

Математический анализ

26 сентября 2022

Определение интеграла Римана через интегральные суммы

$\Pi \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ орг.

p – разбиение Π , $= \{\pi_i, i = 1, \dots, N\}$

$\Xi = \{\xi_i \in \pi_i, i = 1, \dots, N\}$

$\sum(f, p, \Xi) := \sum_{i=1}^N f(\xi_i) v(\pi_i)$ – интегральная сумма Римана

Определение. Если $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \{p_k\}_{k=1}^\infty : d(p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \{\Xi\}_{k=1}^\infty$

$$\sum(f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} I, \quad \text{то } f \text{ интегрируема по Риману и } I = \int_{\Pi}$$

Теорема 1.

$$\exists I \quad \forall \{p_k\} : d(p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \{\Xi\} \quad \sum(f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} I \Leftrightarrow \underline{\int}_{\Pi} = \overline{\int}_{\Pi} = \int_{\Pi}$$

Доказательство.

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \varepsilon, p_k : d(p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \pi \in p_k \quad \exists \xi \in \pi :$$

$$f(\xi) - \inf_{\pi} f < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{Получим } \Xi_k \quad \sum(f, p_k, \Xi_k) - L(f, p_k) &= \sum_{\pi \in p_k} (f(\xi(\pi)) - \inf_{\pi} f) \cdot v(\pi) < \\ < \varepsilon \cdot \sum_{\pi \in p} v(\pi) = \varepsilon \cdot v(\pi) \end{aligned}$$

$$\text{По Л. 3 } L(f, p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \underline{\int}_{\Pi} \Rightarrow 0 \leq I - \underline{\int}_{\Pi} \leq \varepsilon \cdot v(\pi)$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon \Rightarrow \underline{\int}_{\Pi} = I \\ \text{Аналогично } \overline{\int}_{\Pi} = I \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \int_{\Pi} = I$$

$$\boxed{\Leftarrow} \quad \text{Пусть } \underline{\int}_{\Pi} = \overline{\int}_{\Pi} = \int_{\Pi}. \text{ Возьмем произвольные}$$

$$\{p_k\}, \quad d(p_k) \rightarrow 0, \quad \{\Xi_k\} \quad (*) :$$

$$L(f, p_k) \leq \sum(f, p_k, \Xi_k) = \sum_{\pi \in p_k} \underbrace{f(\xi(\pi))}_{(*)} v(\pi) \leq U(f, p_k)$$

$$(*) \quad \inf_{\pi} \leq \dots \leq \sup_{\pi} f$$

$$L(f, p_k) \xrightarrow[\text{Л. 3, } k \rightarrow \infty]{} \underline{\int}_{\Pi} = \overline{\int}_{\Pi} \xleftarrow[\text{Л. 3, } k \rightarrow \infty]{} U(f, p_k)$$

$$\Rightarrow \sum (f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} I$$

□

Множество меры ноль

Определение. $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру ноль, если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ покрытие $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, где C_k – открытые кубы

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(C_k) \leq \varepsilon \quad \mu(E) = 0 \quad - \text{мера}$$

Замечание. Открытые кубы \Leftrightarrow замкнутые

Замечание. $E_1 \subset E, \mu(E) = 0 \Rightarrow \mu(E_1) = 0$

Лемма 12. $\mu(E_k) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$

Доказательство. $\forall k \exists$ покрытие кубами с \sum объемов $< \varepsilon \cdot (\frac{1}{2})^k$

Тогда $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ будут покрыты и \sum объемов $< \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = \varepsilon$

□

Определение. $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет объем ноль, если $\forall \varepsilon \exists$ конечное покрытие

$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, где c_k – открытый куб

$$\sum_{k=1}^N v(C_k) < \varepsilon \quad v(E) = 0$$

Замечание.

