Определение интеграла Римана через интегральные суммы

26 сентября 2022

$\Pi \subset \mathbb{R}^n,\ f : \Pi \to \mathbb{R}$ огр.

p – разбиение $\Pi, = \{\pi_i,\ i = 1, \dots, N\}$

$\Xi = \{\xi_i \in \pi_i,\ \mid i = 1, \dots, N\}$

$\sum(f, p, \Xi) := \sum_{i=1}^N f(\xi) v(\pi_i)$ – интегральная сумма Римана

Определение. *Если* $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \{p_k\}_{k=1}^\infty : d(p_k) \xrightarrow[k\to]{} 0\ \forall \{\Xi\}_{k=1}^\infty$

$$\sum(f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} I, \quad \text{\textit{то } } f \text{ \textit{интегрируема по Риману и} } I = \int\limits_\Pi$$

Теорема 1.

$\exists I\ \forall \{p_k\} : d(p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\ \forall \{\Xi\}\ \sum(f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} I \Leftrightarrow \underline{\int\limits_\Pi} = \overline{\int\limits_\Pi} = \int\limits_\Pi$

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\varepsilon, p_k : d(p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\ \forall \pi \in p_k\ \exists \xi \in \pi :$

$$f(\xi) - \inf_\pi f < \varepsilon$$

Получим Ξ_k $\sum(f, p_K, \Xi_k) - L(f, p_k) = \sum_{\pi \in p_k} \Big(f\big(\xi(\pi)\big) - \inf_\pi f \Big) \cdot v(\pi) <$

$< \varepsilon \cdot \sum_{\pi \in p} v(\pi) = \varepsilon \cdot v(\pi)$

По *Л. 3* $L(f, p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \underline{\int\limits_\Pi} \Rightarrow 0 \le I - \underline{\int\limits_\Pi} \le \varepsilon \cdot v(\pi)$

$$\left.\begin{aligned} &\forall \varepsilon \Rightarrow \underline{\int\limits_\Pi} = I \\ &\text{Аналогично } \overline{\int\limits_\Pi} = I \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists \int\limits_\Pi = I$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\underline{\int\limits_\Pi} = \overline{\int\limits_\Pi} = \int\limits_\Pi$. Возьмем произвольные

$$\{p_k\},\ d(p_k) \to 0,\ \{\Xi_k\} \quad {}_{(*)} :$$

$$L(f, p_k) \le \sum(f, p_k, \Xi_k) = \sum_{\pi \in p_k} \underbrace{f\big(\xi(\pi)\big)}_{(*)} v(\pi) \le U(f, p_k)$$

$$(*) \quad \inf_\pi \le \dots \le \sup_\pi f$$

$$L(f, p_k) \xrightarrow[\text{Л. 3},\ k\to\infty]{} \underline{\int\limits_\Pi} = \overline{\int\limits_\Pi} \xleftarrow[\text{Л. 3},\ k\to\infty]{} U(f, p_k)$$

$$\Rightarrow \sum(f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} I$$

$\square$

Множество меры ноль

Определение. *$E \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру ноль, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ покрытие $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, где C_k – открытые кубы*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(C_k) \le \varepsilon \qquad \mu(E) = 0 \ \text{ – мера}$$

Замечание. *Открытые кубы $\Leftrightarrow$ замкнутые*

Замечание. $E_1 \subset E,\ \mu(E) = 0 \Rightarrow \mu(E_1) = 0$

Лемма 4. $\mu(E_k) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$

Доказательство. $\forall k$ $\exists$ покрытие кубами с $\sum$ объемов $< \varepsilon \cdot (\frac{1}{2})^k$

Тогда $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ будут покрыты и $\sum$ объемов $< \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = \varepsilon$ $\square$

Определение. *$E \subset \mathbb{R}^n$ имеет обьем ноль, если $\forall \varepsilon$ $\exists$ конечное покрытие $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, где c_k – открытый куб*

$$\sum_{k=1}^{N} v(C_k) < \varepsilon \qquad v(E) = 0$$

Замечание.

