Математический анализ

12 сентября 2022

Ряды интеграла, зависящие от параметра

$X_0,\ X$ – метрические пространства
$E \subset X_0,\ f : E \to X$
$\{f$ непр в $x\}_{x \in X}$
Непрерывность на E:

$$\forall \varepsilon > 0,\ x \in E,\ \exists \delta > 0 : \forall x' \in E : d_0(x, x') < \delta \text{ выпол. } d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Равномерная непрерывность:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in E : d_0(x, x') < \delta \text{ вып. } d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

$\{x_n(p)\}_{n=1}^{\infty},\ p \in P$
$\{a_n(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} a(p)\}_{p \in P}$
Сходимость : $\forall \varepsilon > 0\ \forall p \in P\ \exists N : \forall n > N : d(a_n(p), a(p)) < \varepsilon$
Равномерная : $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall p \in P : \forall n > N : d(a_n(p), a(p)) < \varepsilon$

Пример 1. $a_n(p) = \frac{np}{1+(np)^2},\ P = [0, 1]$

Теорема 1 (о двойном пределе)**.** *X – полное метрическое пространство*
$\{a_{np}\}_{n,p\in\mathbb{N}}$ – двойная последовательность в X
$\forall p \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{n\to\infty} a_{np} = u_p$
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{p\to\infty} a_{np} = v_n$
Если один из этих пределом достигается равномерно, то

$$\exists \lim_{p\to\infty} u_p,\ \exists \lim_{n\to\infty} v_n$$

и они равны.

Доказательство. Пусть $a_{np} \rightrightarrows_{n\to\infty}^{p\in\mathbb{N}} u_p$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n > N_1\ \forall p\ d(a_{np}, u_p) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$n_0 > N_1 \quad a_{n_0p} \xrightarrow[p\to\infty]{} v_n$
для $\varepsilon\ \exists N_2 : \forall p, q > N_2\ d(a_{n_0p}, a_{n_0q}) < \frac{\varepsilon}{3}$

$$d(u_p, u_q) \le d(u_p, a_{n-p}) + d(a_{n_0p}, a_{n_0q}) + d(a_{n_0q}, u_q) < \varepsilon$$

Критерий Коши: $\exists \lim_{p\to\infty} u_p =: w$
$d(a_{np}, u_p) < \frac{\varepsilon}{3}$
$\xRightarrow[p\to\infty]{} d(v_n, w) \le \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

Значит, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} w$ $\square$

Замечание (Непрерывность расстояния)**.** $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

$d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(x,y)$

$d(x_n, y_n) \le d(x,y) + d(x,x_n) + d(y,y_n)$

$d(x,y) \le d(x_n, y_n) + d(x,x_n) + d(y,y_n)$

$|d(x,y) - d(x_n,y_n)| \le d(x,x_n) + d(y,y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Пример 2. $a_{np} = \frac{n}{1+n+p}$

$a_{np} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$a_{np} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} = 0, \ \lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} = 1$$

Следствие 1. *X – полное евклидово пространство*

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{np}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{p\to\infty} a_{np}\right)$$

Следствие 2.

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Следствие 3 (2')**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Следствие 4. $f_n(x) \rightrightarrows^{x\in E}_{n\to\infty} \varphi(x), \ \forall n \ f_n \in C(E) \Rightarrow \varphi \in C(E)$

Следствие 5 (3')**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \varphi(x) \ \textit{сх. равномерно по } x \in E, \ \forall n \ f_n \in C(E) \Rightarrow \varphi \in C(E)$$

Следствие 6 (3")**.**

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \in C(E), \ \forall n, \quad \textit{равностеп. по } n$$

$$\forall x \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \varphi(x) \quad \textit{сх-ся} \Rightarrow \varphi \in C(E)$$

Следствие 7.

$$\lim_{n\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)$$

Следствие 8.

$$f(x,y) \rightrightarrows^{x\in E}_{y\to b} \varphi(x), \ f(\cdot, y) \in C(E), \ \forall y \Rightarrow \varphi \in C(E)$$

Определение. $X_0,\ X$ – *метрические пространства,* $E \subset X_0,\ f_p : E \to X,\ p \in P$
$\{f_p(x)\}_{p \in P}$ – *равностепенно непрерывно, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in E : d_0(x, x') < \delta,\ \forall p \in P \quad d(f_p(x), f_p(x')) < \varepsilon$$

Суммирование двойного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \quad \text{when??}$$

$a_{nk} \geq 0 :$

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ - биекция } \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Определение.
A – счетное множество индексов ($a_\alpha \geq 0$): $\exists$ биекция $\varphi : \mathbb{N} \to A$

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \qquad \sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$$

Корректность: gg

Теорема 2. $a_{nk} \geq 0,\ \forall n, k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \quad \textit{конеч. или } \infty$$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \leq \sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K_n} a_{nk} \leq \sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk} \Rightarrow \lim_{K_1 \to \infty} \lim_{K_2 \to \infty} \ldots \lim_{K_N \to \infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K_n} a_{nk} \leq \sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \leq \sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2}$$

1.

$$\sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk} = \sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} < \infty$$

$$\forall \varepsilon\ \exists L : \forall l > L : \sum_{j=1}^{l} a_{\varphi(l)} > \sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk} - \varepsilon$$

