统计学习：第七章

1 比较感知机的对偶形式与线性可分支持向量机的对偶形式。

答：感知机的对偶形式为：

$$w = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i x_i$$
$$b = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i$$

线性可分支持向量机的对偶形式为：

$$w = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i x_i$$
$$b = y_j - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i (x_i \cdot x_j)$$

法向量表达一致，仅在截距上有所区别，体现了线性可分支持向量机更受到支持向量的影响，而感知器收到所有向量的影响。

2 已知正例点为 $X_1 = (1,2)^T\ x_2 = (2,3)^T\ x_3 = (3,3)^T$，负例点 $X_4 = (2,1)^T, x_5 = (3,2)^T$，试求最大间隔分离超平面和分类决策函数，并在图上画出分离超平面、间隔边界及支持向量。

答：超平面方程：$-x_1+2x_2-2=0$，分类决策函数 $f(x) = \mathrm{sign}(-x_1+2x_2-2)$

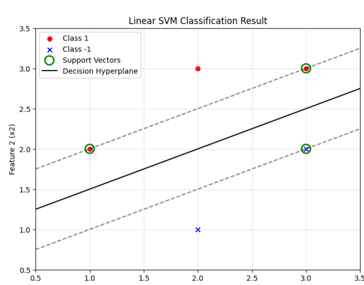

图 1: 支持向量机

3 线性支持向量机还可以定义为以下形式：

$$\begin{aligned}\min_{w,b,\xi} \quad & \frac{1}{2}||w||^2 + C\sum_{i=1}^{N}\xi_i \\ \text{s.t.} \quad & y_i(w\cdot x_i + b) \geq 1-\xi_i, i=1,2,\dots,N \\ & \xi_i \geq 0, i=1,2,\dots,N\end{aligned}$$

试求其对偶形式。

答：其拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}&L(w,b,\xi,\alpha,\mu) \\ =&\frac{1}{2}||w||^2 + C\sum_{i=1}^{N}\xi_i + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\xi_i - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i(w\cdot x_i + b) - \sum_{i=1}^{N}\mu_i\xi_i\end{aligned}$$

求导得到

$$\begin{aligned}&\nabla_w L = w - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i x_i = 0 \\ &\nabla_b L = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i = 0 \\ &\nabla_{\xi_i} L = C - \alpha_i - \mu_i = 0\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}&w = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i x_i \\ &\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i = 0 \\ &C - \alpha_i = \mu_i\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\max_{\alpha} \quad & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j (x_i\cdot x_j) + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i = 0 \\ & 0 \leq \alpha_i \leq C, i=1,2,\dots,N\end{aligned}$$

4 证明内积的正整数幂函数，是正定核函数，这里 p 是正整数，$x, z \in R^n$。
答：对于任意 Gram$K, \alpha \in R^m$, 有

$$\alpha^T K \alpha = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \alpha_j (x_i \cdot x_j)^p$$

考察 $\phi(x) : (x^1, x^2, .., x^n) \to (x^1 x^1 \ldots x^1, ..., x^{i_1} \ldots x^{i_d})$ 将原来的 n 维向量映射成 n^d 维的全排列，则有

$$\alpha^T K \alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi(x_i) \cdot \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \phi(x_j) = (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi(x_i))^2 \geq 0$$

所以为正定核函数。