditionnement ou formule des probabilités totales) on obtient :
$$P(X_n \neq X_{n-1}) = p_{n-1}Q(1, 2) + (1 - p_{n-1})Q(2, 1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}p_{n-1}$$

Finalement :
$$E(C_n) = \frac{95}{4} - 10p_n - \frac{5}{4}p_{n-1}$$
Dans le cadre de la question 4, $p_{n-1} = p_n = 3/5$ et on obtient $E(C_n) = 17$.

Exercice 2 *1. Soient E un ensemble dénombrable, $(S, \mathcal{S})$ un espace mesurable et $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans S, indépendantes et de même loi.*
On définit une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ par

$$X_0 = x \in E$$
$$\forall n \geq 0, \quad X_{n+1} = \Phi(X_n, Y_{n+1})$$

où $\Phi : E \times S \to E$ est une application mesurable.
Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition.

2. Soient μ une mesure de probabilité et Q une matrice de transition sur $E = \{0, 1, ..., m\}$ ou $E = \mathbb{N}$. On pose $t_0 = 0$, $t_1 = \mu(0)$ et

$$\forall n \geq 2, \quad t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(k).$$

On pose pour $i \in E$, $s_0^{(i)} = 0$, $s_1^{(i)} = Q(i, 0)$ et

$$\forall n \geq 2, \quad s_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{n-1} Q(i, k).$$

On définit ensuite ψ et g par

$$\psi(1) = 1 \ \text{ et } \ \psi(x) = k \ \text{ si } x \in [t_k, t_{k+1}[$$
$$g(i, 1) = 1 \ \text{ et } \ g(i, x) = k \ \text{ si } x \in \left[s_k^{(i)}, s_{k+1}^{(i)}\right[$$

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose :

$$X_0 = \psi(U_0)$$
$$\forall n \geq 0, \quad X_{n+1} = g(X_n, U_{n+1})$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de loi initiale μ et de matrice de transition Q.

1. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration naturelle de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$, i.e. $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \vee \sigma(Y_{n+1})$. Montrons que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

On montre facilement, par récurrence, que $(X_n)_{n\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-adaptée. Soient $j \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$P(X_{n+1} = j \,|\, \mathcal{F}_n) = E[\mathbb{1}_{\Phi(X_n, Y_{n+1})=j} \,|\, \mathcal{F}_n]$$

Etant donné que X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, et que Y_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$, on peut appliquer le résultat de l'exercice 2.4 à la fonction mesurable positive $f(x,y) = \mathbb{1}_{\Phi(x,y)=j}$; l'espérance conditionnelle est donc égale à $\Psi_j(X_n)$, où Ψ_j est définie par

$$\Psi_j(i) = E[\mathbb{1}_{\Phi(i, Y_{n+1})=j}] = P(\Phi(i, Y_1) = j)$$

puisque les Y_k ont tous la même loi. On a donc montré que :

$$P(X_{n+1} = j \,|\, \mathcal{F}_n) = \Psi_j(X_n)$$

Cette quantité ne dépendant que de X_n, le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est bien une chaîne de Markov, et sa matrice de transition est donnée par $S(i,j) = \Psi_j(i)$.

2. Le raisonnement fait dans la question précédente s'applique presque tel quel, en choisissant $S = [0,1]$, $Y_n = U_n$ et $\Phi = g$. La seule différence est que dans ce cas la tribu $\mathcal{F}_0$ n'est plus triviale : $\mathcal{F}_0 = \sigma(U_0)$.
   En particulier on peut à nouveau affirmer que la matrice de transition de $(X_n)_{n\geq 0}$ est donnée par

   $$S(i,j) = \Psi_j(i) = P(g(i, U_0) = j)$$

   Or, pour tout $u \in [0,1[$, on a $g(i,u) = j$ si et seulement si $u \in \left[s_j^{(i)}, s_{j+1}^{(i)}\right[$, donc puisque l'événement $\{U_0 = 1\}$ est négligeable :

   $$S(i,j) = P\left(s_j^{(i)} \leq U_0 < s_{j+1}^{(i)}\right) = s_{j+1}^{(i)} - s_j^{(i)} = Q(i,j)$$

   De plus la loi initiale de la chaîne est donnée par :

   $$P(X_0 = j) = P(\psi(X_0) = j) = P(t_j \leq U_0 < t_{j+1}) = \mu(j)$$

   Conclusion : $(X_n)_{n\geq 0}$ est bien une chaîne de Markov de loi initiale μ et de matrice de transition Q.

Exercice 3 (Bruit qui court) *Un message pourvant prendre deux formes différentes (« oui » et « non ») est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité p telle que $0 < p < 1$ ou le déforme en son contraire avec probabilité $1-p$; les intermédiaires sont indépendants.*

Modéliser cette situation par une chaîne de Markov à deux états et calculer la probabilité que l'information transmise par le n-ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale.

Que se passe-t-il lorsque $n \to +\infty$?

On choisit comme espace d'état la paire $E = \{0,\, 1\}$, 0 représentant « non » et 1 représentant « oui ». On numérote les intermédiaires de 1 à n, et on note X_j l'information transmise par l'intermédiaire numéro j ; l'intermédiaire numéro 1 reçoit l'information $X_0 = x \in E$ et transmet X_1, etc.

D'après l'énoncé, on a $P(X_{j+1} = X_j \,|\, X_j) = p$, ce qui conduit à la matrice de transition suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

La probabilité recherchée, $\pi_n = P(X_n = X_0)$, est égale à $Q^n(0,0) = Q^n(1,1)$. On peut trouver une relation de récurrence sur les π_j comme dans le premier exercice de cette feuille, mais on peut également calculer directement Q^n.

En effet, Q est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée. Comme pour toute matrice de transition, $(1,\, 1)^t$ est un vecteur propre à droite de Q pour la valeur propre 1, on le normalise et on complète avec un vecteur orthogonal pour obtenir la base :

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Un rapide calcul montre que $Q\,V = (2p-1)V$, ce qui permet d'écrire $Q = \Omega\, D\, \Omega^t$, avec $D = \mathrm{diag}(1,\, 2p-1)$ et Ω la matrice de la base (U, V) dans la base canonique.

