

Алгебра

13 октября 2022

§ Жорданова форма оператора с единственным собственным числом

K – алгебраически замкнуто

V – векторное пространство над K , $\dim V = n < \infty$

$\varphi \in \text{End}(K)$ – линейный оператор

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n(t - \lambda)^n$$

Надо показать, что \exists базис, в котором $[\varphi]$ состоит из жордановых клеток, отвечающих собственному числу λ

$$\{0\} \subsetneq U_0(\lambda) \subsetneq U_1(\lambda) \subsetneq \dots \subsetneq U_n(\lambda) = V$$

U_i , $i = 0, \dots, n$ – корневые подпространства

Лемма 1. Если $U_i(\lambda) = U_{i+1}(\lambda)$, то $U_i(\lambda) = U_k(\lambda)$, $\forall k \geq i$

Доказательство. Достаточно доказать, что $U_{i+2}(\lambda) = U_{i+1}(\lambda)$

$$v \in U_{i+2}(\lambda) \quad (\varphi - \lambda \text{id})^{i+2}(v) = 0 \quad (\varphi - \lambda \text{id})(v) \in U_{i+1}(\lambda) = U_i(\lambda)$$

$$(\varphi - \lambda \text{id})^{i+1}((\varphi - \lambda \text{id})(v)) = 0 \quad \Rightarrow (\varphi - \lambda \text{id})^i((\varphi - \lambda \text{id})(v)) = 0$$

$$(\varphi - \lambda \text{id})^{i+1}(v) = 0 \quad v \in U_{i+1}(\lambda)$$

□

Пусть m неизм. инд.:

$$U_m(\lambda) = U_{m+1}(\lambda) \Rightarrow V = U_m(\lambda) \Rightarrow U_{m-1} \subsetneq U_m(\lambda)$$

