

Математический анализ

zimch

4 октября 2022 г.

Повторение

Линейные и нормированные пространства

L – линейное пространство

$\|\cdot\|$ – норма

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), x \in L$$

Нормированное пространство

$$\begin{aligned} \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \\ \|x\| = 0 &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Замечание. Норма всегда порождает метрику (нормированное \Rightarrow метрическое).

Замечание. \forall конечномерное пространство полное.

Определение. Полное нормированное пространство \Leftrightarrow банахово.

Пример 1. Неполное нормированное пространство:

$$C([0; 1]), \quad \|f\|_< = \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x) dx \rightarrow 0 \quad \exists N : n > N < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - f_n(x)) dx \rightarrow 0 \quad \exists N : n > N < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon \exists N \forall n, m > N \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx < \varepsilon$$

$$L(0, 1) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \int_0^1 |f_n(x)| dx < \infty\}$$

Линейные операторы

Определение. Линейный оператор

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad A : L \rightarrow M, \text{ где } M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}, A - \text{функционал(?)}$$

Замечание. Операторы из \mathbb{R}^m в $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$ матрицы $\text{Mat}^{n,m}$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_M}{\|x\|_L}, \quad M, L - \text{нормированные пространства}$$

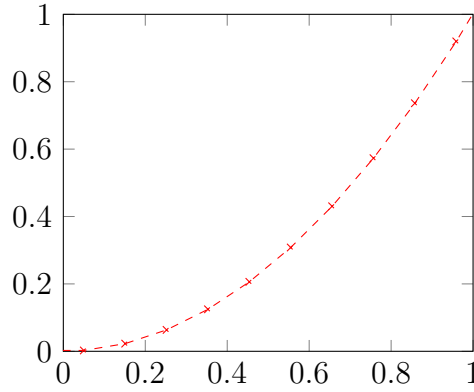
Пример 2. Неограниченный оператор:

$$L = C'([0, 1]), \quad M = C([0, 1]) \quad \|f\| = \sup_{[0,1]} |f|$$

$$\|f\| = \max_{[0,1]} |f|$$

$$(Af)(x) = f'(x)$$

$$f_n(x) = x^n \quad \|f_n\| = 1 \quad \forall n \quad Af_n = f'_n = nx^{n-1} \quad \|Af\| = n$$



$$\frac{\|Af_n\|}{\|f_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Предложение.

$$\|A\| = \sup_{x \in B_1(x) \setminus \{0\}} \|Ax\| = \sup_{a \in S_1(0)} \|Ax\| = \sup_{x \in B_1(0) \setminus \{x\}} = \inf\{c : \|Ax\| \leq c\|x\|\} \quad \forall x \in L$$

$B_r(x) = \{y \in L : \|y - x\| < r\}$ – открытый шар радиуса r

$B_r[x] = \{y \in L : \|y - x\| \leq r\}$ – замкнутый шар радиуса r

$\bar{B}_r(x) \neq B_r[x]$, где $\bar{B}_r(x)$ – замыкание

$S_r(x) = \{y \in L : \|y - x\| = r\}$ – сфера

Предложение. $A \in B(L) \Leftrightarrow A$ непр. в точке $0 \Leftrightarrow A$ непр. в $\forall x \in L \Leftrightarrow A$ равн. непр. на L .

Замечание.

$$\|A_1 \cdot A_2\| \leq \|A_1\| \cdot \|A_2\|$$

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad A \in \text{Mat}^{n,n} \quad \|A\| \leq \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{i,k}^2|}$$

Определение. Матрицы $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ эквивалентны, если $\exists c_1, c_2 > 0$ т. ч.

$$\forall x \in L \quad c_1\|x\| \leq |x| \leq c_2\|x\|$$

$$\text{Тогда } \|A\| \sim \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}| \sim \max_{i,k \in \{1, \dots, n\}} |a_{ik}| \sim \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2}$$

Замечание.

