Математический анализ

4 октября 2022 г.

Повторение

Линейные и нормированные пространства

L – линейное пространство

$\|\cdot\|$ – норма $\qquad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), x \in L$

Нормированное пространство $\qquad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

Замечание. *Норма всегда порождает метрику (нормированное $\Rightarrow$ метрическое).*

Замечание. $\forall$ *конечномерное пространство полное.*

Определение. *Полное нормированное пространство $\fallingdotseq$ банохово.*

Пример 1. *Неполное нормированное пространство:*

$$C([0;1]), \quad \|f\|_< = \int_0^1 |f(x)|dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)dx \to 0 \quad \exists N : n > N < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - f_n(x))dx \to 0 \quad \exists N : n > N < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon \ \exists N \ \forall n, m > \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|dx < \varepsilon$$

$$L(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \int_0^1 |f_n(x)|dx < \infty\}$$

Линейные операторы

Определение. *Линейный оператор*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad A : L \to M \quad \text{, где } M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}, A \text{ - функционал(?)}$$

Замечание. *Операторы из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ $\leftrightarrow$ матрицы $\mathrm{Mat}^{n,m}$*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_M}{\|x\|_L}, \quad M, L \text{ - нормированные пространства}$$

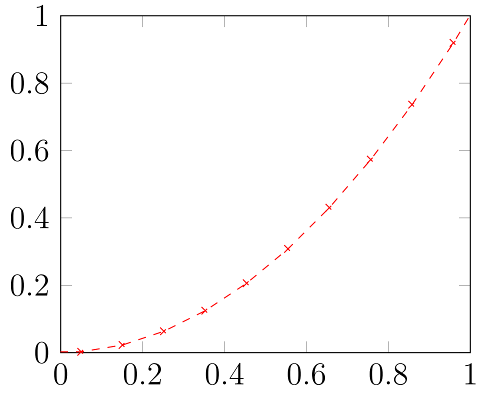
Пример 2. *Неограниченный оператор:*

$$L = C'([0,1]), \quad M = C([0,1]) \quad \|f\| = \sup_{[0,1]} |f|$$

$$\|f\| = \max_{[0,1]} |f|$$

$$(Af)(x) = f'(x)$$

$$f_n(x) = x^n \quad \|f_n\| = 1 \ \forall n \quad Af_n = f_n' = nx^{n-1} \quad \|Af\| = n$$



$$\frac{\|Af_n\|}{\|f_n\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Предложение.

$$\|A\| = \sup_{x \in B_1(x)\setminus\{0\}} \|Ax\| = \sup_{a \in S_1(0)} \|Ax\| = \sup_{x \in B_1(0)\setminus\{x\}} = \inf\{c : \|Ax\| \le c\|x\|\} \quad \forall x \in L$$

$B_r(x) = \{y \in L : \|y - x\| < r\}$ – *открытый шар радиуса* r
$B_r[x] = \{y \in L : \|y - x\| \le r\}$ – *замкнутый шар радиуса* r
$\bar{B}_r(x) \ne B_r[x]$, *где* $\bar{B}_r(x)$ – *замыкание*
$S_r(x) = \{y \in L : \|y - x\| = r\}$ – *сфера*

Предложение. $A \in B(L) \Leftrightarrow A$ *непр. в точке* $0 \Leftrightarrow A$ *непр. в* $\forall x \in L \Leftrightarrow A$ *равн. непр. на* L*.*

Замечание.

$$\|A_1 \cdot A_2\| \le \|A_1\| \cdot \|A_2\|$$

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ A \in \mathrm{Mat}^{n,n} \quad \|A\| \le \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} |a_{i,k}^2|}$$

Определение. *Матрицы* $\|\cdot\|$ *и* $|\cdot|$ *эквивалентны, если* $\exists c_1, c_2 > 0$ *т. ч.*

$$\forall x \in L \ c_1\|x\| \le |x| \le c_2\|x_2\|$$

Тогда $\|A\| \sim \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}| \sim \max_{i,k\in\{1,\dots,n\}} |a_{ik}| \sim \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2}$

Замечание.

