$\vec{x} = A\vec{x} \quad e^{At} = Se^{Jt}s^{-1}, e^{Jt} = \text{ diag}\{e^{J_0 t}, \dots e^{J_q t}\}$

$e^{J_k t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_{k+p}t} & \dots & \frac{t^{r-1}e^{\lambda_{k+p}t}}{(r-1)!} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & e^{\lambda_{k+p}t} \end{pmatrix}$

$S \mid \frac{d}{dt}e^{Jt} = Je^{Jt} \mid S^{-1}$

$\frac{d}{dt}Se^{Jt}S^{-1} = \underbrace{SJS^{-1}}_{A}Se^{Jt}S^{-1} \implies \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$

$\Phi(t) = \{\varphi_\lambda(t), \dots, \varphi_n(t)\}$

$S = \{S_1, \dots, S_n\}$ - матрица присоединённых векторов

$j = 1 \dots p \quad \varphi_j = S_j e^{\lambda_j t}$

$J_k : \begin{cases} \varphi_{p+r_r+\ldots+r_{k-1}+1}(t) = S_{p+r_1+\ldots+r_{k-1}}e^{\lambda_{p+k}t} \\ \varphi_{p+r_1+\ldots+r_{k-1}+2}(t) = (tS_{p+r_1+\ldots+r_{k-1}} + S_{p+r_1+\ldots+r_k+2})e^{\lambda_{p+k}t} \\ \varphi_{p+r_1+\ldots+r_{k-1}+r_k}(t) = (\frac{t^{r_k-1}}{(r_k-1)!}S_{p+r_1+\ldots+r_{k-1}+1} + \ldots + S_{p+r_1+\ldots+r_{k-1}+r_k})e^{\lambda_{p+k}t} \end{cases}$

$\Phi(t)S = \Psi(t)$

$S^{-1}\dot{\vec{x}} = S^{-1}ASS^{-1}\vec{x}$

$S \mid S^{-1}\dot{\vec{x}} = JS^{-1}\vec{x} \implies \dot{\vec{x}} = SJS^{-1}\vec{x}$

$\vec{\varphi}_j(t) = \vec{q_j}e^{\lambda_j t}$

$q_j(t) = \begin{pmatrix} p_{k_1}^{(1)}(t) \\ \vdots \\ p_{k_1}^{(n)}(t) \end{pmatrix}$ степень p (?) не выше кратность λ_j ээ -1

Траектории на плоскости (фазовые пространства) решений системы 2x2

$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

$1) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$

$\dot{\vec{y}} = Jy$

$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1$

$\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2$

1.1) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \implies \begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} & \mid \frac{1}{c_1}, c_1 \neq 0 \\ y_2 = c_2 e^{\lambda} & \mid \frac{1}{c_2}, c_2 \neq 0 \end{cases}$

$$\left(\frac{y_1}{c_1}\right)_2^\lambda = \left(\frac{y_2}{c_2}\right)_1^\lambda$$

параболу рисует, точнее семейство различных парабол. а как мы по них движемся? зависит от общего знака лямбда1лямбда2. если отрицательны, то стремятся к 0. (типа стрелочки на параболах в сторону 0, 0) Если оба знака плюс, то тоже самое семейство парабол и направление бега в противоположную сторону, из нуля собственно в бесконечность. Эта картинка называется узел.

1.2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \qquad |\lambda_1| < |\lambda_2|$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\frac{y_1}{c_1} = \left(\frac{y_2}{c_2}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < -1, |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| > 1$
Фазовая картинка не параболы, а гиперболы. Называется седлом. Если $\lambda_2 > 0$, а $\lambda_1 < 0$, то движение идёт в сторону "полюсов"от центра. В противном случае движение идёт от полюсов в стороны. (снизу/сверху вправо/влево)

Положим $\lambda = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$ нет жордановой клетки.

