Алгебра

13 октября 2022

§Жорданова форма оператора с единственным собственным числом

K – алгебраически замкнуто

V – векторное пространство над K, $\dim V\ n < \infty$

$\varphi \in \mathrm{End}(K)$ – линейный оператор

$\chi_\varphi(t) = (-1)^n(t-\lambda)^n$

Надо показать, что $\exists$ базис, в котором $[\varphi]$ состоит из жордановых клеток, отвечающих собственному числу λ

$$\{0\} \underset{\neq}{\subsetneq} U_0(\lambda) \underset{\neq}{\subsetneq} U_1(\lambda) \underset{\neq}{\subsetneq} \dots \underset{\neq}{\subsetneq} U_n(\lambda) = V$$

$U_i,\ i = 0, \dots, n$ – корневые подпространства

Лемма 1. *Если* $U_i(\lambda) = U_{i+1}(\lambda)$, *то* $U_i(\lambda) = U_k(\lambda),\ \forall k \geq i$

Доказательство. Достаточно доказать, что $U_{i+2}(\lambda) = U_{i+1}(\lambda)$

$v \in U_{i+2}(\lambda) \quad (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{i+2}(v) = 0 \quad (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(v) \in U_{i+1}(\lambda) = U_i(\lambda)$

$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{i+1}((\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(v)) = 0 \quad \Rightarrow (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{i}((\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(v)) = 0$

$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{i+1}(v) = 0 \quad v \in U_{i+1}(\lambda)$ □

Пусть m неизм. инд.:

$U_m(\lambda) = U_{m+1}(\lambda) \Rightarrow V = U_m(\lambda) \Rightarrow U_{m-1} \underset{\neq}{\subsetneq} U_m(\lambda)$

Определение. *Если* $v \in U_i(\lambda)$ $v \notin U_{i-1}(\lambda)$, *то*

v – корневой вектор высоты i

$v_1^{(m)}, \dots, v_{k_m}^{(m)}$ – относительный базис $U_m(\lambda)$ относительно $U_{m-1}(\lambda)$

$v_j^{(m-1)} = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})v_j^{(m)},\ j = 1, \dots, k_m$

$v_j^{(m-1)} \in U_{m-1}(\lambda)$ и отн. л. н. отн. $U_{m-2}(\lambda)$

Дополним до относительного базиса $U_{m-1}(\lambda)$ отн. $U_{m-2}(\lambda)$

$$
\begin{array}{llllllllll}
m: & v_1^{(m)} & \dots & v_{k_m}^{(m)} & & & & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
m-1: & v_1^{(m-1)} & \dots & v_{k_m}^{(m-1)} & v_{k_m+1}^{(m-1)} & \dots & & & v_{k_{m-1}}^{(m-1)} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & & & \downarrow & \\
m-2: & v_1^{(m-2)} & & \dots & \dots & & & & v_{k_{m-1}}^{(m-1)} & \\
 & & & \dots & \dots & & & & & \\
 & & & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
2: & v_1^{(2)} & & \dots & \dots & & v_{k_3}^{(2)} & v_{k_3+1}^{(2)} & v_{k_2}^{(2)} & \\
 & & & & & & & & \downarrow & \downarrow \\
1: & v_1^{(1)} & & \dots & \dots & & & & v_{k_2}^{(1)} \dots & v_{k_1}^{(1)}
\end{array}
$$

$i+1: \ \dots$

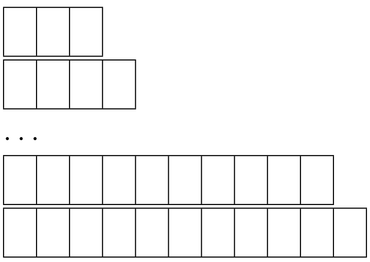
$i: \ v_j^{(i)} = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})v_j^{(i+1)} \quad i = 1, \dots, k_{i+1}$

и дополним до относительного базиса $U_i(\lambda)$ относительно $U_{i-1}(\lambda)$

$$v_j^{(i)}, \dots \quad j = k_{i+1}+1, \dots, k_i$$

$k_m \le k_{m-1} \le \dots \le k_1$

Обычно можно увидеть следующее: (диагр.)



Пример. $\{v_j^{(i)} \mid 1 \le i \le m; 1 \le j \le k_j\}$ – *базис* V

$\{v_j^{(i)}\}$ – *относительный базис* $U_1(\lambda)$ *относительно* $U_0(\lambda)$

то есть $\{v_j^{(i)}\}$ – *базис* $U_1(\lambda)$

$\{v_j^{(1)},\ v_j^{(2)}\}$ – *базис* $U_2(\lambda)$

$v_j^{(1)}$ – *базис* $U_1(\lambda)$, $\quad v_j^{(2)}$ – *базис* $U_2(\lambda)$ *относительно* $U_1(\lambda)$

По индукции:

$\{v_j^{(1)}\} \bigcup \dots \bigcup \{v_j^{(i)}\}$ – *базис* $U_i(\lambda)$

$\{v_j^{(i+1)}\}$ – *относительный базис* $U_{i+1}(\lambda)$ *относительно* $U_i(\lambda)$

Повторение: Инвариантное подпространство: V – векторное пространство
$\exists W \subset E \Rightarrow \exists T : V \to V \Rightarrow T(W) \subset W \Rightarrow$ инв.