1. *открытые $\Leftrightarrow$ замкнутые кубы*

2. $v(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$

Лемма 5. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *не может иметь обьем* 0

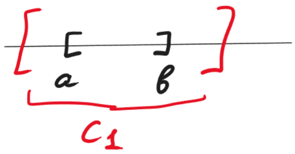
Доказательство. докажем, что если $[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{N} C_k$,

$$C_k \text{ – отрезки, то } \sum_{k=1}^{N} v(C_k) \ge b - a$$

база : $N = 1$

$[a, b] \subset C_1 \Rightarrow v(C_1) \ge b - a$

База:

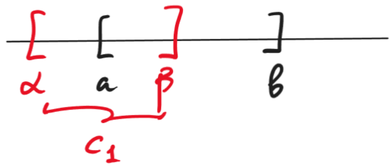


$v(C_1) \geq b - a$

переход : $N+1$

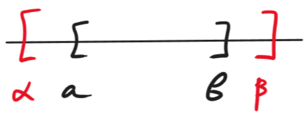
$a \in U_{k=1}^{N+1} C_k \Rightarrow \exists k : a \in C_k$ перенумеруем C_k так, чтобы $a \in C_1 = [\alpha, \beta]$

$$\alpha \leq a \leq \beta \leq b$$



Если $b \in [\alpha, \beta]$, то $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$,

$$\sum_{k=1}^{N+1} v(C_k) > v(C_1) = \beta - \alpha \geq b - a$$



Если $b \notin [\alpha, \beta]$, $b > \beta$

$$(\beta, b] \subset \bigcup_{k=2}^{N+1} C_k$$

$$\Rightarrow [\beta, b] \subset \bigcup_{k=2}^{N+1} C_k \xRightarrow[\text{инд. п.}]{} \sum_{k=2}^{N+1} v(C_k) \geq b - \beta$$

$$v(C_1) \geq \beta - a$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N+1} v(C_k) \geq b - a$$

$\square$

Лемма 6. *Если* $K \subset \mathbb{R}^n$ *компактно, то* $v(K) = 0 \Leftrightarrow \mu(K) = 0$

Доказательство. $\boxed{\Rightarrow}$ очев. (уже доказали)

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ открытые кубы,

$\sum_{k=1}^{\infty} v(C_k) < \varepsilon$

$\exists$ конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{j=1}^{N} C_{kj}$,

$$\sum_{j=1}^{N} v(C_{kj}) < \varepsilon \Rightarrow v(K) = 0$$

$\square$

Пример 1. $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ – *разные точки* $[a,b] = \{q_k,\ k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{q_k\}$

$\mu(\{q_k\}) = 0\ \forall k \xRightarrow[\text{Л. 4}]{} \mu(E) = 0$

при этом $v(E) \neq 0$

Пусть $E \subset \bigcup_{k=1}^{N} C_k \Rightarrow \underset{=[0,1]}{\bar{E}} \subset \bigcup_{k=1}^{N} C_k \xRightarrow[\text{Л. 5}]{} \sum_{k=1}^{N} v(C_k) \geq 1$

Критерий интегрируемости Лебега

Почти везде $\equiv$ везде, кроме множества точек, имеющего меру 0

$E \subset \mathbb{R}^n,\ f : E \to \mathbb{R}$ огранич.

$x \in \bar{E}, \quad \delta > 0$

$M_\delta(f,x) := \sup_{B_\delta(x)} f, \quad m_\delta(f,x) := \inf_{B_\delta(x)} f$

$M_\delta(f,x) \uparrow, \quad m_\delta(f,x) \downarrow$ - имеется в виду возрастание и убывание при росте δ

$M_\delta(f,x) - m_\delta(f,x)\ \uparrow$ по δ

Определение. $\lim_{\delta \to 0^+} M_\delta(f,x) - m_\delta(f,x) = w(f,x)$ – *колеб. ф-ии f в точке x*

Лемма 7. $E \subset \mathbb{R}^n,\ f : E \to \mathbb{R}$ *огр.* $x \in \bar{E}$

f непр. в точке $x \Leftrightarrow w(f,x) = 0$

Доказательство.

Расписать непрерывность на языке эпс-дельт, учесть монотонность колебания функции

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall y \in B_\delta(x) \cap E\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\Rightarrow M_{\delta_\varepsilon}(x) - m_{\delta_\varepsilon}(x) \leq 2 \cdot \varepsilon$

и более того, $\forall \delta < \delta_\varepsilon\ M_\delta(x) - m_\delta(x) < \varepsilon$

$M_\delta(f,x) - m_\delta(f,x) \xrightarrow[\delta \to 0^+]{} 0$

то есть $w(f,x) = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ $w(f,x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon\ \exists \delta_\varepsilon : \forall \delta < \delta_\varepsilon$

$M_\delta(f,x) - m_\delta(f,x) < \varepsilon$

$\forall y \in B_\delta(x) \cap E \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

$f(y) \xrightarrow[y \to x]{} f(x)$

□

Лемма 8. *$F \subset \mathbb{R}^n$ замкн., $f : F \to \mathbb{R}$ огр.*
$\forall \varepsilon > 0 : F_\varepsilon := \{x \in F \mid w(f,x) \geq \varepsilon\}$. Т. д. F_ε – замкн.