1. открытые \Leftrightarrow замкнутые кубы

2. $v(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$

Теорема 2. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ не может иметь объем 0

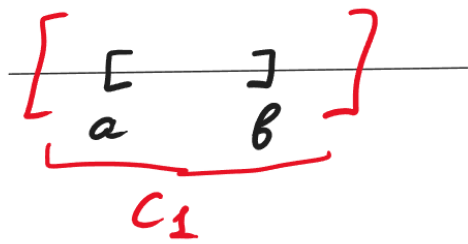
Доказательство. докажем, что если $[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^N C_k$,

$$C_k - \text{отрезки, то } \sum_{k=1}^N v(C_k) \geq b - a$$

база : $N = 1$

$$[a, b] \subset C_1 \Rightarrow v(C_1) \geq b - a$$

База:

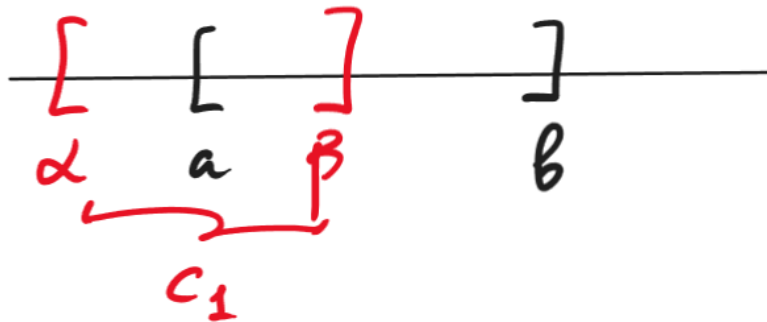


$$v(C_1) \geq b - a$$

переход : $N + 1$

$a \in U_{k=1}^{N+1} C_k \Rightarrow \exists k : a \in C_k$ перенумеруем C_k так, чтобы $a \in C_1 = [\alpha, \beta]$

$$\alpha \leq a \leq \beta \leq b$$



Если $b \in [\alpha, \beta]$, то $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$,

$$\sum_{k=1}^{N+1} v(C_k) > v(C_1) = \beta - \alpha \geq b - a$$



Если $b \notin [\alpha, \beta]$, $b > \beta$

$$\begin{aligned}
 (\beta, b] &\subset \bigcup_{k=2}^{N+1} C_k \\
 \Rightarrow [\beta, b] &\subset \bigcup_{k=2}^{N+1} C_k \xRightarrow{\text{инд. п.}} \sum_{k=2}^{N+1} v(C_k) \geq b - \beta \\
 v(C_1) &\geq \beta - a \\
 \Rightarrow \sum_{k=1}^{N+1} v(C_k) &\geq b - a
 \end{aligned}$$

□

Лемма 13. Если $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно, то $v(K) = 0 \Leftrightarrow \mu(K) = 0$

Доказательство. \Rightarrow очев. (уже доказали)

\Leftarrow Пусть $K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ открытые кубы,

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(C_k) < \varepsilon$$

\exists конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{j=1}^N C_{kj}$,

$$\sum_{j=1}^N v(C_{kj}) < \varepsilon \Rightarrow v(K) = 0$$

□

Пример 1. $E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ – разные точки $[a, b] = \{q_k, k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{q_k\}$

$$\mu(\{q_k\}) = 0 \quad \forall k \xRightarrow{\text{л. 4}} \mu(E) = 0$$

при этом $v(E) \neq 0$

$$\text{Пусть } E \subset \bigcup_{k=1}^N C_k \Rightarrow \bar{E}_{[0,1]} \subset \bigcup_{k=1}^N C_k \xRightarrow{\text{л. 5}} \sum_{k=1}^N v(C_k) \geq 1$$

Критерий интегрируемости Лебега

Почти везде \equiv везде, кроме множества точек, имеющего меру 0

$E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ огранич.

$$x \in \bar{E}, \quad \delta > 0$$

$$M_{\delta}(f, x) := \sup_{B_{\delta}(x)} f, \quad m_{\delta}(f, x) := \inf_{B_{\delta}(x)} f$$

$M_{\delta}(f, x) \uparrow$, $m_{\delta}(f, x) \downarrow$ - имеется в виду возрастание и убывание при росте δ

$$M_{\delta}(f, x) - m_{\delta}(f, x) \uparrow \text{ по } \delta$$

Определение. $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} M_{\delta}(f, x) - m_{\delta}(f, x) = w(f, x)$ – колеб. f -и в точке x

Лемма 14. $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ *огр.* $x \in \bar{E}$

f *непр.* в точке $x \Leftrightarrow w(f, x) = 0$

Доказательство.

