题目

在一个圆内任取 n 个点，则这 n 个点落在同一个半圆内的概率是多少?

概率

概率描述某个事件发生的可能性，取值在 0 到 1 之间。对连续型随机变量，概率等于概率密度函数（Probability Dense Function, PDF）在随机变量取值区间上的积分，并且：

$$1 = \int f(x)dx$$

因此，如果知道n个点落在同一个半圆内的概率密度函数$f(x)$，那么概率就是：

$$P_(n) = \int_a^b f(x)dx$$

但是，这里的$f(x)$如何表示？a 和 b 又是什么?

由于这里的$f(x)$难以得到直观的解释，又是 n 个点的问题，所以，我们考虑使用递归来降级（或者思考）这个问题，把问题转化为：

$$P(n) = P(Xn|P_{n-1}) \times P_{n-1} \tag{1}$$

这里的$P(n)$是当第$n-1$个已经在同一个半圆的情况下，第n个点也落在同一个半圆的概率。如果我们在这一步可以得到一个递推公式（即，已知P_{n-1}，就能推导出P_n），那么就能最终求解出P_n。

而对$P(X_n|P_{n-1})$，我们有以下公式：

$$P(X_n|P_{n-1}) = \int P(X_n|\alpha_{n-1} = x) f_{\alpha_{n-1}}(x)dx \tag{2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - x}{2\pi} f_{\alpha_{n-1}}(x)dx \tag{3}$$

从式 2) 到式 3) 实际上是全概率公式在连续型随机变量下的积分表达式。我们可以这样理解这个积分表达式：

1. 前$n-1$个点的最大夹角α_{n-1}是一个随机变量，它的取值会影响第 n 个点能否被半圆覆盖。
2. $P(X_n|\alpha_{n-1} = x)$ 表示：在最大夹角是x时，第 n 个点落在安全区（即最大夹角以外的区域）的概率。安全区长度是$2\pi - x$，所以概率是

$$\frac{2\pi - x}{2\pi} \tag{4}$$

3. 但α_{n-1}可能取不同的值x，每个x的概率密度是$f_{\alpha_{n-1}}(x)$。
4. 所以要求此时的概率，就要对所有可能的x加权平均（积分），即：

$$P(X_n|P_{n-1}) = \int_0^{2\pi} P(X_n|\alpha_{n-1} = x) f_{\alpha_{n-1}}(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - x}{2\pi} f_{\alpha_{n-1}}(x)dx$$

简言之，这一段的公式是在用“全概率公式”思想，把所有可能的最大夹角x的情况都考虑进去，并用概率密度$f_{\alpha_{n-1}}(x)$做加权平均，最终得到条件概率$P(X_n|P_{n-1})$。

