统计学习：第十五章

1 试求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

的奇异值分解。

答：A^TA 的特征值为 9,4,0，单位特征向量为：

$$(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15})^T, (0, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})^T, (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$$

故有

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

2 试求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

的奇异值分解并写出其外积展开式。

答:$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{15+\sqrt{221}} & 0 \\ 0 & \sqrt{15-\sqrt{221}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \frac{10+\sqrt{221}}{\sqrt{442+20\sqrt{221}}} & \frac{10-\sqrt{221}}{\sqrt{442-20\sqrt{221}}} \\ \frac{11}{\sqrt{442+20\sqrt{221}}} & \frac{11}{\sqrt{442-20\sqrt{221}}} \end{bmatrix}, U =$
$\begin{bmatrix} \frac{64+2\sqrt{221}}{\sqrt{15+\sqrt{221}}\sqrt{442+20\sqrt{221}}} & -\frac{64-2\sqrt{221}}{\sqrt{15-\sqrt{221}}\sqrt{442-20\sqrt{221}}} \\ \frac{43+\sqrt{221}}{\sqrt{15+\sqrt{221}}\sqrt{442+20\sqrt{221}}} & \frac{43-\sqrt{221}}{\sqrt{15-\sqrt{221}}\sqrt{442-20\sqrt{221}}} \end{bmatrix}$

3 比较矩阵的奇异值分解与对称矩阵的对角化的异同。

答：均为正交分解，且对角阵的秩等于原矩阵；

特征值分别为等于原矩阵和等于原矩阵和转置乘积开根号; 奇异值分解对任何矩阵都成立，对角化仅适用于对称方阵

4 证明任何一个秩为 1 的矩阵可写成两个向量的外积形式，并给出实例。
答：由外积展开式易得。

5 搜索中的点击数据记录用户搜索时提交的查询语句，点击的网页 URL, 以及点击的次数，构成一个二部图，其中一个结点集合 $\{q_i\}$ 表示查询，另一个结点集合 $\{u_i\}$ 表示 URL, 边表示点击关系，边上的权重表示点击次数。图 15.2 是一个简化的点击数据例。点击数据可以由矩阵表示，试对该矩阵进行奇异值分解，并解释得到的三个矩阵所表示的内容。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 5 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

答：将点击矩阵分解成 U, Σ, V 可以分别代表查询特征、关联强度矩阵和 URL 特征