Математический анализ

26 сентября 2022

Определение интеграла Римана через интегральные суммы

$\Pi \subset \mathbb{R}^n, \ f : \Pi \to \mathbb{R}$ огр.

p – разбиение $\Pi, = \{\pi_i, \ i = 1, \dots, N\}$

$\Xi = \{\xi_i \in \pi_i, \ | \ i = 1, \dots, N\}$

$\sum(f, p, \Xi) := \sum_{i=1}^N f(\xi) v(\pi_i)$ – интегральная сумма Римана

Определение. *Если* $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \{p_k\}_{k=1}^\infty : d(p_k) \xrightarrow[k \to]{} 0 \ \forall \{\Xi\}_{k=1}^\infty$

$$\sum(f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} I, \quad \text{\textit{то} } f \text{ \textit{интегрируема по Риману и} } I = \int\limits_\Pi f$$

Теорема 1.

$\exists I \ \forall \{p_k\} : d(p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \ \forall \{\Xi\} \ \sum(f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} I \Leftrightarrow \underline{\int\limits_\Pi} f = \overline{\int\limits_\Pi} f = \int\limits_\Pi f$

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\varepsilon, p_k : d()p_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \ \forall \pi \in p_k \ \exists \xi \in \pi :$

$$f(\xi) - \inf_\pi f < \varepsilon$$

Получим Ξ_k $\sum(f, p_K, \Xi_k) - L(f, p_k) = \sum_{\pi \in p_k} (f(\xi(\pi)) - \inf_\pi f) \cdot v(\pi) \leq$

$\leq \varepsilon \cdot \sum_{\pi \in p} v(\pi) = \varepsilon \cdot v(\pi)$

По *Л. 3* $L(f, p_k) \xrightarrow[k\to 0]{} \underline{\int\limits_\Pi} f \Rightarrow 0 \leq I - \underline{\int\limits_\Pi} f \leq \varepsilon \cdot v(\pi)$

$$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon \Rightarrow \underline{\int\limits_\Pi} f = I \\ \text{Аналогично } \overline{\int\limits_\Pi} f = I \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \int\limits_\Pi f = i$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\underline{\int\limits_\Pi} f = \overline{\int\limits_\Pi} f = \int\limits_\Pi f$. Возьмем произвольные

$$\{p_k\}, \ d(p_k) \to 0, \ \{\Xi_k\} \quad {}_{(*)} :$$

$$L(f, p_k) \leq \sum(f, p_k, \Xi_k) = \sum_{\pi \in p_k} \underbrace{f(\xi(\pi))}_{(*)} v(\pi) \leq U(f, p_k)$$

$$(*) \quad \inf_\pi \leq \dots \leq \sup_\pi f$$

$$L(f, p_k) \xrightarrow[\text{Л. 3, } k\to\infty]{} \underline{\int\limits_\Pi} f = \overline{\int\limits_\Pi} f \xleftarrow[\text{Л. 3, } k\to\infty]{} U(f, p_k)$$

$$\Rightarrow \sum(f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} I$$

$\square$

Множество меры ноль

Определение. *$E \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру ноль, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ покрытие $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, где C_k – открытые кубы*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(C_k) \le \varepsilon \qquad \mu(E) = 0 \ \text{ – мера}$$

Замечание. *Открытые кубы $\Leftrightarrow$ замкнутые*

Замечание. $E_1 \subset E,\ \mu(E) = 0 \Rightarrow \mu(E_1) = 0$

Лемма 4. $\mu(E_k) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$

Доказательство. $\forall k$ $\exists$ покрытие кубами с $\sum$ объемов $< \frac{\varepsilon}{2}^k$

Тогда $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ будут покрыты и $\sum$ объемов $< \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}^k = \varepsilon$ $\square$

Определение. *$E \subset \mathbb{R}^n$ имеет объем ноль, если $\forall \varepsilon$ $\exists$ конечное покрытие*
$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, где c_k – открытый куб

$$\sum_{k=1}^{N} v(C_k) < \varepsilon \qquad v(E) = 0$$

Замечание.

1. *открытые $\Leftrightarrow$ замкнутые кубы*
2. $v(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$

Теорема 2. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *не может иметь объем* 0

Доказательство. докажем, что если $[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{N} C_k$,

$$C_k - \text{отрезки, то } \sum_{k=1}^{N} v(C_k) \ge b - a$$

база : $N = 1$

$[a, b] \subset C_1 \Rightarrow v(C_1) \ge b - a$

переход : $N + 1$

$$a \in U_{k=1}^{N+1} C_k \Rightarrow \exists k : a \in C_k \ \text{ перенумеруем } \ C_k \text{ так, чтобы } a \in C_1 = [\alpha, \beta]$$

$$\alpha \leq a \leq \beta \leq b$$

Если $b \in [\alpha, \beta]$, то $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$,

$$\sum_{k=1}^{N+1} v(C_k) > v(C_1) = \beta - \alpha \geq b - a$$

Если $b \notin [\alpha, \beta]$, $b > \beta$

$$(\beta, b] \subset \bigcup_{k=2}^{N+1} C_k$$

$$\Rightarrow [\beta, b] \subset \bigcup_{k=2}^{N+1} C_k \xRightarrow[\text{инд. п.}]{} \sum_{k=2}^{N+1} v(C_k) \geq b - \beta$$

$$v(C_1) \geq \beta - a$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N+1} v(C_k) \geq b - a$$

$\square$