Математический анализ

12 сентября 2022

Следствие 1. *(th. о локальном обращении)*

$D \subset \mathbb{R}^n$, открыто, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $f'(x)$ обратима при $\forall x \in D$

Тогда для $\forall$ открытого $G \subset D \quad f(G)$ открыто

Доказательство. Докажем сначала для $G = D$

$$\forall y \in f(D) \quad f^{-1}(y) := x \quad f(x) \text{ обр.},$$

$$\exists U \text{ крестность } x : f(U) \text{ открыто}$$

$$y \in f(U) \subset f(D)$$

$$\Rightarrow f(U) \text{ - окр-ть } y$$

$$\text{т. о. } f(D) \text{ открыто}$$

Пусть $G \subset D$, открыто. Рассмотрим $f\big|_G \Rightarrow$

$\Rightarrow$ принимая доказанное $\Rightarrow$

$f\big|_G(G) = f(G)$ – открыто □

f – биекция

образ $\forall$ открытого множества открыт $\quad f$ – окрытое отображение

прообраз $\forall$ открытого множества открыт, $\quad f$ – непрерывное отображение

Определение. *Если и то, и другое, то f – гомеоформизм*

$f : U \to V$

$f^{-1} \in C(V, U)$

$f \in C(U, V)$

Определение. *Если $f : U \to V$ – биекция, $f \in C^r(U, V)$,*

$f^{-1} \in C^r(V, U)$, то f – диффеоморфизм гладкости $r \in [0, \infty]$

Неявно заданные отображения

$D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, открытое $\quad \Phi \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$

$D \ni a = (x, y)$, задана $\quad \Phi(x, y) = 0$

$$\Phi'(a) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial y_n} \end{array} \right)$$

$\Phi'(a)(h,k) = \Phi'_x(a)h + \Phi'_y(a)k$

Ищем такую $y = \varphi(k)$, что $\Phi(x, \varphi(x)) = 0$

Пример 1. $x^2 + y^2 = 1 \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

$\Phi(x,y) = x^2 + y^2 + 1$

$\Phi'(x,y) = (2x \ 2y)$

$\Phi'_x = 2x$

$\Phi'_y = 2y$

Пример 2. $\Phi(x,y) = Ax + By \quad B$ – *квадратная*

B *обратима* $\Leftrightarrow$ *уравнение разрешимо*

$$\Phi'_x = A \quad \Phi'_y = B$$

$$\underbrace{\Phi(x,y)}_{=0} = \underbrace{\Phi(x_0,y_0)}_{=0} + \Phi'(x_0,y_0)(x - x_0) +$$

$$+ \Phi'_y(x_0,y_0)(y - y_0) + o(x - x_0, y - y_x), \quad x \to 0 \ y \to 0$$

$\Phi'_y(x_0,y_0)$ – *обратима*

Теорема 1. $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, *открыто,* $\Phi \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$

$\Phi(x_0,y_0) = 0 \ (x_0,y_0) \in D, \ \Phi'_y(x_0,y_0)$ – *обратимо. Тогда*

$\exists U$ – *окр.* x_0, V – *окр.* y_0, $U \times V \subset D$

1. $\forall x \in U \ \exists! y \in V : \Phi(x,y) = 0$

   (это задает отображение $\varphi : U \to V, \ y = \varphi(x)$*)*

2. $\varphi \in C^1(U,V), \ \forall x \in U, y \in V \quad \Phi'_y(x, \varphi(x))$ *обратимо*

3. $\varphi'(x) = -(\Phi_y(x,\varphi(x)))^{-1}\Phi'_x(x,\varphi(x)) = -(\Phi'_y(x,\varphi(x)))^{-1}\Phi_x(x,\varphi(x))$

Доказательство.

1. $F(x,y) = (x, \Phi(x,y)) : D \to \mathbb{R}^{n+m}$

$$F'(x,y) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \Phi'_x(x,y) & \Phi'_y(x,y) \end{array}\right)$$

$$F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n+m})$$

$$\det F'(x,y) = \det \Phi'_y(x,y)$$

$$\Phi'_y(x_0,y_0) \text{ обратимо} \Rightarrow F'(x_0,y_0) \text{ обратимо}$$

Th. о локальном обращении

$\exists \hat{U}$ – окрестность $(x_0, y_0) : F(\hat{U}) = \hat{V}$ открытое,

$F\big|_{\hat{U}}$ – биекция, $F^{-1} \in C^1(\hat{V}, \hat{U}),\ F(x_0, y_0) = (x_0, 0)$

$\exists \delta > 0\ \hat{\hat{U}} = B^n_\delta(x_0) \times B^m_\delta(y_0) \subset \hat{U}$

$\hat{\hat{U}} \subset B^{n+m}_{\sqrt{2}\delta} \subset \hat{U}, \quad n,\ m$ – размерности

Тогда $F(\hat{\hat{U}}) \subset F(\hat{U}) = \hat{V}$

$(x_0, 0) \in F(\hat{\hat{U}}) \subset \hat{V}$

$\exists \varepsilon > 0 : B^{n+m}_\varepsilon(x_0, 0) \subset F(\hat{\hat{U}})$ - так как $\hat{V}$ открыто

$\underbrace{B^n_\varepsilon(x_0)}_{=\hat{\hat{V}}} \times \{0\} \subset F(\hat{\hat{U}})$

$\forall x \in \hat{\hat{V}} \quad F^{-1}(x, 0) =: (x_1, y)$

Это означает

$$(x_1, \Phi(x, y)) = F(x_1, y) = (x, 0)$$

$\Rightarrow x_1 = x,\ \Phi(x, y) = 0 \quad$ (отсюда следует $\varepsilon < \delta$)

$$\forall x \in \underbrace{B^n_\varepsilon(x_0)}_{=U}\ \exists y \in \underbrace{B^n_\delta(y_0)}_{=V} : \Phi(x, y) = 0$$

Если $\exists x \in U, y_1, y_2 \in V : \Phi(x, y_1) = \Phi(x, y_2) = 0$

то $F(x, y_1) = (x, 0) = F(x, y_2)$

F биект. и $\hat{\hat{U}} \Rightarrow y_1 = y_2$

2. $y = \pi_2(x, y) = \pi_2 \circ F^{-1}(x, 0)$

   $\pi_2 : (x, y) \mapsto y \in C^1(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^m)$

   $F^{-1} \in C^1(\hat{V}, \hat{U})$

   $E : x \mapsto (x, 0) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+m}) \quad EU = U \times \{0\} \subset \hat{V}$

3. $\Phi(x, \varphi(x)) = 0$

   $0 = \Phi'(x, \varphi(x))$

   $$\Phi'(x, \varphi(x)) = \begin{pmatrix} I \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} = \Phi'(x, \varphi(x)) + \underbrace{\Phi'_y(x, \varphi(x))}_{\text{обр.}} - \varphi'(x)$$

$\square$