

Линейные и нормированные пространства

L – линейное пространство

$\| \cdot \|$ – норма

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), x \in L$$

Нормированное пространство

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

Замечание. Норма всегда порождает метрику (нормированное \Rightarrow метрическое).

Замечание. \forall конечномерное пространство полное.

Определение. Полное нормированное пространство \Leftrightarrow банахово.

Пример 1. Неполное нормированное пространство:

$$C([0; 1]), \quad \|f\|_L = \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x) dx \rightarrow 0 \implies \exists N : n > N, \int_0^{\frac{1}{2}} (...) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - f_n(x)) dx \rightarrow 0 \implies \exists N : n > N, \int_{\frac{1}{2}}^1 (...) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon \exists N \forall n, m > N : \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx < \varepsilon - \text{пос-ть Коши, но нет предела}$$

Можно дополнить его до полного, получится:

$$L_1(0, 1) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \int_0^1 |f_n(x)| dx < \infty\}$$

$C([0, 1])$ будет полным по другой норме: $\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$

Линейные операторы

Определение. Линейный оператор

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad A : L \rightarrow M, \quad L, M - \text{любые пространства}$$

Если $M = \mathbb{R}/\mathbb{C}$, то A - функционал

Замечание. Операторы из \mathbb{R}^m в $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$ матрицы $\text{Mat}^{m,n}$

Норма оператора

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_M}{\|x\|_L}, \quad M, L - \text{нормированные пространства}$$

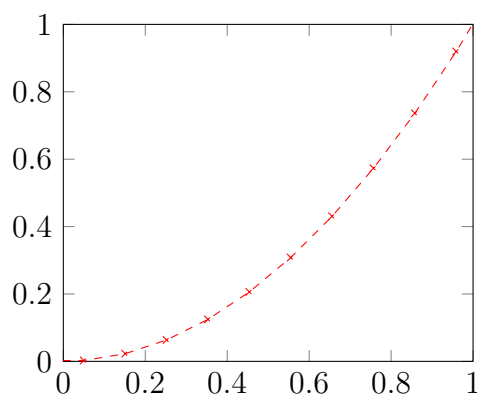
Пример 2. Неограниченный оператор:

$$L = C^1([0, 1]), \quad M = C([0, 1]) \quad \|f\| = \sup_{[0,1]} |f|$$

$$\|f\| = \max_{[0,1]} |f|$$

$$(Af)(x) = f'(x)$$

$$f_n(x) = x^n \quad \|f_n\| = 1 \quad \forall n \quad Af_n = f'_n = nx^{n-1} \quad \|Af_n\| = n$$



$$\frac{\|Af_n\|}{\|f_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Предложение.

$$\|A\| = \sup_{x \in B_1(0) \setminus \{0\}} \|Ax\| = \sup_{x \in S_1(0)} \|Ax\| = \sup_{x \in B_1(0) \setminus \{0\}} \|Ax\| = \inf\{c : \|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in L\}$$

$B_r(x) = \{y \in L : \|y - x\| < r\}$ – открытый шар радиуса r

$B_r[x] = \{y \in L : \|y - x\| \leq r\}$ – замкнутый шар радиуса r

$\bar{B}_r(x) \neq B_r[x]$, где $\bar{B}_r(x)$ – замыкание

$S_r(x) = \{y \in L : \|y - x\| = r\}$ – сфера

Предложение. $A \in B(L)$ (– множество ограниченных линейных операторов) \Leftrightarrow
 A непр. в точке 0 $\Leftrightarrow A$ непр. в $\forall x \in L \Leftrightarrow A$ равн. непр. на L .

Замечание.

$$\|A_1 \cdot A_2\| \leq \|A_1\| \cdot \|A_2\|$$

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad A \in \text{Mat}^{n,n} \quad \|A\| \leq \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{i,k}^2|}$$

Определение. Матрицы $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ эквивалентны, если $\exists c_1, c_2 > 0$ т. ч.

$$\forall x \in L \quad c_1 \|x\| \leq |x| \leq c_2 \|x\|$$

$$\text{Тогда } \|A\| \sim \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}| \sim \max_{i,k \in \{1, \dots, n\}} |a_{ik}| \sim \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2}$$

Замечание.