Определение. Если $v \in U_i(\lambda)$ $v \notin U_{i-1}(\lambda)$, то

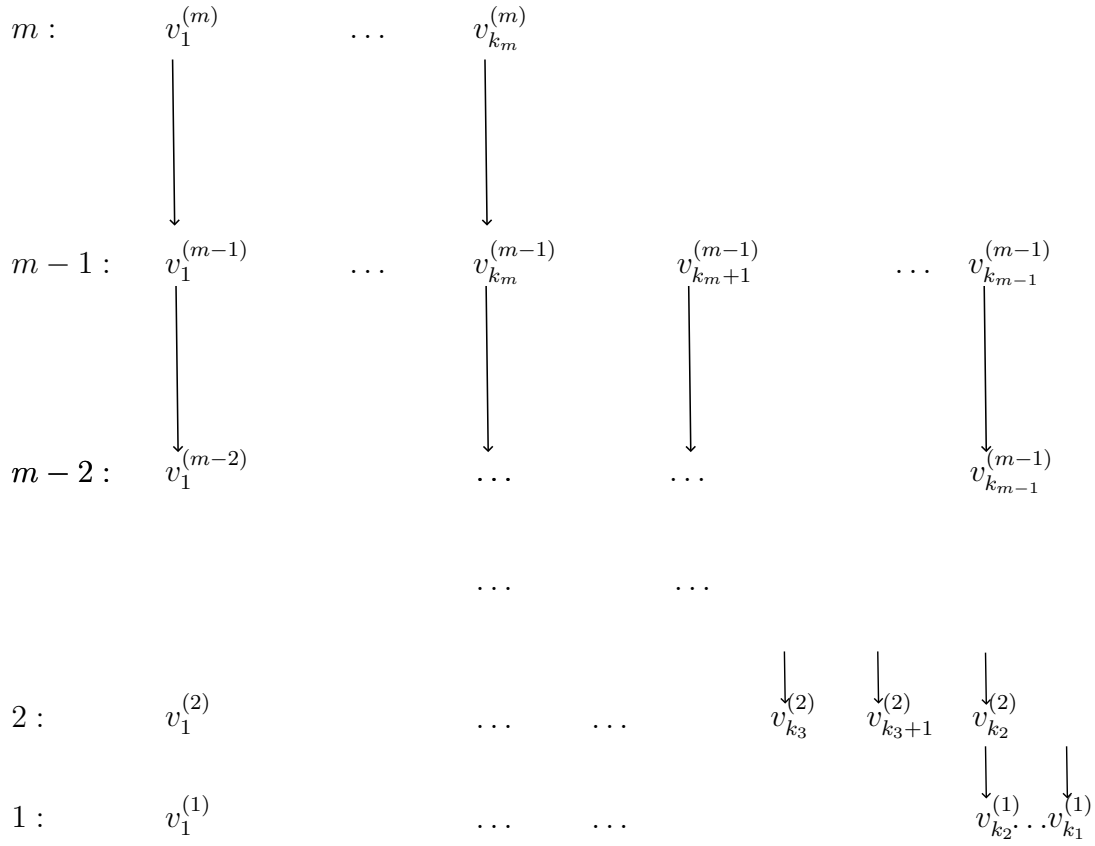
v – корневой вектор высоты i

$v_1^{(m)}, \dots, v_{k_m}^{(m)}$ – относительный базис $U_m(\lambda)$ относительно $U_{m-1}(\lambda)$

$$v_j^{(m-1)} = (\varphi - \lambda \text{id})v_j^{(m)}, \quad j = 1, \dots, k_m$$

$$v_j^{(m-1)} \in U_{m-1}(\lambda) \text{ и отн. л. н. отн. } U_{m-2}(\lambda)$$

Дополним до относительного базиса $U_{m-1}(\lambda)$ отн. $U_{m-2}(\lambda)$



$i+1 : \dots$

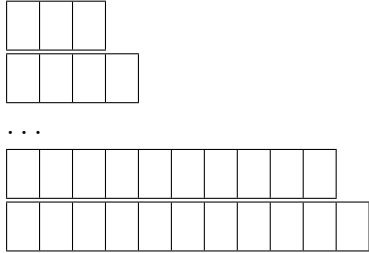
$$i : v_j^{(i)} = (\varphi - \lambda \text{id}) v_j^{(i+1)} \quad i = 1, \dots, k_{i+1}$$

и дополним до относительного базиса $U_i(\lambda)$ относительно $U_{i-1}(\lambda)$

$$v_j^{(i)}, \dots \quad j = k_{i+1} + 1, \dots, k_i$$

$$k_m \leq k_{m-1} \leq \dots \leq k_1$$

Обычно можно увидеть следующее: (диагр.)



Пример. $\{v_j^{(i)} \mid 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq k_j\}$ – базис V

$\{v_j^{(i)}\}$ – относительный базис $U_1(\lambda)$ относительно $U_0(\lambda)$

то есть $\{v_j^{(i)}\}$ – базис $U_1(\lambda)$

$\{v_j^{(1)}, v_j^{(2)}\}$ – базис $U_2(\lambda)$

$v_j^{(1)}$ – базис $U_1(\lambda)$, $v_j^{(2)}$ – базис $U_2(\lambda)$ относительно $U_1(\lambda)$

По индукции:

$\{v_j^{(1)}\} \cup \dots \cup \{v_j^{(i)}\}$ – базис $U_i(\lambda)$

$\{v_j^{(i+1)}\}$ – относительный базис $U_{i+1}(\lambda)$ относительно $U_i(\lambda)$

Повторение: Инвариантное подпространство: V – векторное пространство

$\exists W \subset E \Rightarrow \exists T : V \rightarrow V \Rightarrow T(W) \subset W \Rightarrow$ инв.

Покажем, что пространство, порожденное векторами из 1го столбца , инвариантно

$$\begin{array}{lcl}
 j : & \begin{array}{c|c} v_{k_{i+1}} & \\ \hline v_j^{(i)} & \\ \vdots & \\ v_j^{(1)} & \end{array} & \begin{array}{l} k_{i+1} < j \leq k_j \\ \\ (\varphi - \lambda \text{id})v_j^{(k)} = v_j^{(k-1)} \\ \\ (\varphi - \lambda \text{id})v_j^{(1)} = 0 \end{array}
 \end{array}$$

$$k\varphi(v_j^{(k)}) = \lambda\varphi_j^{(k)} + v_j^{(k-1)} \quad k \geq 2$$

$$\varphi(v_j^{(1)}) = \lambda v_j^{(1)} \quad k \geq 1$$

$$\langle v_j^{(i), \dots, v_j^{(1)}} \rangle$$

φ – инвариантно

$$V = \sum_j \langle v_j^{(i)}, \dots, v_j^{(1)} \rangle = \bigoplus_j \langle v_j^{(i)}, \dots, v_j^{(1)} \rangle$$