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \exists a \in \mathbb{R}^n \ \forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = (a; x) \quad \|A\| \underset{B(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}{=} \|a\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ \exists a \in \mathbb{R}^n \ \exists x \in \mathbb{R} : Ax = a \cdot x \quad \|A\| \underset{B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}{=} \|a\|_{\mathbb{R}^n}$$

Обратный оператор

$A : L \to M$ – линейный оператор

1. $\exists A : M \to L \ : \ AB = I_M$ – ед. оператор в пространстве M
   $B \leftrightharpoons$ правый обратный
2. $\exists C : M \to L \ : \ CA = I_l$ – ед. оператор в пространстве L
   $C \leftrightharpoons$ левый обратный
3. $\exists$ оба и равны, ьл $A^{-1} \leftrightharpoons$ обратный оператор

$A \in \mathrm{Mat}^n : \exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n$

Теорема 1. $A \in B(\mathbb{R}^n), \exists A^{-1}, B \in B(\mathbb{R}^n), \|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$
Тогда B обратим,

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\|\frac{1}{A^{-1}}\| - \|B - A\|}, \|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|B - A\|}{\|\frac{1}{A^{-1}}\| - \|B - A\|}$$

Доказательство. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Bx\| = \|Ax - (A - B)x\| \geq \|Ax\| - \|(B - A)x\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\| \cdot \|x\| = (\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|\|x\|)$$

Так как:

$$\|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} \quad x = (A^{-1})(Ax) \quad \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|$$

$$Bx = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \operatorname{Ker} B = \{0\} \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$\begin{matrix} y = Bx \\ x = B^{-1}y \end{matrix} \quad \|y\| \geq (\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|)\|B^{-1}y\|, \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|}$$

$$B^{-1}A^{-1} = B^{-1}(I - BA^{-1}) = B^{-1}(A - B)A^{-1}$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|B - A\|}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|}$$

□

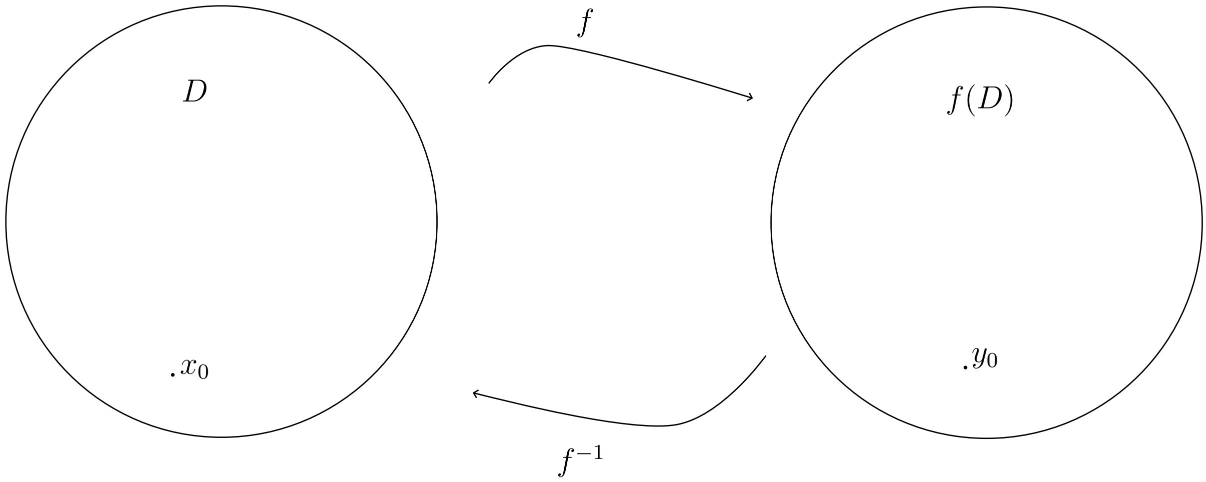
Замечание.

1. *Множество операторов открыто*
2. *Отображение $A \mapsto A^{-1}$ непрерывно*

Дифференцирование обратной функции

$D \subset \mathbb{R}^n \quad f : D \to \mathbb{R}^n \quad x \in \operatorname{Int} D \quad \exists A \in B(\mathbb{R}^n.\mathbb{R})$

Определение. *Если* $f(x+h) = f(x) + Ah + o(\|h\|), \quad h \to 0$, *тогда говорят* A *– производная* f *в точке* x.