Par conséquent $Q^n = \Omega\, D^n\, \Omega^t$, et la quantité recherchée est $Q^n(0,0) = e^t\, Q^n\, e$, où e est le vecteur $(1,\, 0)^t$, soit tous calculs fait :

$$\pi_n = \frac{1 + (2p-1)^n}{2}$$

Lorsque $n \to +\infty$, on a $\pi_n \to \frac{1}{2}$, puisque $0 < p < 1$; ce qui signifie qu'à long terme le message a autant de chances d'être erroné que correctement transmis.

Exercice 4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, (P_x)_{x\in E})$ une chaîne de Markov canonique à valeurs dans E dénombrable, de matrice de transition Q.*

Soit $F \subset E$ et $\tau_F = \inf\{n \geq 0 \,:\, X_n \in F\}$ le temps d'entrée en F. On considère le processus Y, défini par $Y_n = X_{n\wedge \tau_F}$ pour tout $n \geq 0$.

Montrer que Y est une chaîne de Markov dont on déterminera la matrice de transition.

Le processus défini dans l'exercice est la chaîne X arrêtée au temps τ_F, c'est-à-dire la première fois qu'elle atteint F. Son évolution suit donc celle de X, jusqu'à l'instant τ_F, à partir duquel elle est figée, et ce mécanisme est bien markovien.

On s'attend donc à ce que Y soit une chaîne de Markov sur E telle que tous les états de F soient absorbants, et que les lois de transition à partir des états hors de F soient les mêmes que pour X. Formalisons cette intuition.

Soit $n \in \mathbb{N}$; on note A l'événement $\{\tau_F \leq n\}$. Notons qu'on a également $A = \{Y_n \in F\}$. De plus on a :

$$n \wedge \tau_F = \tau_F \cdot \mathbb{1}_A + n \cdot \mathbb{1}_{A^c} \quad ; \quad (n+1) \wedge \tau_F = \tau_F \cdot \mathbb{1}_A + (n+1) \cdot \mathbb{1}_{A^c}$$

Soit $j \in E$; calculons $P(Y_{n+1} = j \,|\, \mathcal{F}_n)$.

$$\begin{aligned}
P(Y_{n+1} = j \,|\, \mathcal{F}_n) &= E[\mathbb{1}_{X_{(n+1)\wedge\tau_F}=j} \,|\, \mathcal{F}_n] \\
&= E[\mathbb{1}_{X_{(n+1)\wedge\tau_F}=j} \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{X_{(n+1)\wedge\tau_F}=j} \mathbb{1}_{A^c} \,|\, \mathcal{F}_n] \\
&= E[\mathbb{1}_{X_{\tau_F}=j} \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{X_{n+1}=j} \mathbb{1}_{A^c} \,|\, \mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{1}_{X_{\tau_F}=j} \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c} E[\mathbb{1}_{X_{n+1}=j} \,|\, \mathcal{F}_n]
\end{aligned}$$

en remarquant que A et $X_{\tau_F} \cap A$ sont $\mathcal{F}_n$-mesurables. La propriété de Markov montre que la dernière espérance vaut $Q(X_n, j)$, donc on obtient

$$\begin{aligned}
P(Y_{n+1} = j \,|\, \mathcal{F}_n) &= \mathbb{1}_{X_{\tau_F}=j} \mathbb{1}_A + Q(X_n, j) \mathbb{1}_{A^c} \\
&= \mathbb{1}_{X_{n\wedge\tau_F}=j} \mathbb{1}_A + Q(X_{n\wedge\tau_F}, j) \mathbb{1}_{A^c} \\
&= \mathbb{1}_{Y_n=j} \mathbb{1}_{Y_n \in F} + Q(Y_n, j) \mathbb{1}_{Y_n \notin F} \\
&=: S(Y_n, j)
\end{aligned}$$

Cette dernière expression étant $\sigma(Y_n)$-mesurable, on a montré que Y était une $(\mathcal{F}_n)$-chaîne de Markov. De plus sa matrice de transition S est donnée par

$$S(i,j) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } i \in F \\ Q(i,j) & \text{si } i \notin F \end{cases}$$

Ce qui est bien la matrice de transition annoncée : les lignes correspondant aux états de F sont les mêmes que pour la matrice identité, et celles correspondant aux états hors de F sont les mêmes que dans Q.

Exercice 5 *Soit X une chaîne de Markov canonique sur E dénombrable, de matrice de transition Q. Soient $A \subset E$ et $\tau_A = \inf\{n \geq 0 \,:\, X_n \in A\}$ le temps d'entrée dans A. On suppose qu'il existe $n \geq 1$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $x \in A^c$, $Q^n(x, A) \geq \alpha$.*

1. *Montrer que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in E$,*

$$P_x(\tau_A > kn) \leq (1-\alpha)^k.$$

En déduire que $E_x(\tau_A) \leq n/\alpha$ et qu'en particulier $\tau_A < +\infty$ P_x-p.s.

2. *Montrer que pour tout $u > 0$,*

$$P_x(\tau_A > u) \leq (1-\alpha)^{-1}(1-\alpha)^{u/n}.$$

En déduire que pour tout $\rho < -\frac{1}{n}\log(1-\alpha)$, $E_x\left[e^{\rho\tau_A}\right] < +\infty$.
Indication : on montrera d'abord que $E_x\left[e^{\rho\tau_A}\right] = 1 + \rho\int_0^{+\infty} e^{\rho u} P_x(\tau_A > u)\, du$.

1. Notons, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in E$, $\pi_k(x) = P_x(\tau_A > kn)$. On va montrer par récurrence sur k l'assertion :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in E,\ \pi_k(x) \leq (1-\alpha)^k$$
Quelques remarques :

   - Pour $x \in A$, on a $\tau_A = 0$ P_x-p.s. et donc $\pi_k(x) = 0$ pour tout k. Le cas intéressant est donc celui où $x \notin A$.
   - Pour $x \in A^c$, $k = 0$, on a $\pi_0(x) = P_x(X_0 \notin A) = 1$ donc l'inégalité est vérifiée.
   - Pour $x \in A^c$, $k = 1$, on a
$$\pi_1(x) = P_x\left(X_p \notin A,\ 0 \leq p \leq n\right) \leq P_x(X_n \notin A) = Q^n(x, A^c) \leq 1-\alpha$$
donc l'inégalité est encore vérifiée.

