$\dot{x} = P(t)x,\ P(t) = G(t)e^{Jt},\ \det G(t) \neq \|G\| < M,\ \lambda_k = 1/\omega \ln \mu$

Теорема. $\dot{x} = P(t)x,\ P(t+\omega) = P(t)$

1. Устойчиво по Ляпунову $\iff \forall |\mu_j| \leq 1$, причём фак не понимаю что написано. фото крч

$\triangleright$ см предыдущ теорему $\triangleleft$

$|\mu_j| \leq 1 \implies \mu\lambda_j \leq 0$ (или дельта непон)

Устойчивость по первому приближению:

$\dot{x} = F(t, \lambda),\ y = x = \bar{x} \implies$

1. $\dot{y} = A(t)y + g(t, y)$
2. $A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, \bar{x}(t))$
3. $\frac{\|g(t,y)\|}{\|y\|} \rightrightarrows 0, \|y\| \to 0$
4. $A(t) \equiv A$ и $\mathbb{R}\lambda_j < 0| \implies y \equiv 0$ асимптотически устойчиво

$\triangleright$ см т об устойчивости в малом $\triangleleft$

Если $A(t) = \text{const}$, $\frac{\|g(t,y)\|}{\|y\|} \rightrightarrows 0$. Следует ли устойчивость по Ляпунову??

Задача. Покажите, что если существует $\mu_k, |\mu_k| > 1 \implies$ система неустойчива.

Другой подход к устойчивости (Функция Ляпунова)

$\dot{x} = f(t, \vec{x}),\ f : G \to \mathbb{R}^n,\ G = \{(t, \vec{x}) \mid \|x\| < a,\ t \in (t, \infty)\}$ – область однозначной разрешимости.

$f(t, 0) = 0,\ \forall t \in (\tau, \infty)$

$V : G \to \mathbb{R} :\ $ 1. $V(t, 0) = 0\ \forall t \in (\tau, \infty)$, 2. $V \in C^1(G)$

Определим некий линейный оператор на $V : DV = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} F(t, x)$ – енто производная в силу уравнения

$DV = \frac{d}{dt} V\big(t, x(t, x_0)\big)$

Функция Ляпунова $V(x)$ (не зависящая от t явно) называется **определённо-положительной**, если в области G, при $x \neq 0$ $V(x) > 0$

Если $V = V(t, x)$ определённо-положительна $\iff \exists W(x)$ - определённо-положительная, $V(t, x) \geq W(x) > 0\ \forall t,\ (x \neq 0)$

Функция Ляпунова **определённо-отрицательна** $\iff -V(t, x)$ – определённо-положительна.

Функция Ляпунова $V(t, x)$ **положительна** $\iff V(t, x) \geq 0$ в G.

Функция Ляпунова **отрицательна**, если она не_положительна.

Теорема. Пусть существует функция Ляпунова $V(x) \in C^1(G), V$ - определённо-положительна и $DV \leq 0$. Тогда решение $x = 0$ устойчиво по Ляпунову.

$\triangleright$ $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < a)$. Рассмотрим $l = \min_{\|x\|=\varepsilon} V(x)$, по найденному l выберем $\delta > 0$ $(\delta < \varepsilon) : \|x\| < \delta \implies V(x) < l$

$\forall \|x_0\| < \delta \implies \|x(t, x_0)\| < \varepsilon$? :

От противного $\exists T > t_0 : \|x(T, x_0)\| = \varepsilon$ (при $t \in [t_0, T)$) $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$

$DV = \frac{d}{dt} V(x(t, x_0)) \leq 0 \implies V(x(t, x_0))$ должна быть вот такой $\uparrow \implies_{\text{not}}$ $V(x(T, x_0)) \leq V(x_0) < l \implies \|x(T, x_0) < \varepsilon$ ПРОТИВОРЕЧИЕ!!! (там чета равенство где-то было) $\triangleleft$

Следствие. Если уравнение $\dot{x} = F(t, x)$ имеет в G определённо-положительный первый интрегал, не зависящий от $t \implies$ решение $x = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Теорема. $\exists V(x) \in C^1(G)$ определённо-положительна и DV определённо-отрицательна. Тогда решение $x = 0$ асимтотически устойчиво. $-DV \geq W(x) > 0$

$\triangleright$ я устал я не смог это записать извинити $\triangleleft$

Теорема о неустойчивости $M^t = \{x : V(x) > 0, \ \|x\| < a\}$, $0 \in \delta M^t$

$\exists V(x)$ функция Ляпунова: 1. M^t для $V M^t \neq 0$ 2. $\forall x \in M^t, \ t \geq t_0$.

Вся лааа

Лемма $L(V(x)) = U(x)$ однозначно разрешимо $\iff \lambda^{(L)} \neq 0$

$\lambda_j^{(L)} = \lambda_j + \lambda_k, \ j, k = 1, \ldots, n$ собственные значения L.

λ_j - соственные A с учётом ктм?

хихи я всё пропустил

$\left(\widetilde{L} V(y)\right) = f(y)$

$\left(f(y)\right)_i = \sum_{k_1 + \ldots + k_n = 2, k_j \geq 0} b_i^{(k_1, \ldots, k_n)} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots y_n^{k_n}$

$V(y) = \sum_{k_1 + \ldots + k_n = 2} c^{(k_1, \ldots, k_n)} y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}$

$b_i^{(k_1, \ldots, k_n)} = (k_1 \lambda_1 + \ldots k_n \lambda_n) c_i^{(k_1, \ldots, k_n)} \implies \lambda_{jk}^{(L)} = \lambda_j + \lambda_k$

Лемма. $\frac{\partial V}{\partial x} A x = V(x) = \sum c_{ij} x_i x_j \implies \exists!$ решения $V(x) \quad \varepsilon = \lambda_j + \lambda_k \neq 0$