

Математический анализ

21 ноября 2022

Теорема 1. $f_n : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f \in C([a, +\infty))$$

$$\forall x \in [a, +\infty) \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: \varphi(x)$$

$$\forall R > a \quad \text{сходимость равномерна на } [a, R]$$

$$\forall n \quad \int_a^\infty f_n(x) dx \text{ и сходится равномерно по } n \in \mathbb{N}$$

Тогда

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f_n(x) dx = \int_a^\infty \varphi(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f_n(x) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Теорема 2. $f : [a, +\infty) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C([a, +\infty) \times (c, d))$

$$\forall x \in [a, +\infty) \times (c, d) \quad \exists \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(x, y), \varphi \in C([a, +\infty) \times (c, d))$$

$$\forall y \in (c, d) \quad \exists \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad \exists \int_a^{+\infty} \varphi(x, y) dx, \quad \text{сх. равномерно по } y \in (c, d)$$

Тогда \exists и равны

$$\frac{d}{dx} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x, y) dx$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx$$

Теорема 3. $f : [a, +\infty) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C([a, +\infty) \times (c, d))$

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \text{ сх. равномерно по } y \in [c, d]$$

Тогда \exists и равны

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Внешняя алгебра

L – линейное пространство, $\dim L = n$

e_1, \dots, e_n – базис в L

$\Lambda^2 L$ – формальные суммы $\sum_{i=1}^N \alpha_i a_i \wedge b_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad a_i, b_i \in L,$

профакторизованные по отношению эквивалентности, заданному правилом:

$$(\alpha a_i + \beta b_1) \wedge a_2 = \alpha a_1 \wedge a_2 + \beta b_1 \wedge a_2$$

$$a_1 \wedge a_2 = -a_2 \wedge a_1$$

$$a = \sum_{i=1}^n a^i e_i, \quad b = \sum_{i=1}^n b^i e_i$$

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \sum_{i,j=1}^n a^i b^j e_i \wedge e_j = \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} a^i b^j e_i \wedge e_j = \\ &= \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}, i < j} (a^i b^j - b^i a^j) e_i \wedge e_j \end{aligned}$$

$$e_i \wedge e_j \mid 1 \leq i < j \leq n - \text{базис } \Lambda^2 L \quad \dim \Lambda^2 L = C_n^2$$

$$\Lambda^0 L = \mathbb{R}$$

$$\Lambda^1 L = L$$

$$\Lambda^p L - \text{формальные суммы } \sum \alpha a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$$

факторизованные по правилам

$$(\alpha a_1 + \beta b_1) \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p = \alpha a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p + \beta b_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p$$

$$\text{Базис } \Lambda^p L \quad e_{n_1} \wedge e_{n_2} \wedge \dots \wedge e_{n_p}, \text{ где } 1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_p \leq n$$

$$\dim \Lambda^p L = C_n^p$$

$$\text{Если } \pi - \text{перестановка } \{1, \dots, p\} \quad a_{\pi(1)} \wedge a_{\pi(2)} \wedge \dots \wedge a_{\pi(p)} = \text{sign } \pi a_1 \wedge \dots \wedge a_p$$

$$\lambda = \sum_H a^H e_H \quad b^{h_1 \dots h_p}$$

если $h_1 < \dots < h_p$, то $b_H = a_H$. При всех остальных – по антисимметричности

$$\lambda = \frac{1}{p!} \sum_{h_1, \dots, h_p=1}^n b^{h_1 \dots h_p} e_{h_1} \wedge \dots \wedge e_{h_p}$$

$$\dim \Lambda^p L = C_n^p$$

$$\dim \Lambda^h L = 1$$

$$\Lambda^n L = \{c e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Пусть $A \in B(L)$, $\det A =$

$$\text{Рассмотрим } g_A(a_1, \dots, a_n) = (Aa_1) \wedge \dots \wedge (Aa_n)$$

$$g_A : L^n \rightarrow \Lambda^L$$

$$\text{Скажем, что } \exists f_A \in \Lambda^n L \quad f_A(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) = g_A(a_1, \dots, a_n) \quad f^{A^{-1}} \text{ умножение на}$$

число

$$\textbf{Утверждение:} \quad f_A(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) = (\det A) a_1 \wedge \dots \wedge a_n$$

Доказательство. a_1, \dots, a_n лин. нез. : $0 = 0$

$a_1, \dots, a_n \Rightarrow$ это базис L

$$\begin{aligned}
 Aa_i &= \sum_{k=1}^n A_{ki}a_k \\
 f_A(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) &= g_A(a_1, \dots, a_n) = (Aa_1) \wedge \dots \wedge (Aa_n) = \\
 &= \left(\sum_{k_1=1}^n A_{k_1 1} a_{k_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{k_n=1}^n A_{k_n n} a_{k_n} \right) \\
 &= \sum_{k_1, \dots, k_n \in \{1, \dots, n\}, k_i \neq k_j, i \neq j} A_{k_1 1} \dots A_{k_n n} \underbrace{a_{k_1} \wedge \dots \wedge a_{k_n}}_{\text{sign}(k_1, \dots, k_n)} \\
 &= (\det A) a_1 \wedge \dots \wedge a_n \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (Aa_1) \wedge \dots \wedge (Aa_n) = \det A a_1 \wedge \dots \wedge a_n
 \end{aligned}$$

