

$G \subset \mathbb{R}^n$ открытое ограниченное, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ огр. и п. в. непрерывно

$$\text{supp } f \subset G \Rightarrow \exists \int_G f$$

Теорема 1. $G \subset \mathbb{R}^n$ открытое ограниченное, $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ диффеоморфизм,

$g(G)$ огр.,

$f : g(G) \rightarrow \mathbb{R}$ огр., п. в. непрерывно, $\text{supp } f \subset g(G)$

Тогда

$$\exists \int_G f \circ g |\det g'| = \int_{g(G)} f$$

Лемма 12. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм

$E \subset G : \bar{E} \subset G$. Тогда

$$g(\bar{E}) = \overline{g(E)}$$

$$g(\text{Int } E) = \text{Int } g(E)$$

$$g(G \setminus \bar{E}) = g(G) \setminus \overline{g(E)}$$

$$g(\delta E) = \delta g(E)$$

Если $G, g(G)$ огр., g – диффеоморфизм, то

$$\mu(E) = 0 \Leftrightarrow \mu(g(E)) = 0$$

Доказательство.

$$G \ni x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in G \Leftrightarrow g(G) \ni g(x_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x) \in g(G)$$

$$g(x) \in g(\bar{E}) \Leftrightarrow x \in \bar{E} \Leftrightarrow g(x) \in \overline{g(E)}$$

$$x \in \text{Int } E \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(x) \subset E \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(g(x)) \subset g(E) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) \in \text{Int } g(E)$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in \delta E \Leftrightarrow E \ni y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \\ G \setminus \bar{E} \ni x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(E) \ni g(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x) \\ g(G \setminus \bar{E}) \ni g(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow g(x) \in \delta g(E)$$

$$x \in G \setminus \bar{E} = \text{Int}(G \setminus E) \Leftrightarrow g(x) \in \text{Int}(g(G) \setminus g(E)) = g(G) \setminus \overline{g(E)}$$

$\forall \varepsilon \exists C_l, l = 1, \dots, N$ – открытые кубы

$$E \subset \bigcup_{l=1}^N C_l, \quad \sum_{l=1}^N v(C_l) < \varepsilon$$

$$l(C) - \text{длина ребра куба } C \quad v(C) = (l(C))^n \quad \text{diam } C = l(C)\sqrt{n}$$

$$\begin{aligned} \text{Если } \varepsilon < \frac{\delta}{2\sqrt{n}}^n, \forall l \quad v(C_l) < \varepsilon \Rightarrow l(C_1) < \frac{\delta}{2\sqrt{n}} \\ \text{diam } C_l < \frac{\delta}{2} \quad \text{dist}(\overline{E}, \delta G) = \delta \end{aligned}$$

$$\bigcup_{l=1}^N C_l \subset E^{\frac{\delta}{2}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, E) < \frac{\delta}{2}\} \subset \overline{E^{\frac{\delta}{2}}} \subset G$$

$$\forall x_1, x_2 \in E^{\frac{\delta}{2}} \quad \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq M \cdot \|x_1 - x_2\| \quad \max_{E^{\frac{\delta}{2}}} \|g'\| = M$$

$$g(C_l) \subset B_{\frac{M \cdot \text{diam } C_l}{2}}(g(x_l)) \subset \tilde{C}_l, \quad l(\tilde{C}_l) = M \cdot \text{diam } C_l$$

$$v(\tilde{C}_l) = (l(\tilde{C}_l))^n = M^n \cdot (\text{diam } C_l)^n = M^n \left(\frac{\text{diam } C_l}{\sqrt{n}} \right)^n (\sqrt{n})^n = (M\sqrt{n})^n v(C_l)$$

$$g(E) \subset \bigcup_{l=1}^N \tilde{C}_l, \quad \sum_{l=1}^N \tilde{C}_l = (M\sqrt{n})^n \cdot \varepsilon$$

