Алгебра

4 октября 2022

Теорема. *V - векторное пространство над полем K, $\dim V = n < \infty$, $f \in \mathrm{End}(V)$*

f диагонализируем $\Leftrightarrow \exists$ базис V, состоящий из собст. векторов оператора f

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\exists$ базис $v_1, \ldots, v_n$

$$[f]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad f(v_i) = \lambda_i v_i \quad v_i - \text{с. в., отвеч. с. ч. } \lambda_i$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $v_1, \ldots, v_n$ – базис из собст. векторов

$f(v_i) = \lambda_i v_i$

$$[f]_{\{v_i\}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

§Формулировка теоремы о жордановой нормальной форме

V – векторное пространство над полем K, $\dim V = n < \infty$, $f \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in K$

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ – жорданова клетка размера } n\text{, отчевающая } \lambda$$

$$J_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}$$

$$J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Определение. *Блочно-диагональная матрица, составленная из жордановых клеток, называется жордановой матрицей*

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1}(\lambda)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{n_2}(\lambda)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{n_k}(\lambda)} \end{pmatrix}$$

Теорема (о жордановой нормальной форме).

K – алгебраически замкнутое поле

V – векторное пространство над K, $\dim V < \infty$, $f \in \mathrm{End}(V)$

Тогда $\exists$ базис V, такой что матрица f в этом базисе – жорданова матрица, причем жордановы клетки определены однозначно с точностью до порядка

Определение. *Базис в теореме называется жордановым базисом, а соответствующая жорданова матрица – канонической жордановой формой оператора f*

Жорданова форма однознача с точностью до порядка следования клеток

!Жорданов базис, вообще говоря, неоднозначен (только когда оператор диагонализируем с попарло различными λ)

Следствие 1. *$A \in M_n(K)$, K – алгебраически замкнутое поле.*

$\exists C \in M_n(K)$, $\det C \neq 0$, такой что $C^{-1}AC$ – жорданова матрица

Доказательство. $V = K^n$

$f(v) = Av$

В стандартных базисах $[f]_{\text{ст.}} = A$

По теореме о жордановой форме, $\exists$ базис $v_1, \ldots, v_n$, такой что $[f]_{\text{ст.}}$ – жорданова матрица

C – матрица преобразований координат при переходе от стандартного базиса к $\{v_i\}$

$$[v]_{\text{ст}} = C \cdot [v]_{\{v_i\}}$$

$$[f(v)]_{\text{ст}} = C \cdot [f(v)]_{\{v_i\}}$$

$$[f(v)]_{\{v_i\}} = [f]_{\{v_i\}}[v]_{\{v_i\}}$$

$$C[f(v)]_{\{v_i\}} = A[v]_{\text{ст}} = A \cdot C \cdot [v]_{\{v_i\}}$$

$$[f(v)]_{\{v_i\}} = \underbrace{C^{-1}AC}_{=[f]_{\{v_i\}} \text{ – жорд.}} [v]_{\{v_i\}}$$

□

Пример. $V = \{g \in K[x] \mid \deg g \leq n \quad \mathrm{char}\, K = 0\}$

$$\frac{d}{dx}: \qquad \frac{x^n}{n!}, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \ldots, x, 1$$

$$v_i = \frac{x^{n+1-i}}{(n+1-i)!},\ i = 1, \ldots, n+1$$

$$\frac{d}{dx}(v_i) = \frac{d}{dx}(\frac{x^{n+1-i}}{(n+1-i)!}) = (n+1-i)\frac{x^{n+1-(i+1)}}{(n+1-i)!} = \frac{x^{n+1-(i+1)}}{(n+1-(i+1))!} = v_{i+1}$$

$$\frac{d}{dx}v_{i+1} = \frac{d}{dx} = 0$$

$$i = n : \frac{d}{dx}v_i = v_{i+1}, \qquad i = n+1 : \frac{d}{dx}v_{i+1} = 0$$

§Инвариантное подпространство

V – векторное пространство над полем K (любым)

$f \in \mathrm{End}(V)$, $U \subseteq V$

Определение. U *–* f*-инвариантное подпространство, если* $f(U) \subseteq U$

Пример. $V = K[x]$

$U =< 1, x, \dots, x^n >$

$\frac{d}{dx}$ U *– инвариантно для* $\frac{d}{dx}$

Теорема 1. $\dim V < \infty$, $f \in \mathrm{End}(V)$

$V = U \oplus W$*, причем* U *–* f*-инвариантно*

Тогда $\exists$ *базис* V*, в котором матрица* f *верхняя блочно-треугольная*

Доказательство.

