

Математический анализ

12 сентября 2022

Ряды интеграла, зависящие от параметра

X_0, X – метрические пространства

$E \subset X_0, f : E \rightarrow X$

$\{f \text{ непр в } x\}_{x \in X}$

Непрерывность на E :

$$\forall \varepsilon > 0, x \in E, \exists \delta > 0 : \forall x' \in E : d_0(x, x') < \delta \text{ выпол. } d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Равномерная непрерывность:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in E : d_0(x, x') < \delta \text{ вып. } d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

$\{x_n(p)\}_{n=1}^\infty, p \in P$

$\{a_n(p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a(p)\}_{p \in P}$

Сходимость : $\forall \varepsilon > 0 \forall p \in P \exists N : \forall n > N : d(a_n(p), a(p)) < \varepsilon$

Равномерная : $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall p \in P : \forall n > N : d(a_n(p), a(p)) < \varepsilon$

Пример 1. $a_n(p) = \frac{np}{1+(np)^2}, P = [0, 1]$

Теорема 1 (о двойном пределе). X – полное метрическое пространство

$\{a_{np}\}_{n,p \in \mathbb{N}}$ – двойная последовательность в X

$\forall p \in \mathbb{N} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_{np} = u_p$

$\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{p \rightarrow \infty} a_{np} = v_n$

Если один из этих пределов достигается равномерно, то

$$\exists \lim_{p \rightarrow \infty} u_p, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

и они равны.

Доказательство. Пусть $a_{np} \xrightarrow{p \in \mathbb{N}}_{n \rightarrow \infty} u_p$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \forall n > N_1 \forall p d(a_{np}, u_p) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$n_0 > N_1 \quad a_{n_0 p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} v_n$$

$$\text{для } \varepsilon \exists N_2 : \forall p, q > N_2 d(a_{n_0 p}, a_{n_0 q}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$d(u_p, u_q) \leq d(u_p, a_{n-p}) + d(a_{n_0 p}, a_{n_0 q}) + d(a_{n_0 q}, u_q) < \varepsilon$$

Критерий Коши: $\exists \lim_{p \rightarrow \infty} u_p =: w$

$$d(a_{np}, u_p) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\xRightarrow{p \rightarrow \infty} d(v_n, w) \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Значит, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w$

□

Замечание (Непрерывность расстояния). $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$
 $d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(x, y)$

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x, y) + d(x, x_n) + d(y, y_n) \\ d(x, y) &\leq d(x_n, y_n) + d(x, x_n) + d(y, y_n) \\ |d(x, y) - d(x_n, y_n)| &\leq d(x, x_n) + d(y, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Пример 2. $a_{np} = \frac{n}{1+n+p}$

$$\begin{aligned} a_{np} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ a_{np} &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} = 1$$

Следствие 1. X – полное евклидово пространство

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{np} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{p \rightarrow \infty} a_{np} \right)$$

Следствие 2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Следствие 3 (2').

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Следствие 4. $f_n(x) \rightrightarrows_{n \rightarrow \infty}^{x \in E} \varphi(x)$, $\forall n \ f_n \in C(E) \Rightarrow \varphi \in C(E)$

Следствие 5 (3').

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \varphi(x) \text{ с.х. равномерно по } x \in E, \forall n \ f_n \in C(E) \Rightarrow \varphi \in C(E)$$

Следствие 6 (3'').

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f_k &\in C(E), \forall n, \text{ равенств. по } n \\ \forall x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) &= \varphi(x) \text{ с.х.-ся} \Rightarrow \varphi \in C(E) \end{aligned}$$

Следствие 7.

$$\lim_{n \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$$

Следствие 8.

$$f(x, y) \rightrightarrows_{y \rightarrow b}^{x \in E} \varphi(x), \ f(\cdot, y) \in C(E), \ \forall y \Rightarrow \varphi \in C(E)$$

Определение. X_0, X – метрические пространства, $E \subset X_0$, $f_p : E \rightarrow X$, $p \in P$
 $\{f_p(x)\}_{p \in P}$ – равномерно непрерывно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in E : d_0(x, x') < \delta, \forall p \in P \quad d(f_p(x), f_p(x')) < \varepsilon$$

Суммирование двойного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \quad \text{when??}$$

$$a_{nk} \geq 0 :$$

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ - биекция} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Определение.

A – счетное множество индексов ($a_\alpha \geq 0$): \exists биекция $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \quad \sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$$

Корректность: gg

Теорема 2. $a_{nk} \geq 0, \forall n, k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \quad \text{конеч. или } \infty$$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \leq \sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{K_n} a_{nk} \leq \sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk} \Rightarrow \lim_{K_1 \rightarrow \infty} \lim_{K_2 \rightarrow \infty} \dots \lim_{K_N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{K_n} a_{nk} \leq \sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \leq \sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$$

1.

$$\sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk} = \sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} < \infty$$

$$\forall \varepsilon \exists L : \forall l > L : \sum_{j=1}^l a_{\varphi(l)} > \sum_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk} - \varepsilon$$

$$K = \{\varphi(l), l = 1, \dots, L+1\} \exists N : K = \bigcup_{n=1}^N \tilde{K}_n$$

$$\tilde{K}_n = \{n\} \times K_n$$

$$K_n = \{k \mid (n, k) \in K\} = \pi_y \tilde{K}_n$$

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} -\varepsilon < \sum_{j=1}^{L+1} a_{\varphi(j)} = \sum_{n=1}^N \sum_{k \in K_n} a_{nk} \leq \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

$$\forall \varepsilon \exists N : \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \geq \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk} - \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \geq \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$$

2. ну карочи тут все так же только меняет ε на M и вот там чета все получается
я хз

□

Теорема 3. $\{a_{nk}\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ – двойная последовательность в \mathbb{R}

$$\sum_{n,k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| < \infty$$

$(n, k) \in \mathbb{N}^2$ Тогда сходятся и равны:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}$$

Доказательство.

$$\forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \sum_{n,k \in \mathbb{N}} |a_{nk}|$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \text{ сходится асб.}$$

$$\forall \varepsilon \exists N : \forall m > n > N : \sum_{i=n}^m \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| \leq \sum_{i=n}^m \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| < \varepsilon$$

$$\xRightarrow{\text{к. Коши}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \text{ ряд сходится}$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{\varphi_{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} |a_{ij}|$$

$$\begin{aligned}
& \forall \varepsilon \exists N : \forall n > N : \sum_{l=n^2+1}^{\infty} |a_{\varphi(l)}| < \varepsilon \\
& \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{ij}| + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \varepsilon \\
& \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{ij}| \\
& \left| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \\
& \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| < \varepsilon \\
& \xrightarrow{\forall \varepsilon \exists N} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}
\end{aligned}$$

□