核心是，概率是一种积分（发生在某个取值范围内，而不是某个点上）；期望更是积分

第 n 个点落在安全区（即最大夹角以外的区域）的概率，可以由下图来理解（均匀分布）：

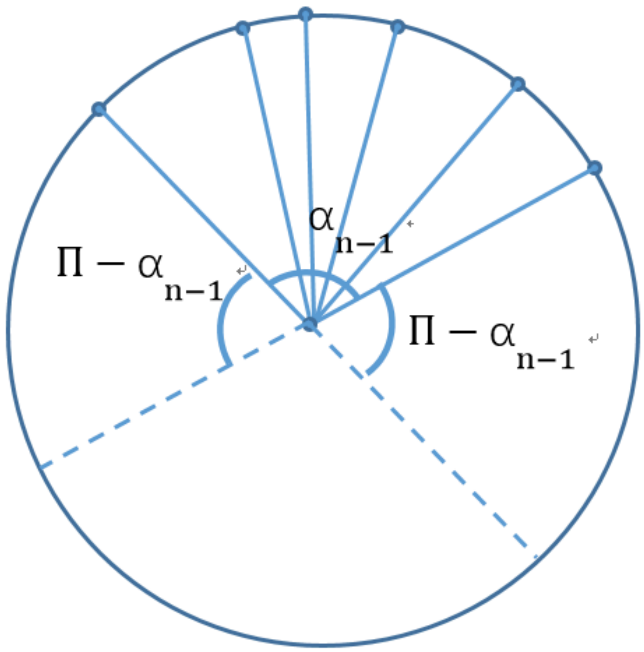

图 1

接下来我们对概率密度函数略作一点讨论。

概率密度函数

概率密度函数是连续型随机变量在某一点附近取值的『密集程度』。概率密度本身不是概率（可能类似于梯度、导数？），其数值可以大于 1。

为了理解概率密度函数，我们举一个简单的例子，均匀分布的概率密度函数。

假设随机变量 X 在区间$[0,n]$上均匀分布，则概率密度为$f(x)=\frac{1}{n}$。此时，随机变量 X 落在区间 a,b 上的**概率**是：

$$\int_a^b \frac{1}{n}dx=\frac{b-a}{n} \tag{5}$$

期望

期望（又称均值）是随机变量取值的加权平均值，权重是每个取值对应的概率。

期望一般用符号 E(x) 来表示。X 是随机变量。如果 X 是离散的，那么期望是“每种结果的取值 × 该结果发生的概率”之和，即：

$$E_x=\sum_i^n X_i.P_i$$

这里X_i是第i种结果，P_i是对应的概率。

对于连续情况，由于对于X_i，不存在对应的概率，只有对应的概率密度，因此期望要通过积分来计算，即：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f(x)\,dx$$

这里$g(x)$是任意函数，对应着离散型期望中的X_i，而$f(x)$是概率密度函数，对应着离散型期望中的P_i（但要注意P_i是$f(x)$的某个区间上的积分）。

> **Tip**
>
> 如果$g(x)$是一个分段、常数型的函数（取值为$X_1,X_2,...X_i$），且在每一段上$f(x)$的积分可记为P_i，则 $\int_1^i g(x)f(x)dx=\sum_1^i X_i\cdot P_i$。只要我们看到某个函数乘以概率密度再积分，那么它就是对该函数的期望。

在式 3）中，前一部分（即式 4）是$\alpha_{n-1}=x$在这一点时的概率，$f_{\alpha_{n-1}}$是概率密度函数。因此，这本质上就是一个期望表达式：

$$
\begin{aligned}
P(n) &= P(Xn|P_{n-1}) &(6)\\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - x}{2\pi} f_{\alpha_{n-1}}(x)dx &(7)\\
&= E\left[\frac{2\pi - \alpha_{n-1}}{2\pi}\right] &(8)\\
&= \frac{2\pi - E_{\alpha_{n-1}}}{2\pi} &(9)
\end{aligned}
$$

Tip

为何要将式7写成式8的形式？这是因为，使用期望符号后，可以方便地利用期望的线性性质、递推关系等概率论工具，后续推导和公式变换会更简洁。另外，期望符号在离散和连续情形下都适用，便于统一表述和迁移思路。

现在，对n个点同属同一个半圆情况下的概率计算，就转换为对$n-1$个点的最大角α_{n-1}的期望的计算。

而这个期望，是可以通过递归和归纳来解决的。

递归求解n个点的最大夹角的期望

我们用α_n表示 n 个点能形成的最大角度，因此，α_2就表示两个点能形成的最大角度，实际上就是两个点的夹角。

由于两点在圆周上是独立均匀分布的，所以α_2会是在$[0,\pi]$上的均匀分布，其概率密度函数为：

$$
f(\alpha_2) = \frac{1}{\pi}, 0 \le \alpha_2 \le \pi \tag{10}
$$

根据数学期望的公式，我们可以求出$E(\alpha_2)$为：

$$
\begin{aligned}
E(\alpha_2) &= \int_0^{\pi} \alpha_2 \cdot f(\alpha_2)d\alpha_2 &(11)\\
&= \int_0^{\pi} \alpha_2 \cdot \frac{1}{\pi}d\alpha_2 &(12)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \alpha_2 d\alpha_2 &(13)\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\alpha_2^2\right]_0^{pi} &(14)\\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 &(15)\\
&= \frac{\pi}{2} &(16)
\end{aligned}
$$

现在，已知圆上的两点夹角大小为α_2，现在往圆上加入第三点，那么第三点落入 A 与 B 之间时，三个点的最大夹角α_3的数学期望会是多少?