□

Замечание. В условие теоремы $\exists \int_G f \circ g | \det g' |$

Доказательство. $\text{supp } f = \overline{\{y \in g(G) \mid f(y) \neq 0\}}$

$$\text{supp}(f \circ g | \det g') = \text{supp } f \circ g = \overline{\{x \in G \mid (f \circ g)(x) \neq 0\}}$$

$$g(\{x \in G \mid f \circ g \neq 0\}) = \{y \in g(G) \mid f(y) \neq 0\}$$

$\xRightarrow[\text{л. 12}]{\text{замыкание совпадает}}$

$\text{supp}(f \circ g | \det g')$ компактен

$$\sup_{\text{supp}(f \circ g | \det g')} | \det g' | < \infty \Rightarrow f \circ g \cdot | \det g' | \text{ орг.}$$

$$f \text{ п. в. непрерывно на } g(G) \xRightarrow[\text{л. 12}]{\text{п. в. непрерывно на } G} f \circ g \text{ п. в. непрерывно на } G$$

$$| \det g' | \in C(G) \Rightarrow f \circ g | \det g' | \text{ п. в. непрерывно на } G$$

Значит, $\exists \int_G f \circ g | \det g' |$

□

Лемма 13. $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ диффеоморфизм

$$\forall x \in G \exists \text{ окрестность } U \subset G$$

$$g|_U = g_1 \circ \dots \circ g_n$$

где g_k – простейший диффеоморфизм, т. е.

$$((g_k)(x))_i = x_i, \quad \forall i \neq k, \quad i - \text{координата}$$

Доказательство. Индукция

База $k = 1$: уже простейший

Переход $(g(x))_i = x_i, \quad i \geq k+1 \quad x = (y = (x_1, \dots, x_k), z)$

Пусть $x_0 \in G \quad g'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$

$0 \neq \det g'(x_0) = \det \frac{\partial g}{\partial y}(x_0) \Rightarrow$ не все миноры порядка $k-1$ нулевые

перенумерацией компонентов добьемся того, чтобы главный минор был $\neq 0$

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (f(x))_i = \begin{cases} (g(x))_i, & i < k \\ x_i, & i \geq k \end{cases}$$

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) & \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)_{k-1} \\ & I_{n-k+1} \end{pmatrix}$$

$$\det f'(x_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{k-1} \neq 0$$

$f \in C^1(G) \quad \exists U \ni x_0 \quad f|_U -$ диффеоморфизм

Положим $h = g \circ (f|_U)^{-1} -$ диффеоморфизм $f(U) \rightarrow g(U)$

$$g|_U = h \circ f|_U$$

Для $f \exists$ окрестность x_0 , в которой f раскладывается в композицию простейших $u \in f(U)$

$$i < k \quad (h(u))_i = (g \circ f^{-1}(u))_i = (f \circ f^{-1}(u))_i = u_i$$

$$i \geq k \quad (h(u))_i = (g \circ f^{-1}(u))_i = (f^{-1}(u))_i = u_i$$

$$\underbrace{(f(x))_i}_{=u} = x_i = (f^{-1}(u))_i, \quad i > k$$

□

Лемма 14. Утверждение теоремы верно при $n = 1$

Лемма 15 (14'). В условиях теоремы на G и на g при $n = 1$ для $\forall f : g(G) \rightarrow \mathbb{R}$
огр. : $\text{supp} \subset g(G)$

$$\int_{\overline{G}} f \circ g |\det g'| = \int_{g(G)} f, \quad \int_G \overline{f \circ g |\det g'|} = \int_{g(G)} \overline{f}$$

