Можно ли поставить краевую задачу на бесконечном промежутке?

Краевая задача на бесконечности

Какие же краевые условия можно поставить? Что мы хотим?

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x} + \vec{q}(t), \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad P(t), \vec{q}(t) \in C(\mathbb{R}) \\ \big|\vec{x}(\pm\infty)\big| \le k < \infty \end{cases}$$

Какие условия разрешимости задачи???

Пусть единственным ограниченным решением однородной задачи

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x} \\ \big|\vec{x}(\pm\infty)\big| < \infty \end{cases}$$

является $\vec{x} \equiv 0$.

Подпространства пространства решений:

$X_1 = \{\dot{\vec{\phi}}(t) : \dot{\vec{\phi}} = P(t)\vec{\phi},\ |\vec{\phi}(-\infty)| \le k\}$

$X_2 = \{\dot{\vec{\phi}}(t) : \dot{\vec{\phi}} = P(t)\vec{\phi},\ |\vec{\phi}(+\infty)| \le k\}$

(Это условие исключает рисунок центр)

$\implies$ любое решение $\vec{x} = \vec{\Phi}(t)\vec{c} \in X_1 \oplus X_2, X_1 \cap X_2 = \varnothing$

$\implies \dim X_1 + \dim X_2 = n$ - дихотомия $\big(P(t) = A \iff \mathbb{R}\lambda_j \neq 0\big)$

$\dim X_1 = m$

Вектор начальных условий можно разбить: $\vec{c} = \vec{c_1} + \vec{c_2}$

Введём линейный оператор $\Gamma : \Phi(t)C \to \Phi(t)C_1$ – проектор$(\Gamma|_{x_1} = I, \Gamma|_{x_2} = 0)$

$\Gamma^2 = I$

$\Gamma(\vec{c}) = \vec{c_1}$

$(I - \Gamma)(\vec{c}) = \vec{c_2} \qquad (I - \Gamma)|_{x_2} = I, (I - \Gamma)|_{x_1} = 0$

Функция Грина, заданная на $(-\infty, +\infty)$:

$$G(t, S) = \begin{cases} -\Phi(t)\Gamma\Phi^{-1}(S), & t < S \\ \Phi(t)(I - \Gamma)\Phi^{-1}(S) & S < t \end{cases}$$

(тут рисунок диагонали какой-то(видимо третье свойство))

3 условие: $G(s+o, s) - G(s-0, s) = \Phi(s)(I-\Gamma)\Phi^{-1}(s) - \big(-\Phi(s)\Gamma\Phi^{-1}(s)\big) = \Phi(s)\Phi^{-1}(s) = I$

Наша функция Грина удовлетворяет условиям функции Грина. Надо писать ответ.

* Кстати, частный случай. Пусть $\dim X_1 = n, \dim X_2 = 0$. Тогда функция Грина выглядит так: $G(t, s) = \begin{cases} -\Phi(t)\Phi^{-1}(s), & t < s \\ 0, & s < t \end{cases}$

* $P(t) = A, A = S\mathrm{diag}\{A^-, A^+\}S, \quad A^- : \mathbb{R}\lambda_j < 0,\ A^+ : \mathbb{R}\lambda_j > 0$

m - число $\lambda_j, \mathbb{R}\lambda_j > 0$

$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \; m \\ \vdots \; n-m \end{pmatrix}$

Г - блочная матрица из 4 блоков с левым верхним единицей.

$S^{-1}G(t,s)S = \begin{cases} \mathrm{diag}\{0_{n-m}, -e^{(t-s)A^+}\} \\ \mathrm{diag}\{e^{(t-s)A^-, 0_m}\} \end{cases}$

Теорема о существовании ограниченного решения

$A = \mathrm{diag}\{A^-, A^+\}, \quad \|\vec{q}(t)\| \le k < \infty, \ \forall t \in \mathbb{R}$

$\implies$ $\exists!$ ограниченное решение $\vec{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)\vec{q}(s)ds$

$D.\ \vec{x}(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t,s)\vec{q}(s)ds + \int_{t}^{+\infty} G(t,s)\vec{q}(s)ds$

Первый интрегал живёт в X_2, второй в X_1

$\vec{x}(t) = \vec{y}(t) + \vec{z}(t), \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{n-m+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

Первый интрегал равен $\vec{y}(t)$, второй $\vec{z}(t)$

$\|y\| = \| \int_{-\infty}^{t} G(t,s)\vec{q}(s)ds\| \le k\int_{-\infty}^{t} \|e^{(t-s)A^-}\|ds \le (*)$

$\|A\| = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda_j|$

$\|e^A\| = \max |e^{\lambda_j}|$

$\|e^{sA^-}\| \le e^{-\rho \min |\mathbb{R}\lambda_j|}, \quad \min |\mathbb{R}\lambda_j| = \widehat{\lambda}$

$\le (*) = k\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)\widehat{\lambda}}ds = \frac{k}{\widehat{\lambda}}e^{-(t-s)\widehat{\lambda}}\Big|_{s=\infty}^{s=t-0} = \frac{k}{\widehat{\lambda}} < \infty \ \forall t$

$\implies \|y(t)\| < \infty$

Устойчивость

Дифференцируемость решения по начальным данным и параметрам (непрерывность уже есть)

Пусть есть линейная система $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})$

Должны существовать производные по правой части $\exists \frac{\partial F}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial F}{\partial \vec{\mu}} \in C(G_\mu)$

$G_\mu = \{$прям произв области разрешимости $D_\mu \times \Omega_\mu\}$

$G_i = \{(t,x) : (t,x,\mu) \in G_\mu\}$ область однозначной разрешимости

$D_\mu = \{(t, t_0, \vec{x_0}, \mu) : (t_0, x_0, \mu) \in G_\mu, t \in I(t_0, x_0, \mu)\}$

Существует решение X, т.к. начальные данные из области разрешимости:

1. $X(t, t_0, \vec{x_0}, \mu) : D_\mu \to \mathbb{R}, \vec{x} \in C(D_\mu)$
2. $\exists \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial t_0}, \frac{\partial x}{\partial \vec{x_0}}, \frac{\partial x}{\partial \mu} \in C(D_\mu)$
3. При этом по $t \frac{\partial x}{\partial \vec{x_0}}$ является нормированной по I при $t = t_0$ фундаментальной матрицы следующей системы лду:

$\dot{\vec{y}} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}\big(t, X(t, t_0, x_0, \mu), \mu\big)\vec{y}$

4. $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ по t тоже решение неоднородной системы лду следующего вида:
$\dot{\vec{y}} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}\big(t, \vec{x}(t, t_0, x_0, \mu), \mu\big)\vec{y} + \frac{\partial F}{\partial \mu}\big(t, \vec{x}(t, t_0, x_0, \mu), \mu\big)$

Замечание 1: условия 3., 4. имеют собственные имена: дифф уравнения в вариациях.

Замечание 2: $\dot{\vec{x}} \equiv f(t, \vec{x}(t, t_0, x_0, \mu), \mu)\Big| \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}}$
$\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \vec{x_0}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x_0}} \implies 3.$
$\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \mu} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \mu} + \frac{\partial F}{\partial \mu}$ 4.