# Математический анализ

10 октября 2022

$\Pi \subset \pi_1 \times \Pi_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\ f : \Pi \to \mathbb{R}$ огр и почти везде непр.

**Замечание.**

*1.*

$$\int\limits_{\Pi} f = \int\limits_{\Pi_2} dy \underline{\int\limits_{\Pi_1}} f(x,y)dx = \int\limits_{\Pi_2} \overline{\int\limits_{\Pi_1}} f(x,y)dx$$

*2. Если* $\forall y \in \Pi_2\ \exists \int\limits_{\Pi_1} f(x,y)dx$, *то*

$$\int\limits_{\Pi} f = \int\limits_{\Pi_2} \int\limits_{\Pi_1} f(x,y)dx$$

**Пример 1.** $\Pi_1 = \Pi_2 = [0,1]$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1,\ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q},\ y \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 - \frac{1}{q},\ x = \frac{p}{q},\ y \in [0,1] \end{cases}$$

$f$ *непрерывна на* $([0,1] \setminus \mathbb{Q})^2$
$(x,y) \in ([0,1] \setminus \mathbb{Q})^2, \quad f(x,y) = 1$
$\forall \varepsilon,\ \exists Q : \frac{1}{Q} < \varepsilon$ *и* $\forall q > 0 : \left|1 - \frac{1}{q} - 1\right| < \varepsilon$
$f$ *почти везде непр. на* $[0,1]^2 = \Pi$, *огр.*, $\Rightarrow \exists \int\limits_{\Pi} f$

$x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} : \quad \underline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy = \overline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy = \int\limits_{\Pi_2} 1 = 1$
$x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} : \quad \underline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy = 1 - \frac{1}{q}, \quad \overline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y) = 1$

$$\mathcal{L}(x) = \begin{cases} 1,\ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 - \frac{1}{q},\ x = \frac{p}{1}, \quad \textit{неогр} \end{cases}$$

$$\mathcal{U}(x) = 1$$

$$\int\limits_{\Pi_1} \mathcal{L} = 1 = \int\limits_{\Pi_1} \mathcal{U} = \int\limits_{\Pi} f$$

**Пример 2.** $E \subset \Pi = [a,b] \times [c,d],\ \mu(\partial E) = 0$
$f \in C(E) \quad \tilde{f} = f \cdot \chi_E$

$$\int\limits_{E} f = \int\limits_{\Pi} \tilde{f} = \int_a^b dx \int_c^d \tilde{f}(x,y)dy = \int_c^d dy \in_a^b f(x, ydx)$$

$E = \{(x,y) \in \Pi \mid a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\} = \{(x,y) \in \Pi \mid c \leq y \leq d,\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$

$$\int\limits_E f = \int_a^b dx = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} fx(x,y)dx$$

**Замечание.** $f \in C([0,1])$

*Тогда* $\mu($*графика* $f) = 0,$ *график* $f = \{(x, f(x)) \mid x \in [0,1]\}$

*Доказательство.* $\Rightarrow [0,1]$ компакт $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[0,1]$

$$\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [0,1] : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$\left[\frac{1}{\delta}\right] + 1 \text{ интервалов}$$

$$2\varepsilon \frac{\delta}{2} \cdot \underbrace{\left(\left[\frac{2}{\delta}\right] + 1\right)}_{<2\cdot\left[\frac{2}{\delta}\right]} < 4\varepsilon \frac{\delta}{2} \left[\frac{2}{\delta}\right] < 4\varepsilon$$

(любой прямоугольник можно покрыть квадратами сумма площадей которых не больше чем в 2 раза больше площади прямоугольника)

$\Rightarrow \exists$ покрытие квадратами $\sum v(C) < 8\varepsilon$ $\square$