

Ж. формы нужны чтобы написать ответ в дифф уравнении для фунд. матрицы Φ с точкой = $A\Phi$, A - константа. $\Phi = e$ в степени At
а как посчитать эту экспоненту? идея в жордановых формах
Ликбез: жордановы формы:

Есть матрица $n \times n$ из \mathbb{C} . У матрицы есть собственные числа, чтобы их найти надо построить характеристический полином, которые есть ничто иное как $\det(A - \lambda I) = 0 \implies$ корни.

существует преобразование $A = S^{-1}JS$, где J - набор жордановых клеток.

$J = (J_p)$

$$J_1 = \lambda, J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{на побочной диагонали } 1, \text{ на}$$

основной собственное число, в других местах 0)

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$

рассмотрим λ - собственное число A ,

$\text{rank}(A - \lambda I) < n$. ядро непусто, следовательно ранг не может равняться n .

утв. если матрица $A = A^+$ самосопряженная, то все $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $\lambda_j \neq \lambda_k$. короче лямбды ортогональны.

почему? рассм $\lambda_j(x_{\vec{\lambda}_j}, x_{\vec{\lambda}_k}) = (Ax_{\vec{\lambda}_j}, x_{\vec{\lambda}_k}) = (Ax^{(\vec{j})}, x^{(\vec{k})}) = (x^{(\vec{j})}, A^+x^{(\vec{k})}) = \lambda_k(x_{\vec{\lambda}_j}, x_{\vec{\lambda}_k})$
извините там короче какая-то муть.

короче всегда если есть самосопряженный оператор и все собственные числа разные то они ортогональны. работает только для самосопряженных операторов! там нет блоков, тупа собственные числа стоят

сл. $A = A^+$, $\lambda_j, j = 1 \dots n$ собственные числа кратности 1 $\implies \{x^{(\vec{j})}\}, j = \overline{1, n}$ образует базис в \mathbb{C}^n .

$\exists S$ - унитарное, а в вещественном ортогональное, т.ч. $S^+AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} =$
 $\implies A = S\Lambda S^+$

утв2. $\lambda_j, j = \overline{1, k}$ - подл собств знач A .

индукция по k , при $k = 1$ утверждение очевидно.

индуктивный переход. от противно. пусть они могут быть л.н..

$\alpha_1 x^{(\vec{1})} + \dots \alpha_k x^{(\vec{k})} = 0$ домножим на $\lambda_k, \alpha_1 \neq 0$

$\alpha_1 \lambda_k x^{(\vec{1})} + \dots \alpha_k \lambda_k x^{(\vec{k})} = 0$.

чета под воздействием A лямбды превращаются в л1, л2...лн. и там короче какая-то муть. ну короче такое невозможно.

СЛ. собственные вектора матрицы образуют базис. следовательно матрица имеет диагональную форму. $S^{-1}AS = \Lambda \implies A = S\Lambda S^{-1}$. такое называется нормальной матрицей. собственные числа комплексные.

что делать когда у матрицы ровно $k < n$ различных собственных значений? поскольку их меньше n то может возникнуть ситуация когда отвечающих им векторов

не хватает для построения базиса. а где остальные брать? маленькое замечание: если матрица самосопряженная, то собственных векторов хватает.

это тот случай когда алгебраическая кратность совпадает с геометрической кратностью.

пусть у произвольной матрицы имеется $k < n$ л.н. собственных векторов, а больше собственных векторов нет, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ геометрической кратности p_1, \dots, p_k , $p_1 + \dots + p_k = n$. тогда найдётся набор собственных векторов $\{\vec{e}_1^{(1)}, \dots, \vec{e}_{r_1}^{(1)}, \vec{e}_1^{(2)}, \dots, \vec{e}_{r_2}^{(2)}, \dots, \vec{e}_1^{(k)}, \dots, \vec{e}_{r_k}^{(k)}\}$

$$A\vec{e}_1^{(j)} = \lambda_j \vec{e}_1^{(j)}, \quad A\vec{e}_2^{(j)} = \vec{e}_1^{(j)} + \lambda_j \vec{e}_2^{(j)}, \dots, A\vec{e}_{r_j}^{(j)} = \vec{e}_{r_j-1}^{(j)} + \lambda_j \vec{e}_{r_j}^{(j)}$$

к базису присоединённые вектора $\{\vec{e}_1^{(j)}, \dots, \vec{e}_{r_j}^{(j)}\}$ образует базис в пространстве однородного линейного уравнения. $(A - \lambda_j I)\vec{x} = 0$, r_j – геом кратность, т.е. количество векторов в базисе пространства решения уравнения.

утв3. если собственные значения разные то разумеется собственные подпространства решений $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$ и $(A - \lambda_k I)\vec{x} = 0$ пересекаются только в 0.

