Матан 03 10

lindy2076

3 октября 2022 г.

14:10 Симонов пришёл

Давайте определим интеграл от функции более менее чё... Характеристическая функция множеств : $\chi_E(x) = 1$ if $x \in E$ else 0 Докажем, что точки разрыва характеристической функции совпадают с границей.

$\mathbb{R}^n = IntE \cup \delta E \cup ExtE$
По гейне предела нет, т.е. это точка разрыва следовательно она совпадает с границей.
Следствие: $E \subset \Pi$(параллелипипед какой-то) : $\exists \int_\Pi \chi_E \iff \mu(\delta E) = 0$ мю ето мера множества

Опр. $E \subset \Pi, f : E \to \mathbb{R}$ ограничена. Интеграл:

$$\int_E f = \int_\Pi f \cdot \chi_E$$

$\widetilde{f}(x) = f(x)$ if $x \in E$ elif $x \in \Pi \setminus E$ then 0

Лемма: $\mu(\delta E) = 0, f : E \to \mathbb{R}$ почти везде непрерывна (везде, кроме множества меры 0). Тогда $\exists \int_\Pi f$
Д: нужно доказать, что существует интеграл от продолжения функции(ф с волной). Посмотрим на точки разрыва фунции с волной в Π: их множетсво разбивается на множетсво точек разрыва ф с волной во внутренности E, множество точек разрыва ф с волной на границе E и на множество точек разрыва во внешности $E = ExtE \cap \Pi$. Первое входит в множество точек разрыва ф без волны во всём E, второе подмножество границы E, третье пустое. Первые два имеют меру 0 следовательно всё множество точек разрыва ф с волной имеет меру 0.

Определим жорданов объем.
Опр. E ограничено, $\mu(\delta E) = 0$
$\exists \Pi \subset \mathbb{R}^n, n \mid n, E \subset \Pi : v(e) = \displaystyle\int_E 1 = \int_\Pi \chi_E$ - **жорданов объём**. При н = 1 это длина, н = 3 - объём. Мы распространили оьъем с квадратиков на довольно большой класс множеств. В каком-то смысле этот класс недостаточен. существуют неизмеримые жордановы множества. Возьмем отрезок $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_k, k \in \mathbb{N}\}$. Теперь для

каждой точки q_k найдем инетрвал, который лежит в $[0,1]$ и длиной r_k. $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < 1$. $(q_k - \frac{r_k}{2}, q_k + \frac{r_k}{2}) \subset (0,1)$. Рассмотрим множество $G = \bigcup_{k=1}^{\infty}(q_k - \frac{r_k}{2}, q_k + \frac{r_k}{2})$. Оно плотно в $[0,1]$ ($\overline{G} = [0,1]$), открыто $IntG = G \implies \delta G = \overline{G} \setminus IntG = [0,1] \setminus G$ $\mu(\delta G) \neq 0$
Докажем, что граница не равна 0.
Док: предположим, что мера равна 0: $\mu(\delta G) = 0 . \exists a_k, b_k, k \in \mathbb{R} : 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < 1 - \sum_{l=1}^{\infty} r_l$. Потребуем: $\delta G \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]$. Сделаем покрытие открытым: $\delta G \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(\hat{a_k}, \hat{b_k})$
Мы хотем свести с противоречием, что отрезок можно покрыть конечным набором интервалов суммарной длины меньше отрезка. Покроем отрезок: $[0,1] = G \cup \delta G \subset \left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(q_k - \frac{r_k}{2}, q_k + \frac{r_k}{2}) \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty}(\hat{a_k}, \hat{b_k}))\right) \implies$ существует конечное подпокрытие

$$[0,1] \subset \left((\bigcup_{i=1}^{I}(q_{ki} - \frac{r_{ki}}{2}, q_{ki} + \frac{r_{ki}}{2})) \cup (\bigcup_{j=1}^{J}(\hat{a_{lj}}, \hat{b_{lj}}))\right) \subset \left((\bigcup_{i=1}^{I}[q_{ki} - \frac{r_{ki}}{2}, q_{ki} + \frac{r_{ki}}{2}]) \cup (\bigcup_{j=1}^{J}[\hat{a_{lj}}, \hat{b_{lj}}])\right)$$