V раскладывается в \bigoplus инвариантных подпространств с выбранным базисом

Клетка в $[\varphi]$, отвечающая j -му столбцу диаграммы:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \lambda & 0 \\ 0 & & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} - \text{единственная жорданова клетка}$$

Замечание.

Сколько клеток для λ ? – сколько векторов на нижнем уровне = размерность пространства собственных векторов – геометрическая кратность $\lambda = \dim U_1(\lambda)$

Размер максимальной клетки = наименьшее m т. ч.:

$$U_m(\lambda) = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i(\lambda) = U_a(\lambda)$$

a – алгебраическая кратность λ

Суммарный размер клеток = $\dim U_m(\lambda)$ = алгебраическая кратность

Замечание. Лучше снизу вверх, чем наоборот

Мы пытаемся найти $(\varphi - \lambda \text{id}) \boxed{v_j^{(2)}} = v_j^{(1)}$ $\boxed{*}$

и уже знаем: $v_1^{(1)}, \dots, v_{k_1}^{(1)}$ – базис $U_1(\lambda)$

Но $\boxed{*}$ не всегда разрешимо

Теорема 1 (о попарном разложении).

$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)^{a_i}$, λ_i – попарно разл.

$$V = \bigoplus_{i=1}^n U_{a_i}(\lambda_i)$$

§ Единственность жордановой формы

$[\varphi]$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_s}(\lambda_1) \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} J_{l_1}(\lambda_2) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{l_r}(\lambda_2) \end{matrix}} & & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$A - \lambda I$: если λ не совпадает с λ_i в текущем блоке, на диагонали ненулевые элементы \Rightarrow обратим (ранг = размеру)

A для совпадающего:

$$n - \text{rank}(A - \lambda I) = \text{колич. клеток, ответ. с. ч. } \lambda =$$

$$= \text{размерность пространства решений } (A - \lambda I)x = 0 = \dim U_1(\lambda)$$

(ранг = размер - 1)

Фиксируем λ

в жордановой форме:

d_1 – клеток размера 1

d_2 – клеток размера 2

...

d_m – клеток размера m

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = \dim U_1(\lambda)$$

$$\dim U_2(\lambda) = \dim \{x : (A - \lambda I)^2 x = 0\} = n - \text{rank}(A - \lambda I)^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 1 & & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_1 + 2d_2 + \dots + 2d_m = \dim U_2(\lambda)$$

$$d_1 + 2d_2 + \dots + id_i + \dots + id_m = \dim U_i(\lambda)$$

$$d_{i+1} + \dots + d_m = \dim U_{i+1}(\lambda) - \dim U_i(\lambda)$$

$$d_i + d_{i+1} + \dots + d_m = \dim U_i(\lambda) - \dim U_{i-1}(\lambda)$$

$$d_i = 2 \dim U_i(\lambda) - \dim U_{i-1}(\lambda) - \dim U_{i+1}(\lambda)$$

Размерность корневого пространства от выбора базиса никак не зависит

$$d_1 = 2 \dim U_1(\lambda) - \dim U_2(\lambda) - 0$$

$$i = m : 2 \dim U_m(\lambda) - \dim U_{m-1}(\lambda) - \underbrace{\dim U_{m+1}(\lambda)}_{=\dim U_m(\lambda)} = \dim U_m(\lambda) - \dim U_{m-1}(\lambda) =$$

$$= \sum_{k_1, \dots, k_p \in \{1, \dots, n\}, k_i \neq k_j, i \neq j} A_{k_1 h_1} \dots A_{k_p h_p} f_{k_1} \wedge \dots \wedge f_{k_p} =$$

$$\sum_{k=(k_1, \dots, k_p), 1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} \sum_{\pi} A_{k_1 h_1} \dots A_{k_p h_p} \text{sign } \pi f_k$$