

Доказали теорему в случае, когда  $h$  - простейший диффеоморфизм

Докажем в случае, когда  $h$  - композиция  $n$  простейших диффеоморфизмов

*Доказательство.* (продолжение)

2. Пусть  $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  - композиция простейших диффеоморфизмов

Индукция. Количество композиций:

$k = 1$  - доказано на первом шаге

Переход: верно для  $k$ , докажем для  $k + 1$

$$g = g_{k+1} \circ \underbrace{g_k \circ \dots \circ g_2 \circ g_1}_{h\text{-диффеоморфизм } G \text{ и } h(G)}$$

$g_{k+1}$  - диффеоморфизм  $h(G)$  и  $g(G)$

$f : g(G) \rightarrow \mathbb{R}$  огр. и п.в. непр.

$f \circ g_{k+1} : h(G) \rightarrow \mathbb{R}$  огр и (по первой лемме о мере ноль под диффеоморфизмом) и.в. непр.

$$f \circ g_{k+1} | \det g'_{k+1} |$$

$$\int_{g(G)} f \stackrel{1.}{=} \int_{h(G)} f \circ g_{k+1} | \det g'_{k+1} | \stackrel{\text{инд. предп.}}{=}$$

$$\int_G (f \circ g_{k+1} | \det g'_{k+1} |) \circ h | \det h' |$$

$$= \int_G \underbrace{f \circ g_{k+1} \circ h}_{f \circ g} | (\det g'_{k+1} \circ h | \det h' |)$$

$$= \int_G f \circ g | \det g' |$$

3. Общий случай

$$K = \text{supp}(f \circ g | \det g' |) \subset G \quad \text{dist}(\delta G, K) > 0$$

$$\forall x \in K \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subset G$$

По лемме 15  $g|_{B_{\varepsilon_x}(x)}$  раскладывается в композицию простейших диффеоморфизмов

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\varepsilon_x/2}(x), K \subset \bigcup_{i=1}^N B_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i)$$

т.к.  $K$  - компакт.

$$\delta := \min_{i=1, \dots, N} \frac{\varepsilon_{x_i}}{2}$$

$\forall E \subset \mathbb{R}^n : E \cap K \neq \emptyset$  и  $\text{diam} E < \delta$  верно  $E \subset G$  и  $g|_E$  раскладывается в композицию

$$\left( \exists x \in K \cap E, \exists i : x \in B_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i) \wedge E \subset (B_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i)) \subset B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \subset G \right)$$

foto 1

Пусть  $G \subset \Pi$  - п/п,  $P$  - разбиение  $\Pi$ ,  $d(P) < \min\{\delta, \text{dist}(\delta G, K)\}$

$$P_1 = \{\pi \in P \mid \pi \cap K \neq \emptyset\}$$

Если  $\pi \notin P_1$ , то  $(f \circ g | \det g')|_{\pi} \equiv 0$

Если  $\pi \in P_1$ , то  $\pi \subset G$  и  $g|_{\pi}$  раскладывается в композицию

$$K \subset \bigcup_{\pi \in P_1} \pi$$

$$\begin{aligned} \int_G f \circ g | \det g' | &= \int_{\Pi} f \circ g | \det g' | \cdot \chi_G = \sum_{\pi \in P} \int_{\pi} f \circ g | \det g' | \cdot \chi_G \\ &= \sum_{\pi \in P_1} \int_{\pi} f \circ g | \det g' | \chi_G = \sum_{\pi \in P_1} \int_{\pi} f \circ g | \det g' | = \sum_{\pi \in P_1} \int_{\text{Int } \pi} f \circ g | \det g' | = \\ &= \sum_{\pi \in P_1} \int_{g(\text{Int } \pi)} f = f \int_{g(\bigcup_{\pi \in P_1} \text{Int } \pi)} f = (*) \end{aligned}$$

$$v(\delta\pi) = 0 \implies \mu(\delta\pi) = 0 \implies \mu(g(\delta\pi)) = 0 \implies v(g(\delta\pi)) = 0$$

$$\text{supp } f = g(K) \subset g(\bigcup_{\pi \in P_1} \pi) \subset g(G)$$

$$\text{supp}(f \circ g) = K \subset \bigcup_{\pi \in P_1} \pi$$

$$(*) = \int_{g(\bigcup_{\pi \in P_1} \Pi)} f = \int_{\Pi_x} f \cdot \chi_{g(\bigcup_{\pi \in P_1} \pi)} = \int_{\Pi_x} f \cdot \chi_{g(G)} = \int_{g(G)} f$$

