Алгебра

4 октября 2022

Теорема 1. *V – в. п. над полем K, $\dim V = n < \infty$, $f \in \mathrm{End}(V)$*

f диагонализируем $\Leftrightarrow \exists$ базис V, состоящий из собст. вект. оператора f

Доказательство.

1. $\Rightarrow \exists$ базис $v_1, \ldots, v_n$

$$[f]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad f(v_i) = \lambda_i v_i \quad v_i \text{ – с. в., отвечающее с. ч. } \lambda_i$$

2. $\Leftarrow v_1, \ldots, v_n$ – базис из с. в.

   $f(v_i) = \lambda_i v_i$

$$[f]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

Формулировка теоремы о Жордановой нормальной форме

V - в. п. над полем K, $\dim V = n < \infty$, $f \in \mathrm{End}(V)$

$\lambda \in K$

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & \lambda \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ – жорданова клетка, размера } n \text{, отвечающая } \lambda$$

$$J_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}$$

$$J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Определение. *Блочно-диагональная матрица, составленная из жордановых клеток, называется жордановой матрицей*

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{n_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{n_k}(\lambda_k)} \end{pmatrix}$$

Теорема 2. *(о жордановой нормальной форме)*

K – алгебраически замкнутое поле

V – в. п. над K, $\dim V < \infty$, $f \in \mathrm{End}(V)$

Тогда $\exists$ базис V, такой что матрица f в этом базисе – жорданова матрица, причем жордановы клетки определены однозначно с точностью до порядка.

Определение. *Базис в теореме называется жорданвым базисом, а соответствующая жорданова матрица – канонической жордановой формой оператора f.*

Жорданова форма однозначна с точностью до порядка следования клеток

Жорданов базис, вообще говоря, неоднозначем (только когда оператор диагонализием с папарно разл. λ)