Алгебра

27 сентября 2022

Линейные операторы

§Линейные операторы

Определение. *V – векторное пространство над K*

Линейное отображение $f : V \to V$ называется линейным оператором на V

Пример 1.

1. $V = K^n$

   $A \in M_n(K)$

   $f(v) = Av$

   f *– лин.*

2. $V = K[x]$

   $f = \frac{d}{dx}$

   $g \in K[x]$

   $f(g) = g' = \frac{dg}{dx}$

3. *Интегральный оператор*

   $V = C([0,1])$

   $\mathcal{K}(x,y) \in C([0,1]^2)$

   $g \mapsto h(x) = \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)g(y)dy$

Множество всех линейных операторов на V – эндоморфизм:

$$\mathrm{End}(V), \quad \mathscr{L}(V)$$

Пусть $f, g \in \mathrm{End}(V),\ c \in K$

Определены:

$f + g \in \mathrm{End}(V), \quad c \cdot f \in \mathrm{End}(V)$

$\mathrm{End}(V)$ – векторное пространство над K

$f \circ g : V \to V, \quad fg = f \circ g \in \mathrm{End}(V)$, (умножение операторов – композиция)

$(\mathrm{End}(V),\ +,\ \circ)$ – кольцо

$1_{\mathrm{End}(V)} = \mathrm{id}_V$

$$f \circ \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V \circ f = f \Rightarrow \text{Кольfцо с 1}$$

(*) Аксиома: $c \in K,\ v \in V$

$$f(cg) = (cf)g = c(fg)$$

$$(f(cg))(v) = f((cg)(v)) = f(cg(v)) =$$

$$= c(f(g(v))) = c(fg)(v) = (c(fg)(v)) =$$

$$= ((cf)g)(v) = (cf)(g(v)) = cf(g(v)) = (c(fg)(v))$$

Определение. *Множество A с тремя операциями:*

$$+ : A \times A \to A$$
$$\circ : A \times A \to A$$
$$\cdot : A \times A \to A$$

т. ч.:

$$A,\ +,\ \cdot \text{ – векторное пространство}$$
$$A,\ +,\ \circ \text{ – кольцо}$$
$$A,\ +,\ \circ,\ \cdot \text{ – алгебра над } K$$

Пример (Примеры алгебр)**.**

1. *Алгебра квадратных матриц над K*

2. *$K[x]$ – алгебра многочленов*

3. *$\mathbb{H}$ – алгебра кватернионов над $\mathbb{R}$*

Мы проверим, что $\mathrm{End}(V)$ – алгебра над K:

$\dim V < \infty$

Зафиксируем базис $v_1, \ldots, v_n$

$f \in \mathrm{End}(V)$

$A = [f]_{\{v_i\}}$ – матрица линейного оператора в базисе $\{v_i\}$

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i$$

j-ый столбец $A = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$

$\mathrm{End}(V) \rightarrowtail M_n(K)$

$f \mapsto [f]_{\{v_i\}}$

$[f+g]_{\{v_i\}} = [f]_{\{v_i\}} + [g]_{\{v_i\}}$

$[cf]_{\{v_i\}} = c[f]_{\{v_i\}}$
$[fg]_{\{v_i\}} = [f]_{\{v_i\}}[g]_{\{v_i\}}$
$\mathrm{End}(V) \cong M_n(K)$

§Собственные числа и собственные векторы

V – векторное пространство над K
$f \in \mathrm{End}(V)$

Определение. $\lambda \in K$ – *собственное число* f*, если* $\exists v \neq 0$

$$f(v) = \lambda v$$

Если λ *– собственное число* f*, то всякий* $v \in V$ *такой, что* $f(v) = \lambda v$ *называется собственным вектором* f*, отвечающим собственному числу* λ

Пример.

1. $V = K[x]$

   $\frac{d}{dx} : K[x] \to K[x]$

   $\frac{d}{dx} g = \lambda y$

   Если $g \neq 0$*, то* $\lambda = 0$

   Единственное собственное число – 0

   $g' = 0$

   Если $\mathrm{char}\, K = 0$*, то* $V_k = \{const\}$

   Если $\mathrm{char}\, K = p > 0$*:*

   $$V_\lambda =< 1, x^p, x^{2p}, \cdots >= K[x^p]$$

2. $\dim V = n < \infty$

   $v_1, \ldots, v_n$ – *базис*

   $f \in \mathrm{End}(V)$

   $[f(v)]_{\{v_i\}} = [f]_{\{v_i\}}[v]_{\{v_i\}}$

   v *– собственный вектор с. ч.* $\lambda \Leftrightarrow [v]_{\{v_i\}}$ *– с. в., отвечающий с. ч.* λ

   $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow A[v]_{\{v_i\}} = \lambda[v]_{\{v_i\}}$

A – матрица оператора f в базисе $v_1, \dots, v_n$

$\chi_A(t) = \det(A - tI) = \chi_f(t)$ – характеристический многочлен оператора f

Если C – матрица перехода от одного базиса к другому, то матрица A оператора f в другом базисе заменяется на сопряженную.

$$A \to CAC^{-1}$$

$$\det(CAC^{-1} - tI) = \det(CAC^{-1} - tCC^{-1}) = \det(CAC^{-1} - C(tI)C^{-1})$$

$$= \det(C(A - tI)C^{-1}) = \det C \cdot \det(A - tI) \cdot \det C^{-1} =$$

$$= \underbrace{\det C \cdot \det C^{-1}}_{1} \cdot \det(A - tI) = \det(A - tI)$$

$$\Rightarrow \chi_{CAC^{-1}} = \chi_A \Rightarrow \chi_f \text{ не зависит от выбора базиса}$$

§Диагонализуемые операторы

V – векторное поле над K

$\dim V = n < \infty$

$f \in \mathrm{End}(V)$

Определение. *f называется диагонализуемым, если $\exists$ базис V, такой что $[f]$ в этом базисе – диагональная*

Теорема (критерий диагонадизуемости)**.**

f – диагонадизуем $\Leftrightarrow \exists$ базис V, состоящий из собственных векторов оператора f