чё

$G \subset \mathbb{R}^n$ откр., огр., $f : G \to R$ огр и п.в. непр.

$\mathrm{supp} f \subset G$

$$\implies \exists \int_G f$$

Теорема 1. *$G \subset \mathbb{R}^n$ откр., огр.,*
$g : G \to \mathbb{R}^n$ диффеоморфизм
$g(G)$ огр.,
$f : g(G) \to \mathbb{R}$ огр. и п.в. непр., $suppf \subset g(G)$
Тогда

$$\exists \int_G f \circ g |\det g'| = \int_{g(G)} f$$

Доказательство.

Лемма 12. *$G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $g : G \to R^n$ гомеоморфизм (биекция, непр. в обе стороны)*
$E \subset G : \overline{E} \subset G$
Тогда
$g(\overline{E}) = \overline{g(E)}$
$g(Int) = Intg(E)$
$g(G \setminus \overline{E}) = g(G) \setminus \overline{g(E)}$
$g(\delta E) = \delta g(E)$
Если $G, g(G)$ огр., g - диффеоморфизм, то $\mu(E) = 0 \iff \mu(g(E)) = 0$

Доказательство. $G \ni x_n \to x \in G, n \to \infty \iff g(G) \ni g(x_n) \to g(X) \in G(G), n \to \infty$

$g(x) \ni g(\overline{E}) \iff x \in \overline{E} \iff g(x) \in \overline{g(E)}$

$x \in IntE \iff \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset E \iff \exists \delta > 0 : B_0(g(x)) \subset g(E) \iff g(x) \in Intg(E)$

это g, g^{-1} непр.

$x \in \delta E \iff E \ni y_n \to x, n \to \infty$

$G \setminus E \ni z_n \to x, n \to \infty$

$$\iff \begin{cases} g(E) \ni g(y_n) \to g(x), n \to \infty \\ g(G \setminus E) \ni g(z_n) \to g(x) \end{cases} \iff g(x) \in \delta g(E)$$

$x \in G \setminus \overline{E} = Int(G \setminus E) \iff g(x) \in g(x) \in Int(g(G) \setminus g(E)) = g(G \setminus \overline{g(E)})$ □

g - диффеоморфизм, $G, g(G)$ огр., $\mu(E) = 0$

$\forall \varepsilon \exists C_l, l = 1, \ldots, N$ открытые кубы $E \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l, \sum_{l=1}^{\infty} v(C_l) < \varepsilon$

$l(C)$ - длина ребра куба C, $v(C) = (l(C))^n$

$\mathrm{diam} C = l(C) \cdot \sqrt{n}$

Если $\varepsilon < (\frac{\delta}{2\sqrt{n}})^n$
$\forall l \quad v(C_l) < \varepsilon \implies l(C_l) < \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$
$\mathrm{diam} C_l < \frac{\delta}{2}$
$\mathrm{dist}(E, \delta G) = \delta$
$E \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \subset G$
$\bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \subset E^{\frac{\delta}{2}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(x, E) < \frac{\delta}{2}\} \subset \overline{E^{\delta/2}} \subset G$
$\max_{\overline{E^{\delta/2}}} ||g'|| = M$
$\forall x_1, x_2 \in E^{\delta/2} \quad ||g(x_1) - g(x_2)|| < M \cdot ||x_1 - x_2||$
x_l - центр куба l
$G(C_l) \subset B_{M \mathrm{diam} C_l \cdot 0.5}(g(x_l)) \subset \widetilde{C}_l, l(\widetilde{C}_l) = M \cdot \mathrm{diam} C_l$
$v(\widetilde{C}_l) = (l(\widetilde{C}_l))^n = M^n (\mathrm{diam} C_l)^n = M^n (\frac{\mathrm{diam} C_l}{\sqrt{n}})^n (\sqrt{n})^n = (M\sqrt{n})^v (C_l)$
$g(E) \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \widetilde{C}_l, \sum_{l=1}^{\infty} \widetilde{C}_l = (M\sqrt{n})^n \cdot \varepsilon$

