Теорема Есть задача Коши(перестали песать векторы, потому что надоело):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \mu) \\ x(t_0) = x_0 \\ (t_0, x_0) \in G_\mu \end{cases}, \exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial \mu} \in C(G_\mu) \implies X(t, t_0, x_0, \mu) \text{ - решение}$$

1. $\exists \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial T_0}, \frac{\partial x}{\partial x_0}, \frac{\partial x}{\partial \mu} \in C(D_\mu)$, при этом:
2. $\frac{\partial x}{\partial x_0} =: y$ – решение однородной $\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(t, x(t, t_0, x_0, \mu), \mu\big)y$
3. $\frac{\partial x}{\partial \mu} = y$ – решение неоднородной $\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(t, x(t, t_0, x_0, \mu), \mu\big)y + \frac{\partial f}{\partial \mu}$

D. Достаточно доказать существование частных производных по начальным данным и параметрам ну там крч непрерывное поэтому решение тоже гладкое Почему существует частная производная $\frac{\partial x}{\partial x_0 \text{чёта}}$? Рассмотрим решение $x(t, t_0, x_0, \mu)$ на $[\tau, t] \times V \subset G_\mu$.

Пусть $0 < r$ даст нам $\forall h : |h| < r$ и даже t_0, x_0

$$x(t, n) = x(t, t_0, x_0 + \underset{\text{произв по напр}}{h \cdot e_i}, \mu), \quad \Delta x = \underbrace{x(t, h)}_{\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \mu) \\ x(t_0) = x_0 + he_i \end{cases}} - \underbrace{x(t, 0)}_{\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \mu) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}}$$

Продифференцируем по t:

$$\frac{d}{dt}(\Delta x) = f\big(t, x(t, h), \mu\big) - f\big(t, x(t, 0), \mu\big) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\big(t, x(t, 0) + s\Delta x, \mu\big)\Delta x ds =$$
$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\big(t, x(t, 0) + s\Delta x, \mu\big) ds \frac{\Delta x}{n}$$

Можно ли $(h \to 0?)$ Интеграл непрерывен, зависит от t, h, обозначим его за A:

$A(t, n) \longrightarrow A(t, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(t, x(t, t_0, x_0, \mu), \mu\big)$

$$y = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta x}{h} \text{ – решение } \begin{cases} \dot{y} = \int_0^1 A(t, 0) ds \cdot y = A(t, 0)y \quad \frac{\Delta x}{h} = e_i \\ y(t_0) = e_i \end{cases}$$

Очевидно, что наш $y = \frac{\partial x}{\partial x_{0,i}}$

Ну мы кроме непрерывности и следующего не пользовались:

$\frac{\partial x(t_0)}{\partial h} = \frac{x_0 + he_i - x_0}{h} = \frac{he_i}{h} = e_i$

Предел существует, потому что это решение задачи, для которой существует единственное решение.

Почему существует $\frac{\partial x}{\partial \mu_j}$?

Аналогично! Возьмём $x(t, q) = x(t, t_0, x_0)\mu + qe_j$

$$\Delta x = x \underbrace{(t, q)}_{\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \mu + qe_j) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}} - \underbrace{x(t, 0)}_{\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \mu) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}}$$

etc...

Почему существует $\frac{\partial x}{\partial t_0}$?

$x\big(t,t_0,x_0(t_0,t,x)\big) \equiv x$ в силу единственности решения задачи Коши на одной и той же траектории.

Возьмём некий t_0 на некотором $I(t,x)$. И по скольку мы уже доказали существование производной $\frac{\partial x}{\partial x_0}, \frac{\partial x_0}{\partial t_0}$ и непрерывная, посчитаем производную икса

Далее зависимость от μ опускаем...

Что такое $\frac{\partial x}{\partial x_0}$??? Это:

$$\lim_{\Delta t_0 \to 0} \frac{x\big(t,t_0+\Delta t,x_0(t_0,t,x)\big) - x\big(t,t_0,x_0(t_0,t,x)\big) \pm x\big(t,t_0+\Delta t,x_0(t_0+\Delta t,t,x)\big)}{\Delta t_0} =$$

$$= -\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial t_0} = -\frac{\partial x}{\partial x_0} f(t_0,x_0)$$

они существуют и непрерывны.