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_E \pi_k \leq (1-\alpha)$. Soit $x \in E$. On a :
$$\begin{aligned}\pi_{k+1}(x) &= P_x\left(\bigcap_{p=0}^{(k+1)n} \{X_p \notin A\}\right)\\ &\leq P_x\left(\bigcap_{p=0}^{kn}\{X_p \notin A\} \cap \{X_{(k+1)n} \notin A\}\right)\\ &\leq E_x\left[\prod_{p=0}^{kn} \mathbb{1}_{X_p \notin A} \cdot \mathbb{1}_{X_{(k+1)n} \notin A}\right]\end{aligned}$$

On conditionne par $\mathcal{F}_{kn}$, et on applique la propriété de Markov (faible) :
$$\begin{aligned}\pi_{k+1}(x) &\leq E_x\left[E_x\left[\prod_{p=0}^{kn} \mathbb{1}_{X_p \notin A} \cdot \mathbb{1}_{X_{(k+1)n} \notin A} \mid \mathcal{F}_{kn}\right]\right]\\ &\leq E_x\left[\prod_{p=0}^{kn} \mathbb{1}_{X_p \notin A} E_x\left[\mathbb{1}_{X_(k+1)n \notin A} \mid \mathcal{F}_{kn}\right]\right]\\ &\leq E_x\left[\prod_{p=0}^{kn} \mathbb{1}_{X_p \notin A} Q^n(X_{kn}, A^c)\right]\end{aligned}$$
Sur l'évènement $\{X_{kn} \in A\}$, le produit d'indicatrices est nul, et sur l'évènement contraire la quantité $Q^n(X_{kn}, A^c)$ est majorée par $(1-\alpha)^n$, donc on peut écrire :
$$\begin{aligned}\pi_{k+1}(x) &\leq E_x\left[(1-\alpha)\prod_{p=0}^{kn} \mathbb{1}_{X_p \notin A}\right]\\ &\leq (1-\alpha) E_x\left[\prod_{p=0}^{kn} \mathbb{1}_{X_p \notin A}\right]\\ &\leq (1-\alpha)\pi_k(x)\end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, ceci est inférieur à $(1-\alpha)^{k+1}$, ce qui établit la proposition demandée.

Notons que l'hérédité peut également être établie en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_n$, et en écrivant de manière similaire (détails laissés au lecteur) :

$$\begin{aligned}
\pi_{k+1}(x) &= P_x\left(\bigcap_{p=0}^{(k+1)n}\{X_p \notin A\}\right) \\
&\leq E_x\left[\prod_{p=n}^{(k+1)n} \mathbb{1}_{X_p\notin A}\right] \\
&\leq E_x\left[E_x\left[\prod_{p=n}^{(k+1)n} \mathbb{1}_{X_p\notin A} \mid \mathcal{F}_n\right]\right] \\
&\leq E_x\left[E_{X_n}\left[\prod_{p=0}^{kn} \mathbb{1}_{X_p\notin A}\right]\right] \\
&\leq E_x\left[\pi_k(X_n)\right] \\
&\leq (1-\alpha)^k P_x(X_n \in A^c) = (1-\alpha)^k Q(x, A^c) \\
&\leq (1-\alpha)^{k+1}
\end{aligned}$$

On sait que pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ on a la relation :

$$E[Z] = \sum_{p=0}^{+\infty} P(Z > p)$$

Dans le cas où $Z = \tau_A$, on peut regrouper les termes de la série par paquet de n termes (le terme général étant positif) et on obtient, en utilisant la décroissance de $p \mapsto P(\tau_A > p)$:

$$\begin{aligned}
E[\tau_A] &= \sum_{p=0}^{+\infty} P(\tau_A > p) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n-1} P(\tau_A > kn + j) \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} nP(\tau_A > kn) \\
&\leq n\sum_{k=0}^{+\infty}(1-\alpha)^k = \frac{n}{\alpha}
\end{aligned}$$

Par conséquent la variable τ_A est P_x-intégrable, et donc en particulier elle est finie P_x-p.s.

2. Commençons par établir l'indication donnée dans l'énoncé. Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on sait que :

$$E[Z] = \int_0^{+\infty} P(Z > z)\, dz$$

En appliquant ceci à $Z = e^{\rho\tau_A}$ pour $\rho > 0$

$$E[e^{\rho\tau_A}] = \int_0^{+\infty} P(e^{\rho\tau_A} > z)\, dz$$

En remarquant que l'intégrande vaut 1 sur $[0,1]$ et en effectuant le changement de variable $z = e^{\rho u}$ dans l'intégrale restante on obtient :

$$\begin{aligned} E[e^{\rho\tau_A}] &= 1 + \int_1^{+\infty} P(e^{\rho\tau_A} > z)\, dz \\ &= 1 + \int_0^{+\infty} P(e^{\rho\tau_A} > e^{\rho u})\, \rho e^{\rho u}\, du \\ &= 1 + \rho \int_0^{+\infty} e^{\rho u}\, P(\tau_A > u)\, du \end{aligned}$$

Revenons à la question initiale ; pour tout $u > 0$ on peut écrire $u = kn + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in [0, n[$ uniques. On peut alors écrire

$$P(\tau_A > u) \leq P(\tau_A > kn) \leq (1-\alpha)^k = (1-\alpha)^{(u-r)/n} \leq (1-\alpha)^{u/n-1}$$

puisque $1 - \alpha \in]0,1[$ et $r/n \leq 1$.
Cette estimation montre que $u \mapsto e^{\rho u}\, P(\tau_A > u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ dès que

$$e^{\rho u}(1-\alpha)^{u/n} = \exp\left(\left(\rho + \frac{1}{n}\log(1-\alpha)\right) u\right)$$

l'est, donc dès que $\rho < \frac{1}{n}\log(1-\alpha)$. Dans ce cas l'intégrale écrite plus haut converge et donc $E[e^{\rho\tau_A}] < +\infty$.
La transformée de Laplace de τ_A est donc définie sur un voisinage de l'origine (il est clair qu'elle est bien définie pour $\rho \leq 0$), et par conséquent τ_A admet des moments de tous ordres.

Eléments de correction du TD6
Classification des états

Erick Herbin

6 et 8 janvier 2020

Exercice 1 *On considère une chaîne de Markov canonique* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, (P_x)_{x\in E})$ *à valeurs dans* E *dénombrable, de matrice de transition* Q*. On suppose qu'il existe un état* $x_0 \in E$ *tel que*

(i.) x_0 *conduit à tout autre état* $x \in E$*,*

(ii.) $P_x(\tau_{x_0} < \infty) = 1$ *pour tout* $x \in E$*.*

Montrer que la chaîne est récurrente irréductible.