□

Внешнее произведение

$$\underbrace{(a_1 \wedge \dots \wedge a_p)}_{\in \Lambda^p L} \wedge \underbrace{(b_1 \wedge \dots \wedge b_q)}_{\in \Lambda^q L} := a_1 \wedge \dots \wedge (a_p \wedge b_1) \wedge \dots \wedge b_1 \in \Lambda^{p+q} L$$

на полиномах – по линейности

$$\underbrace{\lambda}_{\in \Lambda^p L} \wedge \underbrace{\mu}_{\in \Lambda^q L} = (-1)^{pq} \mu \wedge \lambda$$

Пример. $L = \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
 (a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3) \wedge (b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3) &= (a^1 b^2 - b^1 a^2) e_1 \wedge e^2 + \\
 + (a^2 b^3 - b^2 a^3) e_2 \wedge e_3 + (a^3 b^1 - b^3 a^1) e_3 \wedge e_1 \\
 (a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3) \wedge (b^1 e_2 \wedge e_3 + b^2 e_3 \wedge e_1 + b^3 e_1 \wedge e_2) &= \\
 = (a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3) e_1 \wedge e^2 \wedge e^3.
 \end{aligned}$$

$$A \in B(M, N) \quad \Lambda^p A \in B(\Lambda^p M, \Lambda^p N)$$

$$(\Lambda^p A) \underbrace{(a_1 \wedge \dots \wedge a_p)}_{\in \Lambda^p M} = (Aa_1) \wedge \dots \wedge (Aa_p) \quad \Lambda^n A = \det A$$

e_1, \dots, e_m – базис в M

f_1, \dots, f_n – базис в N

$$\begin{aligned}
 \Lambda^p A e H &= (\Lambda^p A)(e_{h_1} \wedge \dots \wedge e_{h_p}) = (Ae_{h_1}) \wedge \dots \wedge (Ae_{h_p}) = \\
 &= \left(\sum_{k_1=1}^n A_{k_1 h_1} f_{k_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{k_p=1}^n A_{k_p h_p} f_{k_p} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_1, \dots, k_p \in \{1, \dots, n\}, k_i \neq k_j, i \neq j} A_{k_1 h_1} \dots A_{k_p h_p} f_{k_1} \wedge \dots \wedge f_{k_p} = \\
&\sum_{k=(k_1, \dots, k_p), 1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} \sum_{\pi} A_{k_1 h_1} \dots A_{k_p h_p} \text{sign } \pi f_{k_p} = A_{KH} \\
&\Lambda^p A e H = \sum_K A_{KH} f_K
\end{aligned}$$

Свойства внешней степени оператора

$$1. \Lambda^p(AB) = \Lambda^p A \Lambda^p B$$

$$\begin{aligned}
(\Lambda^p(AB))(a_1 \wedge \dots \wedge a_p) &= (ABa_1) \wedge \dots \wedge (ABa_p) = \\
&= (\Lambda^p A)((Ba_1) \wedge \dots \wedge (Ba_p)) = (\Lambda^p A \Lambda^p B)(a_1 \wedge \dots \wedge a_p)
\end{aligned}$$

$$2. \lambda \in \Lambda^p M, \mu \in \Lambda^q M$$

$$(\Lambda^{p+q} A)(\lambda \wedge \mu) = (\Lambda^p A \lambda) \wedge (\Lambda^q A \mu)$$

По линейности для мономов: $\lambda = a_1 \wedge \dots \wedge a_p, \mu = b_1 \wedge \dots \wedge b_q$

$$(\Lambda^{p+q} A)(\lambda \wedge \mu) = \underbrace{(Aa_1) \wedge \dots \wedge (Aa_p)}_{\Lambda^p A \lambda} \wedge \underbrace{(Ab_1) \wedge \dots \wedge (Ab_q)}_{\Lambda^q A \mu}$$

Индефинитное скалярное произведение

Скалярное произведение, внутреннее произведение, "индефинитная метрика"

(\cdot, \cdot) – симметричная невырожденная билинейная форма

$$\text{невырожденность: } (a, b) = 0, \forall b \in L \Rightarrow a = 0$$

$$(a, b) = (b, a), \forall a, b \in L$$

Пример (Лоренцево произведение).

$$a = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad (a_1, a_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 x_2 - t_1 t_2$$

Невырожденность \Leftrightarrow

$$\left((e_i, e_j) \right)_{i,j=1}^n - \text{матрица Грамма, } \det \neq 0$$

\exists ортонормированный базис $\sigma_i, i = 1, \dots, n$

$$(v_i, v_j) = \mp \delta_{ij}$$

r_+ – число знаков $+$, r_- – число знаков $-$, $s = r_+ - r_-$ – сигнатура

$$f \in L^* \exists b_+ \in L \forall a \in L f(a) = (b_+, a)$$

Скалярное произведение в $\Lambda^p L$

$$\lambda = a_1 \wedge \cdots \wedge a_p$$

$$\mu = b_1 \wedge \cdots \wedge b_p$$

$$(\lambda, \mu)_{\Lambda^p L} := \det \left((a_i, b_j) \right)_{i,j=1}^p$$