Понижение порядка в СЛДУ.
Пусть известны $m < n$ лин нез решений. Рассмотрим матрицу $\Phi_1^{n\times n} = \{\vec{\phi_1}, \dots, \vec{\phi_m}\}$
$rank\Phi_1 = m, \forall t_o \in (a,b) \exists$ ненулевой минор порядка $m \implies$ пусть s

$B \in \mathbb{C}^{n\times(n-m)}$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$ $S(t) = (\Phi_1|B) \implies detS(t) \neq 0$ $\vec{X}(t) = S(t)\vec{y}(t) =$ подставив $A(t)\vec{x}$
$\dot{\vec{\Phi_1}} = A\Phi_1$ $\dot{S}\vec{y} + S\dot{\vec{y}} = ASy = (A\Phi_1|AB)\vec{y} = (A\Phi_1|0)\vec{y} + (0|AB)\vec{y}$
$\dot{S}\vec{y} = (\dot{\Phi_1}|O)\vec{y} = (A\Phi_1|0)\vec{y}$
Отсюда $\dot{\vec{y}} = \Big(0|S^{-1}(t)A(t)B\Big)y$. Обозначим всё в круглых скобках за Q.
$Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_1 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$. Это блочная матрица, блок с нулями сверху размером $m \times m$
$\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{y_1} \\ \vec{y_2} \end{pmatrix}$
$\begin{cases} \dot{\vec{y_1}} = Q_1(t)\vec{y_2} & m \\ \dot{\vec{y_2}} = Q_2(t)\vec{y_2} & (n-m)\times(n-m) \end{cases}$
Решения второй строчки обозначим за $\phi_j(t), j = \overline{n-m, \dots, n}$
$(Q_1(t)\begin{pmatrix} \phi_{n-m} \\ \phi_n \end{pmatrix})_j = f_j(t) \implies \dot{\vec{y}}_j^{(1)} = f(t)$
$\implies y_j^{(1)} = \int_{t_0}^t f(\tau)d\tau + C \quad j = \overline{1,m}.$
Пусть $\Psi_2 = \{\vec{\Psi}_{m+1}, \dots, \vec{\Psi}_n\}$ n-m линейно независ решений второго уравнения
$\dot{\vec{\Psi}}_1 = Q_1(t)\Psi_2(t)$ выберем константу C так, чтобы в t_0 $\Psi_1(t_0) = I$
$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1(t) & 0 \\ 0 & \Psi_1(t) \end{pmatrix}$ – это тоже блочная матрица.
В силу блочной структуры $det\Psi \neq 0 \implies \Psi$ фундаментальна по построению
$\dot{\vec{y}} = Q(t)\vec{y}$
$\underline{\Phi(t) = S(t)\Psi(t)}$

Рассмотрим системы ЛДФУ с постоянными матрицами. Решение сущ если коэф постоянны

Однородные системы ЛДФУ с постоянными коэф.
$\dot{\vec{X}} = A\vec{X}$. Фундаментальная сисьтема решений: $\Phi(t) = e^{At}$ А как взять экспоненту от матрицы? По формуле Тейлора: $e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$
Выбираем норму $||A|| = \max_{\vec{x}\neq 0} \frac{||A\vec{x}||}{||\vec{x}||} = \max_{||\vec{x}||=1} ||A\vec{x}||$
$||A|| = \lambda_A$
$|| \sum_{k=0}^0 \frac{A^k t^k}{k!}|| \leq \sum_{k=0} \frac{||A||^k}{k!}|t|^k \leq \sum_{k=0} \frac{\lambda_A^k}{k!}|t|^k = e^{\lambda_A|t|} < \infty$
$\frac{d}{dt}\sum_{k=0} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=1} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{At}$

Подобные матрицы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ заменим $\vec{x} = S\vec{y}, \det S \neq 0; \vec{y} = S^{-1}\vec{x}$
$\cdot S^{-1} \mid S\dot{\vec{y}} = As\vec{y} \implies \dot{\vec{y}} = \underbrace{S^{-1}A}_{=B}S\vec{y}$
A и B подобны. A $B \iff \exists S, \det S \neq 0$
$B = S^{-1}AS, A = SBS^{-1}$

$1.A \sim A$
$2.A\ B \iff B\ A$
$3.A\ B, B\ C \iff A\ C$
$B = S^{-1}AS \quad C = T^{-1}S^{-1}AST, C = T^{-1}BT$

$\det B = \det S^{-1}AS = \det S^{-1} \det A \det S$
$\chi_B(\lambda) = \chi_a(\lambda)$

Т. Жордана

$\forall A \sim J = \text{ diag}\{J_0, J_1, \dots, J_q\} \quad J_0 = \text{ diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda_{p+n} I_{rk} + Z_{rk}$$

Z_{rk} – нулевая матрица с побочной диагональю единиц

сл1.
$\det J = \prod_{j=1}^n \lambda_j,\ \text{Tr } J = \sum_{j=1}^n \lambda_j \implies \det A = \prod_{j=1}^n \lambda_j,\ \text{Tr} A = \sum_{j=1}^n \lambda_j$