Расписать непрерывность на языке эпс-дельта, учесть монотонность колебания функции

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall y \in B_\delta(x) \cap E \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow M_{\delta_\varepsilon}(x) - m_{\delta_\varepsilon}(x) \leq \varepsilon$$

и более того, $\forall \delta < \delta_\varepsilon \quad M_\delta(x) - m_\delta(x) < \varepsilon$

$$M_\delta(f, x) - m_\delta(f, x) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0$$

то есть $w(f, x) = 0$

$$\boxed{\Leftarrow} \quad w(f, x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon \quad \exists \delta_\varepsilon : \forall \delta < \delta_\varepsilon$$

$$M_\delta(f, x) - m_\delta(f, x) < \varepsilon$$

$$\forall y \in B_\delta(x) \cap E \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

$$f(y) \xrightarrow{y \rightarrow x} f(x)$$

□

Лемма 15. $F \subset \mathbb{R}^n$ *замкн.*, $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ *огр.*

$\forall \varepsilon > 0 : F_\varepsilon := \{x \in F \mid w(f, x) \geq \varepsilon\}$. Т. д. F_ε – *замкн.*

Доказательство. Докажем, что $\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon$ – *откр.*

$$\begin{aligned} 1. & \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus F \quad \xRightarrow{??} \delta > 0 \quad B_\delta(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon \\ 2. & \quad x \in F \setminus F_\varepsilon \end{aligned}$$

$$1. \quad x \in \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus F}_{\text{откр.}} \Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B_\delta(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus F \subset \mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon$$

$$2. \quad x \in F \setminus F_\varepsilon \Rightarrow w(f, x) < \varepsilon \Rightarrow \exists \delta > 0 : M_\delta(f, x) - m_\delta(f, x) < \varepsilon$$

$$y \in B_\delta(x) \quad \exists \delta' > 0 \quad B_{\delta'}(y) \subset B_\delta(x)$$

$$(\delta' < \delta - \|x - y\|)$$

если $y \notin F$, то $y \in \mathbb{R}^n \setminus F \subset \mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon$

если $y \in F$, то $w(f, y) < \varepsilon$

$$M(f, \delta_1, y) - m(f, \delta_1, y) \leq M(f, \delta, x) - m(f, \delta, x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow w(f, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in \mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon$$

Тогда $\forall y \in B_\delta(x)$ верно, что $y \notin F_\varepsilon$ или $B_\delta(x) \cap F_\varepsilon = \emptyset$

$x \in F \setminus F_\varepsilon$, $B_\delta(x)$ полностью лежит в $F \setminus F_\varepsilon$, значит оно открыто, F - замкнуто,
 $F \setminus (F \setminus F_\varepsilon) = F_\varepsilon$ - замкнуто

□

Лемма 16. $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ *огр.*

Если $\forall x \in \Pi \quad w(f, x) < \varepsilon$, то \exists разбиение p :

$$U(f, p) - L(f, p) < \varepsilon \cdot v(\Pi)$$

Доказательство. $\forall x \in \Pi \quad \lim_{\delta \rightarrow 0+} (M_\delta(f, x) - m_\delta(f, x)) = 0$

$$\exists \delta_\varepsilon : M_{\delta_\varepsilon}(f, x) - m_{\delta_\varepsilon}(f, x) < \varepsilon$$

$$\forall x \exists \pi_x \text{ открытый п/п} : \sup_{\pi_x} f - \inf_{\pi_x} f < \varepsilon$$

$\Pi \subset \bigcup_{x \in \Pi} \pi_x$, Π компактен $\Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие

$$\Pi \subset \bigcup_{k=1}^N \pi_{x_k}$$

разрешем Π гранями всех π_{x_k} , $k = 1, \dots, N$

\Rightarrow получаем разбиение p

$$U(f, p) - L(f, p) = \sum_{\pi \in p} (\sup_{\pi} f - \inf_{\pi} f) v(\pi) < \varepsilon \cdot \sum_{\pi \in p} v(\pi) = \varepsilon v(\Pi)$$

$$\forall \pi \in p \exists k \quad \pi \subset \pi_{x_k}$$

$$\Rightarrow \sup_{\pi} f - \inf_{\pi} f \leq \sup_{\pi_{x_k}} f - \inf_{\pi_{x_k}} f < \varepsilon$$

