统计学习：第二十章

1 假设方阵 A 是随机矩阵，即其每个元素非负，每列元素之和为 1, 证明 A^k 仍然是随机矩阵，其中 k 是自然数。

答：只需证明任意两个随机矩阵的乘积还是随机矩阵即可，考虑阶随机矩阵 $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$ 以及 $C=AB=[c_{ij}]$，有

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} = \sum_{l=1}^{n} b_{lj}\sum_{i=1}^{n} a_{il} = \sum_{l=1}^{n} b_{lj} = 1$$

同时，由于 $a_{ij} \geq 0, b_{ij} \geq 0$，有 $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} \geq 0$，故 C 也是随机矩阵。

2 例 21.1 中，以不同的初始分布向量 R_0 进行迭代，仍然得到同样的极限向量 R, 即 PageRank 请验证。

答：见代码.

3 证明 PageRank 一般定义中的马尔可夫链具有平稳分布，即式（21.11）成立。

答：由于 PageRank 一般定义下的马尔可夫链, 不可约且非周期，故一定具有平稳分布。

4 证明随机矩阵的最大特征值为 1。

答：由于矩阵的转置和矩阵拥有相同的特征值，考虑随机矩阵 A 的转置 A^T，则 $(1,\dots,1)$ 为 A^T 特征值为 1 的特征向量。对于任意 A^T 的特征值 λ_i 和特征向量 $v_i=(v_{ij})$，$\sum_{l=1}^{n} a_{lj}v_{il} = \lambda v_{ij}$, 取 $j=\max_j |v_{ij}|$，有 $|\lambda||v_{ij}| \leq \sum_{l=1}^{n} a_{lj}|v_{il}| \leq |v_{ij}|\sum_{l=1}^{n} a_{lj}$, 则有 $|\lambda| \leq 1$。故 1 为 A^T 最大特征值，则 1 为 A 最大特征值。