сделаем несколько общих наблюдений

Функции от матриц
$\{A_k\}_{k=1}^\infty, A_k \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \lim_{k\to\infty} A_k = A \iff ||A_k - A|| \to 0, k \to \infty$
$\sum_{k=0}^\infty A_k < \infty \iff \exists \lim_{p\to\infty} S_p, S_p = \sum_{k=0}^P A_k$

$F(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$, ряд с ненулевым радиусом сходимости.
$f(A) := \sum_{k=0}^\infty a_k A^k$
Л1.
$A = S^{-1}JS \implies f(J)$ и $f(A)$ сх. и расх. одновременно.
$f(A) = S^{-1}f(J)S$
$S^{-1}A^kS = S^{-1}ASS^{-1}AS \dots S^{-1}AS$
d: $S_p(A) = \sum_{k=0}^p a_k (S^{-1}JS)^k = S^{-1} \sum_{k=0}^p a_k J^k S = S^{-1} S_p(J) S$ пределим $p \to \infty$

Л2.
$J = \text{ diag}\{J_0, \dots, J_q\}, f(J)$ сх-ся $\iff f(J_0), \dots, f(J_q)$ сх-ся
$//J^k = \text{ diag}\{J_0^k, \dots, J_q^k\}$
$f(J) = \text{ diag}\{f(J_0), \dots f(J_q)\}$, а если хотя бы одни блок расходится, то и f от него тоже. d: $S_p(f(J)) = \sum_{k=0}^p a_k \text{ diag}\{J_0^k, \dots, J_q^k\} = \text{ diag}\{\sum_{k=0}^p a_k J^k, \dots, \sum_{k=0}^P a_k J_q^k\} \implies S_p(f(J)) \to f(J) = \text{ diag}\{f(J_0), \dots, f(J_q)\}$

Л3.
$f(z) = \sum_{j=0}^\infty a_j z^j$ с радиусом сходимости ρ.
$\forall A \lambda_1, \dots, \lambda_n$ – корни $\chi_A(z)$ и $|\lambda_j| < \rho, j = 1, \dots, n \implies f(A)$ сх-ся $\implies f(A) = S^{-1} \text{ diag}\{f(J_0), \dots, f(J_q)\} S$, а если сущ. $\lambda > \rho$, тогда $f(A)$ расх-ся.
d: $f(J_0) = \text{ diag}\{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_p)\}$– очевидно.

$$f(J_k) = \begin{pmatrix} f(\lambda_{p+k}) & f'(\lambda_{p+k}) & \dots & \frac{f^{(r_k-1)}(\lambda_{p+k})}{(r_k-1)!} \\ 0 & f(\lambda_{p+k}) & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & f(\lambda_)p+k \end{pmatrix}$$

z - побочная диаг 1, z^2 - сдвинется диагональ на 1 вправо, $z^r = 0$

$S_p(J) = \sum_{k=0}^{p} a_k(\lambda I + z)^k$

$$(\lambda I + z)^k = \sum_{j=0}^{\min(k,r-1)} C_k^j \lambda^{k-j} z^j = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{r-2}\lambda^{k-r+2} & C_k^{r-1}\lambda^{k-r+1} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{r-2}\lambda^{k-r+2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

$C_k^l = \frac{k(k-1)\dots(k-l+1)}{l!}$

$$\sum_{k=j}^{p} a_k C_k^J \lambda^{k-j} = \frac{S_p^{(j)}(\lambda)}{} \implies S_p(J) = \begin{pmatrix} S_p(\lambda) & S_p'(\lambda) & \dots & \frac{S_p^{(r-1)}(\lambda)}{(r-1)!} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & S_p(\lambda) \end{pmatrix} p \to \infty$$

Сл. $t \in \mathbb{C}$, посмотрим $F(tA)$, $tA = S^{-1}tJS$

$f(tA) = S^{-1} \operatorname{diag}\{F(tJ_0), \dots, F(tJ_q)\}$

$tJ = t\lambda I + tz, (tz)^l = t^l z^l$

$$F(tJ_k) = \begin{pmatrix} f(\lambda t) & t \cdot f'(t\lambda) & \dots & \frac{t^{r-1} f^{(r-1)}}{(r-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t \cdot f'(t\lambda) \\ 0 & \dots & 0 & f(\lambda t) \end{pmatrix}$$

$\dot{\vec{x}} = Ax, \Phi(t) = e^{tA} = S^{-1}e^{tJ}S$

$e^{tJ} = \operatorname{diag}\{e^{tJ_0}, \dots, e^{tJ_q}\}$

$$e^{tJ_k} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_{p+k}t} & t \cdot e^{\lambda_{p+k} \cdot t} & \dots & \frac{t^{r-1} \cdot e^{\lambda_{p+k} \cdot t}}{(r-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t \cdot e^{\lambda_{p+k} \cdot t} \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_{p+k}t} \end{pmatrix}$$