□

Теорема 3. *Критерий Лебега*

$\Pi \in \mathbb{R}^n$ - n/n $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ - *огр*

$$D = \{x \in \Pi | f - \text{разрывна в } x\}$$

Тогда:

$$\exists \int_{\Pi} f \Leftrightarrow \mu(D) = 0$$

Доказательство. Пусть $\Pi_\varepsilon = \{x \in \Pi | w(f, x) \geq \varepsilon\}$ - замкнутые по Лемме, ограниченные из ограниченности исходного п/п, значит компактные

$$D \subset \bigcup_{\varepsilon > 0} \Pi_\varepsilon$$

$$\boxed{\Leftarrow} \mu(D) = 0$$

$$\mu(\Pi_\varepsilon) = 0, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow v(\Pi_\varepsilon) = 0$$

$\Pi_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^N \pi_k, \sum_{k=1}^N v(\pi_k) < \varepsilon, \pi_k$ - открытые кубы

Разрежем Π гранями $\pi_1 \dots \pi_N$ - получим разбиение P

$P = P_1 \cup P_2, P_1, P_2$ - не разбиения, но состоят из кубов

$P_1 = \{\pi \in P \mid \exists k : \pi \in \overline{\pi_k}\}$

$P_2 = P \setminus P_1$

$\sum_{\pi \in P_1} v(\pi) \leq \sum_{k=1}^N v(\pi_k) < \varepsilon$

f - огр, значит $\exists M > 0 : \forall x \in \Pi |f(x)| < M$

$\sum_{\pi \in P_1} (M_\pi(f) - m_\pi(f)) \cdot v(\pi) \leq 2M \cdot \sum_{\pi \in P_1} v(\pi) \leq 2M \cdot \varepsilon$

$\forall \pi \in P_2 : \forall x \in \pi : w(f, x) < \varepsilon$

$\exists P(\pi) : U(f, P(\pi)) - L(f, P(\pi)) < \varepsilon \cdot v(\pi)$

Разрежем Π гранями $\pi' \in P(\pi)$ для всех $\pi \in P_2$

Получим разбиение Π : $P' = P'_1 \cup P'_2, P'_1, P'_2$ - более мелкие по сравнению с P_1, P_2

$\sum_{\pi' \in P'_1} (sup_{\pi'} f - inf_{\pi'} f) v(\pi') \leq 2M \cdot \sum_{\pi' \in P'_1} v(\pi') < 2M \cdot \varepsilon$

$\sum_{\pi' \in P'_2} (sup_{\pi'} f - inf_{\pi'} f) v(\pi') = \sum_{\pi \in P_2} \sum_{\pi' \in P(\pi)} (sup_{\pi'} f - inf_{\pi'} f) v(\pi') < \sum_{\pi \in P_2} \varepsilon \cdot v(\pi) < \varepsilon \cdot v(\Pi)$

$U(f, P') - L(f, P') = \sum_{\pi' \in P'} (sup_{\pi'} f - inf_{\pi'} f) v(\pi') < \varepsilon \cdot (2M + v(\Pi)) \Rightarrow \exists \int_{\Pi} f$

$\Rightarrow \exists \int_{\Pi} f$

Хотим доказать, что $\mu(D) = 0$

$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_{1/k}$

Если $\forall k : \mu(\Pi_{1/k}) = 0$, то по лемме о мере счётного объединения множеств меры

0 докажем необходимое

Из существования интеграла: $\forall \varepsilon > 0 \exists P : U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{k}$

$P_k = \{\pi \in P \mid \text{Int } \pi \cap \Pi_{1/k} \neq \emptyset\}$

$\Pi_{1/k} \subset \bigcup_{\pi \in P_k} \pi$

$\forall \pi \in P_k \exists x \in \text{Int } \pi : w(f, x) \geq \frac{1}{k}$

$\exists \delta > 0 : B_\delta(x) \in \text{Int } \pi \sup_{B_\delta(x)} f - \inf_{B_\delta(x)} f \geq \frac{1}{k}$

$\sup_{\pi} f - \inf_{\pi} f \geq \sup_{B_\delta(x)} f - \inf_{B_\delta(x)} f \geq \frac{1}{k}$

$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{\pi \in P} (\sup_{\pi} f - \inf_{\pi} f) v(\pi) \geq \sum_{\pi \in P_k} (\sup_{\pi} f - \inf_{\pi} f) v(\pi) \geq \frac{1}{k} \cdot \sum_{\pi \in P_k} v(\pi)$

$\sum_{\pi \in P_k} v(\pi) \leq k \cdot (U(f, P) - L(f, P)) < \varepsilon$

$v(\Pi_{1/k}) = 0$

□