

Математический анализ

12 сентября 2022

Следствие 1. (th. о производной обратной функции)

$D \subset \mathbb{R}^n$, открыто, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $f'(x)$ обратима при $\forall x \in D$

Тогда для \forall открытого $G \subset D$ $f(G)$ открыто

Доказательство. Докажем сначала для $G = D$

$$\forall y \in f(D) \quad f^{-1}(y) := x \quad f(x) \text{ обр.},$$

$\exists U$ окрестность $x : f(U)$ открыто

$$y \in f(U) \subset f(D)$$

$\Rightarrow f(U)$ - окр-ть y

т. о. $f(D)$ открыто

Пусть $G \subset D$, открыто. Рассмотрим $f|_G \Rightarrow$

\Rightarrow принимая доказанное \Rightarrow

$f|_G(G) = f(G)$ - открыто

□

f - биекция

образ \forall открытого множества открыт f - открытое отображение

прообраз \forall открытого множества открыт, f - непрерывное отображение

Определение. Если и то, и другое, то f - гомеоморфизм

$$f : U \rightarrow V$$

$$f^{-1} \in C(V, U)$$

$$f \in C(U, V)$$

Определение. Если $f : U \rightarrow V$ - биекция, $f \in C^r(U, V)$,

$f^{-1} \in C^r(V, U)$, то f - диффеоморфизм гладкости $r \in [0, \infty]$

Неявно заданные отображения

$D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, открытое $\Phi \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$

$D \ni a = (x, y)$, задана $\Phi(x, y) = 0$

$$\Phi'(a) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} & \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_m} \end{array} \right)$$

$$\Phi'(a)(h, k) = \Phi'_x(a)h + \Phi'_y(a)k$$

Ищем такую $y = \varphi(k)$, что $\Phi(x, \varphi(x)) = 0$

Пример 1. $x^2 + y^2 = 1 \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\Phi'(x, y) = (2x \ 2y)$$

$$\Phi'_x = 2x$$

$$\Phi'_y = 2y$$

Пример 2. $\Phi(x, y) = Ax + By \quad B - \text{квадратная}$

B обратима \Leftrightarrow уравнение разрешимо

$$\Phi'_x = A \quad \Phi'_y = B$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\Phi(x, y)}_{=0} &= \underbrace{\Phi(x_0, y_0)}_{=0} + \Phi'(x_0, y_0)(x - x_0) + \\ &+ \Phi'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(x - x_0, y - y_0), \quad x \rightarrow 0 \ y \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\Phi'_y(x_0, y_0) - \text{обратима}$

Теорема 1. $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, открыто, $\Phi \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$

$\Phi(x_0, y_0) = 0 \ (x_0, y_0) \in D$, $\Phi'_y(x_0, y_0) - \text{обратимо}$. Тогда

$\exists U - \text{окр. } x_0, V - \text{окр. } y_0, U \times V \subset D$

1. $\forall x \in U \ \exists! y \in V : \Phi(x, y) = 0$

(это задает отображение $\varphi : U \rightarrow V, y = \varphi(x)$)

2. $\varphi \in C^1(U, V), \forall x \in U, y \in V \quad \Phi'_y(x, \varphi(x)) \text{ обратимо}$

3. $\varphi'(x) = -(\Phi'_y(x, \varphi(x)))^{-1} \Phi'_x(x, \varphi(x))$

Доказательство.

1. $F(x, y) = (x, \Phi(x, y)) : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$

$$F'(x, y) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \Phi'_x(x, y) & \Phi'_y(x, y) \end{array} \right)$$

$$F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n+m})$$

$$\det F'(x, y) = \det \Phi'_y(x, y)$$

$$\Phi'_y(x_0, y_0) \text{ обратимо} \Rightarrow F'(x_0, y_0) \text{ обратимо}$$

Th. о локальном обращении

$\exists \hat{U}$ – окрестность $(x_0, y_0) : F(\hat{U}) = \hat{V}$ открытое,

$F|_{\hat{U}}$ – биекция, $F^{-1} \in C^1(\hat{V}, \hat{U})$, $F(x_0, y_0) = (x_0, 0)$

$\exists \delta > 0 \quad \hat{\hat{U}} = B_\delta^n(x_0) \times B_\delta^m(y_0) \subset \hat{U}$

$\hat{\hat{U}} \subset B_{\sqrt{2}\delta}^{n+m}(x_0, y_0) \subset \hat{U}$, n, m – размерности

Тогда $F(\hat{\hat{U}}) \subset F(\hat{U}) = \hat{V}$

$(x_0, 0) \in F(\hat{\hat{U}}) \subset \hat{V}$

$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon^{n+m}(x_0, 0) \subset F(\hat{\hat{U}})$ – так как $\hat{\hat{U}}$ открыто

$\underbrace{B_\varepsilon^n(x_0) \times \{0\}}_{=\hat{\hat{V}}} \subset F(\hat{\hat{U}})$

$\forall x \in \hat{\hat{V}} \quad F^{-1}(x, 0) =: (x_1, y)$

Это означает

$$(x_1, \Phi(x, y)) = F(x_1, y) = (x, 0)$$

$\Rightarrow x_1 = x, \Phi(x, y) = 0$ (отсюда следует $\varepsilon < \delta$)

$$\forall x \in \underbrace{B_\varepsilon^n(x_0)}_{=U} \quad \exists y \in \underbrace{B_\delta^m(y_0)}_{=V} : \Phi(x, y) = 0$$

Если $\exists x \in U, y_1, y_2 \in V : \Phi(x, y_1) = \Phi(x, y_2) = 0$

то $F(x, y_1) = (x, 0) = F(x, y_2)$

F биект. и $\hat{\hat{U}} \Rightarrow y_1 = y_2$

2. $\varphi = \pi_2(x, y) = \pi_2 \circ F^{-1}(x, 0) = \pi_2 \circ F^{-1} \circ E(x)$

$\pi_2 : (x, y) \mapsto y \in C^1(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^m)$

$F^{-1} \in C^1(\hat{V}, \hat{U})$

$E : x \mapsto (x, 0) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+m}) \quad E(U) = U \times \{0\} \subset \hat{V}$

3. $\Phi(x, \varphi(x)) = 0$

$0 = \Phi'(x, \varphi(x))$

$\Phi'(x, \varphi(x)) = \Phi'(x, \varphi(x)) + \underbrace{\Phi'_y(x, \varphi(x))}_{\text{обр.}} \cdot \varphi'(x)$

□