Correction Pour tous $x, y \in E$, x conduit à x_0 d'après *(ii.)* et x_0 conduit à y d'après *(i.)*. Donc la chaîne de Markov canonique est irréductible.

Pour montrer que la chaîne est récurrente, il suffit de trouver un état récurrent (ce qui implique que tous les états sont récurrents, puisque la chaîne est irréductible). Montrons donc que x_0 est un état récurrent, c'est-à-dire que

$$P_{x_0}(H_{x_0} < +\infty) = 1.$$

Les temps d'arrêt τ_{x_0} (temps d'atteinte de l'état x_0) et H_{x_0} (temps de retour en x_0, de la chaîne partie de x_0) sont reliés par

$$H_{x_0} = 1 + \tau_{x_0} \circ \theta_1,$$

où θ_1 est l'opérateur de translation de $+1$.

D'après la propriété de Markov, on a

$$\begin{aligned} P_{x_0}(H_{x_0} < +\infty) &= E_{x_0}\left[\mathbb{1}_{\{\tau_{x_0}<+\infty\}} \circ \theta_1\right] \\ &= E_{x_0}\left(E_{X_1}\left[\mathbb{1}_{\{\tau_{x_0}<+\infty\}}\right]\right) \\ &= E_{x_0}\underbrace{\left[P_{X_1}(\tau_{x_0} < +\infty)\right]}_{=1\ P_{x_0}-p.s.} = 1. \end{aligned}$$

(Quelle est la signification de P_{X_1} ? Pourquoi $P_{X_1}(\tau_{x_0} < +\infty) = 1$?)

Donc l'état x_0 est récurrent.

Exercice 2 *Classer suivant les valeurs des nombres p_k, q_k ($k \geq 0$), les états de la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition donnée par*

$$\begin{aligned} &Q(0,0) = \alpha, \quad Q(0,1) = 1-\alpha, \\ &Q(1,2) = \beta, \quad Q(1,3) = 1-\beta, \\ \forall k \geq 2; \quad &Q(k,1) = p_k, \quad Q(k,k+2) = q_k = 1-p_k \end{aligned}$$

où $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, et $0 < p_k < 1$ pour tout $k \geq 2$.

Correction D'après la matrice de transition de la chaîne de Markov $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, on remarque qu'aucun état ne conduit à l'état 0. Ainsi $\{1, 2, \ldots\}$ constitue une classe close.

D'autre part, comme $0 \rightsquigarrow 1$ et $1 \not\rightsquigarrow 0$, l'état 0 est transient (transitoire).

Tous les états $k \geq 1$ communiquent : Tous les états conduisent à l'état 1 ; l'état 1 conduit à l'état 2 qui conduit à tous les états pairs ; l'état 1 conduit à l'état 3 qui conduit à tous les états impairs ; par transitivité de la relation $\rightsquigarrow$, tous les états $k \geq 1$ communiquent.

En considérant $H_x = \min\{n \geq 1 : X_n = x\}$ le temps de retour de la chaîne dans l'état x, on a

$$P_1(H_1 = 1) = 0,$$

et pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} P_1(H_1 = n) = P_1(&X_1 = 2, X_2 = 4, \ldots, X_{n-1} = 2(n-1), X_n = 1) \\ &+ P_1(X_1 = 3, X_2 = 5, \ldots, X_{n-1} = 2n-1, X_n = 1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$P_1(H_1 = n) = \beta\ q_2\ q_4 \ldots q_{2(n-2)}\ p_{2(n-1)} + (1-\beta)\ q_3\ q_5 \ldots q_{2n-3}\ p_{2n-1}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} P_1(H_1 \leq n) &= \beta \sum_{k=2}^{n} q_2\ q_4 \ldots q_{2k-4}\ p_{2k-2} + (1-\beta) \sum_{k=2}^{n} q_3\ q_5 \ldots q_{2k-3}\ p_{2k-1} \\ &= \beta \sum_{k=2}^{n} q_2\ q_4 \ldots q_{2k-4}\ (1-q_{2k-2}) + (1-\beta) \sum_{k=2}^{n} q_3\ q_5 \ldots q_{2k-3}\ (1-q_{2k-1}) \\ &= 1 - \beta\ q_2\ q_4 \ldots q_{2n-2} - (1-\beta)\ q_3\ q_5 \ldots q_{2n-1}. \end{aligned}$$

Il vient

$$P_1(H_1 < +\infty) = 1 - \beta \prod_{k \geq 1} q_{2k} - (1-\beta) \prod_{k \geq 1} q_{2k+1}.$$

L'état 1 est récurrent si et seulement si les 2 produits infinis sont nuls, c'est-à-dire si (prendre le logarithme)

$$\sum_{k \geq 1} p_{2k} = \sum_{k \geq 1} p_{2k+1} = +\infty.$$

Exercice 3 *Un mobile se déplace au hasard sur $\mathbb{Z}$ suivant une chaîne de Markov de matrice de transition*

$$Q(i,j) = \begin{cases} p & \textit{si } j = i+1 \\ 1-p & \textit{si } j = i-1 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

où $0 < p < 1$.

1. *La chaîne est-elle irréductible ?*
2. *Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que*

$$P(Z_n = 1) = p, \qquad P(Z_n = -1) = 1-p.$$

   On pose $X_0 = 0$ et $X_n = Z_1 + \cdots + Z_n$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $\{X_n;\ n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q et d'état initial 0.
3. *Que peut-on dire de $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} X_n$? Si $p \neq 1/2$, la chaîne est-elle récurrente ou transiente ?*
4. *On pose $Y_n = \frac{1}{2}(Z_n + 1)$ pour tout $n \geq 1$ et $T_n = \frac{1}{2}(X_n + n)$ pour tout $n \geq 0$. Déterminer la loi de Y_n et de T_n. Que vaut $Q^n(0,0) = P(X_n = 0)$ pour n impair et pour n pair ?*
5. *Montrer que si $p = 1/2$, la chaîne est récurrente. Est-elle récurrente positive ?*

Correction

1. D'après la matrice de transition de la chaîne de Markov, on remarque que $i \rightsquigarrow i+1$ et $i \rightsquigarrow i-1$. Donc tous les états communiquent (transitivité de la relation $\rightsquigarrow$). La chaîne est donc irréductible.
2. Si $P(X_n = i, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1) > 0$, alors on a

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1) \\ &= \frac{P(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1)}{P(X_n = i, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1)} \\ &= \frac{P(Z_{n+1} = j-i, X_n = i, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1)}{P(X_n = i, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1)} \\ &= \frac{P(Z_{n+1} = j-i)\ P(X_n = i, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1)}{P(X_n = i, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1)} \\ &= P(Z_{n+1} = j-i) = Q(i,j), \end{aligned}$$

   en utilisant l'indépendance de Z_{n+1} et $(X_0, \ldots, X_n)$.
   Donc $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q et d'état initial 0.
3. D'après la loi forte des grands nombres, comme les Z_i sont i.i.d. et intégrables

$$\frac{1}{n} X_n = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} \longrightarrow E[Z_1] = 2p - 1 \quad \text{p.s.}$$

quand $n \to +\infty$.

