

## Характеристическая функция множества

03 октября 2022

**Определение.** Характеристическая функция множества

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

**Лемма 6.**  $\{\text{Точки разрыва } \chi_E(x)\} = \delta E$

*Доказательство.*  $x \in \text{Int } E \cup \text{Ext } E$

На внутренних точках  $\lim \chi_E(x) = 1 = \chi_E(x)$

На внешних точках  $\lim \chi_E(x) = 0 = \chi_E(x)$

На границе разрывна - очев

□

**Определение.**  $E \in \Pi$ ,  $\Pi$  -  $n/n$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  - ограничена

$$\int_E f = \int_{\Pi} f \cdot \chi_E$$

$$\tilde{f} = f \cdot \chi_E(x)$$

**Лемма 7.**  $\mu(\delta E) = 0$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  - почти везде непрерывна на  $E$

$$\text{Тогда } \exists \int_E f$$

*Доказательство.* Необходимо доказать, что  $\exists \int_{\Pi} \tilde{f}$

$$\underbrace{\{\text{Точки разрыва } \tilde{f} \text{ на } \Pi\} = \{\text{Точки разрыва } \tilde{f} \text{ на } \text{Int } E\} \cup \{\text{Точки разрыва } \tilde{f} \text{ на } \delta E\} \cup \{\text{Точки разрыва } \tilde{f} \text{ на } \text{Ext } E\}}_{\emptyset}$$

$$\{\text{Точки разрыва } \tilde{f} \text{ на } \Pi\} \subset \{\text{Точки разрыва } f \text{ на } \text{Int } E\} \cup \delta E$$

$$\mu(\{\text{Точки разрыва } \tilde{f} \text{ на } \Pi\}) = 0 \text{ - по критерию Лебега существует интеграл} \quad \square$$

**Определение.**  $E$  - ограничено,  $\mu(\delta E) = 0$

$$\exists \Pi \in \mathbb{R}^n \text{ - } n/n: E \in \Pi$$

$$v(E) = \int_E 1 = \int_{\Pi} \chi_E(x) \text{ - Жорданов объём}$$

## Теорема Фубини

### Теорема 1. Теорема Фубини

Пусть  $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$ ,  $\Pi_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Pi_2 \in \mathbb{R}^m$ ,  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  — ограничена

$$L_1(x) = \int_{\overline{\Pi_2}} f(x, y) dy$$

$$U_1(x) = \overline{\int_{\Pi_2} f(x, y) dy}$$

$$\text{Если } \exists \int_{\Pi} f, \text{ то } \exists \int_{\Pi_1} L_1, \int_{\Pi_1} U_1 \text{ и они равны}$$

$$\int_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_{\Pi_1} L_1(x) dx = \int_{\Pi_1} U_1(x) dx$$

$$\int_{\Pi_1} dx \left( \int_{\overline{\Pi_2}} f(x, y) dy \right) = \int_{\Pi_1} dx \left( \overline{\int_{\Pi_2} f(x, y) dy} \right)$$

*Доказательство.* Пусть  $P_1$  — разбиение  $\Pi_1$ ,  $P_2$  — разбиение  $\Pi_2$

$P = P_1 \times P_2$  — разбиение  $\Pi$

$$P = \{\pi_1 \times \pi_2 | \pi_1 \in P_1, \pi_2 \in P_2\}$$

$$L(f, P) = \sum_{\pi \in P} \inf_{\pi} f \cdot v(\pi) = \sum_{\pi_1 \in P_1, \pi_2 \in P_2} \inf_{\pi_1 \times \pi_2} f \cdot v(\pi_1) \cdot v(\pi_2) = \sum_{\pi_1 \in P_1} \left[ \sum_{\pi_2 \in P_2} \inf_{\pi_1 \times \pi_2} f \cdot v(\pi_1) \right] \cdot v(\pi_2)$$

$$\forall x \in \pi_1 : \inf_{y \in \pi_2} f(x, y) \leq \inf_{y \in \pi_2} f(x, y)$$

$$\sum_{\pi_2 \in P_2} \inf_{\pi_1 \times \pi_2} f \cdot v(\pi_2) \leq \sum_{\pi_2 \in P_2} \inf_{y \in \pi_2} f(x, y) \cdot v(\pi_2) = L(f(x, \cdot), P_2) \leq L_1(x) - L_1 - \sup \text{ таких сумм}$$

$$\sum_{\pi_2 \in P_2} \inf_{\pi_1 \times \pi_2} f \cdot v(\pi_2) \leq \inf_{\pi_1} L_1(x) = m_{\pi_1} L_1$$

$$L(f, P) \leq \sum_{\pi_1 \in P_1} m_{\pi_1} L_1 \cdot v(\pi_1) = L(L_1, P_1)$$

$$U(f, P) \geq U(U_1, P) - \text{аналогично}$$

$$L(f, P) \leq L(L_1, P_1) \leq U(L_1, P_1) \leq U(U_1, P_1) \leq U(f, P)(*)$$

$$L(f, P) \leq L(L_1, P_1) \leq L(U_1, P_1) \leq U(U_1, P_1) \leq U(f, P)(**)$$

$$\exists \int_{\Pi} f \Rightarrow \sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P)$$

$$\sup_{P_1} L(L_1, P_1) \leq \inf_{P_1} U(L_1, P_1) - \text{Всегда}$$

$$(*): \inf_{P_1} U(L_1, P_1) \leq \inf_P U(f, P)$$

$$(*): \sup_P L(f, P) \leq \sup_{P_1} L(L_1, P_1)$$

$$\sup_P L(f, P) \leq \sup_{P_1} L(L_1, P_1) \leq \inf_{P_1} U(L_1, P_1) \leq \inf_P U(f, P) - \text{из равенства 1 и 4 всюду равенство}$$

$$\sup_{P_1} L(L_1, P_1) = \inf_{P_1} U(L_1, P_1)$$

$$\exists \int_{\Pi_1} L_1 = \int_{\Pi} f$$

$$\sup_{P_1} L(U_1, P_1) \leq \inf_{P_1} U(U_1, P_1) - \text{Всегда}$$

$$(**): \inf_{P_1} U(U_1, P_1) \leq \inf_P U(f, P)$$

$$(**): \sup_P L(f, P) \leq \sup_{P_1} L(U_1, P_1)$$

$$\sup_P L(f, P) \leq \sup_{P_1} L(U_1, P_1) \leq \inf_{P_1} U(U_1, P_1) \leq \inf_P U(f, P) - \text{из равенства 1 и 4 всюду равенство}$$

$$\sup_{P_1} L(U_1, P_1) = \inf_{P_1} U(U_1, P_1)$$

$$\exists \int_{\Pi_1} U_1 = \int_{\Pi} f$$

□