首先，点 C 落在 A 与 B 之间的概率是一个均匀分布，因此概率密度函数为：

$$
f(x) = \frac{\alpha}{2\pi}
$$

当点 C 落入 A 与 B 之间时，三个点的最大夹角的取值（即随机变量取值）恒为α。由于两者都是常量，所以，最终我们得到的期望会是：

$$
E(x) = \alpha \times \frac{\alpha}{2\pi}
$$

记住，这里的$E(x)$是已知两个点夹角为α时，第三个点落入夹角以内的数学期望。

现在，已知两个点夹角为α，第三个点加入后，三个点的夹角在 180 度以内的期望是多少？这是一个分段期望求和的过程，我们已经讨论了其中的一种情况。此外还有两种对称的情况，见图 1。

当 C 点落在两侧时，最大夹角会变大，且最大夹角 (x) 会在$[\alpha_2, \pi]$间均匀分布，此时的条件概率为：

$$\frac{2(\pi-\alpha_2)}{2\pi-\alpha_2}$$

该条件下的期望是（概率密度函数为$\frac{1}{\pi-\alpha_2}$)：

$$\int_{\alpha_2}^{\pi} x \cdot \frac{1}{\pi-\alpha_2}$$

所以，点 C 落在两侧的（条件）期望会是：

$$\frac{2(\pi-\alpha_2)}{2\pi-\alpha_2} \cdot \int_{\alpha_2}^{\pi} x \cdot \frac{1}{\pi-\alpha_2} dx$$

合起来，$E(\alpha_3)$就是：

$$E(\alpha_3) = \underbrace{\frac{\alpha_2}{2\pi-\alpha_2} \cdot \alpha_2}_{\text{第 3 点落在最大夹角内}} + \underbrace{\frac{2(\pi-\alpha_2)}{2\pi-\alpha_2} \cdot \int_{\alpha_2}^{\pi} x \cdot \frac{1}{\pi-\alpha_2} dx}_{\text{第 3 点落在两侧}}$$

其中，第二项积分化简为：

$$\frac{2(\pi-\alpha_2)}{2\pi-\alpha_2} \cdot \int_{\alpha_2}^{\pi} x \cdot \frac{1}{\pi-\alpha_2} dx = \frac{2(\pi-\alpha_2)}{2\pi-\alpha_2} \cdot \frac{1}{\pi-\alpha 2} \cdot \frac{1}{2}(\pi^2-\alpha_2^2)$$

合并得：

$$E(\alpha_3) = \frac{\alpha_2^2}{2\pi-\alpha_2} + \frac{\pi^2-\alpha_2^2}{2\pi-\alpha_2} = \frac{\pi^2}{2\pi-\alpha_2}$$

代入 $E(\alpha_2) = \frac{\pi}{2}$ 得：

$$E(\alpha_3) = \frac{\pi^2}{2\pi-\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3}\pi$$