2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \lambda_1 = a + i\beta, \lambda_2 = a - i\beta$
$\vec{x} = S^{-1}\vec{y}$
$J = \begin{pmatrix} a+i\beta & 0 \\ 0 & a-i\beta \end{pmatrix}$
$\dot{\vec{y}} = J\vec{y}$
$\begin{cases} y_1 = z_1 + iz_2 \\ y_2 = z_1 - iz_2 \end{cases}$
$T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \vec{y} = T\vec{z}$
$\vec{x} = S^{-1}\vec{y} = S^{-1}T\vec{z}$
$\det S \neq 0, \det T = -2i$
$\begin{cases} \dot{y}_1 = (a+i\beta)y_1 \\ \dot{y}_2 = (a-i\beta)y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{z}_1 = az_1 - \beta z_2 \\ \dot{z}_2 = \beta z_1 + az_2 \end{cases}$
$\dot{z}_1 = \text{ Re } \dot{y}_1 = \frac{1}{2}(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) = \frac{1}{2}((a+i\beta)y_1 + (a-i\beta)y_2) = az_1 - \beta z_1$
$\dot{z}_2 = \text{ Im } \dot{y}_1$
Полярные координаты зачем-то вводим не услышал
$\begin{cases} z_1 = r\cos\varphi \\ z_2 = r\sin\varphi \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = re^{i\varphi} \\ y_2 = re^{-i\varphi} \end{cases} \implies \begin{matrix} \dot{y}_1 = \dot{r}e^{i\varphi} + ire^{i\varphi}\dot{\varphi} = (a+i\beta)re^{i\varphi} \\ i(\cos\varphi + i\sin\varphi) + ir\dot{\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \end{matrix}$
$= \underline{\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi} + i(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi) = \underline{ar\cos\varphi - \beta r\sin\varphi} + i(ar\sin\varphi + \beta r\cos\varphi)$

$\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = ar\cos\varphi - \beta r\sin\varphi \quad | \cdot \cos\varphi$
$\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = ar\sin\varphi + \beta r\cos\varphi \quad | \cdot \sin\varphi$
Сложим
$\dot{r} = ar$
Домножим первое на $-\sin\varphi$, а вторoе на $\cos\varphi$ и сложим.
$r\dot{\varphi} = \beta r \implies \begin{cases} \dot{\varphi} = ar \\ \dot{\varphi} = \beta \end{cases} \implies r = r_o e^{at}, \varphi = \varphi_0 + \beta t$

Нарисуем картинку соотв пункту 2
2.1 $a \neq 0, \beta > 0$ - спираль, называется картинка фокусом Если $a > 0$ то двигаемся из 0 в бесконечность. В противном случае двигаемся в 0 из бесконечности.

2.2 $a = 0$

получаются разные окружности, картинка называется центром. При $\beta > 0$ двигаемся против часовой

А если жорданова клетка?

3. $\lambda_1 = \lambda_2, J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

3.1 $\lambda = 0, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 & y_1 = c_2 t + c_1 \\ \dot{y}_2 = 0 & y_2 = c_2 \end{cases}$

3.2 $\lambda > 0\,(\lambda < 0)$

$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 y_2 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \\ y_2 = ce^{\lambda t} \end{cases}$ $\lambda < 0$ – бежим в 0, $\lambda > 0$ – бежим в бесконечность. Картинка называется вырожденным узлом

$\frac{y_2}{c_2} = e^{\lambda t}$

$t = \frac{\ln \frac{y_2}{c_2}}{\lambda} \implies y_1 = (c_1 + \frac{\ln \frac{y_2}{c_2}}{\lambda})y_2$

Формула Лиувиля

понижение порядка если знаем одно решение

$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$

$\det \Phi(t) = W$

$W = \sum_{k=1}^n W_{ik}\Phi_{ik} \qquad W_{ik}$ - алг дополнение Φ_{ik}

$\dfrac{\partial W}{\partial \Phi_{ik}} = W_{ik}$

$\dot{W} = \sum_{i,k} \frac{\partial W}{\partial W_{ik}} \dot{\Phi}_{ik}$

$\dot{\Phi}_{ik} = \sum_j a_{ij}\Phi_{jk}$

$\dot{W} = \sum_{i,k=1}^n W_{ik} \sum_j^n a_{ij}\Phi_{jk} = \sum_{i,j,k} a_{ij} W_{ik}\Phi_{j,k} = \sum_{i,j} a_{ij} \sum_{k=1}^n W_{ik}\Phi_{jk} = W \sum_{j=1}^n a_{ij} = W\ \mathrm{Tr} A$

$$\dot{W} = \ \mathrm{Tr} A(t) \cdot W$$

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \ \mathrm{Tr} A(\tau) d\tau}$$