Рассмотрим $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$
Продифференцируем : $(f^{-1})'(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0}) \cdot f'(x_0) = I$
Пусть теперь есть функция на открытом множестве:
D открыто $\quad f \in C'(D, \mathbb{R}^n) \quad x_0 \in D \;\; f'(D_0)$ обратима

Пример 3.

1. $f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y - e^x \sin y \\ e^x \sin y + e^x \cos y \end{pmatrix}$$

2. $n = 1 \quad f \in C^1(D, \mathbb{R})$

$f'(x_0) \neq 0$

$f\big|_U$ *– биекция между* U *и* V

$$\exists (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f(f^{-1}(y))} \qquad \begin{matrix} f \in C^1(U,V) \\ f^{-1} \in C^1(V,U) \end{matrix}$$

Теорема 2. $D \subset \mathbb{R}^n$ *открыто,* $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$
$x_0 \in D$, $f^{-1}(x_0)$ *– обратимая матрица*
Тогда $\exists$ *окрестность* x_0, $U \subset D$
$V := f(U)$ *открыто и* $f\big|_U$ *– биекция между* U *и* V, $f^{-1} \in C^1(V,U)$

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_))^{-1}, \; \forall x \in U \quad f'(x_0) \in I$$

Доказательство.

1. Пусть $f'(x_0) = I$. При x, близких к x_0, $f(x) \neq f(x_0)$
$$f'(x) = f(x_0) + (x - x_0)o(\|x - x_0\|)$$
$$\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{x - x_0} = \frac{\|x - x_0\|}{\|x - x_0\|} + o(1),\ x \to x_0$$
$\exists$ окрестность, в которой $\|o(1)\| < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) - f(x_0) \neq 0$

2. $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n) \Rightarrow f'(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} I$
$\exists r > 0\ x_0 : \|f'(x) - I\| < \frac{1}{2}$ для $\forall x \in B_r(x_0)$
$K = B_{\frac{r}{2}}[x_0] \subset B_r(x_0)$

3. $g(x) = f(x) - x$
$g'(x) - f'(x) - I \quad \|g'(x)\| < \frac{1}{2},\ x \in K$
$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \quad \text{(т. Лагранжа)}$$
$$\|f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \frac{3}{2}\|x_1 - x_2\| \quad \text{(нер-во треуг.)}$$
$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq C - \|x_1 - x_2\|$$
f – биекция из K в $f(K)$
f^{-1} – из $f(K)$ в K непр.

4. $\delta(K)$ компактно
$$\|f(\cdot) - f(x_0)\|_{\geq 0} \in C(\delta(K), \mathbb{R}),\ x_0 \notin \delta(K)$$
Если $\inf_{x \in \delta(K)} \|f(x) - f(x_0)\| = 0$, то $\exists x' \in \delta(K) : f(x') = f(x_0)$.
Это означало бы, что $x' = x_0 \in \delta(K)$ (т. к. $f\big|_K$ биекция)
Значит, $\inf_{x \in \delta(K)} \|f(x) - f(x_0)\| > 0$. $\exists d > 0\ B_d(f(x_0) \cap f(\delta(K))) = \emptyset$

5. $V = B_{\frac{r}{2}}(f(x_0))$
$x \in \delta(K),\ y \in V$
$$\|f(x) - y\| = \|\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\|\cdot\| > d} - \underbrace{(y - f(x_0))}_{\|\cdot\| < \frac{d}{2}}\| > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$
$h_y(x) = \|f(x) - y\|^2 \in C^1(K, \mathbb{R}_+)$
$x \in \delta(K) \quad h_y(x) > \frac{d^2}{4}$
$x = x_0 \quad h_y(x) = \|f(x_0) - y\|^2 < \frac{d^2}{4}$
$\Rightarrow x_y \notin \delta(K),\ x_y \in \operatorname{Int} K$
$h_y'(x_y) = (f(x) - y, f(x) - y)'\Big|_{x = x_y} = 2(f(x) - y)^T \cdot f'(x)\big|_{x = x_y} = 0$
$V \subset f(K) \Rightarrow f(x_y) = y \Rightarrow y \in f(K)$

$\square$