Мы закончили на теореме Фубини

Зам. $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, f : \Pi \to \mathbb{R}$ ограничена и непрерывна (интегрируема)

1. $\displaystyle\int f = \int_{\Pi_2} dy \underline{\int_{\Pi_1}} f(x,y)dx = \int_{\Pi_2} dy \overline{\int_{\Pi_1}} f(x,y)dx$
2. $\displaystyle\forall y \in \Pi_2 \exists \int_{\Pi_1} f(x,y)dx \implies \int_{\Pi} f = \int_{\Pi_2} dy \int_{\Pi_1} f(x,y)dx$

Пример.

$\Pi_1 = \Pi_2 = [0,1] \quad f(x,y) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \text{ или } y \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 - \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q}, y \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$

f непрерывна на $([0,1] \setminus \mathbb{Q})^2$. Это счетное множество, короче там чета с мерой нуль
$(x,y) \in ([0,1] \setminus \mathbb{Q})^2, \quad f(x,y) = 1$
$\varepsilon, q : \frac{1}{q} < \varepsilon.$
Отметим рациональные числа со всеми знаменателями от 1 до q. это будет какая-то решётка точек с каким-то наименьшим расстоянием между точками. x не попадёт, потому что он иррационален, к нему будет какое-то ближайшее число, то есть найдется окрестность икса, что туда попадут чета. найдём окрестность точки (x,y)
$\forall \varepsilon \, \exists Q : \frac{1}{Q} < \varepsilon \wedge \forall q > Q : |1 - \frac{1}{q} - 1| < \varepsilon$
f почти везде непрерывна на $[0,1]^2 = \Pi$, огр. $\implies \exists \int_{\Pi} f$
$x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} : \quad \underline{\int_{\Pi_2}} f(x,y)dy = \overline{\int_{\Pi_2}} f(x,y)dy = \int_{\Pi_2} 1 = 1$
$x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} : \underline{\int_{\Pi_2}} f(x,y)dy = 1 - \frac{1}{q}, \quad \overline{\int_{\Pi_2}} f(x,y)dy = 1$

$\mathscr{L}(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 - {}^1 q, x = \frac{p}{q}, \text{ непр} \end{cases}$
$\mathscr{U}(x) = 1$

$\int_{\Pi_1} \mathscr{L} = 1 = \int_{\Pi_1} U - \int_{\Pi} f$

$E \subset \Pi = [a,b] \times [c,d], \mu(\delta E) = 0$
$f \in C(E), \quad \widetilde{f} = f \cdot \chi_E$
$\int_E f = \int_{\Pi} \widetilde{f} = \int_a^b dx \int_c^d \widetilde{f}(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$

$E = \{(x,y) \in \Pi | a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\} =$
$\{(x,y) \in \Pi | c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$

$\ldots \int_E f = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$

Замечание. $f \in C([0,1])$

Тогда $\mu(\underbrace{\text{график}}_{\{(x,f(x))|x\in[0,1]\}} f) = 0$

Доказательство. $[0,1]$ компакт $\implies$ f равномерно непр. на $[0,1]$, $\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0$: $\forall x_1, x_2 \in [0,1] : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$
$[\frac{2}{\delta}] + 1$ интервалов (интервалы длины $\frac{\delta}{2}$)
$([\frac{2}{\delta}]+1)\cdot 2\varepsilon \cdot \frac{\delta}{2} < 4\varepsilon\frac{\delta}{2}[\frac{2}{\delta}] < 4\varepsilon$ – площадь что-ли
$\forall\varepsilon\exists$ покрытие квадратами, сумма площадей которых не превосходит ээээ двух чё-то там ээээ $\sum v(c) < 8\varepsilon$ □

Когда мы говорили про интегрируемость по множеству мы определили интеграл по E почти везде непрерывный... измеримость по жордану что-то...
$\mu(E) = 0, f : E \to \mathbb{R}$ почти везде непрерывна, ограничена $\cancel{\implies} \int_E f = 0$

$E = [0,1] \cap \mathbb{Q}, f \equiv 1, f : E \to \mathbb{R}$

$$\widetilde{f}(x) = f(x)\cdot\chi_E(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\nexists \int_{[0,1]} \widetilde{f}, \exists \int_E f$$

$v(E) = 0 \implies E$ измеримо по жордану и его жорданов объём равен 0

Доказательство. $v(E) = 0$. $\forall\varepsilon > 0\,\exists C_k, k = 1,\ldots,N$ замыкание (кубы) : $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} C_k, \sum\limits_{k=1}^{N} v(C_k) < \varepsilon$

$\delta E \subset \overline{E} \subset \bigcup_{k=1}^{N} C_k$
$\implies v(E) = 0, v(\delta E) = 0 \implies \mu(\delta E) = 0 \implies E$ измеримо по жоржану
$\exists\Pi, E \subset \Pi \quad \forall\varepsilon E \subset \bigcup_{k=1}^{N} C_k$
Можно считать, что $\forall k\, C_k \subset \Pi$. Пусть P - разбиение Π гранями всех C_k
Оценим интеграл
$v(E) = \displaystyle\int_E 1 = \int_\Pi \chi_E \le U(\chi_E, P)\,\forall P = \sum_{\Pi\in P} \sup_\Pi \chi_E \cdot v(\Pi) =$

$$\sum_{\substack{\Pi\in P \\ \Pi\in\bigcup_{k=1}^{N} C_k}} v(\Pi) \le \sum_{k=1}^{N} v(C_k) < \varepsilon \quad \forall\varepsilon$$