$K = \{\varphi(l),\ l = 1, \dots, L+1\}\ \exists N : K = \bigcup_{n=1}^{N} \tilde{K}_n$

$\tilde{K}_n = \{n\} \times K_n$

$K_n = \{k \mid (n,k) \in K\} = \pi_y \tilde{K}_n$

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} -\varepsilon < \sum_{j=1}^{L+1} a_{\varphi(j)} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k \in K_n} a_{nk} \le \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty}$$

$$\forall \varepsilon\ \exists N : \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \ge \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk} - \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \ge \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$$

2. ну карочи тут все так же только меняет ε на M и вот там чета все получается я хз

$\square$

Теорема 3. $\{a_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{R}}$ – *двойная последовательность в* $\mathbb{R}$

$$\sum_{n,k\in\mathbb{N}} |a_{nk}| < \infty$$

$(n,k) \in \mathbb{N}^2$ *Тогда сходятся и равны:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}$$

Доказательство.

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \le \sum_{n,k\in\mathbb{N}} |a_{nk}|$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \text{ сходится асб.}$$

$$\forall \varepsilon\ \exists N : \forall m > n > N : \sum_{i=n}^{m} |\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}| \le \sum_{i=n}^{m} |\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}| < \varepsilon$$

$$\xRightarrow[\text{к. Коши}]{} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \text{ ряд сходится}$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{\varphi_{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |a_{ij}|$$

$$\forall\varepsilon\ \exists N : \forall n > N : \sum_{l=n^2+1}^{\infty} |a_{\varphi(l)}| < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{ij}| + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \varepsilon$$

$$|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | \leq |\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{ij}|$$

$$|\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}| = |\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty}| \leq \sum_{n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$$

$$|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}| < \varepsilon$$

$$\xRightarrow{\forall\varepsilon\ \exists N} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty}$$

$\square$

Интегрирование

Теорема 4. $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\forall n\ f_n \in C([a, b])$

$\forall x \in [a, b] : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x)$, *равномерно по* $x \in [a, b]$

Тогда

$$\int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \varphi(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Доказательство. $\varphi \in C([a, b])$ (по сл. 3)

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n > N,\ x \in [a, b] : |f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Проинтегрируем

$$|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx| \leq \int_a^b |f_n(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon$$

$\square$

Следствие 9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx$$

Следствие 10.
$$\lim_{y\to c}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y\to c} f(x,y)dx$$

Следствие 11. *$K\subset\mathbb{R}^n$ компактно, $f\in C([a,b]\times K)$ $\quad \int_a^b f(x,y)dx = \varphi(x) : K\to\mathbb{R}$*

Тогда $\varphi\in C(K)$

Дифференцирование

Теорема 5. *$f_n : (a,b)\to\mathbb{R}$*

$\forall n\ f_n\in C^1(a,b)$

$\forall x\in(a,b)\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x)$

$\forall x\in(a,b)\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \psi(x)$, достигается равномерно

Тогда $\varphi\in C^1(a,b)$ и $\varphi'=\psi$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{df_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\lim_{n\to\infty} f_n(x))$$

Доказательство. $x_0\in(a,b)$
$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)dt$$
$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x \psi(t)dt \Rightarrow \varphi' = \psi$$

□

Следствие 12.
$$\sum_{n=1^\infty}\frac{df_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))$$

Следствие 13.
$$\lim_{y\to c}\frac{df}{dx}(x,y) = \frac{d}{dx}(\lim_{y\to c} f(x,y))$$

Теорема 6. *$f : [a,b]\times(c,d)\to\mathbb{R},\ f\in C([a,b]\times(c,d))$*

$\forall x,y\in[a,b]\times(c,d)\ \exists\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(x,y),\ \varphi(x,y)\in C([a,b]\times(c,d))$

Тогда
$$\exists\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x,y)dy$$
$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Доказательство.

$$\underbrace{\frac{1}{h}\int_a^b (f(x,y+h)-f(x,y))dx}_{\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dx} = \underbrace{\int_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}dx}_{\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

$g(h) = f(x,y+h) - f(x,y)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)h$
$g(h) = g(h) - g(0) = g'(\xi)h,\ \xi \leftarrow [0,h] \qquad$ (т. Лагранжа)
$= (\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))h$
$\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\xi(h)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
$\frac{\partial f}{\partial y} \in C([a,b]\times(c,d))$
$\frac{\partial f}{\partial y} \in C([a,b]\times[y-\delta,y+\delta])$
$\Rightarrow$ Равномерно непрерывна??? или чоо тут
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\xi(n)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \rightrightarrows_{h\to 0}^{x\in[a,b]} 0$
$|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall h \in (-\delta,\delta),\ \forall \xi(h) \in [0,h] \text{ или } [h,0],\ \forall x \in [a,b]$$

$$|\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}| = |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\xi(h)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \rightrightarrows_{h\to 0}^{x\in[a,b]} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$\underbrace{\frac{1}{h}\int_a^b (f(x,y+h)-f(x,y))dx}_{\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dx} = \underbrace{\int_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}dx}_{\rightrightarrows_{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

$\square$