# Математический анализ

5 сентября 2022

# Повторение

## Линейные и нормированные пространства

$L$ – линейное пространство

$\|\cdot\|$ – норма $\qquad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), x \in L$

Нормированное пространство $\qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

**Замечание.** *Норма всегда порождает метрику (нормированное $\Rightarrow$ метрическое).*

**Замечание.** $\forall$ *конечномерное пространство полное.*

**Определение.** *Полное нормированное пространство $\fallingdotseq$ банохово.*

**Пример 1.** *Неполное нормированное пространство:*

$$C([0;1]), \quad \|f\|_{<} = \int_0^1 |f(x)|dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)dx \to 0 \quad \exists N : n > N < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - f_n(x))dx \to 0 \quad \exists N : n > N < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon \ \exists N \ \forall n, m > \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|dx < \varepsilon$$

$$L(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \int_0^1 |f_n(x)|dx < \infty\}$$

## Линейные операторы

**Определение.** *Линейный оператор*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad A : L \to M \quad , \textit{ где } M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}, A \textit{ - функционал(?)}$$

**Замечание.** *Операторы из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ $\leftrightarrow$ матрицы $\mathrm{Mat}^{m,n}$*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_M}{\|x\|_L}, \quad M, L \text{ - нормированные пространства}$$

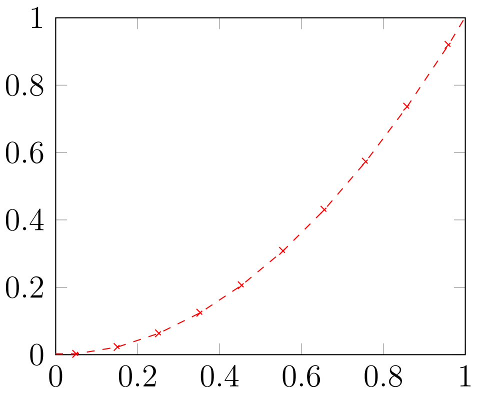
**Пример 2.** *Неограниченный оператор:*

$$L = C^1([0,1]), \quad M = C([0,1]) \quad \|f\| = \sup_{[0,1]} |f|$$

$$\|f\| = \max_{[0,1]} |f|$$

$$(Af)(x) = f'(x)$$

$$f_n(x) = x^n \quad \|f_n\| = 1 \ \forall n \quad Af_n = f_n' = nx^{n-1} \quad \|Af\| = n$$




$$\frac{\|Af_n\|}{\|f_n\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

**Предложение.**

$$\|A\| = \sup_{x \in B_1(x)\setminus\{0\}} \|Ax\| = \sup_{a \in S_1(0)} \|Ax\| = \sup_{x \in B_1(0)\setminus\{x\}} = \inf\{c : \|Ax\| \le c\|x\|\} \quad \forall x \in L$$

$B_r(x) = \{y \in L : \|y - x\| < r\}$ – *открытый шар радиуса* $r$
$B_r[x] = \{y \in L : \|y - x\| \le r\}$ – *замкнутый шар радиуса* $r$
$\bar{B}_r(x) \ne B_r[x]$, *где* $\bar{B}_r(x)$ – *замыкание*
$S_r(x) = \{y \in L : \|y - x\| = r\}$ – *сфера*

**Предложение.** $A \in B(L)$ *( – множество ограниченных линейных операторов)* $\Leftrightarrow$ $A$ *непр. в точке* $0 \Leftrightarrow A$ *непр. в* $\forall x \in L \Leftrightarrow A$ *равн. непр. на* $L$.

**Замечание.**

$$\|A_1 \cdot A_2\| \le \|A_1\| \cdot \|A_2\|$$

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ A \in \mathrm{Mat}^{n,n} \quad \|A\| \le \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} |a_{i,k}^2|}$$

**Определение.** *Матрицы* $\|\cdot\|$ *и* $|\cdot|$ *эквивалентны, если* $\exists c_1, c_2 > 0$ *т. ч.*

$$\forall x \in L \ c_1\|x\| \le |x| \le c_2\|x_2\|$$

*Тогда* $\|A\| \sim \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}| \sim \max_{i,k \in \{1,\dots,n\}} |a_{ik}| \sim \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2}$

**Замечание.**

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \exists a \in \mathbb{R}^n \ \forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = (a; x) \quad \|A\| \underset{B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}{=} \|a\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ \exists a \in \mathbb{R}^n \ \exists x \in \mathbb{R} : Ax = a \cdot x \quad \|A\| \underset{B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)}{=} \|a\|_{\mathbb{R}^n}$$

## Обратный оператор

$A : L \to M$ – линейный оператор

1. $\exists B : M \to L \ : \ AB = I_M$ – ед. оператор в пространстве $M$

   $B \leftrightharpoons$ правый обратный

2. $\exists C : M \to L \ : \ CA = I_l$ – ед. оператор в пространстве $L$

   $C \leftrightharpoons$ левый обратный

3. $\exists$ оба и равны, $A^{-1} \leftrightharpoons$ обратный оператор

$A \in \mathrm{Mat}^n : \exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, A = \{0\} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \mathrm{rank}\, A = n$

**Теорема 1.** $A \in B(\mathbb{R}^n), \exists A^{-1}, B \in B(\mathbb{R}^n), \|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$
*Тогда $B$ обратим,*

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|}, \|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|B - A\|}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|}$$

