Характеристическая функция множества

03 октября 2022

Определение. *Характеристическая функция множества*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Лемма 10. $\{$*Точки разрыва* $\chi_E(x)\} = \delta E$

Доказательство. $x \in \operatorname{Int} E \cup \operatorname{Ext} E$

На внутренних точках $\lim \chi_E(x) = 1 = \chi_E(x)$

На внешних точках $\lim \chi_E(x) = 0 = \chi_E(x)$

На границе разрывна - очев

□

Определение. $E \in \Pi$, Π - *п/п*, $f : E \to \mathbb{R}$ - *ограничена*

$$\int\limits_E f = \int\limits_\Pi f \cdot \chi_E$$

$$\widetilde{f} = f \cdot \chi_E(x)$$

Лемма 11. $\mu(\delta E) = 0$, $f : E \to \mathbb{R}$ - *почти везде непрерывна на* E

$$\textit{Тогда } \exists \int\limits_E f$$

Доказательство. Необходимо доказать, что $\exists \int\limits_\Pi \widetilde{f}$

$\{$Точки разрыва $\widetilde{f}$ на $\Pi\} = \{$Точки разрыва $\widetilde{f}$ на $\operatorname{Int} E\} \cup \{$Точки разрыва $\widetilde{f}$ на $\delta E\} \cup \underbrace{\{\text{Точки разрыва } \widetilde{f} \text{ на } \operatorname{Ext} E\}}_{\varnothing}$

$\{$Точки разрыва $\widetilde{f}$ на $\Pi\} \subset \{$Точки разрыва f на $\operatorname{Int} E\} \cup \delta E$

$\mu(\{$Точки разрыва $\widetilde{f}$ на $\Pi\}) = 0$ - по критерию Лебега существует интеграл □

Определение. E - *ограничено*, $\mu(\delta E) = 0$

$\exists \Pi \in \mathbb{R}^n$ - *п/п*: $E \in \Pi$

$$\upsilon(E) = \int\limits_E 1 = \int\limits_\Pi \chi_E(x) \textbf{ - \textit{Жорданов объём}}$$

Теорема Фубини

Теорема 1. *Теорема Фубини*

Пусть $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2, \Pi_1 \in \mathbb{R}^n, \Pi_2 \in \mathbb{R}^m, f : \Pi \to \mathbb{R}$ *– ограничена*

$$L_1(x) = \underline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy$$

$$U_1(x) = \overline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy$$

$$\textit{Если} \ \ \exists \int\limits_{\Pi} f, \textit{то} \ \ \exists \int\limits_{\Pi_1} L_1, \int\limits_{\Pi_1} U_1 \ \textit{и они равны}$$

$$\int\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\Pi_1} L_1(x)dx = \int\limits_{\Pi_1} U_1(x)dx$$

$$\int\limits_{\Pi_1} dx \left(\underline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy \right) = \int\limits_{\Pi_1} dx \left(\overline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy \right)$$

Доказательство. Пусть P_1 - разбиение Π_1, P_2 - разбиение Π_2

$$P = P_1 \times P_2 \text{ - разбиение } \Pi$$

$$P = \{\pi_1 \times \pi_2 \mid \pi_1 \in P_1, \pi_2 \in P_2\}$$

$$L(f,P) = \sum_{\pi \in P} \inf_{\pi} f \cdot v(\pi) = \sum_{\pi_1 \in P_1, \pi_2 \in P_2} \inf_{\pi_1 \times \pi_2} f \cdot v(\pi_1) \cdot v(\pi_2) = \sum_{\pi_1 \in P_1} \left[\sum_{\pi_2 \in P_2} \inf_{\pi_1 \times \pi_2} f \cdot v(\pi_2) \right] \cdot v(\pi_1)$$

$$\forall x \in \pi_1 : \inf_{\pi_1 \times \pi_2} f \leq \inf_{y \in \pi_2} f(x,y)$$

$$\sum_{\pi_2 \in P_2} \inf_{\pi_1 \times \pi_2} f \cdot v(\pi_2) \leq \sum_{\pi_2 \in P_2} \inf_{y \in \pi_2} f(x,y) \cdot v(\pi_2) = L\big(f(x,\cdot), P_2\big) \leq L_1(x) - \ L_1 \text{ - sup таких сумм}$$

$$\sum_{\pi_2 \in P_2} \inf_{\pi_1 \times \pi_2} f \cdot v(\pi_2) \leq \inf_{\pi_1} L_1(x) = m_{\pi_1} L_1$$

$$L(f,P) \leq \sum_{\pi_1 \in P_1} m_{\pi_1} L_1 \cdot v(\pi_1) = L(L_1, P_1)$$

$$U(f,P) \geq U(U_1, P) - \ \text{аналогично}$$

$$L(f,P) \leq L(L_1,P_1) \leq U(L_1,P_1) \leq U(U_1,P_1) \leq U(f,P) \ (*)$$

$$L(f,P) \leq L(L_1,P_1) \leq L(U_1,P_1) \leq U(U_1,P_1) \leq U(f,P) \ (**)$$

$$\exists \int\limits_{\Pi} f \Rightarrow \sup_{P} L(f,P) = \inf_{P} U(f,P)$$

$$\sup_{P_1} L(L_1,P_1) \le \inf_{P_1} U(L_1,P_1) - \text{Всегда}$$

$$(*)\text{:}\ \inf_{P_1} U(L_1,P_1) \le \inf_{P} U(f,P)$$

$$(*)\text{:}\ \sup_{P} L(f,P) \le \sup_{P_1} L(L_1,P_1)$$

$$\sup_{P} L(f,P) \le \sup_{P_1} L(L_1,P_1) \le \inf_{P_1} U(L_1,P_1) \le \inf_{P} U(f,P) - \text{ из равенства 1 и 4 всюду равенство}$$

$$\sup_{P_1} L(L_1,P_1) = \inf_{P_1} U(L_1,P_1)$$

$$\exists \int\limits_{\Pi_1} L_1 = \int\limits_{\Pi} f$$

$$\sup_{P_1} L(U_1,P_1) \le \inf_{P_1} U(U_1,P_1) - \text{Всегда}$$

$$(**)\text{:}\ \inf_{P_1} U(U_1,P_1) \le \inf_{P} U(f,P)$$

$$(**)\text{:}\ \sup_{P} L(f,P) \le \sup_{P_1} L(U_1,P_1)$$

$$\sup_{P} L(f,P) \le \sup_{P_1} L(U_1,P_1) \le \inf_{P_1} U(U_1,P_1) \le \inf_{P} U(f,P) - \text{ из равенства 1 и 4 всюду равенство}$$

$$\sup_{P_1} L(U_1,P_1) = \inf_{P_1} U(U_1,P_1)$$

$$\exists \int\limits_{\Pi_1} U_1 = \int\limits_{\Pi} f$$

$\square$