я опоздал на минуту, не знаю о чем речь

$\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x} \mapsto \dot{\vec{y}} = R\vec{y} \quad \exists G(t) : \det G(t) \neq 0, G(t+w) = G(t)$

$\vec{x}(t) = G(t)\vec{y}(t)$

А когда у нас появляются периодические решения, когда у нас неоднородное уравнение?

$\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x} + \vec{q}(t), \quad P(t+w) = P(t), \vec{q}(t+w) = q(t)$

$?\varphi(t)$ - периодическое решение

T1. $\dot{\vec{\varphi}}(t) = P(t)\vec{\varphi}(t) + q(t), \quad \varphi(t+w) = \varphi(t) \iff \vec{\varphi}(0) = \vec{\varphi}(w)$

D.$\Rightarrow$ очевидно

$\Leftarrow$ Построим задачу Коши.

$$\begin{cases} \dot{\vec{\varphi}}(t) = P(t)\vec{\varphi}(t) + q(t) \quad t \mapsto t+w \\ \vec{\varphi}(0) = \varphi_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{\varphi}}(t+w) = P(t+w)\vec{\varphi}(t+w) + \vec{q}(t+w) = P(t)\vec{\varphi}(t+w) = \vec{q}(t) \\ \vec{\varphi}(w) = \vec{\varphi}(0) = \varphi_0 \end{cases}$$

$\implies \exists!$ решение задачи Коши $\implies \vec{\varphi}(t+w) = \vec{\varphi}(t)$

T.2 Достаточное условие разрешимости

Если $\mu_1 \neq 0, \ldots, \mu_n \neq 1$ - мультипликаторы $\implies \exists!$ решение $\varphi(t) = \varphi(t+w) = \varphi(t)$

D. Выберем фундаметальную матрицу однородной системы, с помощью которой мы выделяли матрицу МонодромиИ

$$\widetilde{\Phi}(t) : \begin{cases} \dot{\widetilde{\Phi}} = P(t)\widetilde{\Phi} \\ \widetilde{\Phi}(0) = I \end{cases}$$

$U(t,\tau) = \widetilde{\Phi}(t) = \widetilde{\Phi}^{-1}(\tau)$

$$\begin{cases} \dot{\vec{\varphi}} = P(t)\vec{\varphi} + q(t) \\ \vec{\varphi}(0) = \vec{\varphi}(w) = \vec{\varphi}_0 \end{cases} \iff \vec{\varphi}(t)\Big|_{t=w} = \widetilde{\Phi}(t)\vec{\varphi}_0 + \int_0^t \widetilde{\Phi}(t)\widetilde{\Phi}^{-1}(\tau)\vec{q}(\tau)dtd\tau$$

$\vec{\varphi}_0 = \vec{\varphi}(w) = \underbrace{\widetilde{\Phi}(w)}_{=B}\vec{\varphi}_0 + \int_0^w \widetilde{\Phi}(w)\widetilde{\Phi}^{-1}(\tau)\vec{q}(\tau)dtd\tau$

$(I - \widetilde{\Phi}(w))\vec{\varphi}_0 = \int_0^w \widetilde{\Phi}(w)\widetilde{\Phi}^{-1}(\tau)\vec{q}(\tau)d\tau$

$\exists(I - \widetilde{\Phi}(w))^{-1} \iff \det(I - B) \neq 0$

Сл. $P(t) = P \equiv const, \vec{q}(t+w) = q(t) \implies \exists!\vec{\varphi}$ периодич.

Если $\forall\lambda_j$ - собственные числа $P : \lambda_j \neq \frac{i2\pi k}{w}$ - отсутствие резонанса

D. $\widetilde{\Phi}(t) = e^{tp}, \quad \vec{\varphi}_0 = (I - e^{wp})^{-1} \int_0^w e^{(w-\tau)p}q(\tau)d\tau$ - дост. усл.

$e^{w\lambda_j} \neq 1$ - тоже самое что и в условии

$\vec{\varphi}(t) = e^{tp}(I - e^{wp})^{-1} \int_0^w e^{(w-\tau)p} \vec{q}\tau d\tau + \int_0^t e^{(t-\tau)p} q(t) d\tau$

$= e^{tp}((I - e^w p)^{-1} \int_0^w e^{(w-\tau)p} \vec{q}(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\tau p} q(\tau) d\tau)$

$(I - e^{wp})\vec{\varphi}(t) = e^{tp}(\int_0^w e^{(w-\tau)p} q(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\tau p} q(\tau) - \int_0^t e^{(w-\tau)p} q(\tau) d\tau) =$

$= e^{tp}(\int_0^t e^{-\tau p} \vec{q}(\tau) d\tau - \int_w^t e^{(w-\tau)p} \vec{q}(\tau) d\tau) = e^{tp} \int_{t-w}^t e^{-\tau p} q(\tau) d\tau$

$$\boxed{\vec{\varphi}(t) = (1 - e^{wp})^{-1} \int_{t-w}^t e^{(t-\tau)p} q(\tau) d\tau}$$

