

Алгебра

13 сентября 2022

§5 Алгебраически замкнутые поля

$$K[x]$$

$x - a$, $a \in K$ всегда неприводимые

$x^2 + 1$ неприводим над \mathbb{R}

$x^3 + x^2 + 1$, $x^3 + x + 1$, $x^2 + x + 1$ неприводимы над \mathbb{F}_2

Для многочленов степени 2 и 3 из отсутствия корней следует неприводимость

Теорема. K – поле

Следующие условия эквивалентны:

1. Любой $f \in K[x]$, $\deg f > 0$ имеет в K корень
2. $\forall f \in K[x]$ с $\deg f > 0$ число его корней в K равно $\deg f$ с учетом кратности
3. Любой $f \in K[x]$ $\deg f > 0$ делится на какой-то линейный
4. $\forall f \in K[x]$, $\deg f > 0$ полностью раскладывается на произведение линейных сомножителей:

$$f = b \cdot \prod_{i=1} (x_i - c_i)^{a_i}$$

5. Всякий неприводимый над K линеен

Определение. Поле K , удовлетворяющее любому (а значит всем) из равносильных условий теоремы называется алгебраически замкнутым полем

Доказательство.

$1 \Leftarrow 2$ Если корней $\deg f$, то хотя бы 1 есть

$1 \Leftrightarrow 3$ Теорема Безу

$4 \Rightarrow 3$ Раскладывается \Rightarrow делится

$4 \Leftarrow 5$

$$\begin{cases} f \in K[x] \\ \deg f > 1 \\ f = \text{произв. лин. сомножителей} > 1 \end{cases}$$

$4 \Rightarrow 5$

$$\begin{cases} f = \text{произв. непр. (ОТА)} \\ \text{всякий непр.} - \text{линейный} \end{cases}$$

$3 \Rightarrow 4 \quad f \in K[x], \deg f > 0$

Индукция по $\deg f$

База: $\deg f = 1$ – доказано

Предположение: $\deg f > 1$

По п. 3: $f = (x - c)g(x)$

$\deg g = \deg f - 1$

По и. п. $g(x) = b \cdot \prod_{i=1} (x - c_i)^{a_i} = f \cdot \text{пр-ие лин.}$

$1 \Rightarrow 2$ Индукция по $\deg f$

База: $\deg f = 1$ – выполнено

Предположение: $\deg f > 1$ (по п. 1 у $f \exists$ корень c)

это значит, что $x - c | f$

c – корень f кратности a

$(x - c)^a | f \quad (x - c)^{a+1} \nmid f$

$f_{(x)} = (x - c)^a g(x) \quad g(c) \neq 0$

Если $g = \text{const}$:

$\deg f = a$

c – единственный корень f кратности a

Если $\deg g > 0$:

то т. к. $\deg g \leq \deg f - 1$

по и. п. число корней g с учетом кратности (тут надо дописать дальше)

Всякий корень g – корень f (не меньшей кратности)

$$(x - d)^e | g \Rightarrow (x - d)^e | f$$

d – корень f , отличный от c , тогда d – корень g не меньшей кратности

$$(x - d)^e | f \Rightarrow (x - d)^e | g$$

$d \neq c \Rightarrow x - d, x - c$ взаимно простые

$(x - d)^e, (x - c)$ взаимно простые

$(x - d)^e, (x - c)^e$ взаимно простые

По теореме о сопряжении $(x - d)^e | g$

c - не корень f

Корни f , отличные от c = корни g , причем той же кратности

c – корень f кратности a

$\deg f = \deg g$ (ну тут тоже надо дописать чета похоже)

□

Теорема 1 (Без доказательства).

Поле \mathbb{C} – алгебраически замкнутое

Факты: (Без доказательства)

- 1) Конечное поле содержится в счетном алгебраически замкнутом поле
- 2) Всякое поле содержится в каком-то алгебраически замкнутом