

$\Pi \subset \pi_1 \times \Pi_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ огр и почти везде непр.

Замечание.

1.

$$\int_{\Pi} f = \int_{\Pi_2} dy \int_{\overline{\Pi_1}} f(x, y) dx = \int_{\Pi_2} \overline{\int_{\Pi_1} f(x, y) dx}$$

2. Если $\forall y \in \Pi_2 \exists \int_{\Pi_1} f(x, y) dx$, то

$$\int_{\Pi} f = \int_{\Pi_2} \int_{\Pi_1} f(x, y) dx$$

Пример 1. $\Pi_1 = \Pi_2 = [0, 1]$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, y \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 - \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, y \in [0, 1] \end{cases}$$

f непрерывна на $([0, 1] \setminus \mathbb{Q})^2$

$$(x, y) \in ([0, 1] \setminus \mathbb{Q})^2, \quad f(x, y) = 1$$

$$\forall \varepsilon, \exists Q : \frac{1}{Q} < \varepsilon \quad \text{и} \quad \forall q > 0 : \left| 1 - \frac{1}{q} - 1 \right| < \varepsilon$$

f почти везде непр. на $[0, 1]^2 = \Pi$, огр., $\Rightarrow \exists \int_{\Pi} f$

$$x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} : \quad \int_{\Pi_2} f(x, y) dy = \overline{\int_{\Pi_2} f(x, y) dy} = \int_{\Pi_2} 1 = 1$$

$$x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} : \quad \int_{\Pi_2} f(x, y) dy = 1 - \frac{1}{q}, \quad \overline{\int_{\Pi_2} f(x, y) dy} = 1$$

$$\mathcal{L}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 - \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \quad \text{неогр} \end{cases}$$

$$\mathcal{U}(x) = 1$$

$$\int_{\Pi_1} \mathcal{L} = 1 = \int_{\Pi_1} \mathcal{U} = \int_{\Pi} f$$

Пример 2. $E \subset \Pi = [a, b] \times [c, d]$, $\mu(\partial E) = 0$

$$f \in C(E) \quad \tilde{f} = f \cdot \chi_E$$

$$\int_E f = \int_{\Pi} \tilde{f} = \int_a^b dx \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

$$E = \{(x, y) \in \Pi \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\} = \{(x, y) \in \Pi \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$$

$$\int_E f = \int_a^b dx = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

Замечание. $f \in C([0, 1])$

Тогда $\mu(\text{графика } f) = 0$, график $f = \{(x, f(x)) \mid x \in [0, 1]\}$

Доказательство. $\Rightarrow [0, 1]$ компакт $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[0, 1]$

$$\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [0, 1] : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$\left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil + 1 \text{ интервалов}$$

$$2\varepsilon \frac{\delta}{2} \cdot \underbrace{\left(\left\lceil \frac{2}{\delta} \right\rceil + 1 \right)}_{< 2 \cdot \left\lceil \frac{2}{\delta} \right\rceil} < 4\varepsilon \frac{\delta}{2} \left\lceil \frac{2}{\delta} \right\rceil < 4\varepsilon$$

(любой прямоугольник можно покрыть квадратами сумма площадей которых не больше чем в 2 раза больше площади прямоугольника)

$\Rightarrow \exists$ покрытие квадратами $\sum v(C) < 8\varepsilon$

□

$$\mu(E) = 0, \quad f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ огр. и почти везде непрерывна} \not\Rightarrow \int_{\Pi} f = 0$$

$$E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \quad f \equiv 1, \quad f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}(x) = f(x)\chi_E^{(x)} = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\not\equiv \int_{[0,1]} \tilde{f}, \exists \int_E f$$

$$v(E) = 0 \Rightarrow E \text{ измерима по Жордану и его жорданов объем} = 0$$

Доказательство. $v(E) = 0 : \forall \varepsilon > 0 \exists C_k, k = 1, \dots, N$ (кубы) : $E \subset \bigcup_{k=1}^N C_k$,

$$\sum_{k=1}^N v(C_k) < \varepsilon$$

$$\partial E \subset \bar{E} \subset \bigcup_{k=1}^N C_k$$

$$\Rightarrow v(\bar{E}) = 0, \quad v(\partial E) = 0 \Rightarrow \mu(\partial E) = 0 \Rightarrow E \text{ измеримо по Жордану}$$

$$\exists \Pi \quad E \subset \Pi \quad \forall \varepsilon \quad E \subset \bigcup_{k=1}^N C_k$$

можно считать, что $\forall k \ C_k \in \Pi$

Пусть p – разбиение Π гранями всех C_k

$$v(E) = \int_E 1 = \int_{\Pi} \chi_E \leq U(\chi_E, p) = \sum_{\pi \in p} \sup_{\pi} \chi_E \cdot v(\pi) =$$

$$\sum_{\substack{\pi \in p \\ \pi \in \bigcup_{k=1}^N C_k}} v(\pi) \leq \sum_{k=1}^N v(C_k) < \varepsilon \Rightarrow v(E) = 0$$

