10 октября 2022

$\Pi \subset \pi_1 \times \Pi_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\ f : \Pi \to \mathbb{R}$ огр и почти везде непр.

Замечание.

1.

$$\int\limits_{\Pi} f = \int\limits_{\Pi_2} dy \underline{\int\limits_{\Pi_1}} f(x,y)dx = \int\limits_{\Pi_2} \overline{\int\limits_{\Pi_1}} f(x,y)dx$$

2. Если $\forall y \in \Pi_2\ \exists \int\limits_{\Pi_1} f(x,y)dx$, *то*

$$\int\limits_{\Pi} f = \int\limits_{\Pi_2} \int\limits_{\Pi_1} f(x,y)dx$$

Пример 1. $\Pi_1 = \Pi_2 = [0,1]$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q},\ y \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 - \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q},\ y \in [0,1] \end{cases}$$

f *непрерывна на* $\big([0,1] \setminus \mathbb{Q}\big)^2$
$(x,y) \in \big([0,1] \setminus \mathbb{Q}\big)^2, \quad f(x,y) = 1$
$\forall \varepsilon,\ \exists Q : \frac{1}{Q} < \varepsilon \quad$ *и* $\forall q > 0 : \left|1 - \frac{1}{q} - 1\right| < \varepsilon$
f *почти везде непр. на* $[0,1]^2 = \Pi$, *огр.*, $\Rightarrow \exists \int\limits_{\Pi} f$

$x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} : \quad \underline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy = \overline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy = \int\limits_{\Pi_2} 1 = 1$
$x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} : \quad \underline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y)dy = 1 - \frac{1}{q}, \quad \overline{\int\limits_{\Pi_2}} f(x,y) = 1$

$$\mathcal{L}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 - \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{1}, \quad \textit{неогр} \end{cases}$$

$$\mathcal{U}(x) = 1$$

$$\int\limits_{\Pi_1} \mathcal{L} = 1 = \int\limits_{\Pi_1} \mathcal{U} = \int\limits_{\Pi} f$$

Пример 2. $E \subset \Pi = [a,b] \times [c,d],\ \mu(\partial E) = 0$

$f \in C(E) \quad \widetilde{f} = f \cdot \chi_E$

$$\int\limits_E f = \int\limits_\Pi \widetilde{f} = \int_a^b dx \int_c^d \widetilde{f}(x,y)dy = \int_c^d dy \in_a^b f(x,ydx)$$

$E = \{(x,y) \in \Pi \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\} = \{(x,y) \in \Pi \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$

$$\int\limits_E f = \int_a^b dx = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} fx(x,y)dx$$

Замечание. $f \in C([0,1])$

Тогда $\mu($*графика* $f) = 0,$ *график* $f = \{\big(x, f(x)\big) \mid x \in [0,1]\}$

Доказательство. $\Rightarrow [0,1]$ компакт $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[0,1]$

$$\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [0,1] : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$\left[\frac{1}{\delta}\right] + 1 \text{ интервалов}$$

$$2\varepsilon\frac{\delta}{2} \cdot \underbrace{\left(\left[\frac{2}{\delta}\right] + 1\right)}_{<2\cdot\left[\frac{2}{\delta}\right]} < 4\varepsilon\frac{\delta}{2}\left[\frac{2}{\delta}\right] < 4\varepsilon$$

(любой прямоугольник можно покрыть квадратами сумма площадей которых не больше чем в 2 раза больше площади прямоугольника)

$\Rightarrow \exists$ покрытие квадратами $\sum v(C) < 8\varepsilon$ $\square$

$\mu(E) = 0, \quad f : E \to \mathbb{R}$ огр. и почти везде непрерывна $\not\Rightarrow \int\limits_\Pi f = 0$

$E = [0,1] \cap \mathbb{Q},\ f \equiv 1,\ f : E \to \mathbb{R}$

$$\widetilde{f}(x) = f(x)\chi_E^{(x)} = \begin{cases} 1,\ x \in E \\ 0,\ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\nexists \int\limits_{[0,1]} \widetilde{f}, \exists \int\limits_E f$$

Предложение. $v(E) = 0 \Rightarrow E$ *измерима по Жордану и его жорданов объем* $= 0$

Доказательство. $v(E) = 0 : \forall \varepsilon > 0\ \exists C_k,\ k = 1, \ldots, N$ (кубы) : $E \subset \bigcup_{k=1}^N C_k,$

$\sum_{k=1}^N v(C_k) < \varepsilon$

$\partial E \subset \bar{E} \subset \bigcup_{k=1}^N C_k$

$\Rightarrow v(\bar{E}) = 0,\ v(\partial E) = 0 \Rightarrow \mu(\partial E) = 0 \Rightarrow E$ измеримо по Жордану

$\exists \Pi : \quad E \subset \Pi, \quad \forall \varepsilon\ E \subset \bigcup_{k=1}^N C_k$

можно считать, что $\forall k\ C_k \in \Pi$

Пусть p – разбиение Π гранями всех C_k

$$v(E) = \int\limits_E 1 = \int\limits_\Pi \chi_E \le U(\chi_E, p) = \sum_{\pi\in p} \sup_\pi \chi_E \cdot v(\pi) =$$

$$\sum_{\substack{\pi \in p \\ \pi \in \bigcup\limits_{k=1}^N C_k}} v(\pi) \le \sum_{k=1}^N v(C_k) < \varepsilon \Rightarrow v(E) = 0$$