$u_1, \dots, u_r$ – базис U

$w_{r+1}, \dots, w_n$ – базис W

$f(u_i) \in U \quad (U$ – f-инв.$) \Leftrightarrow$

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{r} c_{ij}u_i = \sum_{i=1}^{r} c_{ij}u_i + \sum_{j=r+1}^{n} 0 \cdot w_i$$

$f(w_j) \in V \Leftrightarrow$ раскладывается по базису

$$[f] = \begin{pmatrix} \boxed{*} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \text{ – верхняя блочно-треугольная матрица}$$

□

Теорема 2. $\dim V < \infty$, $f \in \mathrm{End}(V)$

$V = U \oplus W \quad (U, W \neq \{0\}) \quad U, W$ *–* f*-инварианты*

Тогда $\exists$ *базис* V*, в котором матрица* f *– блочно-диагональная*

Доказательство.

$u_1, \dots, u_r$ – базис U

$w_{r+1}, \dots, w_n$ – базис W

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{r} c_{ij}u_i + \sum_{i=r+1}^{n} 0 \cdot w_i$$

$$f(w_j) = \sum_{i=1}^{r} 0 \cdot u_i + \sum_{i=r+1}^{n} d_{ij} w_i$$

$\square$

Теорема 3. $\dim V < \infty$, $f \in \mathrm{End}(V)$

$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k \quad (U_i \neq \{0\}) \quad U_i$ – *f-инварианты,* $i = 1, \dots, k$

Тогда $\exists$ базис V, в котором матрица f – блочно-диагональная и размер i-го диагонального блока есть $\dim U_i$

Доказательство. аналогично (как в Т. 2 выбираем базисы U_i) $\square$

§Многочлены от оператора

V – векторное пространство над K, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$

$\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ раз прим. } \varphi}$, $\varphi^\circ = \mathrm{id}$ – тожд. оператор

$g, h \in K[x]$

$g(\varphi) + h(\varphi) = (g + h)(\varphi)$

$h = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$

$g(\varphi) \cdot h(\varphi) = (c_0 \mathrm{id} + c_1 \varphi + \dots + c_m \varphi^m)(b_0 \mathrm{id} + b_1 \varphi + \dots + b_n \varphi_n) =$

$$= \sum_{i,j} (c_i \varphi^i)(b_j \varphi^j) = \sum_{i,j} c_i b_j \varphi^{i+j} = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i+j=k} c_i b_j) \varphi^k = (gh)(\varphi)$$

Следствие. *многочлены от* 1 *оператора коммутируют:*

$$g(\varphi)h(\varphi) = (gh)(\varphi) = (hg)(\varphi) = h(\varphi)g(\varphi)$$

Теорема 4. V – *векторное пространство над* K, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $g \in K[x]$

Тогда $\mathrm{Ker}\, g(\varphi)$ *и* $\mathrm{Im}\, g(\varphi)$ – *f-инвариантные подпространства*

Доказательство.

1. $\mathrm{Ker}\, g(\varphi) = \{v : g(\varphi)(v) = 0\}$

   $v \in \mathrm{Ker}\, g(\varphi)$

   $\Rightarrow \varphi(v) \in \mathrm{Ker}\, g(\varphi)$

   $g(\varphi)(\varphi(v)) = g(\varphi)\varphi(v) = (\varphi \cdot g(\varphi))(v) = \varphi(g(\varphi(v))) = \varphi(0) = 0$

2. $\mathrm{Im}\, g(\varphi) = \{g(\varphi)(v) : v \in V\}$

   $w \in \mathrm{Im}\, g(\varphi)$

   $\Rightarrow \varphi(w) \in \mathrm{Im}\, g(\varphi)$

$w = g(\varphi)(v)$ для некоторого $v \in V$

$\varphi(w) = \varphi(g(\varphi))(v) = (\varphi g(\varphi))(v) = (g(\varphi)\varphi)(v) = g(\varphi)(\varphi(v)) \in \operatorname{Im} g(\varphi)$

$\square$