Доказательство. $\text{supp } f$ компактен

$$\forall x \in \text{supp } f \quad \exists \varepsilon_x > 0 \quad [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset G$$

$$\text{supp } f \subset \bigcup_{x \in \text{supp } f} (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \Rightarrow \text{supp } f \subset \bigcup_{i=1}^N (x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i})$$

$$\text{supp } f \subset \bigcup_{i=1}^N [x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}] \quad \text{отрезки не пересекаются}$$

$$\forall i \quad (g^{-1})'|_{[x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}]} \quad \text{имеет постоянный знак}$$

$$g^{-1}([x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}]) - \text{отрезок} \Rightarrow \text{достаточно доказать:}$$

$$\int_{g([a,b])} g = \int_{[a,b]} f \circ g |g'|$$

$$g' > 0 \quad \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx$$

$$g' < 0 \quad \int_{g(b)}^{g(a)} f(y) dy = \int_a^b f(g(x)) |g'(x)| dx$$

(кусочек далее надо сделать красиво)

$$P_y - \text{разбиение } g([a,b]) \quad P_x = g^{-1}(P_y)'' = \{g^{-1}(\pi) | \pi \in P_y\}$$

$$\max_{[a,b]} |g'| \cdot d(P_y) \leq d(P_x) \leq \max_{g([a,b])} |(g^{-1})'| \cdot d(P_y)$$

$$\sum_{\pi_y \in P_y} \sup_{\pi_y} f \cdot v(\pi_y) = \sum_{\pi_x \in P_x} \sup_{\pi_x} (f \circ g) |g'(\xi(\pi_x))| \cdot v(\pi_x)$$

$$\pi_y = g(\pi_x)$$

$$v(\pi_y) = |g(\beta) - g(\alpha)| = |g'(\xi)| \cdot (\beta - \alpha)$$

$$\text{продолжаем неравенство (есть неправильное все стёр....)} \leq \underbrace{\sup_{[a,b]} |g'|}_{< \infty} \sum_{\pi_x \in P_x} \sup_{\pi_x} f \circ g \cdot$$

$$v(\pi_x)$$

$$P_{x,k} : d(P_{x,k}) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

$$P_{y,k} : d(P_{y,k}) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

$$\forall \pi_x \exists \xi(\pi_x) < \pi_x \quad v(\pi_y) = |g'(\xi(\pi_x))| \cdot v(\pi_x)$$

$$U(f, P_{y,k}) \leq \sum_{\pi_x \in P_x} \sup_{\pi_x} f \circ g |g'| \cdot v(\pi_x) = U(f \circ g |g'|, P_{x,k})$$

$$\text{слева } \int_{g([a,b])} f \leq \text{справа } \int_{[a,b]} f \circ g |\det g'|$$

$$\int_{g^{-1}g([a,b])} f \circ g |g'| \leq \int_{g([a,b])} f \circ g \circ g^{-1} |g' \circ g^{-1}| \cdot |g^{-1}|$$

$$\Rightarrow \int_{g([a,b])} f = \int_{[a,b]} f \circ g |g'|$$

□

Доказательство. (Теоремы)

1. Простейший диффеоморфизм $(g(x))_i = x_i, i < n$

$$g(G) = \Pi_y = \Pi_1 \times \Pi_{y_n} \quad \Pi_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}, \Pi_{y_n} \subset \mathbb{R}$$

$$G = \Pi_x = \Pi_1 \times \Pi_{x_n} \quad \Pi_{x_n} \subset \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\int_{g(G)} &= \int_{\Pi_y} f \chi_{g(G)} \stackrel{\text{Фубини}}{=} \int_{\Pi_1} dy_1 \dots dy_{n-1} \int_{\overline{\Pi_2}} dy_n f \chi_{g(G)} = \\
&= \int_{\Pi_1} dy_1 \dots dy_{n-1} \int_{\overline{\pi_n[g(G) \cap (y_1, \dots, y_{n-1}) \times \mathbb{R}]}} f(y) dy_n \stackrel{\text{Лемма 14}}{=} \\
&= \int_{\Pi_1} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{\overline{\pi_n[G \cap (y_1, \dots, y_n) \times \mathbb{R}]}} (f \circ g)(x) \underbrace{\left| \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \right|}_{=|\det g'|} dx_n = \\
&= \int_{\Pi_1} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{\overline{\Pi_{x_n}}} f \circ g |\det g'| \chi_G = \\
&= \int_{\Pi_x} f \circ g |\det g'| \chi_G = - \int_G f \circ g |\det g'|
\end{aligned}$$

□