□

Лемма 8. $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, $f_1, f_2 : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ *огр.*, *почти везде непр.*
 $\Rightarrow a_1 f_1 + a_2 f_2$ – *огр.* и *почти везде непр.*

$$\int_{\Pi} (a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \int_{\Pi_1} f + a_2 \int_{\Pi_2} f$$

Доказательство. Рассмотрим p, Ξ

$$\begin{aligned} \sum (a_1 f_1 + a_2 f_2, p, \Xi) &= \sum (a_1 f_1(\xi(\pi)) + a_2 f_2(\xi(\pi))) \cdot v(\pi) \\ &= a_1 \sum (f_1, p, \Xi) + a_2 \sum (f_2, p, \Xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Пусть } p_k, \ k \in \mathbb{N}, \ d(p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \ \Xi_k, \ k \in \mathbb{N} : \int_{\Pi} (a_1 f_1 + a_2 f_2) \\ = a_1 \int_{\Pi} f_1 + a_2 \int_{\Pi} f_2 \end{aligned}$$

□

Лемма 9. E_1, E_2 – *измеримы по Жордану*, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$f : E_1 \cup E_2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{огр и почти везде непр}$$

$$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$$

Доказательство. $\tilde{f} = f \cdot \chi_E$

$$\Pi \supset E_1 \cup E_2$$

$$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{\Pi} f \chi_{E_1 \cup E_2} = \int_{\Pi} f \chi_{E_1} + \int_{\Pi} f \chi_{E_2}$$

□

Лемма 10. $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ *огр и почти везде непр*

$$\Rightarrow \left| \int_{\Pi} f \right| \leq \int_{\Pi} |f|$$

Доказательство. $p_k, d(p_k) \rightarrow 0, \Xi_k$

$$|\sum (f, p_k, \Xi_k)| = |\sum_{\pi \in p_k} f(\xi(\pi))v(\pi)| \leq \sum_{\pi \in p_k} |f(\xi(\pi)) \cdot v(\pi)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Pi} |f|$$

□

Лемма 11. $v(E) = 0$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ *огр*

$$\Rightarrow \int_E f = 0$$

Доказательство. $E \subset \Pi$

$$\forall \varepsilon : E \subset \bigcup_{k=1}^N C_k, \sum_{k=1}^N v(C_k) < \varepsilon$$

$$\exists M > 0 : \forall x \in E |f(x)| < M \Rightarrow |\tilde{f}(x)| < M, \forall x \in \Pi$$

Разрежем Π гранями $C_l = k, k = 1, \dots, N \rightarrow$ разбиение p

$$|\int_E f| = |\int_{\Pi} f \chi_E| \leq \int_{\Pi} |f| \chi_E \leq U(|f| \chi_E, p) =$$

$$= |U(f, p)| = |\sum_{\pi \in p} \sup_{\pi} f \chi_E \cdot v(\pi)| \leq \sum_{\substack{\pi \in p \\ \pi \in \bigcup_{k=1}^N C_k}} M \cdot v(\pi) \leq M \sum_{k=1}^N v(C_k) \leq M \varepsilon$$

$$\varepsilon \text{ произвольная} \Rightarrow \int_E f = 0$$

□

Замена переменной в интеграле

$$E \subset \mathbb{R}^n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{supp } f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

Замечание. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ *отрктно и ограничено*

$f : G \rightarrow \mathbb{R}$ *ограничена и почти везде непрерывна*

Если $\text{supp } f \subset G$, то $\exists \int_G$ (независимо от того, какая δG)

Доказательство. $\exists \Pi : G \subset \Pi, \text{supp } f \subset \text{Int } \Pi, \quad \tilde{f} : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ – продолжение f с нулем
 $\{\text{т. разрыва } \tilde{f}\} = \{\text{т. разрыва } \tilde{f} \text{ на } \text{supp } f\} \cup \{\text{т. разрыва } \tilde{f} \text{ в } \text{Int } \Pi \setminus \text{supp } f - \text{откр}\} \cup$
 $\cup \{\text{т. разрыва } \tilde{f} \text{ на } \delta \Pi\} = \emptyset$
 $\text{dist}\{\delta \Pi, \text{supp } f\} > 0$
 $\hat{f}|_{\Pi \setminus \text{supp } f} \equiv 0$

$\{\text{т. разрыва } \tilde{f} \text{ на } \text{supp } f\} \subset \{\text{т. разрыва } f \text{ на } G\}$ – множество меры 0 □

Теорема 1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто и ограничено,

$g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ диффеоморфизм,

$g(G)$ ограничено

$f : g(G) \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и почти везде непрерывна

$\text{supp } f \subset g(G)$

Тогда $\exists \int_G f \circ g |\det g'|$ и

$$\int_{g(G)} = \int_G f \circ g \cdot |\det g'|$$

Определение. G называется областью, если G открыто и связно