Доказательство. Докажем, что $\mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon$ – откр.

$$\begin{matrix} 1.\ x \in \mathbb{R}^n \setminus F \\ 2.\ x \in F \setminus F_\varepsilon \end{matrix} \overset{??}{\Longrightarrow} \delta > 0 \quad B_\delta(x) \in \mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon$$

1. $x \in \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus F}_{\text{откр.}} \Rightarrow \exists \delta > 0\ B_\delta(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus F \subset \mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon$

2. $x \in F \setminus F_\varepsilon \Rightarrow w(f,x) < \varepsilon \Rightarrow \exists \delta > 0 : M_\delta(f,x) - m_\delta(f,x) < \varepsilon$

$$y \in B_\delta(x)\ \exists \delta' > 0\ B_{\delta'}(y) \subset B_\delta(y)$$

$$(\delta' < \delta - \|x - y\|)$$

   если $y \notin F$, то $y \in \mathbb{R}^n \setminus F \subset \mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon$

   если $y \in F$, то $w(f,y) < \varepsilon$

$$M(f,\delta_1,y) - m(f,\delta_1,y) \leq M(f,\delta,x) - m(f,\delta,x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow w(f,y) < \varepsilon \Rightarrow y \in \mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon$$

   Тогда $\forall y \in B_\delta(x)$ верно, что $y \notin F_\varepsilon$ или $B_\delta(x) \cap F_\varepsilon = \varnothing$

   $x \in F \setminus F_\varepsilon$, $B_\delta(x)$ полностью лежит в $F \setminus F_\varepsilon$, значит оно открыто, F - замкнуто, $F \setminus (F \setminus F_\varepsilon) = F_\varepsilon$ - замкнуто

□

Лемма 9. $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, *$f : \Pi \to \mathbb{R}$ огр.*
Если $\forall x \in \Pi \quad w(f,x) < \varepsilon$, то $\exists$ разбиение p:

$$U(f,p) - L(f,p) < \varepsilon \cdot v(\Pi)$$

Доказательство. $\forall x \in \Pi\ \lim_{\delta\to 0+}\big(M_\delta(f,x) - m_\delta(f,x)\big) = 0$

$\exists \delta_\varepsilon : M_{\delta_\varepsilon}(f,x) - m_{\delta_\varepsilon}(f,x) < \varepsilon$

$\forall x\ \exists \pi_x$ открытый п/п : $\underline{\sup}_{\pi_x} f - \underline{\inf}_{\pi_x} f < \varepsilon$

$\Pi \subset \bigcup_{x\in\Pi} \pi_x$, Π компактен $\Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие

$$\Pi \subset \bigcup_{k=1}^{N} \pi_{x_k}$$

разрешем Π гранями всех $\pi_{x_k},\ k = 1, \dots, N$

$\Rightarrow$ получаем разбиение p

$$U(f,p) - L(f,p) = \sum_{\pi\in p} (\sup_\pi f - \inf_\pi f)\cdot v(\pi) < \varepsilon \cdot \sum_{\pi\in p} v(\pi) = \varepsilon v(\pi)$$

$$\forall \pi \in p\ \exists k\ \pi \subset \bar{\pi}_{x_k}$$

$$\Rightarrow \sup_\pi f - \inf_\pi f \le \sup_{\bar{\pi}_{x_k}} f - \inf_{\bar{\pi}_{x_k}} f < \varepsilon$$

