Математический анализ

5 декабря 2022

$U \subset \mathbb{R}^m = L_m$, $v \subset \mathbb{R}^n = L_n$ – откр.

$\Phi \in C^\infty(U, V)$

$\Phi'(x) : L_m \to L_n$

$(\Phi'(x))^* : L_m^* \to L_n^*$

$\Lambda^p(\Phi'(x))^* : \Lambda^p L_n^* \to \Lambda^p L_m^*$

$\Phi^*(a(y)dy^H) = (a \circ \Phi)(x)\Lambda^p(\Phi'(x))^*(dy^H)$, $p = \deg H$

$$\Phi'(x)e_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x^i} f_j = \sum_{j=1}^{n} (\Phi'(x))_{ij} f - j$$

$$(\Phi'(x))^* \underbrace{f^{*j}}_{dy^j} = \sum_{i=1}^{m} (\Phi'(x))^*_{ij} e_i^* = \sum_{i=1}^{m} (\Phi'(x))_{ij} e_i^* = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x^i}(x)(e^*)^i$$

$$\Phi^*(dy^j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x) dx^i$$

Пример.

1. $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \Phi : t \mapsto (t^2, t^3)$

   $\omega x dy \in F^1(\mathbb{R}^2)$

   $\Phi^*(\omega) = t^2 3t^2 dt = 3t^4 dt \in F^1(\mathbb{R})$

2. $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \Phi : (x, y) \to x - y$

   $\omega = dt \in F^1(\mathbb{R})$

   $\varphi^*(\omega) = dx - dy \in F^1(\mathbb{R})^2$

3. $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *откр.т* $\Phi \in C^\infty(U, V)$

   $\Phi^*(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = \det \Phi'(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$

   $\Phi^* d\omega = d\Phi^* \omega$

Лемма Пуанкаре

Пример 1. $U \subset \mathbb{R}^3 \quad F = (p, q, r) \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \quad G = \operatorname{rot} F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$

$$d(pdx + qdy + rdz) = G_1 dy \wedge dz + G_2 dz \wedge dx + G_3 dx \wedge dy$$

$$0 = d(d(pdx + qdy + rdz)) = \underbrace{\operatorname{div} G}_{=0} dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$$

Пример 2. $f \in C^\infty(U) \quad H = \operatorname{grad} f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$

$$df = H_1 dx + H_2 dy + H_3 dz$$

$$0 = d(df) = (\operatorname{rot} H)_1 dy \wedge dz + (\operatorname{rot} H)_2 dz \wedge dx + (\operatorname{rot} H)_3 dx \wedge dy$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} H \equiv 0 \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$$

Пример 3. $U \subset \mathbb{R}^n,\ V = \mathbb{R} \times U,\ t_0 \in \mathbb{R}$

$\Phi(x) = (t_0, x)$

$\Phi \in C^\infty(U, V)$

$\Phi^*(dt) = 0$

$\Phi^*(dx^i) = dx^i$

$$\Phi^*(a(t,x)dt + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)dx^i) = \sum_{i=1}^n b_i(t_0,x)dx^i$$

$U \subset \mathbb{R}^n,\ V = \mathbb{R} \times U$

$j_1 : U \to V \quad j_1(x) = (1, x)$

$j_0 : U \to V \quad j_0(x) = (0, x)$

$\omega \in F^p(V)$

$$K : F(V) \to F(U)$$

$$K(a(t,x)dx^H) = 0$$

$$K(b(t,x)dt \wedge dx^H) = \left(\int_0^1 b(t,x)dt \right) dx^H$$

Лемма 12. $K(d\omega) + d(K\omega) = j_1^*\omega - j_0^*\omega, \quad \forall \omega \in F(V)$

Доказательство.

$\omega = a(t,x)dx^H$

$$d\omega = \frac{\partial a}{\partial t} dt \wedge dx^H + \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^H$$

$$K(d\omega) = \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}(t,x)dt \right) dx^H \boxed{=}$$

$$d(K\omega) = 0$$

$$\boxed{=} a(1,x)dx^H - a(0,x)dx^H = j_1^*\omega - j_0^*\omega$$

$\omega = a(t,x)dt \wedge dx^H$

$j_1^*\omega = j_0^*\omega = 0$

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i \wedge dt \wedge dx^H$$

$$K(d\omega) = -\int_0^1 \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^i}(t,)dt\ dx^i \wedge dx^H$$

$$K\omega = \left(\int_0^1 a(t,x)dt\right) dx^H$$

$$dK\omega = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i}(t,x)dt\right) dx^i \wedge dx^H$$

$$K(d\omega) + d(K\omega) = 0 = j_0^* - j_0^*$$

□

Области, стягиваемые в точку

$E \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C([0,1], E)$ – путь из $x_0 = \gamma(0)$ в $x_1 = \gamma(1)$

Определение. *$E \subset \mathbb{R}^n$ линейно связное, если*

$$\forall x_1, x_2 \in E\ \exists \textit{путь из } x_1 \textit{ в } x_2$$

Определение. *γ_0 и γ_1 – два пути*

γ_0 можно непрерывно продеформировать в γ_1, если

$$\exists \Phi \in C([0,1]^2, E)$$

$\Phi(0,t) = \gamma_0(t)$
$\Phi(1,t) = \gamma_1(t)$
$\Phi(\alpha,t) = \gamma_\alpha(t)$