д-во лемма 5 $\sum_{i=1}^{I} r_{ki} + \sum_{j=1}^{J}(\hat{b_{lj}} - \hat{a_{lj}}) \geq 1$.
С другой стороны $\sum_{j=1}^{J} r_{kj} + \sum_{j=1}^{J}(\hat{b_{lj}} - \hat{a_{lj}}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} r_k + 2\sum_{l=1}^{\infty}(b_l - a_l) < 1$ противоречие $\implies \mu(\delta E) \neq 0$

зам*. $v(E) = 0$ старом смысле $\implies E$ измеримо по Жордану и $v(E) = 0$ (в смысле Жордана)

мера - обобщение понятие длины, объёма. (типа если множества не пересекаются то можно просто сложить их объёмы)
Опр. $F \subset 2^X$ – σ-алгебра, если
1.$\varnothing, X \in F$
2.$E \in F \implies X \setminus E \in F$.
3.$E_k \in F, k \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in F$

Замечание. $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in F$. $F_1, F_2 - \sigma$-алгебра $\implies F_1 \cap F_2$ - σ-алгебра.
$F_\alpha - \sigma$-алгебра $\forall \alpha \implies \bigcap_\alpha F_\alpha - \sigma$-алгебра.
Для любого семейства множеств из 2^X существует наименьшая σ-алгебра, содержащая это семейство. Построение: Пересечение всех сигм алгебр, содержащее это семейство. Не пусто, потому что по крайней мере 2^X лежит. И минимальное.
факт Для любого метричекого постранства есть **борелевская** σ-алгебра. Она порождена всеми открытыми множествами.
Что такое мера?
Опр. Пусть есть пространство X, $F - \sigma$-алгебра на нём.
$\mu : F \to [0, \infty]$ называется **мерой**, если
1.$\mu(\varnothing) = 0$
2.$E_k \in F, k \in \mathbb{N}, E_i \cap E_j \neq \varnothing, i \neq j \implies \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$

Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$: $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)$ Если есть один параллелипипед и другой маленький в нём. Маленький параллелипипед можно достроить до большого добавлением элементов из полукольца.

Опр. $R \subset 2^X$ – кольцо множеств, если $\forall E_1, E_2 \in R : E_1 \setminus E_2 \in R, E_1 \triangle E_2 \in R$
$(E_1 \cup E_2 \in R, E_1 \cap E_2 \in R)$

Лемма. Пусть множество E измеримо по Жоржану.
Тогда $\forall \varepsilon \, \exists$ компакт $K \subset E$, измеримый по Жордану и такой, что $v(E) - v(K) < \varepsilon$
Д-во: $\varepsilon > 0$. E измеримо следовательно $\mu(\delta E) = 0$
$\exists C_k, k \in \mathbb{N}$, открытые кубы, $\delta E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k, \sum_{k=1}^{\infty} v(C_k) < \varepsilon$.
E компактна следовательно можно выбрать конечное подпокрытие, чтобы $\delta E \subset \bigcup_{j=1}^{J} C_{kj}$
$K = \overline{E} \setminus \bigcup_{j=1}^{J} C_{kj}$ компактно.
$\delta K = \delta(\overline{E} \cap (\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{J} C_{kj})) = \delta E \cup (\bigcup_{j=1}^{J} \delta C_{kj})$ – имеет меру 0.
$K \subset E, \quad E \setminus K \in \bigcup_{j=1}^{J} C_{kj} \quad v(E) - v(K) = \int_\Pi \chi_E - \chi_K = \int_\Pi \chi_{E \setminus K} \leq \int_\Pi \chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{kj}} \leq \sum_{j=1}^{J} \int_\Pi \chi_C = \sum_{j=1}^{J} \delta(C_{kj}) < \varepsilon$

