$\boxed{\textbf{24 октября 2022}}$

Мы доказали теорему в случае, когда g - простейший диффеоморфизм. Теперь докажем в случае, когда g - композиция н простейших диффеоморфизмов.

Доказательство. (продолжение)

2. Пусть $g : G \to \mathbb{R}^n$ - композиция простейших диффеоморфизмов

`Индукция` (количество композиций):

$k = 1$ доказано на первом шаге.

`Переход`: верно для k, докажем для $k + 1$

$g = g_{k+1} \circ \underbrace{g_k \circ \ldots \circ g_2 \circ g_1}_{=h-\text{диффеоморфизм G и h(G)}}$

g_{k+1} - диффеоморфизм $h(G)$ и $g(G)$

$f : g(G) \to \mathbb{R}$ огр. и п.в. непр.

$f \circ g_{k+1} : h(G) \to \mathbb{R}$ огр и (по первой лемме (№16) о мере ноль под диффеоморфизмом) п.в. непр.

$f \circ g_{k+1} |\det g'_{k+1}|$

$$\int_{g(G)} f \overset{1.}{=} \int_{h(G)} f \circ g_{k+1} |\det g'_{k+1}| \overset{\text{инд. предп.}}{=}$$

$$= \int_G \big(f \circ g_{k+1} |\det g'_{k+1}|\big) \circ h |\det h'|$$

$$= \int_G \underbrace{f \circ g_{k+1} \circ h}_{f \circ g} \cdot |(\det g'_{k+1} \circ h| \det h')$$

$$= \int_G f \circ g |\det g'|$$

3. Общий случай

$K = \operatorname{supp}\big(f \circ g |\det g'|\big) \subset G \quad \operatorname{dist}(\delta G, K) > 0$

$\forall x \in K \ \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subset G$

По лемме 15 $g\big|_{B_{\varepsilon_x}(x)}$ раслкадывается в композицию простейших диффеоморфизмов

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\varepsilon_x/2}(x), K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i)$$

т.к. K - компакт.

$\delta := \min\limits_{i=1,\dots,N} \dfrac{\varepsilon_{x_i}}{2}$

$\forall E \subset \mathbb{R}^n : E \cap K \neq \varnothing$ и $\operatorname{diam} E < \delta$ верно $E \subset G$ и $g\big|_E$ раскладывается в композицию

$\Big(\exists x \in K \cap E, \exists i : x \in B_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i) \wedge E \subset \big(B_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i)\big) \subset B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \subset G\Big)$

foto 1

Пусть $G \subset \Pi$ - п/п, P - разбиение $\Pi, d(P) < \min\{\delta, \operatorname{dist}(\delta G, K)\}$

$P_1 = \{\pi \in P \mid \pi \cap K \neq \varnothing\}$

Если $\pi \notin P_1$, то $\big(f \circ g |\det g'|\big)\big|_\pi \equiv 0$

Если $\pi \in P_1$, то $\pi \subset G$ и $g\big|_\pi$ раскладывается в композицию

$K \subset \bigcup_{\pi \in P_1} \pi$

$$\int_G f \circ g |\det g'| = \int_\Pi f \circ g |\det g'| \cdot \chi_G = \sum_{\pi \in P} \int_\pi f \circ g |\det g'| \cdot \chi_G$$

$$= \sum_{\pi \in P_1} \int_\pi f \circ g |\det g'| \chi_G = \sum_{\pi \in P_1} \int_\pi f \circ g |\det g'| = \sum_{\pi \in P_1} \int_{\operatorname{Int}\pi} f \circ g |\det g'| =$$

$$= \sum_{\pi \in P_1} \int_{g(\operatorname{Int}\pi)} f = f \int_{g(\bigcup_{\pi \in P_1} \operatorname{Int}\pi)} f = (*)$$

$v(\delta\pi) = 0 \implies \mu(\delta\pi) = 0 \implies \mu\big(g(\delta\pi)\big) = 0 \implies v\big(g(\delta\pi)\big) = 0$

$\operatorname{supp} f = g(K) \subset g(\bigcup_{\pi \in P_1} \pi) \subset g(G)$

$\operatorname{supp}(f \circ g) = K \subset \bigcup_{\pi \in P_1} \pi$

$$(*) = \int_{g(\bigcup_{\pi \in P_1} \Pi)} f = \int_{\Pi_x} f \cdot \chi_{g(\bigcup_{\pi \in P_1} \pi)} = \int_{\Pi_x} f \cdot \chi_{g(G)} = \int_{g(G)} f$$

$\square$

Это к ласт лекции:

$v(\pi_y) = |g'(\xi)| \cdot v(\pi_x)$

$\sum_{\pi_y} \sup_{\pi_y} f v(\pi_y) = \sum_{\pi_x} (\sup_{\pi_x}) \big|g'\big(\xi(\pi_x)\big)\big| \cdot v(\pi_x)$

оценим точнее разность супремумов

$\Big| sup_{\pi_x}(f \circ g) \cdot |g'\big(\xi(\pi_x)\big)| - \sup_{\pi_x}(f \circ g |g'|)\Big| = \Big|\sup_{\pi_x}(f \circ g)(x)\big(|g'(\xi(\pi_x))| - |g'(x)|\big)\Big| \leq$ $\underbrace{\sup_{\pi_x} |f \circ g|}_{<M} \cdot \underbrace{\sup_{x \in \pi_x} \big|g'(\xi(\pi_x))|g'(x)|\big|}_{w_{|g'|}(d(P_x))}$

$\sup_{g([a,b])} f = M < \infty \quad +M \cdot \frac{w_{|g'|}(d(P_x))}{d(P_x) \to 0}(b-a)$

Следствие 1. *Жорданов объем не меняется при движениях и поворотах и не зависит от выбора координат*

Переход к новому базису $g(X) = a + Ux \quad U^TU = UU^T = I$ *- ортогональная матрица*

$\det U = \pm 1$

$g'(x) = U \quad |\det g'(x)| = 1$

$$\int_{(g(E))} 1 = \int_E 1$$

А как посчитать объем шара? $v(B_R(0))-?$

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = g(r, \vartheta, \varphi) \qquad g : (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$

$x = r \sin\vartheta \sin\varphi$

$y = r \sin\vartheta \cos\varphi$

$z = r \cos\vartheta$

$\det g' = r^2 \sin\vartheta$

$B_R(0) = g\overbrace{\big((0, R) \times (0, \Pi) \times (0, 2\pi)\big)}^{=\Pi_R}$

$\{x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$

$$v\big(B_R(0)\big) = \int_C \chi_{B_R(0)} = \int_{B_R(0)} 1 = \int_{g(\Pi_R)} 1 = \iiint_{\Pi_R} 1 \cdot r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Несобственные кратные собиратели (интрегалы)

Определение. $E \subset \mathbb{R}^n \quad \{E_k\}_k^\infty, E_k \subset E_{k+1} \subset E, \forall k : E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$*, измеримы по жордану.*

Такая последовательность называется ***исчерпанием*** *множества* E

Лемма 20. $E \subset \mathbb{R}^n$ *измеримо по Жордану,*

$\{E_k\}_{k=1}^\infty$ *- исчерпание* E*. Тогда*

$$v(E_k) \underset{k\to\infty}{\to} v(E)$$

И для любой $f : E \to \mathbb{R}$ *огр и п.в. непр. :*

$$\int_{E_k} f \underset{k\to\infty}{\to} \int_E f$$

Доказательство. $v(E_k) \le v(E) \qquad v(E_k) \le v(E_{k+1})$

$\implies \exists \lim_{k\to\infty} v(E_k) \le v(E)$

E измеримо по Ж. $\implies \overline{E}, \delta E$ огр., компактно, $\mu(\delta E) = 0 \implies v(\delta E) = 0$

$\forall \varepsilon \exists C_1, \dots, C_k$ октрытые кубы, $\delta E \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^{N}}_{=\Delta} C_i, \sum_{i=1}^N v(C_i) < \varepsilon$

$\overline{E} \subset E \cup \bigcup_{i=1}^N C_i = E \cup \Delta$ - откр множество

$\forall k : \overline{E_k} \subset \underbrace{E_k \cup \Delta_k}_{\text{откр}}, v(\Delta_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

компакт $\overline{E} \subset E \cup \Delta = (\bigcup_{k=1}^\infty E_k) \cup \Delta \subset \bigcup_{k=1}^\infty (E_k \cup \Delta_k) \cup \Delta$ - открытое покрытие

$\overline{E} \subset \left(\bigcup_{i=1}^N E_{k_i} \cup \Delta_{k_i}\right) \cup \Delta = E_{k_N} \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \Delta_{k_i}\right) \cup \Delta$

$$v(E) = v(\overline{E}) \le v(E_{k_N}) + \sum_{i=1}^N v(\Delta_{k_i}) + v(\Delta) \le \lim_{k\to\infty} v(E_k) + \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} + \varepsilon = \lim_{k\to\infty} v(E_k) + 2\varepsilon$$

$\implies v(E) \le \lim_{k\to\infty} v(E_k)$

Значит, $\lim_{k\to\infty} v(E_k) = v(E)$

$f : E \to \mathbb{R}$ огр и п.в. непр.