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \exists a \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = (a, x) \quad \|A\|_{B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} = \|a\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \exists a \in \mathbb{R}^n \quad \exists x \in \mathbb{R} : Ax = a \cdot x \quad \|A\|_{B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} = \|a\|_{\mathbb{R}^n}$$

Обратный оператор

$A : L \rightarrow M$ – линейный оператор

1. $\exists B : M \rightarrow L : AB = I_M$ – ед. оператор в пространстве M

$B \Leftarrow$ правый обратный

2. $\exists C : M \rightarrow L : CA = I_L$ – ед. оператор в пространстве L

$C \Leftarrow$ левый обратный

3. \exists оба и равны, $A^{-1} \Leftarrow$ обратный оператор

$$A \in \text{Mat}^n : \exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker } A = \{0\} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \text{rank } A = n$$

Теорема 1. $A \in B(\mathbb{R}^n), \exists A^{-1}, B \in B(\mathbb{R}^n), \|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

Тогда B обратим,

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|}, \quad \|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|B - A\|}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|}$$

Доказательство. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Bx\| = \|Ax - (A - B)x\| \geq \|Ax\| - \|(A - B)x\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\| \cdot \|x\| = \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\| \right) \|x\|$$

Так как:

$$\|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} \iff x = (A^{-1})(Ax) \quad \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|$$

$$Bx = 0 \Rightarrow \|x\| = 0, \text{ так как } (\|Bx\| \geq \|x\| \cdot \underbrace{(\dots)}_{>0}) \Rightarrow x = 0 \quad \text{Ker } B = \{0\} \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$\begin{aligned} y &= Bx \\ x &= B^{-1}y \end{aligned} \quad \|y\| \geq \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\| \right) \|B^{-1}y\|, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|}$$

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(I - BA^{-1}) = B^{-1}(A - B)A^{-1}$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|A - B\| \cdot \|A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|B - A\|}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|}$$

□

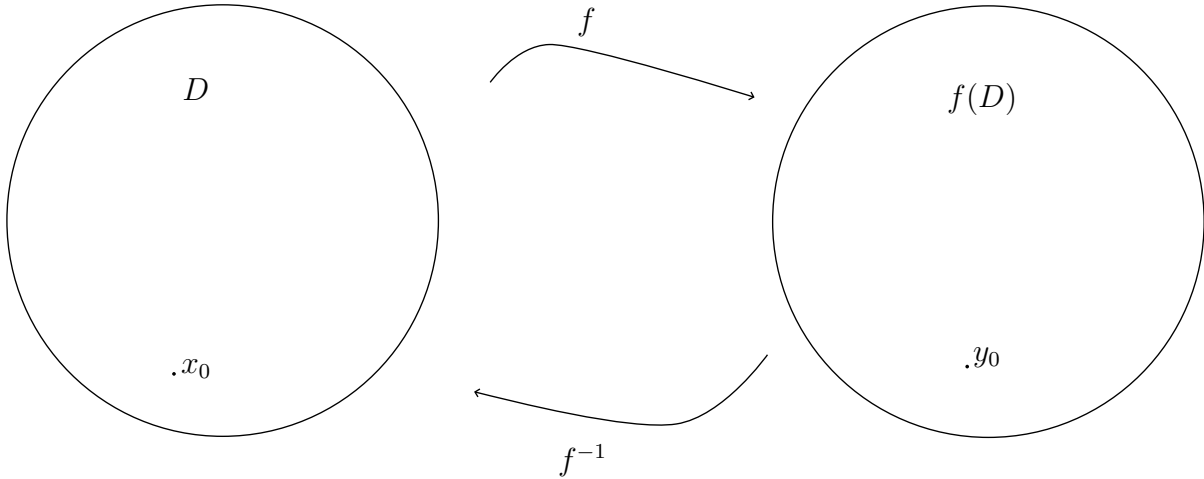
Замечание.

1. Множество обратимых операторов открыто
2. Отображение $A \mapsto A^{-1}$ непрерывно

Дифференцирование обратной функции

$$D \subset \mathbb{R}^n \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad x \in \text{Int } D \quad \exists A \in B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

Определение. Если $f(x + h) = f(x) + Ah + o(\|h\|)$, $h \rightarrow 0$, тогда говорят A – производная f в точке x .



