Математический анализ

3 октября 2022

Характеристическая функция множества

Определение. *Характеристическая функция множества*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Лемма 12. $\{$*Точки разрыва* $\chi_E(x)\} = \delta E$

Доказательство. $x \in \operatorname{Int} E \cup \operatorname{Ext} E$

На внутренних точках $\lim \chi_E(x) = 1 = \chi_E(x)$

На внешних точках $\lim \chi_E(x) = 0 = \chi_E(x)$

На границе разрывна - очев

$\square$

Определение. $E \in \Pi$, Π - *п/п,* $f : E \to \mathbb{R}$ - *ограничена*

$$\int\limits_E f = \int\limits_\Pi f \cdot \chi_E$$

$$\tilde{f} = f \cdot \chi_E(x)$$

Лемма 13. $\mu(\delta E) = 0$*,* $f : E \to \mathbb{R}$ - *почти везде непрерывна на* E

$$\textit{Тогда } \exists \int\limits_E f$$

Доказательство. Необходимо доказать, что $\exists \int\limits_\Pi \tilde{f}$

$\{$Точки разрыва $\tilde{f}$ на $\Pi\} = \{$Точки разрыва $\tilde{f}$ на $\operatorname{Int} E\} \cup \{$Точки разрыва $\tilde{f}$ на $\delta E\} \cup \underbrace{\{\text{Точки разрыва } \tilde{f} \text{ на } \operatorname{Ext} E\}}_{\emptyset}$

$\{$Точки разрыва $\tilde{f}$ на $\Pi\} \subset \{$Точки разрыва f на $\operatorname{Int} E\} \cup \delta E$

$\mu(\{$Точки разрыва $\tilde{f}$ на $\Pi\}) = 0$ - по критерию Лебега существует интеграл $\square$

Определение. E - *ограничено,* $\mu(\delta E) = 0$

$\exists \Pi \in \mathbb{R}^n$ - *п/п:* $E \in \Pi$

$$\upsilon(E) = \int\limits_E 1 = \int\limits_\Pi \chi_E(x) \text{- } \textit{Жорданов объём}$$

Теорема Фубини

Теорема 1. *Теорема Фубини*

Пусть $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2, \Pi_1 \in \mathbb{R}^n, \Pi_2 \in \mathbb{R}^m, f : \Pi \to \mathbb{R} -$ *ограничена*

$$L_1(x) = \underline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy$$

$$U_1(x) = \overline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy$$

$$\textit{Если} \ \ \exists \int\limits_{\Pi} f, \textit{то} \ \ \exists \int\limits_{\Pi_1} L_1, \int\limits_{\Pi_1} U_1 \ \textit{и они равны}$$

$$\int\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\Pi_1} L_1(x)dx = \int\limits_{\Pi_1} U_1(x)dx$$

$$\int\limits_{\Pi_1} dx(\underline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy) = \int\limits_{\Pi_1} dx(\overline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy)$$

Доказательство. Пусть P_1 - разбиение Π_1, P_2 - разбиение Π_2

$$P = P_1 \times P_2 \text{ - разбиение } \Pi$$

$$P = \{\pi_1 \times \pi_2 | \pi_1 \in P_1, \pi_2 \in P_2\}$$

$$L(f,P) = \sum_{\pi \in P} inf_{\pi} f \cdot v(\pi) = \sum_{\pi_1 \in P_1 \pi_2 \in P_2} inf_{\pi_1 \times \pi_2} f \cdot v(\pi_1) \cdot v(\pi_2) = \sum_{\pi_1 \in P_1} \left[\sum_{\pi_2 \in P_2} inf_{\pi_1 \times \pi_2} f \cdot v(\pi_1) \right] \cdot v(\pi_2)$$

$$\forall x \in \pi_1 : inf_{\pi_1 \times \pi_2} \le inf_{y \in \pi_2} f(x,y)$$

$$\sum_{\pi_2 \in P_2} inf_{\pi_1 \times \pi_2} f \cdot v(\pi_2) \le \sum_{\pi_2 \in P_2} inf_{y \in \pi_2} f(x,y) \cdot v(\pi_2) = L(f(x,\cdot), P_2) \le L_1(x) - L_1 \text{ - sup таких сумм}$$

$$\sum_{\pi_2 \in P_2} inf_{\pi_1 \times \pi_2} f \cdot v(\pi_2) \le inf_{\pi_1} L_1(x) = m_{\pi_1} L_1$$

$$L(f,P) \le \sum_{\pi_1 \in P_1} m_{\pi_1} L_1 \cdot v(\pi_1) = L(L_1, P_1)$$

$$U(f,P) \ge U(U_1,P) - \text{ аналогично}$$

$$L(f,P) \le L(L_1,P_1) \le U(L_1,P_1) \le U(U_1,P_1) \le U(f,P)(*)$$

$$L(f,P) \le L(L_1,P_1) \le L(U_1,P_1) \le U(U_1,P_1) \le U(f,P)(**)$$

$$\exists \int_{\Pi} f \Rightarrow sup_P L(f,P) = inf_P U(f,P)$$

$$sup_{P_1} L(L_1, P_1) \le inf_{P_1} U(L_1, P_1) - \text{Всегда}$$

$$(*)\text{: } inf_{P_1} U(L_1, P_1) \le inf_P U(f,P)$$

$$(*)\text{: } sup_P L(f,P) \le sup_{P_1} L(L_1, P_1)$$

$$sup_P L(f,P) \le sup_{P_1} L(L_1, P_1) \le inf_{P_1} U(L_1, P_1) \le inf_P U(f,P) - \text{ из равенства 1 и 4 всюду равенство}$$

$$sup_{P_1} L(L_1, P_1) = inf_{P_1} U(L_1, P_1)$$

$$\exists \int_{\Pi_1} L_1 = \int_{\Pi} f$$

$$sup_{P_1} L(U_1, P_1) \le inf_{P_1} U(U_1, P_1) - \text{Всегда}$$

$$(**)\text{: } inf_{P_1} U(U_1, P_1) \le inf_P U(f,P)$$

$$(**)\text{: } sup_P L(f,P) \le sup_{P_1} L(U_1, P_1)$$

$$sup_P L(f,P) \le sup_{P_1} L(U_1, P_1) \le inf_{P_1} U(U_1, P_1) \le inf_P U(f,P) - \text{ из равенства 1 и 4 всюду равенство}$$

$$sup_{P_1} L(U_1, P_1) = inf_{P_1} U(U_1, P_1)$$

$$\exists \int_{\Pi_1} U_1 = \int_{\Pi} f$$

$\square$