1 начало

Диффура (ОДУ) - обыкновенные диффиренциальные уравнения

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

- обычное дифф уравнение n-ного порядка

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$$

Это был общий вид.
Канонический вид:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

второй закон ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1}$$
$$m\vec{X}''(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t), \vec{x}'(t)) \tag{2}$$

это типичное дифф. уравнение
Задача Коши:
Теорема Пикара: $\exists!$ решения задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \text{ чета пусто непон} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y = \varphi(x)$ - ищем такое решение
$(x_0, y_0) \in Int(X, Y)$
1) $f \in C(\overline{X}, \overline{Y}), X, Y$ - области
2) Функция Липшицева по y, равномерна по $x \in \overline{X}$, если
$\exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

Доказательство: Возьмём интрегал от задачи Коши:

$$\int_{x_0}^{x} y'(x)dt = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dt \implies y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \implies y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

Теперь решим после стрелочки вправо:

$$\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= y_0 \\ \varphi_1 &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))dt \\ &\dots \\ \varphi_m &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{m-1}(t))dt \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\varphi_k \in C(\overline{X} \subset \overline{K}), K - \text{компакт}, \varphi_k \overset{k}{\rightrightarrows} \varphi, k \to \infty$$

$$\varphi_0(x)+\big(\varphi_1(x)-\varphi_0(x)\big)+\big(\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\big)+\ldots =? = \varphi_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k-\varphi_{k-1}) \leq \text{ суммируемая мажоранта}$$

чета про веерштраса и мажоранты посчитаем модуль разницы

$$\big|\varphi_m(x) - \varphi_{m-1}(x)\big| \leq \int_{x_0}^{x} \Big|f\big(t, \varphi_{m-1}(t)\big) - f\big(t, \varphi_{m-2}(t)\big)\Big| dt \leq^{\text{липшецевость}}$$

$$x, x_0 \in K - \text{ компакт}$$

$$\leq L \int_{x_0}^{x} \big|\varphi_{m-1}(t) - \varphi_{m-2}(t)\big| dt \leq$$

по индукции предполгаем, что этот модуль не превосходит ...

$$M = \max_{x,y \in (\overline{X}, \overline{Y})} |f(x, y)|$$

$$\max_{x \in K} \big|\varphi_m(x) - \varphi_{m-1}(x)\big| \leq \frac{ML^{m-1}|x - x_0|^m}{m!}$$

продолжение дела...

$$\leq L \int_{x_0}^{x} \big|\varphi_m(x) - \varphi_{m-1}(x)\big| dt \leq \frac{ML^{m-2}L}{(m-1)!} \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^{m-1} dt \leq \frac{ML^{m-1}|x - x_0|^m}{m!}$$

База $|\varphi_1 - \varphi_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)| dt$

$$\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \leq \frac{M}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{L^m|x - x_0|^m}{m!} = |\varphi_0| + \frac{M}{L}(e^{L|x-x_0|} - 1)$$

$$\varphi_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi_{k-1}(t)\big) dt \leq M|x - x_0|, k \to \infty$$

равномерно перделим $\varphi_k(x)$ к $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big) dt$$

чета по теореме Бэроу про переменный верхний пердел показали существование короче.
$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big) dt \mid \cdot \frac{d}{dx}$
$\begin{cases} y' = f\big(x, y(t)\big) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
осталась единственность. Положим, что есть два решения. φ и ψ.

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \psi(t)\big) dt \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big) dt$$

$|\psi(x)-\varphi(x)|$
$\upuparrows$
$|\psi(x)-\varphi_m(x)| \leq \displaystyle\int_{x_0}^{x} \Big|f\big(t,\psi(t)\big)-f\big(t,\varphi_{m-1}(t)\big)\Big|dt$
$\leq L \displaystyle\int_{x_0}^{x} |\psi-\varphi_{m-1}|dt = M\frac{L^{m-1}|x-x_0|^m}{m!} \to 0$
база: $|\psi(x)-\varphi_0| \leq \displaystyle\int_{x_0}^{x} \big|f\big(t,\psi(t)\big)dt\big| \leq M|x-x_0| \to 0, m\to\infty$
ип: $|\psi-\varphi_m| \leq \frac{L^m M|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!}$
$\implies \psi=\varphi$
доказали на компакте $K\subset U_\varepsilon(x_0)$. Он входит в некую окрестность точки x_0.
// M связно, если для любых двух открытых множеств G_1, G_2 и $M\in G_1\cup G_2$ и $G_1\cap G_2\neq\varnothing$

Следствие 1:
Пусть $\overline{x}=[x_0-a,x_0+a]$, $\overline{y}=[y_0-b,y_0+b]$ - отрезки.
$\exists$ пикаровский интервал $[x_0-h,x_0+h]$, φ - решение задачи коши:
$\forall x\in[x_0+h,x_0-h], h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$
$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\big(t,\varphi(t)\big)dt$

$|\varphi(x)-y_0|\leq M|x-x_0|\leq b$

Следствие 2:
$\begin{cases}\vec{y}'(x)=\vec{f}\big(x,\vec{y}(x)\big)\\ \vec{y}(x_0)=\vec{y}^{(0)}\end{cases}$
$\vec{y},\vec{f}\in\mathbb{R}^n$

1.)$\vec{f}\in C(\overline{X},\overline{Y})$
2.)$||\vec{f}(x,\vec{y}^{(1)}-\vec{f}(x,\vec{y}^{(2)})||\leq L||\vec{y}^{(1)}-\vec{y}^{(2)}||$

Следствие 3:

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x,y)\in C(\overline{Y}) \implies L=\max_{K\subset Y}|\frac{\delta f}{\delta y}|$$

Следствие 4:

пусть условие липшевости выполнено независимо

$\forall a>0, ||\vec{y}||<\infty \exists L_a = L$

$||f(x,\vec{y}^{(1)}) - f(x,\vec{y}^{(2)})|| \leq L||\vec{y}^{(1)} - \vec{y}^{(2)} \implies \exists!\vec{\varphi}(x)||$, определенная на $[x_0 - a, x_0 + a]$

Если же $L_a = L(a) \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}$, то вообще говоря не всякое решение продолжимо, даже на отрезке $[x_0 - a, x_0 + a]$

Непрерывная зависимость решения задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x, y_1) \\ y(x_0) = m \end{cases}$

$z = y - m \implies \begin{cases} z' = f(x, z + m) \\ z(x_0) = 0 \end{cases} = f(x, z, m)$

Теорема:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, m) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1. $f(x, y, m) \in C(\overline{D}), \overline{D} = \{|x - x_0| \leq y, |y - y_0| \leq b, |m - m_0 \leq c|\}$
2. $|f(x, y, m) - f(x, y_2, m)| \leq L|y_1 - y_2|$

$\implies [x_0 - h, x_0 + h), h_1 = \min\{a, \frac{b}{m}\}$
$\exists!\varphi_m(x) \in C_m[m_0 - c, m_0 + c]$

Литература:

- Курс обыкновенных диффуров. Петровский
- Чето тоже про дифуры. Эльцгольц