Замечание. *В условии теоремы* $\exists \int_G f \circ g |\det g'|$

Доказательство. $\mathrm{supp} f = \{y \in g(G) \mid f(y) \neq 0\}$
$\mathrm{supp}(f \circ g \underbrace{|\det g'|}_{>0}) = \mathrm{supp} f \circ g = \{x \in G \mid (f \circ g)(x) \neq 0\}$
$g(\{x \in G | f \circ g \neq 0\}) = \{y \in g(G) | f(y) \neq 0\}$
$\implies$ л.12 замыкания совпадают
$\mathrm{supp}(f \circ g |\det g'|)$ компактен
$\sup_{\mathrm{supp}(f \circ g |\det g'|)} |\det g'| < \infty \implies f \circ g |\det g'|$ огр.

f п.в. непр. на $g(G) \implies f \circ g$ п.в. непр. на G
$|\det g'| \in C(G) \implies f \circ g |\det g'|$ п.в. непр. на G
Значит, $\exists_G f \circ g |\det g'|$ ☐

Разобъем область на маленькие кусочки, на каждом кусочке локально сможем представтить диффеоморфизм в виде композиции простейших диффеоморфизмов, меняющих одну коорд.

Лемма 13. $G \subset \mathbb{R}^n$ *откр.,*
$g : G \to R$ *диффеоморфизм*
$\forall x \in G \quad \exists$ *окрестность* $U \subset G$*:*

$$g\big|_U = g_1 \circ \ldots \circ g_n$$

g_k *- диффеоморфизм простейшего вида, т.е.* $(g_k)_i(x) = x_i, \forall i \neq k$

Доказательство. Индукция
база: $k = 1$: уже простейший
переход: $(g(x))_i = x_i, \quad i \geq k + 1$

$x = (y = (x_1, \ldots, x_k), z)$

Пусть $x_0 \in G$, $g'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$

$0 \neq \det g'(x_0) = \det \frac{\partial g}{\partial y}(x_0) \implies$ не все миноры порядка $k-1$ нулевые. Найдётся $k-1$ независимый столбик.

Перенумеровкой компонент тобъемся того, чтобы главный минор не был равен 0

$f : G \to \mathbb{R}^n, \quad (f(x))_i = \begin{cases} (g(x))_i, & i < k \\ x_i, & i \geq k \end{cases}$

$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}_{k-1} \\ & I_{n-k+1} \end{pmatrix}$

$\det f'(x_0) = (\frac{\partial g}{\partial y})_{k-1} \neq 0$

$f \in C^1(G)$

$\exists$ окрестность $U \ni x_o \quad f\big|_U$ - диффеоморфизм

Рассм $h = g \circ (f\big|_U)^{-1}$ - диффеоморфизм

$h : f(U) \to g(U)$

$g\big|_U = h \circ f\big|_U$

Для f $\exists$ окрестность x_0, в которой f раскладывается в композицию простейших по инд предп.

$u \in F(U)$

$i < k \quad (h(u))_i = (g \circ f^{-1}(u))_i = (f \circ f^{-1}(u))_i = u_i$

$i > k \quad (h(u))_i = (g \circ f^{-1}(u))_i = (f^{-1}(u))_i = u_i$

$(\underbrace{f(x)}_{=u})_i = x_i = (f^{-1}(u))_i \quad i > k$

т.е. h - простейший диффеоморфизм и g раскладывается

$\square$

Лемма 14. *Утверждение теоремы верно при* $n = 1$

Лемма 15. *В условиях теоремы на* G *и на* g *при* $n = 1$ *для* $\forall f : g(G) \to \mathbb{R}$ *огр. :* $supp \subset g(G)$

$$\underline{\int}_G f \circ g |\det g'| = \underline{\int}_{g(G)} f, \quad \overline{\int}_G f \circ g |\det g'| = \overline{\int}_{g(G)} f$$

Доказательство. $\mathrm{supp} f$ компактен.