Π, P
$$\sum_{\Pi \in P} \inf_\Pi f_1 v(\Pi) + \sum_{\Pi \in P} \inf f_2 v(\Pi) \leq \sum_{\Pi \in P} \inf_\Pi (f_1 + f_2) v(\Pi)$$
$$\implies \underline{\int}_\Pi f_1 + \underline{\int}_\Pi f_2 \leq \underline{\int}_\Pi f_1 + f_2 \leq \overline{\int}_\Pi f_1 + f_2 \leq \overline{\int}_\Pi f_1 + \overline{\int}_\pi f_2$$

Теорема Фубини

$\int_\Pi f = \int_{\Pi_1} dx \int_{\Pi_2} f(x,y) dy$
Теор.(фубини) $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2, \Pi_1 \subset \mathbb{R}^n, \Pi_2 \in \mathbb{R}^m, f : \Pi \to \mathbb{R}$ огр.
Если $\exists \int_\Pi f$, то $\exists \int_{\Pi_1} \mathscr{L}, \int_{\Pi_2} \mathscr{U}$ и они все равны между собой
$\mathscr{L}(x) = \underline{\int}_{\Pi_2} f(x,y) dy, \mathscr{U}(x) = \overline{\int}_{\Pi_2} f(x,y) dy$
$f(x,y) dx dy = \Pi = \int_{\Pi_1} \mathscr{L}(x) dx = \int_{\Pi_1} \mathscr{U}(x) dx = \int_{\Pi_1} dx (\underline{\int}_{\Pi_2} f(x,y) dy) = \int_{\Pi_1} dx (\overline{\int}_{\Pi_2} f(x,y) dy)$

Д-во: $p = p_1 \times p_2$ - разбиение $\Pi . p_1 - \Pi_1, p_2 - \Pi_2$ $P = \{\Pi_1 \times \Pi_2 | \Pi_1 \in P_1, \Pi_2 \in P_2\}$ $L(f, P) = \sum_{\Pi \in P} \inf_\Pi v(\Pi) = \sum_{\Pi_1, \Pi_2} \inf_{\Pi_1 \times \Pi_2} f \cdot v(\Pi_1) v(\Pi_2) = \sum_{\Pi_1} v(\Pi_1) \sum_{\Pi_2} \inf_{\Pi_1 \times \Pi_2} f v(\Pi_2)$

$$\forall x \in \Pi_1 \inf_{\Pi_1 \times \Pi_2} f \leq \inf_{y \in \Pi_2} f(x,y), \quad \sum_{\Pi_2} \inf_{\Pi_1 \times \Pi_2} f \cdot v(\Pi_2) \leq \sum_{\Pi_2} \inf_{y \in \Pi_2} f(x,y) v(\Pi_2)$$
$= L(f(x, \cdot), p_2) \leq \mathscr{L}(x) \implies \inf_{\Pi_1 \times \Pi_2} f = \inf_{\Pi_1} \mathscr{L} \implies L(f,p) \leq L(\mathscr{L}, p_1)$

$L(f, P) \leq L(\mathscr{L}, p_1) \leq U(\mathscr{L}, p_1) \leq U(\mathscr{U}, P_1) \leq U(f, p)$ (*)

$\sup_p L(f,p) = \inf_p U(f,p)$ (условие)

$\sup_p L(f,p) \leq \sup_{p_1} L(\mathscr{L}, p_1)$

$\sup_{p_1} L(\mathscr{L}, p_1) \leq \inf_{p_1} U(\mathscr{L}, p_1)$ (всегда верно)

$\inf_{p_1} U(\mathscr{L}, p_1) \leq \inf_p U(f,p)$ (из (*))

$\implies$ везде равенства $\implies \exists \int_{\Pi_1} \mathscr{L} = \int_{\Pi} f$