Математический анализ

12 сентября 2022

Следствие 1. *(th. о локальном обращении)*

$D \subset \mathbb{R}^n$, открыто, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $f'(x)$ обратима при $\forall x \in D$

Тогда для $\forall$ открытого $G \subset D \quad f(G)$ открыто

Доказательство. Докажем сначала для $G = D$

$$\forall y \in f(D) \quad f^{-1}(y) := x \quad f(x) \text{ обр.},$$

$$\exists U \text{ крестность } x : f(U) \text{ открыто}$$

$$y \in f(U) \subset f(D)$$

$$\Rightarrow f(U) \text{ - окр-ть } y$$

$$\text{т. о. } f(D) \text{ открыто}$$

Пусть $G \subset D$, открыто. Рассмотрим $f\big|_G \Rightarrow$

$\Rightarrow$ принимая доказанное $\Rightarrow$

$f\big|_G(G) = f(G)$ – открыто □

f – биекция

образ $\forall$ открытого множества открыт $\quad f$ – окрытое отображение

прообраз $\forall$ открытого множества открыт, $\quad f$ – непрерывное отображение

Определение. *Если и то, и другое, то f – гомеоформизм*

$f : U \to V$

$f^{-1} \in C(V, U)$

$f \in C(U, V)$

Определение. *Если $f : U \to V$ – биекция, $f \in C^r(U, V)$,*

$f^{-1} \in C^r(V, U)$, то f – диффеоморфизм гладкости $r \in [0, \infty]$

Неявно заданные отображения

$D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, открытое $\quad \Phi \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$

$D \ni a = (x, y)$, задана $\quad \Phi(x, y) = 0$

$$\Phi'(a) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dfrac{\partial \Phi_1}{x_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_1}{x_n} & \dfrac{\partial \Phi_1}{y_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_1}{y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{x_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_m}{x_n} & \dfrac{\partial \Phi_m}{y_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_m}{y_n} \end{array} \right)$$

$\Phi'(a)(h,k) = \Phi'_x(a)h + \Phi'_y(a)k$

Ищем такую $y = \varphi(k)$, что $\Phi(x, \varphi(x)) = 0$

Пример 1. $x^2 + y^2 = 1 \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + 1$

$\Phi'(x, y) = (2x \ 2y)$

$\Phi'_x = 2x$

$\Phi'_y = 2y$

Пример 2. $\Phi(x, y) = Ax + By \quad B$ – *квадратная*

B *обратима* $\Leftrightarrow$ *уравнение разрешимо*

$$\Phi'_x = A \quad \Phi'_y = B$$

$$\underbrace{\Phi(x, y)}_{=0} = \underbrace{\Phi(x_0, y_0)}_{=0} + \Phi'(x_0, y_0)(x - x_0) +$$

$$+\Phi'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(x - x_0, y - y_x), \quad x \to 0 \ y \to 0$$

$\Phi'_y(x_0, y_0)$ – *обратима*

Теорема 1. $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, *открыто*, $\Phi \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$

$\Phi(x_0, y_0) = 0 \ (x_0, y_0) \in D, \ \Phi'_y(x_0, y_0)$ – *обратимо. Тогда*

$\exists U$ – *окр.* x_0, V – *окр.* y_0, $U \times V = D$

1. $\forall x \in U \ \exists! y \in V : \Phi(x, y) = 0$

   (это задает отображение $\varphi : U \to V, \ y = \varphi(x)$*)*

2. $\varphi \in C^1(U, V), \ \forall x \in U, y \in V \quad \Phi'_y(x, \varphi(x))$ *обратимо*

3. $\varphi'(x) = -(\Phi_y(x, \varphi(x)))^{-1}\Phi'_x(x, \varphi(x)) = -(\Phi'_y(x, \varphi(x)))^{-1}\Phi_x(x, \varphi(x))$

Доказательство.

1. $F(x, y) = (x, \Phi(x, y)) : D \to \mathbb{R}^{n+m}$

$$F'(x, y) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \Phi'_x(x, y) & \Phi'_y(x, y) \end{array}\right)$$

$$F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n+m})$$

$$\det F'(x, y) = \det \Phi'_y(x, y)$$

$$\Phi'_y(x_0, y_0) \text{ обратимо} \Rightarrow F'(x_0, y_0) \text{ обратимо}$$

Th. о локальном обращении

$\exists \hat{U}$ – окрестность $(x_0, y_0) : F(\hat{U}) = \hat{V}$ открытое,

$F\big|_{\hat{U}}$ – биекция, $F^{-1} \in C^1(\hat{V}, \hat{U}), \ F(x_0, y_0) = (x_0, 0)$

$\exists\delta>0\ \hat{\hat{U}}=B^n_\delta(x_0)\times B^m_\delta(y_0)\subset U$

$\hat{\hat{U}}\subset B^{n+m}_{\sqrt{2}\delta}\subset U,\quad n,\ m$ – размерности

$(x_0,0)\in F(\hat{\hat{U}})\subset\hat{V}$

$\exists\varepsilon>0: B^{n+m}_\varepsilon(x_0,0)\subset F(\hat{\hat{U}})$

$\underbrace{B^n_\varepsilon(x_0)}_{=\hat{\hat{V}}}\times\{0\}\subset F(\hat{\hat{U}})$

$\forall x\in\hat{\hat{V}}\quad F^{-1}(x,0)=:(x_1.y)$

Это означает

$$(x,\Phi(x,y))=F(x,y)=(x,0)$$

$\Rightarrow x_1=x,\ \Phi(x,y)=0\quad$ (отсюда следует $\varepsilon<\delta$)

$$\forall x\in\underbrace{B^n_\varepsilon(x_0)}_{=U}\ \exists y\in\underbrace{B^n_\delta(y_0)}_{=V}:\Phi(x,y)=0$$

Если $\exists x\in U, y_1,y_2\in V:\Phi(x,y_1)=\Phi(x,y_2)=0$

то $F(x,y_1)=(x,0)=F(x,y_2)$

F биект. и $\hat{\hat{U}}\Rightarrow y_1=y_2$

2. $y=\pi_2(x,y)=\pi_2\circ F^{-1}(x,0)$

   $\pi_2:(x,y)\mapsto y\in C^1(\mathbb{R}^{m+n},\mathbb{R}^m)$

   $F^{-1}\in C^1(\hat{V},\hat{U})$

   $E:x\mapsto(x,0)\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n+m})\quad EU=U\times\{0\}\subset\hat{V}$

3. $\Phi(x,\varphi(x))=0$

   $0=\Phi'(x,\varphi(x))=\Phi'(x,\varphi(x)),\quad\begin{pmatrix}I\\\varphi'(x)\end{pmatrix}=$

   $=\Phi'(x,\varphi(x))+\underbrace{\Phi'_y(x,\varphi(x))}_{\text{обр.}}-\varphi'(x)$

$\square$