Краевая задача

Есть отрезок $[a, b]$

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x} & P(t) : [a, b] \to \mathbb{C}^{n\times n} \\ A\vec{x}(\alpha) + B\vec{x}(\beta) = 0 & \alpha, \beta \in [a, b] \end{cases}$$

$?\exists \vec{x}(t) \not\equiv 0$

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) = P(t)\Phi(t) \\ \Phi(\alpha) = I \end{cases} \quad \vec{x} = \Phi(t)\vec{C} \implies (A + B\Phi(\beta))\vec{C} = 0$$

$\exists \vec{c} \not\equiv 0 \iff \det(A + B\Phi(\beta)) = 0$

Иначе пусть $\det(A + B\Phi(\beta)) \neq 0$

Функция Грина

Нарисуем картинку, двумерная плоскость, альфа и бета симметрично расположены на обеих осях, образуют квадрат, у него есть диагональ. Фунцкия грина:

$G(t, \tau) : t \in [\alpha, \beta], \tau \in [\alpha, \beta], t \neq \tau$

1. $\frac{d}{dt} G(t, \tau) = P(t)G(t, \tau)$
2. $AG(\alpha, \tau) + BG(\beta, \tau) = 0, \forall \tau \in (\alpha, \beta)$
3. $G(\tau + 0, \tau) - G(\tau - 0, \tau) = I$

1. $G(t, \tau) = \begin{cases} \Phi(t)S(\tau) & t \in [\alpha, \tau) \\ \Phi(t)T(\tau) & t \in (\tau, \beta] \end{cases}$
2. $AS(\tau) + B\Phi(\beta)T(\tau) = 0$
3. $\Phi(\tau)S(\tau) - \Phi(\tau)T(\tau) = -I$

слау 2 3

$$\Phi^{-1}(\tau) \cdot \mid \implies \begin{cases} AS(\tau) + B\Phi(\beta)T(\tau) = 0 \implies A(\Phi^{-1}(\tau) + T(\tau)) + B\Phi(\beta)T(\tau) = 0 \\ S(\tau) - T(\tau) = \Phi^{-1}(\tau) \implies S(\tau) = T(\tau) + \Phi^{-1}(\tau) \end{cases}$$

$\implies (A + B\Phi(\beta))T(\tau) = -A\Phi^{-1}(\tau)$ домножим на обратное к левой части без T

$\implies T(\tau) = -(A + B\Phi(\beta))^{-1} A\Phi^{-1}(\tau)$

$= -(A + B\Phi(\beta))^{-1}(A \pm B\Phi(\beta))\Phi^{-1}(\tau) = -(A + B\Phi(\beta))^{-1}((A + B\Phi(\beta)) - B\Phi(\beta))\Phi^{-1}(\tau)$

$= -(I - (A + B\Phi(\beta))^{-1} B\Phi(\beta))\Phi^{-1}(\tau)$

Ответ: $G(t,\tau) = \begin{cases} -\Phi(t)(A+B\Phi(\beta))^{-1}B\Phi(\beta)\Phi^{-1}(\tau) & t\in[\alpha,\tau) \\ \Phi(t)(I-(A+B\Phi(\beta))^{-1}B\Phi(\beta))\Phi^{-1}(\tau) & t\in(\tau,\beta] \end{cases}$

Неоднородная краевая задача

$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x} + q(t) \\ A\vec{x}(\alpha) + B\vec{x}(\beta) = 0 \end{cases}$

T. Пусть $\Phi(\alpha) = I \wedge \det(A+B\Phi(\beta)) \neq 0$

$\implies$ $\exists!$ решение краевой задачи $\vec{x}(t) = \int_\alpha^\beta G(t,\tau)\vec{q}(\tau)d\tau$

D. Разобъем наше решение в сумму двух инт

$\vec{x}(t) = \int_\alpha^t G(t,\tau)q(\tau)d\tau + \int_t^\beta G(t,\tau)q(\tau)d\tau$

дифф по иксу

$\dot{\vec{x}}(t) = (G(t,\tau-0) - G(t,t+0))q(t) + P(t)\int_\alpha^t G(t,\tau)q(\tau)d\tau + P(t)\int\int_t^\beta G(t,\tau)q(\tau)d\tau =$
$Iq(t) + P(T)\int_\alpha^\beta G(t,\tau)q(\tau)d\tau = P(t)\vec{x} + q(t)$

$A\vec{x}(\alpha) + Bx(\beta) = \int_\alpha^\beta (AG(\alpha,\tau) + BG(\beta,\tau))\vec{q}(\tau)d\tau = 0$

Существенность

Пусть есть два реш

x_1, x_2

$\vec{\varphi} = \vec{x_1} - \vec{x_2}$

$\implies \begin{cases} \dot{\vec{\varphi}} = P(t)\vec{\varphi} \\ A\vec{\varphi}(\alpha) + B\vec{\varphi}(\beta) = 0 \end{cases} \implies \vec{\varphi} \equiv 0$