$|\int_E f - \int_{E_k} f| = |\int_{E\setminus E_k} f| \le \sup_E |f| \cdot v(E \setminus E_k) = (\sup_E |f|) \underbrace{\left(v(E) - v(E_k)\right)}_{\to 0}$

$\implies \int_{E_k} f \underset{k\to\infty}{\to} \int_E f$ ☐

Определение. $E \subset \mathbb{R}^n, f : E \to \mathbb{R}$

Если $\exists I \in \mathbb{R} \quad \forall \{E\}_{k=1}^\infty$ *- исчерпание* $E : \forall k f\big|_{E_k}$ *огр. и п.в. непр.*

$\int_{E_k} f \underset{k\to\infty}{\to} I$, *то* $\exists$ ***несобств. собиратель*** $\int_E f = I$

Пример 1. $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{B_n(0)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_0^n dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dy =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{2} \int_0^n de^{-r^2} = \lim_{n\to\infty} \Pi(1 - e^{-n^2}) = \pi$

$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Лемма 21. *Если* $f \ge 0$ *и* $\exists \{E_k\}_{k=1}^\infty$ *- исчерпание* E

$\exists \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$, *то* $\exists$ *несобств. собиратель* $\int_E f$

Доказательство. нужно д-ть, что для любого другого исчерпания $\{\widetilde{E}_l\}_{k=1}^\infty : \int_{\widetilde{E}_l} f \to \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$

$f\big|_{\widetilde{E}_l}$ огр. и п.в. непр.

$\int_{\widetilde{E}_l \cap E_k} \le \int_{E_k} f \le \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f \qquad \{\widetilde{E}_l \cap E_k\}_{l=1}^\infty$ - исчерпание E_k

$\{\widetilde{E}_l \cap E_k\}_{k=1}^\infty$ - исчерпание $\widetilde{E}_l$

$\overset{\text{лемма}}{\implies} \lim_{l\to\infty} \int_{\widetilde{E}_l \cap E_k} f = \int_{E_k} f \le \lim_{l\to\infty} \int_{\widetilde{E}_l} f$

$\implies \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f \le \lim_{l\to\infty} \int_{\widetilde{E}_l} f$

$\lim_{k\to\infty}\int_{\widetilde{E_l}\cap E_k} f = \int_{\widetilde{E_l}} f \le \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f$
$\implies \exists \lim_{l\to\infty}\int_{\widetilde{E_l}} f \le \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f$

$$\implies \lim_{l\to\infty}\int_{\widetilde{E_l}} f = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f$$

□

Лемма 22. $E\subset\mathbb{R}^n, f : E\to\mathbb{R}, \quad g : E\to[0,+\infty), \quad |f|\le g$
$\forall\widetilde{E}\subset E$ изм. по Ж. $f\big|_{\widetilde{E}}$ огр и п.в. непр. $\iff$ $g\big|_{\widetilde{E}}$ огр. и п.в. непр.
$\exists$ несобств. $\int_E g \implies \exists$ несобств. $\int_E |f|$ и $\int_E f$
*g - **складываемая (суммируемая) мажоранта***

Доказательство. $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ - исчерпание $E : \forall k f\big|_{E_k}, g\big|_{E_k}$ огр. и п.в. непр.
по кр. Коши $n > K : \int_{E_n}|f| = \int_{E_k}|f| = \int_{E_n\setminus E_k}|f| \le \int_{E_n\setminus E_k} g = \int_{E_n} g - \int_{E_k} g$
$\exists\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} g \overset{\text{кр.коши}}{=} \exists\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f| \overset{\text{лемма}}{\implies} \exists$ несобств. $\int_E |f|$
$|\int_{E_n} - \int_{E-k} f| \le \int_{E_n\setminus E_k}|f| \le \int_{E_k} g - \int_{E_n} g$
$f = f_r - f$
$f_r = \frac{f+|f|}{2} \ge 0 \quad f_- = \frac{|f|-f}{2}\ge 0$
$0\le f_\pm \le |f| \le g$
$f_\pm = |f_\pm|$
$\exists$ несобств. $\int_E |f\pm| = \int_E f_\pm$
$\forall\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f_+ - \int_{E_k} f_- = \int_E f_+ - \int_E f_- \implies \exists\int_E f$$

□

$f(x) - \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad x\in[n-1,n) \quad [0,+\infty]\to\mathbb{R}$
$[0,+\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[0,n)$
$\int_{[0,n)} f = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$
$\lim_{k\to\infty}\int_0^R f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$\forall I\in\mathbb{R}\exists\varphi$ - биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$
$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\varphi(k)-1}}{\varphi(k)} = I$
$E = \bigcup_{k=1}^{n}[\varphi(k)-1,\varphi(k))$
$\int_{E_n} f = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{\varphi(k)-1}}{\varphi(k)} \underset{n\to\infty}{\to} I$