既然$E(\alpha_3) = \frac{\pi^2}{2\pi-\alpha_2}$，由递推公式可得：

$$E(\alpha_n) = \frac{\pi^2}{2\pi - E(\alpha_{n-1})}$$

由数学归纳法可知，$E(\alpha_n) = (n-1)/n\pi$ ②

归纳结论：

$$E(\alpha_n) = \frac{n-1}{n}\pi$$

补充讲解数学归纳法

这里我没有仔细看，因为已确认是对的

证明最大夹角的期望公式：

$$E(\alpha_n) = \frac{n-1}{n}\pi$$

归纳法步骤如下：

1. 基础情形（n=2）：

$$E(\alpha_2) = \frac{\pi}{2}$$

   这是因为两个点在圆周上，最大夹角必然是 180°（即 (π)）。
2. 基础情形 (n=3):

$$E(\alpha_3) = \frac{2}{3}\pi$$

3. 归纳假设：
   假设对于 n=k 时成立，即：

$$E(\alpha_k) = \frac{k-1}{k}\pi$$

4. 归纳到 n=k+1：
   根据递推公式：

$$E(\alpha_{k+1}) = \frac{k}{k+1}E(\alpha_k) + \frac{2}{k+1}\int_{E(\alpha_k)}^{\pi} x \cdot f(x)dx$$

   但实际上，经过推导，第二项的贡献正好补足，使得最终：

$$E(\alpha_{k+1}) = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k-1}{k}\pi + \frac{1}{k+1}\pi = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k-1}{k}\pi + \frac{1}{k+1}\pi = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k-1}{k}\pi + \frac{1}{k+1}\pi = \frac{k-1}{k+1}\pi + \frac{1}{k+1}\pi = \frac{k}{k+1}\pi$$

5. 结论：
   由归纳法，公式对所有 n 都成立。
   总结：数学归纳法的关键在于先验证 n=2 的基础情形，然后假设 n=k 时成立，利用递推关系推出 n=k+1 时也成立，从而证明公式对所有 n 都成立。

$P(X|P(n-1))$的递推公式

现在，我们将

$$E(\alpha_{n-1}) = \frac{n-2}{n-1}\pi \tag{17}$$

代入到

$$\begin{aligned} P(Xn|P_{n-1}) &= \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - x}{2\pi} f_{\alpha_{n-1}}(x)dx & (18) \\ &= E\left[\frac{2\pi - \alpha_{n-1}}{2\pi}\right] & (19) \\ &= \frac{2\pi - E_{\alpha_{n-1}}}{2\pi} & (20) \end{aligned}$$

就得到：

$$\begin{aligned} P(Xn|P_{n-1}) &= \frac{2\pi - E_{\alpha_{n-1}}}{2\pi} & (21) \\ &= \frac{2\pi - \frac{n-2}{n-1}\pi}{2\pi} & (22) \\ &= \frac{n}{2(n-1)} & (23) \end{aligned}$$

即：

$$P(X_n|P_{n-1}) = \frac{n}{2*(n-1)} \tag{24}$$

最终答案：P_n

根据式 1）和式 24），我们得到：

$$
\begin{aligned}
P_n &= P(Xn|P_{n-1}) * P_{n-1} && (25)\\
&= \frac{n}{2*(n-1)} * P_{n-1} && (26)\\
&= \frac{n}{2*(n-1)} * \frac{n-1}{2*(n-2)} * P_{n-2} && (27)\\
&= \frac{n}{2*(n-1)} * \frac{n-1}{2*(n-2)} * ... * \frac{2}{2*2} * \frac{1}{2*1} && (28)\\
&= \frac{n}{2} * \underbrace{\frac{1}{2} ... \frac{1}{2}}_{\text{n−2个}} && (29)\\
&= n * (\frac{1}{2})^{n-1} && (30)
\end{aligned}
$$

再使用一次归纳法，得到：

$$P_n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

另一种解法

对于“n 个点在同一个半圆上的概率”，经典结论是：

$$P_n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

推导思路如下：

1. 任意取一个点作为基准点，将圆固定，使该点位于半圆的起点。
2. 剩下的 n-1 个点必须全部落在以该点为端点的半圆内。
3. 对于每个点，它有一半概率落在该半圆内，因此，所有 (n-1) 个点落入起点半圆的概率是$(\frac{1}{2})^{n-1}$
4. 由于 n 个点中任选一个作为基准点都可以，因此总概率是前式计算出来的 n 倍。