Покажем, что пространство, порожденное векторами из 1го столбца , инвариантно

$$j: \quad \begin{array}{c|c} v_{k_i+1} & \\ \hline & v_j^{(i)} \\ & \vdots \\ & v_j^{(1)} \end{array}$$

$k_{i+1} < j \leq k_j$

$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})v_j^{(k)} = v_j^{(k-1)}$

$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})v_j^{(1)} = 0$

$$k\varphi(v_j^{(k)}) = \lambda\varphi_j^{(k)} + v_j^{(k-1)} \quad k \geq 2$$
$$\varphi(v_j^{(1)}) = \lambda v_j^{(1)} \quad k \geq 1$$
$$< v_j^{(i),\ldots,v_j^{(1)}} >$$

φ – инвариантно

$V = \sum_j < v_j^{(i)}, \ldots, v_j^{(1)} >= \bigoplus_j < v_j^{(i)}, \ldots, v_j^{(1)} >$
V рассkладывается в $\bigoplus$ инвариантных подпространств с выбранным базисом
Клетка в $[\varphi]$, отвечающая j-му столбцу диаграммы:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \ldots & & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \lambda & 0 \\ 0 & & & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ – единственная жорданова клетка}$$

Замечание.

Сколько клеток для λ? – сколько векторов на нижнем уровне = размерность пространства собственных векторов – геометрическая кратность $\lambda = \dim U_1(\lambda)$

Размер максимальной клетки = наименьшее m т. ч.:

$$U_m(\lambda) = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i(\lambda) = U_a(\lambda)$$

a – алгебраическая кратность λ

Суммарный размер клеток = $\dim U_m(\lambda)$ = *алгебраическая кратность*

Замечание. *Лучше снизу вверх, чем наоборот*

Мы пытаемся найти $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})\boxed{v_j^{(2)}} = v_j^{(1)}$ $\boxed{*}$

и уже знаем: $v_1^{(1)}, \ldots, v_{k_1}^{(1)}$ *– базис* $U_1(\lambda)$

Но $\boxed{*}$ *не всегда разешимо*

Теорема 1 (о попарном разложении)**.**

$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (t - \lambda_i)^{a_i}$, λ_i *– попарно разл.*

$V = \bigoplus_{i=1}^{n} U_{a_i}(\lambda_i)$

§Единственность жордановой формы

$[\varphi]$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_s}(\lambda_1) \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} J_{l_1}(\lambda_2) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{l_r}(\lambda_2) \end{matrix}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$A - \lambda I$: если λ не совпадает с λ_i в текущем блоке, на диагонали ненулевые элементы $\Rightarrow$ обратим (ранг = размеру)

А для совпадающего:

$$n - \mathrm{rank}(A - \lambda I) = \text{ колич. клеток, отвеч. с. ч. } \lambda =$$

$$= \text{ размерность пространства решений } (A - \lambda I)x = 0 = \dim U_1(\lambda)$$

(ранг = размер - 1)

Фиксируем λ

в жордановой форме:

d_1 – клеток размера 1

d_2 – клеток размера 2

$\dots$

d_m – клеток размера m

$d_1 + d_2 + \dots + d_m = \dim U_1(\lambda)$

$\dim U_2(\lambda) = \dim\{x : (A - \lambda I)^2 x = 0\} = n - \operatorname{rank}(A - \lambda I)^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 1 & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$d_1 + 2d_2 + \dots + 2d_m = \dim U_2(\lambda)$

$d_1 + 2d_2 + \dots + id_i + \dots + id_m = \dim U_i(\lambda)$

$d_{i+1} + \dots + d_m = \dim U_{i+1}(\lambda) - \dim U_i(\lambda)$

$d_i + d_{i+1} + \dots + d_m = \dim U_i(\lambda) - \dim U_{i-1}(\lambda)$

$d_i = 2\dim U_i(\lambda) - \dim U_{i-1}(\lambda) - \dim U_{i+1}(\lambda)$

Размерность корневого пространства от выбора базиса никак не зависит

$d_1 = 2\dim U_1(\lambda) - \dim U_2(\lambda) - 0$

$i = m:\ 2\dim U_m(\lambda) - \dim U_{m-1}(\lambda) - \underbrace{\dim U_{m+1}(\lambda)}_{=\dim U_m(\lambda)} = \dim U_m(\lambda) - \dim U_{m-1}(\lambda) =$

$= \sum_{k_1,\dots,k_p \in \{1,\dots,n\}, k_i \neq k_j, i \neq j} A_{k_1 h_1} \dots A_{k_p h_p} f_{k_1} \wedge \dots f_{k_p} =$

$\sum_{k=(k_1,\dots,k_p), 1 \le k_1 < \dots < k_p \le n} \sum_\pi A_{k_1 h_1} \dots A_{k_p h_p} \operatorname{sign} \pi f_k$