Математический анализ

21 ноября 2022

Теорема 1. $f_n : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f \in C([a, +\infty))$

$\forall x \in [a, +\infty)\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: \varphi(x)$

$\forall R > a$ *сходимость равномерна на* $[a, R]$

$$\forall n\ \exists \int_a^{\infty} f_n(x)dx \text{ и сходится равномерно по } n \in \mathbb{N}$$

Тогда

$$\exists \lim_{n\to a} \in_a^{+\infty} f_n(x)dx = \int_a \varphi(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Теорема 2. $f : [a, +\infty) \times (c, d) \to \mathbb{R},\ f \in C([a, +\infty) \times (c, d))$

$$\forall x, \in [a, +\infty) \times (c, d)\ \exists \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(x, y), \varphi \in C([a, +\infty) \times (c, d))$$

$$\forall y \in (c, d)\ \exists \int_a^{+\infty} f(x, y)dx,\ \exists \int_a^{+\infty} \varphi(x, y)dx, \text{ сх. равномерно по } y \in (c, d)$$

Тогда $\exists$ *и равны*

$$\frac{d}{dx} \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x, y)dx$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx$$

Теорема 3. $f : [a, +\infty) \times (c, d) \to \mathbb{R},\ f \in C([a, +\infty) \times (c, d))$

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)dx \text{ сх. равномерно по } y \in [c, d]$$

Тогда $\exists$ *и равны*

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y)dy$$

Внешняя алгебра

L – линейное пространство, $\dim L = n$

$$e_1, \ldots, e_n \text{ – базис в } L$$

$\Lambda^2 L$ – формальные суммы $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i a_i \wedge b_i,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ a_i, b_i \in L,$

профакторизованные по отношению эквивалентности, заданному правилом:

$$(\alpha a_i + \beta b_1) \wedge a_2 = \alpha a_1 \wedge a_2 + \beta b_1 \wedge a_2$$

$$a_1 \wedge a_2 = -a_2 \wedge a_1$$

$a = \sum_{i=1}^n a^i e_i,\ b = \sum_{i=1}^n b^i e_i$

$$a \wedge b = \sum_{i,j=1}^{n} a^i b^j e_i \wedge e_j = \sum_{i,j \in \{1,\dots,n\}, i \neq j} a^i b^j e_i \wedge e_j =$$

$$= \sum_{i,j \in \{1\dots,n\}, i<j} (a^i b^j - b^i a^j) e_i \wedge e_j$$

$e_i \wedge e_j \mid 1 \leq i < j_{\leq n}$ – базис $\Lambda^2 L \quad \dim \Lambda^2 L = C_n^2$

$\Lambda^0 L = \mathbb{R}$

$\Lambda^1 L = L$

$\Lambda^p L$ – формальные суммы $\sum \alpha a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$

факторизованные по правилам

$$(\alpha a_1 + \beta b_1) \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p = \alpha a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p + \beta b_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p$$

Базис $\Lambda^p L \quad e_{n_1} \wedge e_{n_2} \wedge \dots \wedge e_{n_p}$, где $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_p \leq n$

$\dim \Lambda^p L = C_n^p$

Если π – перестановка $\{1, \dots, p\} \quad a_{\pi(1)} \wedge a_{\pi(2)} \wedge \dots \wedge a_{\pi(p)} = \operatorname{sign} \pi a_1 \wedge \dots \wedge a_p$

$\lambda = \sum_H a^H e_H \qquad b^{h_1 \dots h_p}$

если $h_1 < \dots < h_p$, то $b_H = a_H$. При всех остальных – по антисимметричности

$\lambda = \frac{1}{p!} \sum_{h_1,\dots,h_p=1}^n b^{h_1 \dots h_p} e_{h_1} \wedge \dots \wedge e_{n_p}$

$\dim \Lambda^p L = C_n^p$

$\dim \Lambda^h L = 1$

$\Lambda^n L = \{c e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \mid c \in \mathbb{R}\}$

Пусть $A \in B(L)$, $\det A =$

Рассмотрим $g_A(a_1, \dots, a_n) = (Aa_1) \wedge \dots \wedge (Aa_n)$

$g_A : L^n \to \Lambda^L$

Скажем, что $\exists f_a \in \Lambda^n L \ \ f_A(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) = g_A(a_1, \dots, a_n)$