□

Это к ласт лекции:

$$v(\pi_y) = |g'(\xi)| \cdot v(\pi_x)$$

$$\sum_{\pi_y} \sup_{\pi_y} f v(\pi_y) = \sum_{\pi_x} (\sup_{\pi_x}) |g'(\xi(\pi_x))| \cdot v(\pi_x)$$

оценим точнее разность супремумов

$$\left| \underbrace{\sup_{\pi_x} (f \circ g) \cdot |g'(\xi(\pi_x))|}_{< M} - \underbrace{\sup_{\pi_x} (f \circ g | g'|)}_{w_{|g'|}(d(P_x))} \right| = \left| \sup_{\pi_x} (f \circ g)(x) (|g'(\xi(\pi_x))| - |g'(x)|) \right| \leq$$

$$\sup_{g([a,b])} f = M < \infty + M \cdot \frac{w_{|g'|}(d(P_x))}{d(P_x) \rightarrow 0} (b - a)$$

**Следствие 1.** Жорданов объем не меняется при движениях и поворотах и не зависит от выбора координат

Переход к новому базису  $g(X) = a + Ux$   $U^T U = U U^T = I$  - ортогональная матрица

$$\det U = \pm 1$$

$$g'(x) = U \quad |\det g'(x)| = 1$$

$$\int_{(g(E))} 1 = \int_E 1$$

А как посчитать объем шара?

$$v(B_R(0)) - ?$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g(r, \vartheta, \varphi) \quad g : (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

$$x = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$\det g' = r^2 \sin \vartheta$$

$$B_R(0) = g \left( \overbrace{(0, R) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)}^{=\Pi_R} \right)$$

$$\{x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} v(B_R(0)) &= \int_C \chi_{B_R(0)} = \int_{B_R(0)} 1 = \int_{g(\Pi_R)} 1 = \iiint_{\Pi_R} 1 \cdot r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

## Несобственные кратные собиратели (интегралы)

**Определение.**  $E \subset \mathbb{R}^n$   $\{E_k\}_k^\infty, E_k \subset E_{k+1} \subset E, \forall k : E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$ , измеримы по Жордану.

Такая последовательность называется **исчерпанием** множества  $E$

**Лемма 20.**  $E \subset \mathbb{R}^n$  измеримо по Жордану,

$\{E_k\}_{k=1}^\infty$  - исчерпание  $E$ . Тогда

$$v(E_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v(E)$$

И для любой  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  огр и п.в. непр. :

$$\int_{E_k} f \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_E f$$

*Доказательство.*  $v(E_k) \leq v(E) \quad v(E_k) \leq v(E_{k+1})$

$$\implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} v(E_k) \leq v(E)$$

$E$  измеримо по Ж.  $\implies \overline{E}, \delta E$  огр., компактно,  $\mu(\delta E) = 0 \implies v(\delta E) = 0$

$\forall \varepsilon \exists C_1, \dots, C_k$  открытые кубы,  $\delta E \subset \bigcup_{i=1}^N C_i, \sum_{i=1}^N v(C_i) < \varepsilon$   
 $\underbrace{\quad}_{=\Delta}$

$\overline{E} \subset E \cup \bigcup_{i=1}^N C_i = E \cup \Delta$  - откр множество

$\forall k : \overline{E_k} \subset \underbrace{E_k \cup \Delta_k}_{\text{откр}}, v(\Delta_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

компакт  $\overline{E} \subset E \cup \Delta = (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \cup \Delta \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cup \Delta_k) \cup \Delta$  - открытое покрытие

$$\overline{E} \subset (\bigcup_{i=1}^N E_{k_i} \cup \Delta_{k_i}) \cup \Delta = E_{k_N} \cup (\bigcup_{i=1}^N \Delta_{k_i}) \cup \Delta$$

$$v(E) = v(\overline{E}) \leq v(E_{k_N}) + \sum_{i=1}^N v(\Delta_{k_i}) + v(\Delta) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} v(E_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} + \varepsilon = \lim_{k \rightarrow \infty} v(E_k) + 2\varepsilon$$

$$\implies v(E) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} v(E_k)$$

Значит,  $\lim_{k \rightarrow \infty} v(E_k) = v(E)$

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$  огр и п.в. непр.

$$|\int_E f - \int_{E_k} f| = |\int_{E \setminus E_k} f| \leq \sup_E |f| \cdot v(E \setminus E_k) = (\sup_E |f|) \underbrace{(v(E) - v(E_k))}_{\rightarrow 0}$$

$$\implies \int_{E_k} f \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_E f$$

□

**Определение.**  $E \subset \mathbb{R}^n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$

Если  $\exists I \in \mathbb{R} \quad \forall \{E_k\}_{k=1}^{\infty}$  - исчерпание  $E : \forall k f|_{E_k}$  огр. и п.в. непр.