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \exists a \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = (a; x) \quad \|A\|_{B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} = \|a\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \exists a \in \mathbb{R}^n \quad \exists x \in \mathbb{R} : Ax = a \cdot x \quad \|A\|_{B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} = \|a\|_{\mathbb{R}^n}$$

Обратный оператор

$A : L \rightarrow M$ – линейный оператор

1. $\exists A : M \rightarrow L : AB = I_M$ – ед. оператор в пространстве M

$B \Leftrightarrow$ правый обратный

2. $\exists C : M \rightarrow L : CA = I_L$ – ед. оператор в пространстве L

$C \Leftrightarrow$ левый обратный

3. \exists оба и равны, ьл $A^{-1} \Leftrightarrow$ обратный оператор

$A \in \text{Mat}^n : \exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker } A = \{0\} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \text{rank } A = n$

Теорема 1. $A \in B(\mathbb{R}^n), \exists A^{-1}, B \in B(\mathbb{R}^n), \|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

Тогда B обратим,

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\left\|\frac{1}{A^{-1}}\right\| - \|B - A\|}, \|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|B - A\|}{\left\|\frac{1}{A^{-1}}\right\| - \|B - A\|}$$

Доказательство. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Bx\| = \|Ax - (A - B)x\| \geq \|Ax\| - \|(A - B)x\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\| \cdot \|x\| = \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|\right)\|x\|$$

Так как:

$$\|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} \quad x = (A^{-1})(Ax) \quad \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|$$

$$Bx = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{Ker } B = \{0\} \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$\begin{aligned} y = Bx \\ x = B^{-1}y \end{aligned} \quad \|y\| \geq \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|\right)\|B^{-1}y\|, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\left\|\frac{1}{A^{-1}}\right\| - \|B - A\|}$$

$$B^{-1}A^{-1} = B^{-1}(I - BA^{-1}) = B^{-1}(A - B)A^{-1}$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|B - A\|}{\left\|\frac{1}{A^{-1}}\right\| - \|B - A\|}$$

□

Замечание.

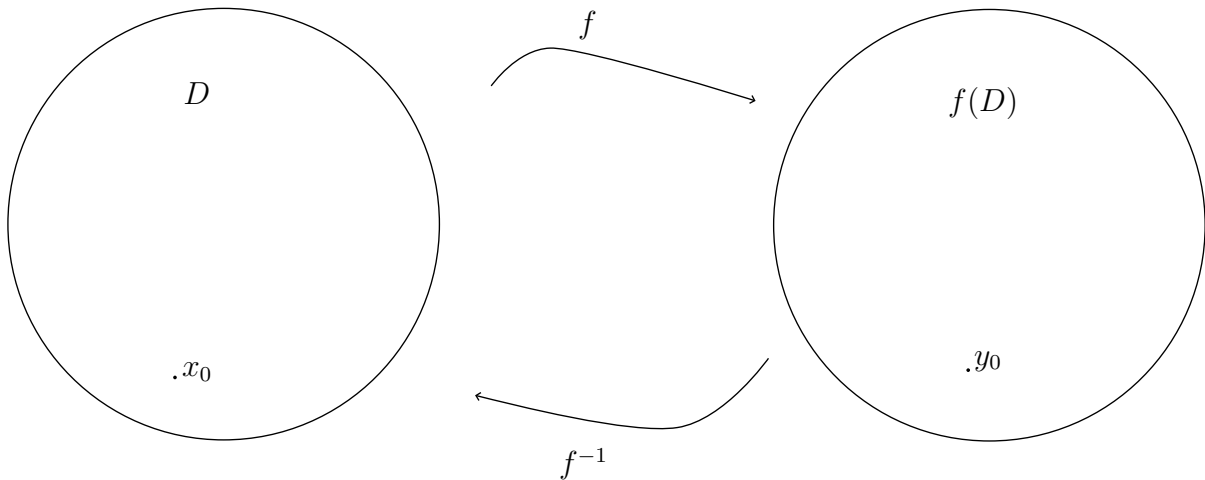
1. Множество операторов открыто

2. Отображение $A \mapsto A^{-1}$ непрерывно

Дифференцирование обратной функции

$$D \subset \mathbb{R}^n \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad x \in \text{Int } D \quad \exists A \in B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Определение. Если $f(x+h) = f(x) + Ah + o(\|h\|)$, $h \rightarrow 0$, тогда говорят A – производная f в точке x .



Рассмотрим $f^{-1} \circ f = \text{id}_D$

Продифференцируем : $(f^{-1})'(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0}) \cdot f'(x_0) = I$

Пусть теперь есть функция на открытом множестве:

D открыто $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ $x_0 \in D$ $f'(D_0)$ обратима

Пример 3.

$$1. f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y - e^x \sin y \\ e^x \sin y + e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$2. n = 1 \quad f \in C^1(D, \mathbb{R})$$

$$f'(x_0) \neq 0$$

$f|_U$ – биекция между U и V

$$\exists (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \begin{matrix} f \in C^1(U, V) \\ f^{-1} \in C^1(V, U) \end{matrix}$$

Теорема 2. $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$

$x_0 \in D$, $f^{-1}(x_0)$ – обратимая матрица

Тогда \exists окрестность x_0 , $U \subset D$