□

Теорема 2. *Критерий Лебега*

$\Pi \in \mathbb{R}^n$ - *п/п* $f : \Pi \to \mathbb{R}$ - *огр*

$D = \{x \in \Pi \mid f$ *– разрывна в* $x\}$

Тогда:

$$\exists \int_\Pi f \Leftrightarrow \mu(D) = 0$$

Доказательство. Пусть $\Pi_\varepsilon = \{x \in \Pi \mid w(f,x) \ge \varepsilon\}$ - замкнутые по Лемме, ограниченные из ограниченности исходного п/п, значит компактные

$$D \subset \bigcup_{\varepsilon>0} \Pi_\varepsilon$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\mu(D) = 0$

$$\mu(\Pi_\varepsilon) = 0, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow v(\Pi_\varepsilon) = 0$$

$$\Pi_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^{N} \pi_k, \sum_{k=1}^{N} < \varepsilon, \pi_k\text{- открытые кубы}$$

Разрежем Π гранями $\pi_1 \dots \pi_N$ - получим разбиение P

$P = P_1 \cup P_2$, P_1, P_2 - не разбиения, но состоят из кубов

$P_1 = \{\pi \in P \mid \exists k : \pi \in \overline{\pi_k}\}$

$P_2 = P \setminus P_1$

$$\sum_{\pi \in P_1} v(\pi) \le \sum_{k=1}^{N} v(\pi_k) < \varepsilon$$

f - огр, значит $\exists M > 0 : \forall x \in \Pi |f(x)| < M$

$$\sum_{\pi \in P_1} \big(M_\pi(f) - m_\pi(f)\big) \cdot v(\pi) \le 2M \cdot \sum_{\pi \in P_1} v(\pi) \le 2M \cdot \varepsilon$$

$\forall \pi \in P_2 : \forall x \in \pi : w(f, x) < \varepsilon$

$$\exists P(\pi) : U\big(f, P(\pi)\big) - L\big(f, P(\pi)\big) < \varepsilon \cdot v(\pi)$$

Разрежем Π гранями $\pi' \in P(\pi)$ для всех $\pi \in P_2$
Получим разбиение Π: $P' = P_1' \cup P_2'$, P_1', P_2' - более мелкие по сравнению с P_1, P_2

$$\sum_{\pi' \in P_1'} (\sup_{\pi'} f - \inf_{\pi'} f) \cdot v(\pi') \le 2M \cdot \sum_{\pi' \in P_1'} v(\pi') < 2M \cdot \varepsilon$$

$$\sum_{\pi' \in P_2'} (\sup_{\pi'} f - \inf_{\pi'} f) \cdot v(\pi') = \sum_{\pi \in P_2} \sum_{\pi' \in P(\pi)} (\sup_{\pi'} f - \inf_{\pi'} f) \cdot v(\pi') < \sum_{\pi \in P_2} \varepsilon \cdot v(\pi) < \varepsilon \cdot v(\Pi)$$

$$U(f, P') - L(f, P') = \sum_{\pi' \in P'} (\sup_{\pi'} f - \inf_{\pi'} f) \cdot v(\pi') < \varepsilon \cdot \big(2M + v(\Pi)\big) \Rightarrow \exists \int\limits_{\Pi} f$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\exists \int\limits_{\Pi} f$
Хотим доказать, что $\mu(D) = 0$

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_{1/k}$$

Если $\forall k : \mu(\Pi_{1/k}) = 0$, то по лемме о мере счётного объединения множеств меры 0 докажем необходимое

Из существования интеграла: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists P : U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{k}$

$$P_k = \{\pi \in P \mid \operatorname{Int} \pi \cap \Pi_{1/k} \neq \varnothing\}$$

$$\Pi_{1/k} \subset \bigcup_{\pi \in P_k} \pi$$

$$\forall \pi \in P_k \; \exists x \in \operatorname{Int} \pi : w(f, x) \geq \frac{1}{k}$$

$$\exists \delta > 0 : B_\delta(x) \in \operatorname{Int} \pi \;\; \sup_{B_\delta(x)} f - \inf_{B_\delta(x)} f \geq \frac{1}{k}$$

$$\sup_\pi - \inf_\pi \geq \sup_{B_\delta(x)} f - \inf_{B_\delta(x)} f \geq \frac{1}{k}$$

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{\pi \in P} (\sup_\pi f - \inf_\pi f) \cdot v(\pi) \geq \sum_{\pi \in P_k} (\sup_\pi f - \inf_\pi f) \cdot v(\pi) \geq \frac{1}{k} \cdot \sum_{\pi \in P_k} v(\pi)$$

$$\sum_{\pi \in P_k} v(\pi) \leq k \cdot \big(U(f,P) - L(f,P)\big) < \varepsilon$$

$$v(\Pi_{1/k}) = 0$$

$\square$