Следствие (Формула Лиувилля)

$$\det \frac{\partial x}{\partial x_0}(t,t_0,x_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr}\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,t_0,x_0))ds}$$

$\begin{cases} \dot y = \frac{\partial f}{\partial x_0} y \\ y(t_0) = I \end{cases}$

$x(t,t_0,x_0) =: x_t(x_0) = T_t$ – отображение нмерного фазового пространства в себя

Элемент объема $\det \frac{\partial x_t(x_0)}{\partial x_0} dx_0$

И если $\operatorname{Tr}\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0 \implies$ отображение T_t сохраняет фазовый объём.

Т. Лиувилля верна в этом случае

Пример: есть гамельтониан, две группы переменных (y - не координата)

$\dot x_k = \frac{\partial E}{\partial y_k} = F_k$

$\dot y_k = -\frac{\Delta E}{\partial dx_k}$

$\sum \frac{\partial f_k}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{k+k}}{\partial y_k} = 0$

Теорема. Пусть существуют и непрерывны в G_μ всевозможные производные f по x, μ, вплоть до порядка $l \geq 1$.

Тогда $x(t,t_0,x_0,\mu)$ – решение $\begin{cases} \dot x = f(t,x,\mu) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ имеет всевозможные непрерывные производные по x_0, μ вплоть до l-того порядка.

Д. Индукция по l.

Устойчивость решений диффуров

Устойчивость в малом (или по первому приближению)

Рассмотрим $\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad f : G_\mu \to \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathrm{Lip}_x(G_\mu)$ локально, $x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^m$

Пусть при $\mu = \overline{\mu}, x = \overline{x}(t)$ решения, определено при $t \in [t_0, \infty)$

Решение $\overline{x} : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ при $\mu = \overline{\mu}$ называется **устойчивым в малом** тогда и только тогда, когда

существует окрестность начального условия $V^* = V^*(\overline{x}(t_0, \mu), \mu) \in \mathbb{R}^{n+m}$

$S = [t_0, \infty) \times V^* \subset D_\mu$ - область определения $x = x(t, x_0, \mu)$ и x непрерывно по (x_0, μ) в точке $\big(\overline{x}(t_0), \overline{\mu}\big)$ равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$

Иначе решение называется неустойчивым

Пример.

$\dot{x} = \mu x, \quad \mu, x \in \mathbb{R}$

$x(t, x_0, \mu) = x_0 e^{\mu(t-t_0)}$

Если $\mu = \overline{\mu} < 0 \implies$ устойчивость в малом есть

$|x(t, x_0, \mu)| \leq |x_0| e^{\mu(t-t_0)} \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$

$\mu \in U_\delta(\overline{\mu}) < 0$

Иначе, если $\overline{\mu} \geq 0 \implies \mu > 0 \implies e^{\mu(t-t_0)} \to \infty$. x неустойчив.

Как понять в общем случае устойчива ли система?

Положим $y = x - \overline{x}(t), \alpha = \mu - \overline{\mu} \implies$

$$\begin{cases} \dot{y} = F(t, y, \alpha), \quad F(t, y, \alpha) = f(t, y + \overline{x}(t), \alpha + \overline{\mu}) - f(t, \overline{x}(t), \overline{\mu}) \\ y = 0 \end{cases}$$

При $\mu = \overline{\mu} \implies \alpha = 0 \implies y \equiv 0$ при $t \in [t_0, \infty)$

Решение $y \equiv 0, t \in [t_0, \infty)$ при $\alpha = 0$ **устойчива в малом** $\iff$
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_1 > 0, \delta_2 > 0 \; \forall \|y_0\| < \delta_1, \forall \|\alpha\| < \delta_2 :$

1. решение $y(t, y_0, \alpha)$ $\begin{cases} \dot{y} = F(t, y, \alpha) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ продолжимо на $[t_0, \infty)$

2. $\forall t \geq t_0 : \|y(t, y_0, \alpha)\| < \varepsilon$

Пример. $\exists \delta^* > 0 : U = \{(t, x, \mu) : t \in [t_o, \infty), \|x - \bar{x}(t)\| < \delta^*, \|\mu - \mu^*\| < \delta^*\} \subset G_\mu$ - область липшецевости

$\forall (t_0, x_0, \mu) \in U \|y(t, y_0, \alpha)\| < \varepsilon \implies$ продолжимо в силу липшицевости на $[t_0, \infty)$