$\square$

Лемма 12. $\Pi \subset \mathbb{R}^n,\ f_1, f_2 : \Pi \to \mathbb{R}$ *огр., почти везде непр.*
$\Rightarrow a_1 f_1 + a_2 f_2$ *– огр. и почти везде непр. и*

$$\int\limits_\Pi \big(a_1 f_1 + a_2 f_2\big) = a_1 \int\limits_{\Pi_1} f + a_2 \int\limits_{\Pi_2} f$$

Доказательство. Рассмотрим p, Ξ

$$\sum \big(a_1 f_1 + a_2 f_2, p, \Xi\big) = \sum \Big(a_1 f_1\big(\xi(\pi)\big) + a_2 f_2\big(\xi(\pi)\big)\Big) \cdot v(\pi)$$

$$= a_1 \sum (f_1, p, \Xi) + a_2 \sum (f_2, p, \Xi)$$

Пусть $p_k,\ k \in \mathbb{N},\ d(p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,\ \Xi_k,\ k \in \mathbb{N} : \int\limits_\Pi (a_1 f_1 + a_2 f_2)$
$= a_1 \int\limits_\Pi f_1 + a_2 \int\limits_\Pi f_2$ $\square$

Лемма 13. E_1, E_2 *– измеримы по Жордану,* $E_1 \cap E_2 = \varnothing$

$$f : E_1 \cup E_2 \to \mathbb{R} \quad \textit{огр и почти везде непр}$$

$$\int\limits_{E_1\cup E_2} f = \int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f$$

Доказательство. $\widetilde{f} = f \cdot \chi_E$
$\Pi \supset E_1 \cup E_2$
$\int\limits_{E_1\cup E_2} f = \int\limits_\Pi f \chi_{E_1 \cup E_2} = \int\limits_\Pi f \chi_{E_1} + \int\limits_\Pi f \chi_{E_2}$ $\square$

Лемма 14. $\Pi \subset \mathbb{R}^n,\ f : \Pi \to \mathbb{R}$ *огр и почти везде непр*

$$\Rightarrow \left|\int\limits_{\Pi} f\right| \le \int\limits_{\Pi} |f|$$

Доказательство. $p_k,\ d(p_k) \to 0, \Xi_k$

$$\Big|\sum(f, p_k, \Xi_k)\Big| = \Big|\sum_{\pi \in p_k} f\big(\xi(\pi)\big) \cdot v(\pi)\Big| \le \sum_{\pi \in p_k} \Big|f\big(\xi(\pi)\big) \cdot v(\pi)\Big| \xrightarrow[k\to\infty]{} \int\limits_{\Pi} |f|$$

□

Лемма 15. $v(E) = 0,\ f : E \to \mathbb{R}$ *огр*
$\Rightarrow \int\limits_E f = 0$

Доказательство. $E \subset \Pi$

$$\forall \varepsilon : E \subset \bigcup_{k=1}^{N} C_k,\ \sum_{k=1}^{N} v(C_k) < \varepsilon$$

$$\exists M > 0 : \forall x \in E\ |f(x)| < M \Rightarrow |\widetilde{f}(x)| < M,\ \forall x \in \Pi$$

Разрежем Π гранями $C_l = k,\ k = 1, \dots, N \to$ разбиение p

$$\Big|\int\limits_E f\Big| = \Big|\int\limits_{\Pi} f\chi_E\Big| \le \int\limits_{\Pi} |f|\chi_E \le U\big(|f|\chi_E, p\big) =$$

$$= \big|U(f,p)\big| = \Big|\sum_{\pi \in p} \sup_{\pi} f\chi_E \cdot v(\pi)\Big| \le \sum_{\substack{\pi \in p \\ \pi \in \bigcup_{k=1}^{N} C_k}} M \cdot v(\pi) \le M \sum_{k=1}^{N} v(C_k) \le M\varepsilon$$

ε произвольная $\Rightarrow \int\limits_E f = 0$ □

Замена переменной в интеграле

$E \subset \mathbb{R}^n, f : E \to \mathbb{R}$
$\operatorname{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$

Замечание. *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^n$ *отрктыо и ограничено*
$f : G \to \mathbb{R}$ *ограничена и почти везде непрерывна*
Если $\operatorname{supp} f \subset G$*, то* $\exists \int\limits_G$ *(независимо от того, какая* δG*)*

Доказательство. $\exists \Pi : G \subset \Pi,\ \operatorname{supp} f \subset \operatorname{Int} \Pi, \quad \widetilde{f} : \Pi \to \mathbb{R}$ – продолжение f с нулем

$\{$т. разрыва $\widetilde{f}\} = \{$т. разрыва$\widetilde{f}$ на $\operatorname{supp} f\} \cup \{$т. разрыва $\widetilde{f}$ в $\operatorname{Int} \Pi \backslash \operatorname{supp} f$ – откр$\} \cup$
$\cup \{$т. разрыва $\widetilde{f}$ на $\delta\Pi\} = \varnothing$
$\operatorname{dist}\{\delta\Pi,\ \operatorname{supp} f\} > 0$
$\hat{f}\big|_{\Pi \backslash \operatorname{supp} f} \equiv 0$

$\{$т. разрыва $\widetilde{f}$ на $\operatorname{supp} f\} \subset \{$т. разрыва f на $G\}$ – множество меры 0 $\square$

Теорема 1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто и ограничено,*
$g : G \to \mathbb{R}^n$ диффеоморфизм,
$g(G)$ ограничено
$f : g(G) \to \mathbb{R}$ ограничена и почти везде непрерывна
$\operatorname{supp} f \subset g(G)$
Тогда $\exists \int\limits_G f \circ g |\det g'|$ и

$$\int\limits_{g(G)} = \int\limits_G f \circ g \cdot |\det g'|$$

Определение. *G называется областью, если G открыто и связно*