Si $p \neq 1/2$, cette limite est non-nulle et donc X_n converge presque surement vers $+\infty$ si $2p-1>0$ et vers $-\infty$ si $2p-1<0$.

Si la chaîne était récurrente, X_n devrait passer par 0 un nombre infini de fois. Ceci est incompatible avec $X_n \to \pm\infty$. La chaîne est donc transiente.

4. Pour tout $n \geq 1$, Y_n prend les deux valeurs 0 et 1 avec les probabilités
$$P(Y_n = 1) = p \quad \text{et} \quad P(Y_n = 0) = 1 - p.$$
C'est donc une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p.
$T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ est la somme de n v.a. de Bernoulli de paramètre p indépendantes : T_n suit donc une loi binomiale $B(n,p)$. Ainsi
$$Q^n(0,0) = P(X_n = 0) = P(T_n = n/2),$$
et donc
$$Q^n(0,0) = \begin{cases} C_n^{n/2} p^{n/2}(1-p)^{n/2} & \text{si } n \text{ pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

5. On suppose $p = 1/2$. La chaîne est récurrente si $U(0,0) = \sum_{n\geq 1} Q^n(0,0) = +\infty$. Pour $p = 1/2$, on peut écrire $Q^{2k}(0,0) = C_{2k}^k \frac{1}{4^k}$. On utilise alors la formule de Stirling
$$k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k, \quad (2k)! \sim \sqrt{4\pi k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k},$$
qui implique
$$C_{2k}^k = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}} 4^k,$$
puis, $Q^{2k}(0,0) \sim 1/\sqrt{\pi k}$ pour $k \to \infty$.
On en déduit $\sum_{n\geq 1} Q^n(0,0) = +\infty$. Donc 0 est récurrent et par suite, la chaîne est récurrente.
Enfin, on remarque que la mesure μ définie par $\mu(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$ est invariante pour Q. Comme sa masse totale est infinie, la chaîne est récurrente nulle.

Eléments de correction du TD7
Mesures invariantes et comportement asymptotique

Paul Balança

29 novembre 2017

Exercice 1 *On considère la chaîne de Markov canonique à valeurs dans $E = \{1, 2, 3, 4\}$, de matrice de transition*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que la chaîne est irréductible et récurrente positive.*
2. *Quelle est sa probabilité invariante ?*
3. *Quelles sont les limites p.s. de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$ et de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2$, lorsque n tend vers ∞ ?*

1. Par transitivité de la relation $\rightsquigarrow$, on vérifie à l'aide la matrice de transition que pour tous $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a $x \rightsquigarrow y$. De plus, E est fini, la chaîne est donc récurrente. Enfin, il existe une mesure invariante non triviale, qui est forcément finie. La chaîne est donc bien irréductible et récurrente positive.
2. On recherche l'unique mesure de probabilité $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ vérifiant : $\mu = \mu Q$, soit :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3, \\ \mu_2 &= \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_3, \\ \mu_3 &= \frac{1}{4}\mu_2 + \mu_4, \\ \mu_4 &= \frac{1}{4}\mu_2. \end{aligned}$$

On obtient : $\mu_1 = 3\mu_4$, $\mu_2 = 4\mu_4$, $\mu_3 = 2\mu_4$ et donc $\mu = \frac{1}{10}(3, 4, 2, 1)$.

3. On applique les théorèmes ergodiques aux fonctions $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$. On obtient alors :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k = \mu(f_1) = \frac{3}{10}.1 + \frac{4}{10}.2 + \frac{2}{10}.3 + \frac{1}{10}.4 = \frac{21}{10},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 = \mu(f_2) = \frac{3}{10}.1 + \frac{4}{10}.4 + \frac{2}{10}.9 + \frac{1}{10}.16 = \frac{53}{10}.$$

Exercice 2 *Soit $(p(i))_{i\in\mathbb{N}}$ une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $p(i) > 0$ pour tout $i > 0$. On pose $G(i) = \sum_{j>i} p(j)$. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{N}$, de matrice de transition*
$$\forall j \geq 0; \quad Q(0,j) = p(j)$$
$$\forall i \geq 1; \quad Q(i,j) = \begin{cases} 1/i & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la chaîne $\{X_n;\ n \geq 0\}$ est récurrente.

2. Soit μ une mesure invariante.

(a) Ecrire les équations satisfaites par μ. En déduire que $\sum_{j\geq 1} \mu(j)/j < +\infty$.

(b) On pose $\varphi(i) = \sum_{j\geq i+1} \mu(j)/j$. Exprimer φ puis μ à l'aide de G et $\mu(0)$.

3. On suppose $p(0) = 0$ et $p(i) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ pour $i \geq 1$. La chaîne est-elle récurrente positive ? Que vaut $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k=0\}}$?

1. La chaîne est irréductible, étant donné que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $i \rightsquigarrow 0$ et $0 \rightsquigarrow j$. De plus, on remarque que l'état 0 est forcément un état récurrent. En effet, si la chaîne est en 0 à l'instant n et en x à l'instant $n+1$, alors elle est forcément repassée en 0 avant l'instant $n+1+x$, la chaîne étant strictement décroissante à partir de X_{n+1}. X est donc irréductible récurrente.