от противного. пусть не так. пусть существует вектор \vec{x} , такой что он одновременно лежит в первом и втором пространстве. но тогда можно просто взять и вычесть два уравнения. получится, что матрицы A сократятся и останутся $(\lambda_k - \lambda_j)\vec{x} = 0$, что не возможно, т.к. собственные различны.

в обратную сторону: введем следующее определение. назовём \vec{e}_1 – первый присоединенным вектором первого порядка, \vec{e}_2 – второй присоединенным вектором второго порядка и так далее вплоть до \vec{e}_k – k -тый присоединенным вектором k -го порядка.

опр. \vec{x} – присоединенный вектор первого порядка, отвечающий собственному значению λ , тогда и только тогда, когда если на него подействовать оператором $A - \lambda I$ то получится нулевой вектор. $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \neq \vec{0}$,

$$(A - \lambda I)\vec{y} = 0$$

рассмотрим пространство решений уравнения $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$ в квадрате вектор \vec{x} равно нулю – эль два. вообще говоря имеет место включение эль 1 в эль 2.

в эль 2 есть векторы двух типов. те, кто лежит в эль 1 и те кто не лежит в эль 1, но лежат в эль 2. вот они нас и интересуют.

если у нас есть два соотношения $(A - \lambda I)\vec{x} \neq 0$, $(A - \lambda I)^2 \vec{x} = 0$ то вектор \vec{x} – присоединенный вектор первого порядка.

Для k -того порядка $(A - \lambda I)^{k-1} \vec{x} \neq 0$, $(A - \lambda I)^k \vec{x} = 0$ то вектор \vec{x} присоединенный вектор k -го порядка.

эль 1 лежит в эль 2 лежит в ... лежит в эль k (без равенства), а дальше эль k лежит (а на самом деле равно) эль $k+1$ и т.д.

так как размерность \mathbb{C}^n равно конечному n то существует k когда эль k равно эль $k + 1$. в крайнем случае k станет равно n . а иначе вообще говоря k меньше n .

отсюда вывод:

утв5. если λ – собственное значение, то существует максимальная эль k – макс, которое является ядром оператора $(A - \lambda I)^k$. при этом выполняется свойство:

$$(A - \lambda I)L^{(k-1)} \subset L^{(k)}$$

лямбда - собств знач. цэ эн равно эль 1 прямая сумма Д. если икс лежит в эль 1 то А икс тоже лежит в эль. но если икс лежит в Д то и А икс лежит в Д. при этом можно взять сужение А на эль, которое будет иметь лишь одно собственное значение лямбда. А сужение А на Д не имеет собственного значения лямбда.

лямбда равна нулю. шаг 1 пусть нет присоединенных векторов. значит не существует ненулевого решения. есть только собственные векторы. не существует вектора икс такого что А икс равно нулю и А квадрат икс равно 0. пусть эль равно ядру А, а Д - такие вектор-игреки, которые получаются так: игрек = А вектор икс, где икс из цэ эн.

поскольку размерность ядра А равно к то размерность Д равно н минус к по теореме о рангах.

от противного. пусть не так. пусть есть ненулевой игрек, такой что игрек в Д и игрек в эль. если игрек в эль, то А игрек равно нулю. если игрек в Д, то это значит что игрек равно А вектор икс. А квадрат икс равно 0 следовательно икс - присоединенный вектор первого порядка, а таких векторов не существует по первому шагу.

шаг 2. пусть есть присоединенные вектора. на каком-то этапе рост подпространства остановится. пусть эль пэ максимально нерасширяемое подпространство. эль пэ равно ядру А в степени пэ, Д пэ равно игреки, которые равны А в степени пэ на вектор икс, при иксах их цэ эн. отсюда всё цэ эн - прямая сумма эль пэ и дэ пэ. это верно тогда и только тогда когда эль пэ в пересечении с дэ пэ равно нулю. от противного игрек не равно нулю, игрек из дэ пэ и из эль пэ. тогда из дэ игрек равняется А в степени пэ вектор икс, из эль игрек равен А игрек = 0, А в степени пэ минус 1 вектор икс равен 0. противоречие.

сл. если лямбда 1 собственное значение цэ эн равен эль пэ один один плюс Д пэ один один, лямбда 1, ... лямбда к - собственные значения алг кратности пэ1...пэК, отсюда цэ эн = эль пэ один один плюс эль пэ два два плюс ... плюс эль пэ к к.

сл2. для любого йод существует пэ йод такое что (А минус лямбда И) в степени п йод икс равно 0 для любого икс из эль пэ 1.

опр. базисом пространства эль относительно его подпространства эль с волной мы назовём набор векторов е1...е эль, которые лежат в эль и которые после пополнения базисом эль с волной, которые есть е1 с волной...е эль с волной, получим объединение двух наборов, который будет базисом эль.

в эль пэ базис относительно эль пэ минус один е1...е ку – присоединенные вектора пэ минус первого порядка