$\implies v(E) = 0$ □

Лемма 10. $\Pi \subset \mathbb{R}^n, f_1, f_2 : \Pi \to \mathbb{R}$ *огр., п.в. непрерывна* $\implies a_1 f_1 + a_2 f_2$ *– огр., п.в. непрерывна*

$$\int_\Pi (a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \int_{\Pi_1} f + a_2 \int_{\Pi_2} f$$

Доказательство. $\measuredangle P, \Xi$
$\sum(a_1 f_1 + a_2 f_2, P, \Xi) = \sum(a_1 f_1(\xi(\Pi)) + a_2 f_2(\xi(\Pi))) \cdot v(\Pi) = a_1 \sum(f_1, P, \Xi) + a_2 \sum(f_2, P, \Xi)$
ёбббб хзх фотка
Пусть $P_k, k \in \mathbb{N}, d(P_k) \to 0, k \to \infty, \Xi_k, k \in \mathbb{N} : \int_\pi (a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \int_\Pi f_1 + a_2 \int_\Pi f_2$ □

Лемма 11. E_1, E_2 *измеримы по жордану и не пересекаются*
$f : E_1 \cup E_2 \to \mathbb{R}$ *огр и п.в. непр.*

$$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$$

Доказательство. $\widetilde{f} = f \cdot \chi_E, \Pi \supset E_1 \cup E_2$

$$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_\Pi f \cdot \chi_{E_1 \cup E_2} = \int_\Pi (f \cdot \chi_{E_1} + f \cdot \chi_{E_2}) = \int_\Pi f \cdot \chi_{E_1} + \int_\Pi f \cdot \chi_{E_2} = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$$ □

Лемма 12. $\Pi \subset \mathbb{R}^n, f : \Pi \to \mathbb{R}$ *огр и п.в. непр.*

$$\left| \int_\Pi f \right| \leq \int_\Pi |f|$$

Доказательство. $P_k, d(P_k) \to 0, \Xi_k$

$$\underbrace{\left| \sum (f, P_k, \Xi) \right|}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} |\int_\Pi f|} \leq \left| \sum_{\Pi \in P_k} f(\xi(\Pi)) \cdot v(\Pi) \right| \leq \underbrace{\sum_{\Pi \in P_k} |f(\xi(\Pi))| \cdot v(\Pi)}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} |\int_\Pi f|}$$

□

Лемма 13. $v(E) = 0, f : E \to \mathbb{R}$ *огр*
$\implies \int_E f = 0$

Доказательство. $\forall \varepsilon \, \exists \bigcup_{k=1}^N C_k, \sum_{k=1}^N v(C_k) < \varepsilon$
$\exists M > 0 : \forall x \in E \quad |f(x)| < M \implies |\widetilde{f}(x)| < M, \forall x \in \Pi$
$C_k, k = 1, \dots, N \to$ разбиение P

$$|U(f, P)| = |\sum_{\pi \in P} \sup_\Pi |f| \chi_E \cdot v(\pi) \leq \sum_{\substack{\Pi \in P \\ \Pi \in \bigcup_{k=1}^N C_k}} \sup |f| \cdot v(\Pi) \leq M \cdot \sum_{k=1}^N v(C_k) \leq M\varepsilon$$

$|\int_E f| = \int_\Pi f\cdot\chi_E \leq \int_\Pi |f|\cdot\chi_E \leq U(|f|,\chi_E,P) = \sup\ldots$

ε произволен $\implies \int_E f = 0$

$\square$

Замена переменной в интеграле

$E\subset\mathbb{R}^n \quad f: E\to\mathbb{R}$

носитель $\mathrm{supp} f = \overline{\{x: f(x)\neq 0\}}$ (замыкание) //носитель компактен

Замечание. *Пусть $G\subset\mathbb{R}^n$ открыто и ограничено*

$f: G\to\mathbb{R}$ огр. и п.в. непр.

Если $suppf\subset G$ то $\exists\int_G f$ (независимо от δG)

Доказательство. $\exists\Pi: G\subset\Pi, suppf\subset Int\Pi, \widetilde{f}:\Pi\to\mathbb{R}$ продолжение f нулём на Π

$\underbrace{\{\text{т. разрыва } \widetilde{f}\}}_{\subset\{\text{т.р. } f \text{ на } G\}-\text{ мера } 0} = \{\text{т.р. } \widetilde{f} \text{ на } suppf\}\cup\{\text{т.р. } \widetilde{f} \text{ в } \underbrace{Int\Pi\setminus suppf}_{\text{откр.}}\}\cup\underbrace{\{\text{т.р. } \widetilde{f} \text{ на } \delta\Pi\}}_{=\varnothing}$

$dist\{\delta\Pi, suppf\}>0$

$\widetilde{f}\,|_{\Pi\setminus suppf}\equiv 0$

Второе множество в объединении тоже пусто $\widetilde{f}\equiv 0$ $\square$

Теорема 1. *Пусть $G\subset\mathbb{R}^n$ открыто и ограничено, $g: G\to\mathbb{R}^n$ диффеоморфизм, $g(G)$ ограничен*

$f: G\to\mathbb{R}$ ограничена и п.в. непрерывна

$suppf\subset g(G)$

Тогда $\exists\int_G f\circ g|\det g'|$ и $\int_{g(G)} f = \int_G f\circ g\cdot|\det g'|$

Опр. G называется областью, если оно открыто и связно.

Доказательство. $\square$