2. (a) La mesure invariante μ doit vérifier $\mu = \mu Q$. Ce qui donne, pour tout $i \in \mathbb{N}$:
$$\mu(i) = \mu(0)p(i) + \sum_{j>i} \frac{\mu(j)}{j}.$$
En particulier, $\mu(0)$ étant forcément fini, on obtient donc :
$$\sum_{j\geq 1} \frac{\mu(j)}{j} < +\infty.$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $i \in \mathbb{N}$:
$$i(\varphi(i-1) - \varphi(i)) = \mu(i) = \mu(0)(G(i-1) - G(i)) + \varphi(i).$$
Donc, $\mu(0)(G(i-1) - G(i)) = i\varphi(i-1) - (i+1)\varphi(i)$, ce qui implique en sommant :
$$(i+1)\varphi(i) - \varphi(0) = \mu(0)G(i) - \mu(0)G(0).$$
Or d'après la formule de la question précédente $\varphi(0) = \mu(0)(1 - p(0)) = \mu(0)G(0)$, donc $\varphi(i) = \frac{\mu(0)}{i+1}G(i)$ et :
$$\mu(i) = \mu(0)(G(i-1) - G(i)) + \frac{\mu(0)}{i+1}G(i).$$

3. Il faut vérifier que la mesure μ est finie :

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mu(i) \\ &= \mu(0) \sum_{i=0}^{\infty} p(i) + \mu(0) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} G(i) \\ &= \mu(0) + \mu(0) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2} \\ &= \mu(0)(1 + \frac{\pi^2}{6}).\end{aligned}$$

D'après les théorèmes ergodiques, on obtient alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=0\}} = \frac{\mu(0)}{\mu(E)} = \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{6}}.$$

Exercice 3 *On note X_n le nombre de particules présentes à l'instant n dans un volume donné V. On suppose que, pendant l'intervalle $[n, n+1[$, chacune des X_n particules a une probabilité $p = 1 - q$ ($1 < p < 1$) de quitter V, et que, pendant ce même intervalle, un nombre aléatoire de particules suivant une loi de Poisson de paramètre λ entre dans V.*
On suppose que les différents phénomènes aléatoires considérés sont indépendants.

1. *Calculer $E[e^{itX_1} \mid X_0 = x]$.*
2. *On suppose que X_0 suit une loi de Poisson de paramètre θ, notée μ_θ. Quelle est la fonction caractéristique de X_1 ? Montrer que, pour une valeur de θ convenable, μ_θ est une probabilité invariante.*
3. *Montrer que la matrice de transition de la chaîne de Markov $\{X_n;\ n \geq 0\}$ est donné par*
$$Q(x, y) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x\wedge y} C_x^k q^k (1-q)^{x-k} \frac{\lambda^{y-k}}{(y-k)!}.$$
En déduire que cette chaîne est irréductible et donc récurrente positive.
4. *Quelle est la limite de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$ lorsque n tend vers l'infini ? Et $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2$?*

On appelle Y_n le nombre de particules restant dans V et Z_n le nombre de particules rentrant dans V. On a ainsi $X_{n+1} = Y_n + Z_n$.

1. Sachant $X_0 = x$, Y_0 suit une loi binomiale $B(x, q)$ et Z_0 suit une loi de Poisson de paramètre λ, indépendante de Y_0. Ainsi :

$$\begin{aligned}E[e^{itX_1}|X_0 = x] &= E[e^{it(Y_0+Z_0)}|X_0 = x] \\ &= E[e^{itY_0}|X_0 = x].E[e^{itZ_0}|X_0 = x] \\ &= (p + qe^{it})^x e^{\lambda(e^{it}-1)}.\end{aligned}$$

2. En utilisant la question précédente :
$$\begin{aligned}
E[e^{itX_1}] &= E[E[e^{itX_1}|X_0]] \\
&= \int_{\mathbb{N}} (p+qe^{it})^x e^{\lambda(e^{it}-1)} \mu_\theta(dx) \\
&= e^{\lambda(e^{it}-1)} \sum_{x=0}^{\infty} (p+qe^{it})^x e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!} \\
&= e^{\lambda(e^{it}-1)} e^{-\theta} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{[(p+qe^{it})\theta]^x}{x!} \\
&= e^{\lambda(e^{it}-1)} e^{(p+qe^{it})\theta-\theta} \\
&= e^{\lambda(e^{it}-1)} e^{q\theta(e^{it}-1)}.
\end{aligned}$$
Ainsi, pour $\theta = \lambda/p$, μ_θ est une probabilité invariante.
3. Pour tout $x \in E$, on a :
$$\begin{aligned}
E_x[e^{itX_1}] &= \sum_{y\geq 0} Q(x,y) e^{ity} \\
&= e^{\lambda(e^{it}-1)} (p+qe^{it})^x \\
&= e^{\lambda(e^{it}-1)} \sum_{k=0}^{x} C_x^k (1-q)^{x-k} q^k e^{itk} \\
&= \sum_{y\geq 0} e^{ity} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \sum_{k=0}^{x} C_x^k (1-q)^{x-k} q^k e^{itk} \\
&= \sum_{k=0}^{x} \sum_{y\geq 0} C_x^k (1-q)^{x-k} q^k e^{it(y+k)} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \\
&= \sum_{k=0}^{x} \sum_{y\geq k} C_x^k (1-q)^{x-k} q^k e^{ity} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{y-k}}{(y-k)!} \\
&= \sum_{y\geq 0} e^{ity} \sum_{k=0}^{x\wedge y} C_x^k (1-q)^{x-k} q^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{y-k}}{(y-k)!}.
\end{aligned}$$
La formule étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, par identification des termes, nous obtenons bien :
$$Q(x,y) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x\wedge y} C_x^k q^k (1-q)^{x-k} \frac{\lambda^{y-k}}{(y-k)!}.$$
Pour tous $x, y \in E$, $Q(x,y) > 0$, donc la chaîne est bien irréductible. De plus, elle possède une probabilité invariante, ce qui implique qu'elle est également récurrente positive.
4. On utilise les théorèmes ergodiques :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k = \mu_\theta(f_1) = \theta.$$
De même :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 = \mu_\theta(f_2) = \theta(1+\theta).$$

Exercice 4 (Algorithme de Metropolis) *Soit E un ensemble d'états fini et Q une matrice de transition sur E symétrique et irréductible. Soit π une probabilité sur E telle que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$. On définit sur E une nouvelle matrice de transition R par*

$$R(x,y) = \begin{cases} Q(x,y) & si\ x \neq y\ et\ \pi(x) \leq \pi(y) \\ Q(x,y)\frac{\pi(y)}{\pi(x)} & si\ \pi(x) > \pi(y) \\ 1 - \sum_{z\neq x} R(x,z) & si\ x = y. \end{cases}$$

