Математический анализ

19 сентября 2022

Условный экстремум функции

$D \subset \mathbb{R}^{n+m},\ f : D \to \mathbb{R},\quad z \in D$

$\Phi : D \to \mathbb{R}^m$ условие $\Phi(z) = 0$

Определение. *точка $z_0 \in D$ называется условным экстремумом функции f при условии $\Phi = 0$, если $\Phi(z_0) = 0$ и $\exists U$ – окрестность z_0, $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ $\forall z \in D \cap U$: $\Phi(x) = 0$ выполняется условие $f(z) \geq f(z_0)$ (– условный* $\min$*); $f(z) \leq f(z_0)$ (– условный* $\max$*)*

Пусть $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, открытое, $f \in C^1(D, \mathbb{R}),\ \Phi \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$

z_0 – точка условного экстремума

$\operatorname{rank} \Phi'(z_0) = m$

Перенумеруем координаты $\boxed{\Phi'_x \mid \Phi'_y} = \Phi'$

$z = (x, y)$ так, чтобы было $\det \Phi'_y(z_0) \neq 0 \quad z_0 = (x_0, y_0)$

По *Th. о неявном отображении* $\exists U$ – окрестность x_0:

$$y = \varphi(x),\ x \in U,\ \Phi(x, \varphi(x)) = 0$$

Тогда $f(x, \varphi(x))$ имеет безусловный экстремум в точке x_0 (условие выполняется)

$\Rightarrow^{(1)}\ \underbrace{f'_x(z)}_{1\times n} + \underbrace{f'_y(z)}_{1\times m} \cdot \underbrace{\varphi'(x)}_{m\times n} = 0$ (– это и есть необх. усл. экстремума)

$\varphi'(x_0) = -\left(\Phi'_y(z_0)\right)^{-1} \cdot \Phi'_x(z_0)$

(1) НУО: $f'_x(z) - \underbrace{f'_y(z)\left(\Phi'_y\right)^{-1}}_{=\lambda \text{ (см. след. §)}} \Phi'_x(z) = 0$