$\forall x \in \mathrm{supp} f \quad \exists \varepsilon_x > 0 : [x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x] \subset G$

$\mathrm{supp} f \subset \bigcup_{x \in \mathrm{supp} f} (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \implies \mathrm{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^N (x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i})$

$\mathrm{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^N [x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}]$отрезки не пересекаются

$\forall i \quad (g^{-1})'|_{[x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}]}$ имеет постоянный знака

$g^{-1}([x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}])$ - отрезок

$\implies$ достаточно доказать, что $\int_{g([a,b])} f = \int_{[a,b]} f \circ g|g'|$

$g' > 0 : \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$

$g' < 0 : \int_{g(b)}^{g(a)} f(y)dy = \int_a^b f(g(x))\ |g'(x)|dx$

P_y - разбиение $g([a,b]) \quad P_x = g^{-1}(P_y)'' = \{g^{-1}(\pi)|\pi \in P_y\}$

$\max_{[a,b]} |g'| \cdot d(P_y) \leq d(P_x) \leq \max_{g([a,b])} |(g^{-1})'| \cdot d(P_y)$

$\sum_{\pi_y \in P_y} \sup_{\pi_y} f \cdot v(\pi_y) = \sum_{\pi_x \in P_x} \sup_{\pi_x} (f \circ g)|g'(\xi(\pi_x))| \cdot v(\pi_x)$

$\pi_y = g(\pi_x)$

$v(\pi_y) = |g(\beta) - g(\alpha)| = |g'(\xi)| \cdot (\beta\alpha)$

прадалжаем неравенство (не правильное он все стер суака) $\leq \underbrace{\sup_{[a,b]} |g'|}_{<\infty} \sum_{\pi_x \in P_x} \sup_{\Pi_x} f \circ g \cdot$

$v(\pi_x)$

$P_{x,k} : d(P_{x,k}) \to 0, k \to \infty$

$P_{y,k} : d(P_{y,k}) \to 0, k \to \infty$

$\forall \pi_x \exists \xi(\pi_x) < \pi_x \quad v(\pi_y) = |g'(\xi(\pi_x))| \cdot v(\pi_x)$

$U(f, P_{y,k}) \leq \sum_{\pi_x \in P_x} \sup_{\pi_x} f \circ g|g'| \cdot v(\pi_x) = U(f \circ g|g'|, P_{x,k})$

слева $\overline{\int}_{g([a,b])} f \leq$ справа $\int_{[a,b]} f \circ g|\det g'|$

$\overline{\int}_{g^{-1}g([a,b])} f \circ g|g'| \leq \overline{\int}_{g([a,b])} f \circ g \circ g^{-1}|g' \circ g^{-1}| \cdot |g^{-1}|$

$\implies \overline{\int}_{g([a,b])} f = \overline{\int}_{[a,b]} f \circ g|g'|$ $\square$

1. g - простейший диффеоморфизм $\quad (g(x))_i = x_i \quad i < n$

$g(G) = \Pi_y = \underbrace{\Pi_1}_{\subset \mathbb{R}^n} \times \underbrace{\Pi_{yn}}_{\subset \mathbb{R}}$

$G = \Pi_x = \Pi_1 \times \underbrace{\Pi_{xn}}_{\subset \mathbb{R}}$

$\int_{g(G)} f = \int_{\Pi_y} f \cdot \chi_g(G) \overset{\text{фубини}}{=} \int_{\Pi_1} dy_1 \ldots dy_{n-1} \underline{\int}_{\Pi_2} dy_n f \cdot \chi_g(G) =$

$\int_{\Pi_1} dy_1 \ldots dy_{n-1} \underline{\int}_{\underbrace{\Pi_n[g(G) \cap (y_1, \ldots, y_{n-1}) \times \mathbb{R}]}_{\text{открытое огр мнжво}}} f(y)dy_n$

$\overset{\text{лемма 14}}{=} \int_{\Pi_1} dx_1 \ldots dx_{n-1} \underline{\int}_{\Pi_n[G \cap (y_1, \ldots, y_n) \times \mathbb{R}]} (f \circ g)(x)(\frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x))dx_n$ что-та в последней скобке равно $\det g'(x)$

$= \int_{\Pi_1} dx_1 \ldots dx_{n-1} \underline{\int}_{\Pi_{xn}} f \circ g|\det g'| \cdot \chi_G = \int_{\Pi_x} f \circ g|\det g'| \cdot \chi_G = -\int_G f \circ g|\det g'|$

видимо некст раз докажем

$\square$