1. *Montrer que π est réversible pour R. Est-elle invariante ?*
2. *Montrer que $Q(x,y) > 0 \Rightarrow R(x,y) > 0$. En déduire que R est irréductible ?*
3. *On suppose que π n'est pas la distribution uniforme. On note M l'ensemble des états $x \in E$ tels que $\pi(x) = \max_{y\in E} \pi(y)$.*
   (a) *Montrer qu'il existe $x_0 \in M$ tel que $Q(x_0, y) > 0$ pour un certain $y \notin M$. En déduire que $R(x_0, z) < Q(x_0, z)$ pour un certain $z \in E$ au moins. Que peut-on dire de $R(x_0, x_0)$?*
   (b) *Montrer que R est apériodique.*
   (c) *En déduire un algorithme pour simuler une v.a. distribué suivant la loi π.*

1. Soient $x \neq y \in E$, on peut supposer $\pi(x) > \pi(y)$. Ainsi,

$$R(x,y) = Q(x,y)\frac{\pi(y)}{\pi(x)} \text{ et } R(y,x) = Q(y,x).$$

   De plus, Q étant symétrique, on obtient :

$$\pi(x)R(x,y) = \pi(x)Q(x,y)\frac{\pi(y)}{\pi(x)} = \pi(y)Q(y,x) = \pi(y)R(y,x).$$

   π est bien réversible pour R, et donc également invariante.
2. Étant donné que la mesure π est strictement positive, si $Q(x,y) > 0$, on a bien $R(x,y) > 0$. De plus, dans le cas $x = y$, on a $Q(x,x) < R(x,x)$. R est donc bien irréductible.
3. (a) Si l'on suppose $Q(x,y) = 0$ pour tous $x \in M$ et $y \notin M$, alors M est une classe fermée. Cependant, nous avons supposé que Q était irréductible et que $M \neq E$, c'est donc impossible. Il existe donc $x_0 \in M$ et $y \notin M$ tels que $Q(x_0, y) > 0$. De plus, $\pi(x_0) > \pi(y)$, donc $R(x_0, y) < Q(x_0, y)$. De plus $R(x_0, x_0) > Q(x_0, x0) \geq 0$ étant donné que pour tout $z \neq x_0$, $R(x_0, z) \leq Q(x_0, z)$, l'inégalité étant stricte dans le cas de y.
   (b) Soit X une chaîne de Markov de matrice de transition R. X est irréductible récurrente et $d(x_0) = 1$, ce qui implique que tous les états ont la même période égale à 1, et donc R est apériodique.
4. On utilise le fait que pour tout $x \in E$, dans le cas d'une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et apériodique, on a :

$$\lim_{n\to\infty} P_x(X_n = y) = \pi(y).$$

Eléments de correction du TD8
Processus à temps continu

Alexandre Richard

6 décembre 2017

Exercice 1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$ *un espace de probabilité filtré et soit* $\{B_t;\ t \in \mathbb{R}_+\}$ *un processus adapté, continu et issu de* 0. *Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i.) B *est un mouvement brownien réel.*

(ii.) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, *le processus complexe* $M^\lambda = \{M_t^\lambda;\ t \in \mathbb{R}_+\}$ *défini par*

$$M_t^\lambda = \exp\left(i\lambda B_t + \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$$

est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Correction Commençons par montrer que *(i)* implique *(ii)*. B est donc un mouvement Brownien. Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\forall t \in \mathbb{R}_+$, M_t^λ est $\mathcal{F}_t$-mesurable
- $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|M_t^\lambda| \leq \exp(\frac{\lambda^2 t}{2}) \ \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- Pour $0 \leq s \leq t$ fixés,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_t^\lambda|\mathcal{F}_s) &= e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\ \mathbb{E}(e^{i\lambda B_t}|\mathcal{F}_s) \\
&= e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\ \mathbb{E}(e^{i\lambda(B_t-B_s)}e^{i\lambda B_s}|\mathcal{F}_s) \\
&= e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\ e^{i\lambda B_s}\ \mathbb{E}(e^{i\lambda(B_t-B_s)})
\end{aligned}$$

  où on utilise dans la troisième égalité le fait que $e^{i\lambda B_s}$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable et $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$. Ensuite, comme $B_t - B_s$ suit une loi $\mathcal{N}(0, t-s)$, il nous reste à calculer $\mathbb{E}(e^{uN})$ avec N une loi normale centrée réduite, pour $u \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{uN}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ux}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-u)^2}e^{\frac{u^2}{2}}dx = e^{\frac{u^2}{2}}
\end{aligned}$$

D'où, en prenant $u = i\lambda\sqrt{t-s}$:

$$\mathbb{E}(M_t^\lambda|\mathcal{F}_s) = e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\ e^{i\lambda B_s}\ e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)} = M_s^\lambda$$

Passons à la réciproque. Nous allons utiliser la caractérisation suivante du mouvement Brownien :

(i) B est un processus gaussien,

(ii) B est à accroissements indépendants,

(iii) B est à accroissements stationnaires, avec $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s),\ \forall t \geq s$.

Soient $0 \leq t_0 < ... < t_k$. Montrons que $(B_{t_0}, ..., B_{t_k})$ est un vecteur gaussien.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\exp(i\sum_{j=1}^{k}\lambda_j B_{t_j})\big) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(e^{i\lambda_k(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})}\ e^{iU}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}\big)\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(e^{iU}\ \mathbb{E}\big(e^{i\lambda_k(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}\big)\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(e^{iU}\ e^{-\frac{1}{2}\lambda_k^2(t_k-t_{k-1})}\Big)
\end{aligned}$$

où $U = \sum_{j=1}^{k-2}\lambda_j B_{t_j} + (\lambda_k + \lambda_{k-1})B_{t_{k-1}}$. Dans la deuxième égalité, on a utilisé la $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-mesurabilité de U. Dans la troisième égalité, on utilise la propriété de martingale de $(M_t^{\lambda_k})_{t\geq 0}$. En réitérant ce calcul sur e^{iU}, on aboutit à :

$$\mathbb{E}\big(\exp(i\sum_{j=1}^{k}\lambda_j B_{t_j})\big) = \prod_{j=1}^{k} e^{-\frac{1}{2}\mu_j^2(t_j-t_{j-1})} = \prod_{j=1}^{k}\mathbb{E}(e^{i\mu_j(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})}) \tag{1}$$

où $\forall\ 1 \leq j \leq k,\ \mu_j = \sum_{l=j}^{k}\lambda_l$ et

$$e^{-\frac{1}{2}\mu_j^2(t_j-t_{j-1})} = \mathbb{E}\big(e^{i\mu_j(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})}\big)$$

. On en déduit donc d'une part que B est un processus gaussien, et que ses accroissements sont stationnaires. Or,

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j B_{t_j} = \sum_{j=1}^{k}\mu_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$$

donc grâce à (**??**),

$$\mathbb{E}\big(\exp(i\sum_{j=1}^{k}\mu_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}))\big) = \prod_{j=1}^{k}\mathbb{E}(e^{i\mu_j(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})})$$

ce qui donne l'indépendance des accroissements. Donc B est bien un mouvement brownien.

