Устойчивость нулевого решения?

$\dot{x} = f(t, x, \mu)$

Пусть $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(G_\mu)$

Перешли подстановкой $x - \bar{x} = y, \alpha = \mu - \bar{\mu}$ к

$$\dot{y} = F(t, y, \alpha)$$

Хотим воспользоваться формулой тейлора так как там всё гладкое:

$$F(t, y, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(t, \bar{x}(t), \bar{\mu}\big)y + \frac{\partial f}{\partial \mu}\big(t, \bar{x}(t), \bar{\mu}\big)\alpha + r(t, y, \alpha)$$

И пусть $\exists \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial \alpha} \in C(U^*)$

*Напоминание:* $\exists \delta^* > 0 : U^* = \big\{(t, x, \mu) \mid t \in [t_0, \infty), \|x - \bar{x}\| < \delta^*, \|\mu - \bar{\mu}\| < \delta^*\big\}$

$\frac{\|r(t,y,\alpha)\|}{\|(y,\alpha)\|} \underset{\|y\| \to 0, \|\alpha\| \to 0}{\longrightarrow} 0$

$$r(t, y, \alpha) = \frac{\partial r}{\partial y}y + \frac{\partial r}{\partial \alpha}\alpha + \bar{o}$$

Правая часть исходного уравнения с формулой тейлора:

$$... = \frac{\partial F}{\partial x}\big(t, \bar{x}(t), \mu\big)y + g(t, y) + h(t, y, \alpha)$$

Всё в добавку ушло...

$$\dot{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\big(t, \bar{x}(t), \bar{\mu}\big)y + g(t, y) + h(t, y, \alpha)$$

$\frac{\|g(t,y)\|}{\|y\|} \underset{\|y\| \to 0}{\longrightarrow} 0, \|h(t, y, \alpha)\| \le M(t)\|\alpha\|$

Назовём $\dot{y} = A(t)y$, где $A = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t), \bar{\mu})$ - матрица с переменными коэффициентами, **первым приближением уравнения/системы** $\dot{x} = f(t, x, \mu)$ в точке $(\bar{x}(t), \bar{\mu})$

Пусть $A(t)$ постоянная матрица. Тогда линейная часть переписывается в таком виде:

$\dot{y} = Ay + g(t, y) + h(t, y, \alpha)$

**Теорема** (об устойчивости в малом(устойчивость по первому приближению))

Пусть

1. Собственные числа матрицы $A$ $\lambda_j$ имеют отрицательную вещественную часть
2. $O$-малость выполняется равномерно по $t$: $\frac{\|g(t,y)\|}{\|y\|} \underset{t \in [t_0, \infty)}{\rightrightarrows} 0, \|y\| \to 0$
3. $\exists M_0 > 0 : M(t) \le M_0;\ \|h(t, y, \alpha)\| \le M_0\|\alpha\|,\ t \in [t_0, \infty)$

Тогда решение $y = 0$ устойчиво в малом при $\alpha = 0$

**Лемма Гронуолла**

Пусть $\mu > 0,\ f(x) \geq 0,\ \lambda(x) \geq 0,\ f, \lambda \in C[a,b]$

Если есть оценка $f(x) \underset{[a,b]}{\leq} \lambda(x) + \mu \int_{x_0}^x f(s)ds$, то

$$\forall x \in [a,b] : f(x) \leq \lambda(x) + \mu \int_{x_0}^x e^{\mu(x-s)} \lambda(s) ds$$

$\bigtriangledown\ x \geq x_0, \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(s)ds \implies 0 \leq f(x) \leq \lambda(x) + \mu F(x)$

$F'(x) \leq \lambda(x) + \mu F(x)$ домножим на $e^{-\mu(x-x_0)}$:

$e^{-\mu(x-x_0)} F'(x) \leq \lambda(x) e^{-\mu(x-x_0)} + \mu e^{-\mu(x-x_0)} F(x)$

$-\mu e^{-\mu(x-x_0)} F(x) + e^{-\mu(x-x_0)} F'(x) \leq \lambda e^{-\mu(x-x_0)}$

Левая часть это производная $e^{-\mu(x-x_0)} F(x)$. Домножим всё на $dx$:

$e^{-\mu(t-x_0)} F(t) \Big|_{x_0}^x$. Нижний предел не даёт вклада, поэтому:

$F(x) \leq \int_{x_0}^x e^{-\mu(s-x_0)} \lambda(s) ds$. Домножим на $e^{\mu(x-x_0)}$:

$F(x) \leq \int_{x_0}^x e^{\mu(x-s)} \lambda(s) ds \quad | \cdot\mu \quad | +\lambda(x)$:

$f(x) \leq \lambda(x) + \mu F(x) \leq \lambda(x) + \mu \int_{x_0}^x e^{\mu(x-s)} \lambda(s) ds \quad \triangle$

$\bigtriangledown\ \Phi = e^{A(t-t_0)} \impliedby$

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A\Phi \implies y(t) = e^{A(t-t_0)} y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \big(g(s, y(s)) + h(s, y(s)), \alpha\big) ds \\ \Phi(t_0) = I \end{cases}$$

$\mathbb{R}\lambda_j < 0$, $\max_j \mathbb{R}\lambda_j = -\lambda < 0$, $|\lambda_j(e^{A(t-t_0)})| < e^{-\lambda(t-t_0)}$, $\lambda > \varepsilon_0 > 0$

$\|y\| = \sup_{t \in [t_0, \infty)} \|y(t)\|$,

$\|y(t)\| \leq \|e^{A(t-t_0)}\| \|y_0\| + \int_{t_0}^t \|e^{A(t-s)}\| \big(\|g\| + \|h\|\big) ds \leq e^{-\lambda(t-t_0)} \|y_0\| + \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} \big(\|g\| + M_0 \|\alpha\|\big)$

Умножим всё на некую константу $k > 1$

В силу условия номер два для $\varepsilon_0 > 0\ \exists \delta_0 > 0 : \forall y : \|y\| < \delta_0,\ \|g(t, y)\| \leq \varepsilon_0 \|y\|/k$

Пусть $\|y_0\| < \delta_0$. Тогда $\exists [t_0, \bar{t}] : \forall t \in [t_0, \bar{t}]\ \|y\| < \delta_0$

Умножим оценку на $e^{\lambda(t-t_0)}$

$$\|y(t)\| \leq k e^{-\lambda(t-t_0)} \|y_0\| + \frac{1}{\lambda} M_0 \|\alpha\| \big(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}\big) + \varepsilon_0 \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} \|y(s)\| ds$$

Домножим на $e^{\lambda(t-t_0)}$ и положим $\varphi(t) = e^{\lambda(t-t_0)} \|y(t)\|$:

$$\varphi(t) \leq \Psi(t) + \varepsilon_0 \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$$

$b = \frac{k}{\lambda} M_0 \|\alpha\|, a = k\Big(\|y_0\| - \frac{M_0\|\alpha\|}{\lambda}\Big), \Psi(t) = a + b e^{\lambda(t-t_0)}$

ГРАНУОЛЛ: $\Psi(t) \geq 0, \varphi \geq 0$

$$\varphi(t) \leq \Psi(t) + \varepsilon_0 \int_{t_0}^{t} e^{\varepsilon_0(t-s)} \Psi(s) ds$$

$$\varphi(t) \leq a + be^{\lambda(t-t_0)} + \varepsilon_0 \int_{t_0}^{t} \left(ae^{\varepsilon_0(t-s)} + b^{\varepsilon t - \lambda t_0} e^{(\lambda-\varepsilon_0)s}\right) ds$$

$$\varphi(t) \leq \frac{e^{\lambda(t-t_0)} b}{\lambda - \varepsilon_0} + \left(a - \frac{\varepsilon_0 b}{\lambda - \varepsilon_0}\right) e^{\varepsilon_0(t-t_0)}$$

Умножим на $e^{-\lambda(t-t_0)}$:

$$\|y(t)\| \leq \frac{\lambda b}{\lambda - \varepsilon_0} + \left(a - \frac{\varepsilon_0 b}{\lambda - \varepsilon_0}\right) e^{-(\lambda-\varepsilon_0)(t-t_0)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

$$\|y(t)\| \leq \max\{a + b = k\|y_0\|, \frac{\lambda b}{\lambda - \varepsilon_0} = \frac{kM_0\|\alpha\|}{\lambda - \varepsilon_0}\}$$

Пусть $\|y_0\| < \frac{\delta_0}{k}, \|\alpha\| \leq \frac{\delta_0(\lambda-\varepsilon_0)}{kM_0} \implies \|y(t)\| < \delta_0, \quad t \in [t_o, \bar{t}]$

Пусть не выполняется на луче

$\bigtriangledown t \to \infty$

$\aleph \exists t^* \|y(t^*)\| = \delta_0$ и $t^*$ первый такой элемент

$t^* > t_0$

$t \in [t_0, t^*) \quad \|y(t)\| < \delta_0$ на $[t_0, t^*]$ тоже окажется

взял $k$ поблии $t^* \leq \bar{t}, \|y(t)\| < \delta_0$