фото

Лемма 3. $\exists \lambda_j$ собств. значения A, $\mathbb{R}\lambda_j > 0$. Тогда существует единственное решение $V : \frac{\partial V}{\partial x} Ax = \lambda V + U(x) \implies M^+ \neq \varnothing$

$\triangleright$ $\frac{\partial V}{\partial x} Ax - \lambda V = U(x)$

$\frac{\partial}{\partial x} V(A - \lambda/2I)x$. Из ниже получается что сосбвтенные значения $\lambda_j - \Lambda/2$.

$*\frac{\partial x^2}{\partial x} ax - \lambda x^2$

$2ax^2 - \lambda x^2 = 2x(a - \lambda/2)x = \frac{\partial}{\partial x} x^2 (a - \lambda/2)x$

$L = \lambda_1 + \Lambda_a - \lambda/2 - \lambda/2 \neq 0$. Подберём $\lambda > 0$ так, чтобы L была не ноль. Отсюда существование единственного решения V.

От противного. Пусть для любого лямбда область $M^+ = \varnothing \implies V(x)$ - определённо отрицательна. Тогда $-V(x)$ - определённо положительна, $D(-V(x)) = -U(x) < 0$. Отсюда в силу чета ляпунова хз наша система $\dot{x} = Ax$ асимптотически устойчиво, что как бы не правда. Предположение неверно, существует лямбда сколь угодно малый? $\triangleleft$

Итак, для линейных систем мы доказали существование функции Ляпунова, отсюда для нелинейных систем, для которых в первом приближении существует линейное чё ну короче там функция Ляпунова для линейной части надо проверить.

$\dot{x} = Ax + g(t, x)$, $\frac{\|g(t,x)\|}{\|x\|} \rightrightarrows 0$

Теорема. Если все вещ части собств значений $\mathbb{R}\lambda_j < 0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

$\triangleright$ $\frac{\partial V}{\partial x} Ax = -(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \implies \exists! V$ - определённо положительна.

$DV = \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + g(t, x)) = \underbrace{-(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}_{=-\|x\|^2} + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) = -\|x\|^2 + o(\|x\|^2)$. По теореме Ляпунова об асимпт устойчивости $x = 0$ - асимптотически устойчиво. $\triangleleft$

Теорема. Если существует $\lambda_j, \mathbb{R}\lambda_j > 0 \implies x = 0$ асимпт неустойчиво.

$\triangleright$ $\frac{\partial V}{\partial x} Ax = \lambda V + x_1^2 + \ldots + x_n^2$, $\exists \lambda \geq 0 \implies \exists! V : M^+ \neq \varnothing$

$$DV = \lambda V + x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x} g(t, x)}_{o(\|x\|^2)} \geq 1/2\|x\|^2$$

Отсюда т.к. $M^+ \neq \varnothing$, то выполняются условия теоремы Ляпунова о неустойчивости в силу непустоты вот етонго и положительности производной. $\triangleleft$

Сл. Критический случай $\mathbb{R}\lambda_j \leq 0$. Тогда у нас есть чисто мнимые корни λ_j. У нас нет теоремы для такого. ахаха и что с этим делать? новая тема

Уравнения с частными производными перваго порядка

$(*)\sum_{k=1}^n a_k(\vec{x})\frac{\partial U}{\partial x_k}+b(\vec{x},U)=0$ - полулинейные уравнения в частных производных.

$a_k\in C^1(G),\ \sum a_k^2>0,\ b(\vec{x},U)\subset C^1(x\in G,|U|<M)$

$\{\dot{x}_k=a_k(x)\mid k=1,\ldots,n\}$ - система характеристик уравнения $(*)$. Решение такой системы - некие кривые.

Через каждую точку $x\in G$ проходит только одна траектория движения, характеристика.

Теорема единственности. Если $u=u(\vec{x})$ - решение $(*)$ и оно гладкое на G, тогда значения $u(\vec{x}(t))$ вполне определяются $u(\vec{x}^{(0)}),x^{(0)}\in x(t)$

$\triangleright\quad \sum a_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+b|_{x=x(t)}=\sum\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{dx}{dt}+b=\frac{d}{dt}u(\vec{x}(t))+b=0$

$\begin{cases}\frac{du(x(t))}{dt}=-b(x(t,x_0),u)=\psi(t,u,x^{(0)})\\ u(\vec{x}(t_0))=u(x^{(0)})\end{cases}$ однозначно разрешима. $\triangleleft$

Теорема единственности и существования.