Exercice 2 *Soit* $\mathbb{W} = \{\mathbb{W}(A);\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ *un bruit blanc de* $\mathbb{R}$. *Pour tout réel* $H \in]0,1[$, *on considère l'application*

$$f_t : u \mapsto |t-u|^{H-1/2} - |u|^{H-1/2}$$

1. *Montrer que pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$, *l'application* f_t *appartient à* $L^2(\mathbb{R})$.
2. *On considère alors le processus* $B^H = \{B_t^H;\ t \in \mathbb{R}_+\}$ *défini par*

$$B_t^H = \int_{\mathbb{R}} f_t(u).\mathbb{W}(du).$$

   Montrer B^H *est un processus gaussien centré de fonction de covariance*

$$E[B_s^H B_t^H] = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

3. *Expliciter le processus* B^H *lorsque* $H = 1/2$.
4. *Montrer que* B^H *est à accroissements stationnaires.*
5. *Les accroissements de* B^H *sont-ils indépendants ?*
6. *Montrer que* B^H *est autosimilaire d'indice* H.

Correction

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Alors, lorsque $u \to +\infty$ et $H \neq \frac{1}{2}$, $|t-u|^{H-1/2} - |u|^{H-1/2} < 0$ et

$$|t-u|^{H-1/2} - |u|^{H-1/2} \sim -t(H - \frac{1}{2})u^{H-1/2-1}$$

   Or $2(H-3/2) < -1$, donc f_t appartient à $L^2(\mathbb{R})$.
2. Par définition du processus isonormal W, on a

$$B_t^H = \int_{\mathbb{R}} f_t(u).\mathbb{W}(du) = W(f_t)$$

   B^H est donc un processus gaussien centré. Soient $t \neq s$. Plutôt que de calculer directement $\mathbb{E}(B_s^H B_t^H)$, regardons plutôt :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((B_t^H - B_s^H)^2) &= \int_{\mathbb{R}} \left(|t-u|^{H-1/2} - |s-u|^{H-1/2}\right)^2 du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(|t-s+v|^{H-1/2} - |v|^{H-1/2}\right)^2 dv \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(|t-s|^{H-1/2}|1+w|^{H-1/2} - |t-s|^{H-1/2}|w|^{H-1/2}\right)^2 |t-s| dw \\
&= |t-s|^{2H} K_H
\end{aligned}$$

   où $K_H = \|f_{-1}^H\|_2^2 > 0$. On a utilisé successivement les changements de variable : $v = s-u$ et $w = v/|t-s|$.

En remarquant que $B_0^H = 0$ $p.s.$, on obtient $\mathbb{E}((B_t^H)^2) = K_H\ t^{2H}$, et donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_s^H B_t^H) &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}((B_t^H)^2) + \mathbb{E}((B_s^H)^2) - K_H|t-s|^{2H}) \\
&= \frac{1}{2}K_H(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})
\end{aligned}$$

En introduisant le porcessus $\tilde{B}^H = \frac{1}{\sqrt{K_H}}B^H$, on obtient un processus avec la structure de covariance demandée.

3. Lorsque $H = 1/2$, $\tilde{B}^H$ est toujours un processus gaussien de covariance :

$$\mathbb{E}(\tilde{B}_s^H \tilde{B}_t^H) = \frac{1}{2}(t + s - |t-s|) = t \wedge s$$

$\tilde{B}^{1/2}$ est donc un mouvement Brownien standard. Dans la suite on s'affranchit de la constante K_H pour ne considérer que $\tilde{B}^H$, les résultats étant les mêmes pour B^H.

4. Soient $s, t \in \mathbb{R}_+$, $h > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((B_{t+h}^H - B_h^H)(B_{s+h}^H - B_h^H)) &= \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}(B_{t+h}^H - B_h^H)^2 + \mathbb{E}(B_{s+h}^H - B_h^H)^2 - \mathbb{E}(B_{t+h}^H - B_{s+h}^H)^2\big) \\
&= \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) \\
&= \mathbb{E}(B_t^H B_s^H)
\end{aligned}$$

Donc le processus $(B_{t+h}^H - B_h)_{t\geq 0}$, qui est un processus gaussien, a la même structure de covariance que B^H. Il y a donc égalité des lois finies dimensionnelles, et en particulier, $\forall t, h > 0$, la loi de $(B_{t+h}^H - B_h^H)$ est égale à la loi de B_t^H qui est indépendante de h. Il y a donc stationarité des accroissements.

5. Soient $0 \leq s < t$. Un calcul similaire au précédent donne :

$$cov(B_t^H - B_s^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} - s^{2H} - (t-s)^{2H})$$

qui ne s'annule que dans le cas où $H = 1/2$. Hormis le cas du mouvement Brownien, les accroissements ne sont donc pas indépendants.

6. Soit $a > 0$, $s, t \geq 0$.

$$\begin{aligned}
cov(B_{at}^H, B_{as}^H) &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}(B_{at}^H)^2 + \mathbb{E}(B_{as}^H)^2 - \mathbb{E}(B_{at}^H - B_{as}^H)^2) \\
&= \frac{1}{2}(|at|^{2H} + |as|^{2H} - |at - as|^{2H}) \\
&= a^{2H}\mathbb{E}(B_t^H B_s^H) \\
&= cov(a^H B_t^H, a^H B_s^H)
\end{aligned}$$

Donc le processus gaussien $(a^H B_t^H)_{t\geq 0}$ a la même structure de covariance que B^H. On a ainsi $B^H \sim a^H B^H$.