$\int_{E_k} f \xrightarrow{k \rightarrow \infty} I$ , то  $\exists$  несобств. собиратель  $\int_E f = I$

**Пример 1.**  $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_n(0)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dy =$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{2} \int_0^n de^{-r^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi(1 - e^{-n^2}) = \pi$   
 $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

**Лемма 21.** Если  $f \geq 0$  и  $\exists \{E_k\}_{k=1}^{\infty}$  - исчерпание  $E$

$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f$ , то  $\exists$  несобств. собиратель  $\int_E f$

*Доказательство.* нужно д-ть, что для любого другого исчерпания  $\{\widetilde{E}_l\}_{l=1}^{\infty} : \int_{\widetilde{E}_l} f \rightarrow$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f$$

$f|_{\widetilde{E}_l}$  огр. и п.в. непр.

$$\int_{\widetilde{E}_l \cap E_k} f \leq \int_{E_k} f \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f \quad \{\widetilde{E}_l \cap E_k\}_{k=1}^{\infty} - \text{исчерпание } E_k$$

$\{\widetilde{E}_l \cap E_k\}_{k=1}^{\infty}$  - исчерпание  $\widetilde{E}_l$

$$\stackrel{\text{лемма}}{\implies} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\widetilde{E}_l \cap E_k} f = \int_{E_k} f \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\widetilde{E}_l} f$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\widetilde{E}_l} f$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\widetilde{E_l} \cap E_k} f = \int_{\widetilde{E_l}} f \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f$$

$$\implies \exists \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\widetilde{E_l}} f \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f$$

$$\implies \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\widetilde{E_l}} f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f$$

□

**Лемма 22.**  $E \subset \mathbb{R}^n, f : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : E \rightarrow [0, +\infty), \quad |f| \leq g$

$\forall \widetilde{E} \subset E$  изм. по Ж.  $f|_{\widetilde{E}}$  огр и п.в. непр.  $\iff g|_{\widetilde{E}}$  огр. и п.в. непр.

$\exists$  несобств.  $\int_E g \implies \exists$  несобств.  $\int_E |f|$  и  $\int_E f$

$g$  - складываемая мажоранта

*Доказательство.*  $\{E_k\}_{k=1}^\infty$  - исчерпание  $E : \forall k f|_{E_k}, g|_{E_k}$  огр. и п.в. непр.

по кр. Коши  $n > K : \int_{E_n} |f| = \int_{E_k} |f| = \int_{E_n \setminus E_k} |f| \leq \int_{E_n \setminus E_k} g = \int_{E_n} g - \int_{E_k} g$

$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} g \stackrel{\text{кр. Коши}}{=} \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} |f| \stackrel{\text{лемма}}{\implies} \exists$  несобств.  $\int_E |f|$

$|\int_{E_n} - \int_{E_{n-k}} f| \leq \int_{E_n \setminus E_k} |f| \leq \int_{E_k} g - \int_{E_n} g$

$f = f_r - f_-$

$f_r = \frac{f+|f|}{2} \geq 0 \quad f_- = \frac{|f|-f}{2} \geq 0$

$0 \leq f_\pm \leq |f| \leq g$

$f_\pm = |f_\pm|$

$\exists$  несобств.  $\int_E |f \pm| = \int_E f_\pm$

$\forall \{E_k\}_{k=1}^\infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f_+ - \int_{E_k} f_- = \int_E f_+ - \int_E f_- \implies \exists \int_E f$$

□

$f(x) - \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad x \in [n-1, n) \quad [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$

$[0, +\infty) = \bigcup_{n=1}^\infty [0, n)$

$\int_{[0, n)} f = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$\forall I \in \mathbb{R} \exists \varphi$  - биекция между  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{N}$

$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{\varphi(k)-1}}{\varphi(k)} = I$

$E = \bigcup_{k=1}^n [\varphi(k) - 1, \varphi(k))$

$\int_{E_n} f = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{\varphi(k)-1}}{\varphi(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$