Пусть $S-(n-1)$-мерное гиперповерхность в G:

1.1. S имеет непрерываное поле нормалей $\implies\ \exists$ непрерывное семейство касательных плоскостей.

1.2. S не касается ни одной из характеристик (кривых). ($\dot{x}\notin$ касат плоск)

Пусть на S задана функция $F(\vec{x})$:

2.1. F ограничена на S.

2.2. $\forall x\in S\ \exists U(x): F\in F(x_1,\ldots,x_{n-1})$ локально, когда $\vec{x}\in U(x),f\in C^1(U(\vec{x}))$

Пусть

3.1 $\exists R_0\supset S,\ R_0$ - окрестность S, $R_0\subset G$.

3.2 $\vec{x}(t)\cap S$ проходят далее через R_0 так, что $x(t)$ больше не пересекается с S ($\forall x\in R_0$ проходит ровна одна х-ня)

3.3 $\forall x^{(0)}\in S\begin{cases}\frac{d}{dt}U(x(t))=\psi(t,u,x_0)\\ u(x(0))=F(x^{(0)})\end{cases}$ решение можно продлить вдоль дуги характеристики в R_0 (при этом $|U|<M$)

Тогда существует и единственное решение $U(x)$ в R_0:

1. $U\in C^1(R_0)$

2. $\begin{cases}\sum a_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+b(\vec{x},u)=0\\ U|_S=F\end{cases}$ U - решение этой "задачи Коши"

$\triangleright\quad$ случай $n=2$. Неизвестная функция $z=z(x,y)$.

$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x,y,z)=0$

Х-ри: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = b(x,y) \end{cases}$ Подставляем, получаем

$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + c(x,y,z) \implies \frac{dz}{dt} + c(x,y,z) = 0$

$\exists x = \varphi(t, x^{(0)}, y^{(0)}),\ y = \psi(t, x^{(0)}, y^{(0)})$

Подставим, получаем $\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -c(\varphi(t,x^{(0)},y^{(0)}),\ \psi(t,x^{(0)},y^{(0)})) = X(t,z,x^{(0)},y^{(0)}) \\ z(t_0) = F(x^{(0)},y^{(0)}) \end{cases}$

$S^{(1)} = \{x,y\}$ - кривая. Нарисуем картинку (фото).

Строим значения z вдоль каждой из характеристик, пересекающих S в R_0. Как построить $\bar{S}$? $\bar{S} = (\underbrace{x,y}_{\in S}, F(x,y)),\ \bar{H}(x(t),y(t),z(t))$, где $z = z(x,y)|_H$

$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \chi(t,z,x^{(0)},y^{(0)}) \\ z_0(t_0) = z_0 = F(x^{(0)},y^{(0)}) \end{cases}$

После такого построения поверхности осталось доказать существование $\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}$ таких, что $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt}$

Локальная замена переменных. Введём в точке $A_0(x_0,y_0)$ (и некоторой её окрестности) криволинейные координаты. Пусть касательная к S в точке A_0 не параллельна оси Oy. Тогда для S локально можно считать, что есть зависимость y от x ($y^{(0)} = F(x^{(0)})$), где F гладкая в силу гладкости поверхности. Поскольку правые части системы характеристик гладкие, то решения $\varphi(\dots) = \widetilde{\varphi}, \psi(\dots) = \widetilde{\psi}$ тоже гладкие (по гладкости начальных данных). Переходим от переменных x,y к x,t.

$x^{(0)}, t$ - новые переменные. $x = \widetilde{\varphi}(t,x^0),\ y = \psi(t,x^0)$

Якобиан не ноль? $\dot{\widetilde{\varphi}} = a(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}),\ \dot{\widetilde{\psi}} = b(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) \implies \frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}(t,x_0) = a(\widetilde{\varphi}(t,x_0),\widetilde{\psi}(t,x_0))$

$\frac{d}{dt}\widetilde{\psi} = b(\widetilde{\varphi}(t,x_0),\widetilde{\psi}(t,x_0))$

Правые части гладкие по t, x_0, поменяем местами

$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{d\widetilde{\varphi}}{dt}) = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{dt} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\delta t}$

$\frac{\partial}{\partial t}$ фото короче дальше я устал.

$\triangleleft$