Определение. *D область, если D открытое и линейно связно*

Определение. *Область D односвязна, если*

$$\forall x_1,\ x_2\ \forall \gamma_0,\ \gamma_1 \textit{ соед. } x_1, x_2$$

можно непрерывно продеформировать γ_0 в γ_1

Определение. *Область D стягивается в точку, если*

$$\exists x_0 \in D \textit{ и } \Phi \in C([0,1] \times D, D)$$

$\Phi(0,x) \equiv x_0$
$\Phi(1,x) = x$
$\mathbb{R}^n : \Phi(\alpha,x) = \alpha x$
$\mathbb{R}^2 : D$ *стягивается* $\Leftrightarrow$ *односвязна*

Лемма (Пуанкаре)**.** *Пусть U – область, стягиваемая в точку*
ω *– замкнутая дифф. форма* $\Rightarrow$ *точная*

Доказательство.
$V = \mathbb{R} \times U$, $\Phi : [0,1] \times U \to U$
$j_0,\ j_1 : \mathbb{R} \times U \to U$
$K : F(V) \to F(U)$
$\omega \in F^p(U)$
$\Phi^*\omega \in F^p(V)$

$$K(\underbrace{d\Phi^*\omega}_{=\Phi^* d\omega = 0}) + d(K\Phi^*\omega) = j_1^*\Phi^*\omega - j_0^*\Phi^*\omega = (\Phi j_1)^*\omega - (\Phi j_0^*)\omega = \omega$$

$$x \overset{j_1}{\mapsto} (1,x) \overset{\Phi}{\mapsto} x$$

$$x \overset{j_0}{\mapsto} (0,x) \mapsto x_0$$

$$d(\underbrace{K\Phi^*\omega}_{=\alpha}) = \omega$$

□

Векторный потенциал

$F = (a,b,c)$
$\operatorname{div} F \equiv 0$
$\exists \underbrace{G}_{=(p,q,r)} : F = \operatorname{rot} G$

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} = a \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x} = b \\ \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = c \end{cases}$$

$$\omega = a dy \wedge dz + b dz \wedge dx + c dx \wedge dy$$

$\operatorname{div} F = 0 \Leftrightarrow d\omega = 0$

$$\alpha = K\Phi^*\omega = p dx + q dy + r dz \quad \omega = d\alpha$$

$$\Phi(t,x,y,z) = (tx,ty,tz)$$

$$\Phi^*\omega = a(tx,ty,tz)(ydt+tdy)\wedge(tdz+zdt)+$$

$$+b(tx,ty,tz)(zdt+tdz)\wedge(xdt+tdx)+$$

$$+c(tx,ty,tz)(tdx+xdt)\wedge(tdy+ydt)$$

$$K\Phi^*\omega = (\underbrace{\int_0^1 (a(tx,ty,tz)-b(tx,ty,tz))dt}_{=r(x,y,z)})dz + \int_0^1(\dots) + \int_0^1(\dots)$$

Многообразия

Определение. $(X,\tau)\quad \tau\subset 2^X,\quad (\tau$ *откр.*$)$ – *топологическое пространство, если:*

1. $\emptyset,\ X\in T$
2. $U_\alpha\in\tau,\ \forall\alpha\Rightarrow\bigcup_\alpha U_\alpha\in\tau$
3. $U_i\in\tau,\ i=1,\dots,n\Rightarrow\bigcap_{i=1}^n U_i\in\tau$

Определение. $\forall x_1,\ x_2\in X,\ x_1\neq x_2\ \exists u_1,\ u_2\in\tau$*:*

1. $x_1\in U_1$
2. $x_2\in U_2$
3. $U_1\cap U_2\neq\emptyset$

Тогда X *– хаусдорфово т. п.*

Определение. (X,τ_x), (Y,τ_y) *топологические пространства*
$\varphi : X\to Y$
$\varphi\in C(X,Y)$*, если* $\forall V\in\tau_y\ \varphi^{-1}\in\tau_x$

Определение. $\varphi\in C(X,Y)$*, биекция,* $\varphi^{-1}\in C(Y,X)$ *– гомеоморфизм*

Определение. $\varphi\in C(X,Y)$*. Если* φ *– гомеоморфизм* X *и* φ*, то phi – вложение* X *в* Y

Определение. *Хаусдорфово топологическое пространство* M *называется многообразием размерности* n*, если*
$\exists$ *конечная или счестная система открытых множеств*

$$U_i(\in\tau_M)\quad M=\bigcup_i U_i$$

φ_i *– вложение* U_i *в* $\mathbb{R}^n$
$\varphi_i(U_i)$ *открыто*

Определение. *Топологическое многообразие M называется гладким класса C^r, елси*

$$\forall i,\ j : U_i \cap U_j \neq \emptyset$$

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

– диффеоморфизм класса C^r

Замечание. *Можно считать, что $\varphi_i(u_i) = B_1(0)$*

Определение. *M – многообразие с краем, если*

$$\varphi_i(u_i) = \begin{cases} B_1(0) \\ B_1^+(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1, x_1 \geq 0\} \end{cases}$$

$$\delta M = \{x \in M : \exists t\ x \in u_i,\ \varphi_i(u_i) = B_1^+(0)\}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad \gamma([0, 1])$$

ДЖЕЙКАБЕАААННАНАНААН xDDDDDDD