Пример 3.

$$1. f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$2. \ n = 1 \quad f \in C^1(D, \mathbb{R})$$

$$f'(x_0) \neq 0$$

$$f|_U - \text{биекция между } U \text{ и } V$$

$$\exists (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \begin{matrix} f \in C^1(U, V) \\ f^{-1} \in C^1(V, U) \end{matrix}$$

Теорема о локальном обращении

$$\text{Рассмотрим } f^{-1} \circ f = \text{id}_D$$

$$\text{Продифференцируем: } (f^{-1})'(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0}) \cdot f'(x_0) = I$$

Пусть теперь есть функция на открытом множестве:

$$D \text{ открыто} \quad f \in C^1(D, \mathbb{R}^n) \quad x_0 \in D \quad f'(x_0) \text{ обратима}$$

$$\text{Домножим на } (f'(x_0))^{-1} \text{ справа: } (f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}$$

Теорема 2. $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$

$$x_0 \in D, \quad f'(x_0) - \text{обратимая матрица}$$

$$\text{Тогда } \exists \text{ окрестность } x_0, \quad U \subset D$$

$$V := f(U) \text{ открыто и } f|_U - \text{биекция между } U \text{ и } V, \quad f^{-1} \in C^1(V, U)$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}, \quad \forall x \in U$$

Доказательство.

$$1. \text{ Пусть } f'(x_0) = I. \text{ При } x, \text{ близких к } x_0, \quad f(x) \neq f(x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

$$\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \frac{\|x - x_0\|}{\|x - x_0\|} + o(1), \quad x \rightarrow x_0$$

$$\exists \text{ окрестность, в которой } \|o(1)\| < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) - f(x_0) \neq 0$$

$$2. \quad f \in C^1(D, \mathbb{R}^n) \Rightarrow f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} I$$

$$\exists r > 0, \quad x_0 : \|f'(x) - I\| < \frac{1}{2} \text{ для } \forall x \in B_r(x_0)$$

$$K = B_{\frac{r}{2}}[x_0] \subset B_r(x_0)$$

$$3. \quad g(x) = f(x) - x$$

$$g'(x) = f'(x) - I \quad \|g'(x)\| < \frac{1}{2}, \quad x \in K$$

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \quad (\text{т. Лагранжа})$$

$$\|f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \leq \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \frac{3}{2}\|x_1 - x_2\| \quad (\text{нер-во треуг., из этого следует инъективность})$$

$$0 \leq \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq C \cdot \|x_1 - x_2\| - \text{из этого следует непрерывность}$$

$$f - \text{биекция из } K \text{ в } f(K)$$

$$f^{-1} - \text{из } f(K) \text{ в } K \text{ непр.}$$

4. $\delta(K)$ компактно, поскольку это сфера, сфера замкнута, сферу можно вписать в куб, куб - компакт, сфера - его замкнутое подмножество, значит тоже компакт.

$$\|f(\cdot) - f(x_0)\|_{\geq 0} \in C(\delta(K), \mathbb{R}), \quad x_0 \notin \delta(K) \quad (\text{вместо точки подставляем } x)$$

$$\text{Если } \inf_{x \in \delta(K)} \|f(x) - f(x_0)\| = 0, \text{ то } \exists x' \in \delta(K) : f(x') = f(x_0).$$

$$\text{Это означало бы, что } x' = x_0 \in \delta(K) \text{ (т. к. } f|_K \text{ биекция)}$$

$$\text{Значит, } \inf_{x \in \delta(K)} \|f(x) - f(x_0)\| > 0. \exists d > 0 \quad B_d(f(x_0)) \cap f(\delta(K)) = \emptyset$$

$$5. \quad V = B_{\frac{d}{2}}(f(x_0))$$

$$x \in \delta(K), \quad y \in V$$

$$\|f(x) - y\| = \underbrace{\|f(x) - f(x_0)\|}_{\|\cdot\| > d} - \underbrace{\|y - f(x_0)\|}_{\|\cdot\| < \frac{d}{2}} > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$

$$h_y(x) = \|f(x) - y\|^2 \in C^1(K, \mathbb{R}_+)$$

$$h_y \text{ достигает минимума - } x_y$$

$$x \in \delta(K) \quad h_y(x) > \frac{d^2}{4}$$

$$x = x_0 \quad h_y(x_0) = \|f(x_0) - y\|^2 < \frac{d^2}{4}$$

$$\Rightarrow x_y \notin \delta(K), \quad x_y \in \text{Int } K$$

Производная скалярного произведения:

$$h'_y(x_y) = (f(x) - y, f(x) - y)' \Big|_{x=x_y} = 2(f(x) - y)^T \cdot f'(x) \Big|_{x=x_y} = 0$$

$$V \subset f(K) \Rightarrow f(x_y) = y \Rightarrow y \in f(K)$$

6. $x \in U$

$$\underbrace{\underbrace{f(x+h)}_{y+k} - \underbrace{f(h)}_y}_{k} = f'(x)h + \varphi(x, h) \quad \frac{\|\varphi(x, h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

$$\text{В силу биекции} \begin{cases} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \\ x + h = f^{-1}(y + k) \end{cases}$$

$$k = f^{-1}(x) \cdot (f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)) + \varphi(f^{-1}(y), h)$$

$$\left(\text{требовали в п. 2: } \|f'(x) - I\| < \frac{1}{2} \Rightarrow \exists (f'(x))^{-1} \right)$$

$$f^{-1}(y + k) = f^{-1}(y) + (f'(x))^{-1} \cdot k - \underbrace{(f'(x))^{-1} \cdot \varphi(f^{-1}(y), h)}_{=o(\|k\|), \|k\| \rightarrow 0}$$

$$(*) \left(\frac{\|(f'(x))^{-1} \cdot \varphi(f^{-1}(y), h)\|}{\|k\|} \right) \leq \frac{\|(f'(x))^{-1}\| \cdot \|\varphi(f^{-1}(y), f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y))\|}{\|k\|}$$

$$\frac{1}{2} \underbrace{\|x_1 - x_2\|}_h \leq \underbrace{\|f(x_1) - f(x_2)\|}_k \leq \frac{3}{2} \underbrace{\|x_1 - x_2\|}_h$$

$$(*) \leq \|(f'(x))^{-1}\| \cdot \underbrace{\frac{\|\varphi(f^{-1}(y), f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y))\|}{\|f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)\|}}_{\xrightarrow[h \rightarrow 0, (k \rightarrow 0)]{} 0} \cdot \frac{\|f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)\|}{\|k\|}$$

$$\Rightarrow \exists (f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$$

7. $(f^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$

$$f^{-1} : y \mapsto f^{-1}(y) \quad f^{-1} \in C(V, U)$$

$$f' : f^{-1}(y) \mapsto f'(f^{-1}(y)) \quad f' \in C(D, \mathbb{R}^n)$$

$$A \mapsto A^{-1} \quad \text{непрерывное отображение}$$

$$\Rightarrow f^{-1} \in C^1(V, U)$$

8. Общий случай $f'(x_0) = A, \det A \neq 0$

$$\tilde{f}(x) := A^{-1}f(x)$$

$$\tilde{f}'(x) = A^{-1}f'(x)$$

$$\tilde{f}'(x_0) = A^{-1}A = I$$

$$\exists U, \tilde{V}, \tilde{f}|_U - \text{биекция}, \tilde{f}^{-1} \in C^1(\tilde{V}, U)$$

$$(\tilde{f}^{-1})'(\tilde{V}) = (\tilde{f}')^{-1}(U)$$

$$f(x) = Af(x) \quad f|_U \text{ биекция м. } U \text{ и } A\tilde{V} := V$$

$$y = A\tilde{f}(x) \quad x = \tilde{f}^{-1}(A^{-1}y) \Rightarrow f^{-1} \in C^1(V, U)$$

$$A^{-1}y = \tilde{f}(x) \quad f^{-1} = \tilde{f}^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(f(x)) &= (\tilde{f}^{-1}) \overbrace{(A^{-1}f(x))}^{=\tilde{f}(x)} A^{-1} = (\tilde{f}'(x))^{-1} A^{-1} = \\ &= (A^{-1}f'(x))^{-1} A^{-1} = (f'(x))^{-1} AA^{-1} = (f'(x))^{-1} \end{aligned}$$

□

Замечание.

$$\begin{cases} f \in C^r(D, \mathbb{R}^n) \\ \dots \\ \dots \end{cases} = \begin{cases} f^{-1} \in C^r(D, \mathbb{R}^n) \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$(f^{-1})' = (f')_{ik}^{-1} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \quad \text{выражается через } \frac{\partial f_l}{\partial x_m}, \quad l, m = 1, 2, \dots, n$$