*Доказательство.* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Bx\| = \|Ax - (A - B)x\| \geq \|Ax\| - \|(B - A)x\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\| \cdot \|x\| = (\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|)\|x\|$$

Так как:

$$\|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} \quad x = (A^{-1})(Ax) \quad \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|$$

$Bx = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$, так как $(\|Bx\| \geq \|x\| \cdot \underbrace{(..)}_{>0}) \Rightarrow x = 0 \quad \mathrm{Ker}\, B = \{0\} \Rightarrow \exists B^{-1}$

$$\begin{matrix} y = Bx \\ x = B^{-1}y \end{matrix} \quad \|y\| \geq (\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|)\|B^{-1}y\|, \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|}$$

$$B^{-1}A^{-1} = B^{-1}(I - BA^{-1}) = B^{-1}(A - B)A^{-1}$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|B - A\|}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|}$$

$\square$

**Замечание.**

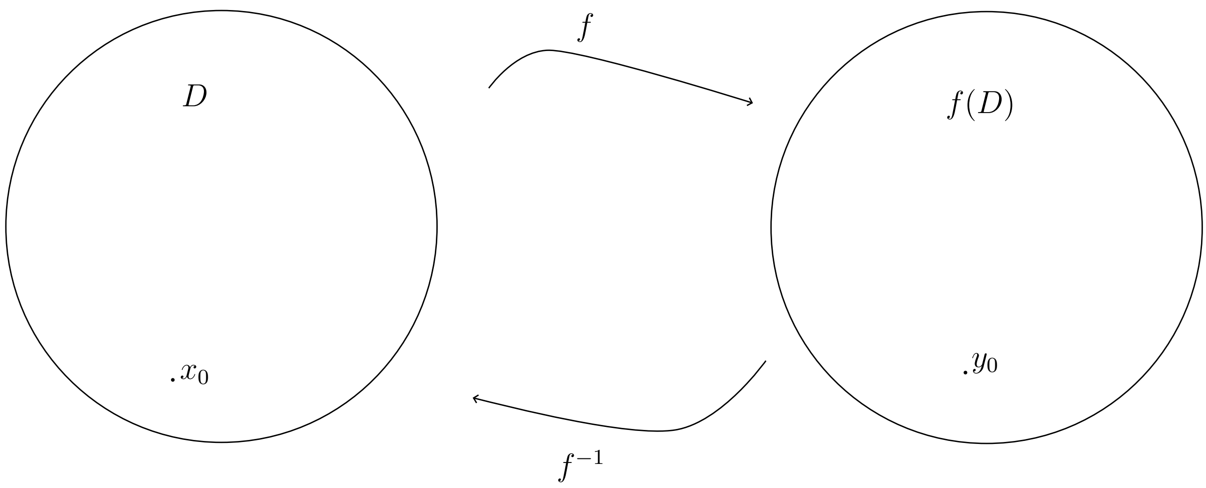
1. *Множество операторов открыто*

2. *Отображение $A \mapsto A^{-1}$ непрерывно*

# Дифференцирование обратной функции

$D \subset \mathbb{R}^n \quad f : D \to \mathbb{R}^n \quad x \in \operatorname{Int} D \quad \exists A \in B(\mathbb{R}^n.\mathbb{R})$

**Определение.** *Если $f(x+h) = f(x) + Ah + o(\|h\|), \quad h \to 0$, тогда говорят $A$ – производная $f$ в точке $x$.*




Рассмотрим $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$

Продифференцируем : $(f^{-1})'(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0}) \cdot f'(x_0) = I$

Пусть теперь есть функция на открытом множестве:

$D$ открыто $\quad f \in C'(D, \mathbb{R}^n) \quad x_0 \in D \; f'(D_0)$ обратима

**Пример 3.**

1. $f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y - e^x \sin y \\ e^x \sin y + e^x \cos y \end{pmatrix}$$

*2.* $n = 1 \quad f \in C^1(D, \mathbb{R})$

$f'(x_0) \neq 0$

$f\big|_U$ *– биекция между* $U$ *и* $V$

$$\exists (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f(f^{-1}(y))} \quad \begin{matrix} f \in C^1(U,V) \\ f^{-1} \in C^1(V,U) \end{matrix}$$

**Теорема 2.** *$D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$*

*$x_0 \in D$, $f^{-1}(x_0)$ – обратимая матрица*

*Тогда $\exists$ окрестность $x_0$, $U \subset D$*

*$V := f(U)$ открыто и $f\big|_U$ – биекция между $U$ и $V$, $f^{-1} \in C^1(V,U)$*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}, \ \forall x \in U \quad f'(x_0) \in I$$

*Доказательство.*

1. Пусть $f'(x_0) = I$. При $x$, близких к $x_0$, $f(x) \neq f(x_0)$

$$f'(x) = f(x_0) + (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

$$\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \frac{\|x - x_0\|}{\|x - x_0\|} + o(1), \ x \to x_0$$

   $\exists$ окрестность, в которой $\|o(1)\| < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) - f(x_0) \neq 0$

2. $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n) \Rightarrow f'(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} I$

   $\exists r > 0 \ x_0 : \|f'(x) - I\| < \frac{1}{2}$ для $\forall x \in B_r(x_0)$

   $K = B_{\frac{r}{2}}[x_0] \subset B_r(x_0)$

3. $g(x) = f(x) - x$

   $g'(x) - f'(x) - I \quad \|g'(x)\| < \frac{1}{2}, \ x \in K$

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \quad \text{(т. Лагранжа)}$$

$$\|f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \frac{3}{2}\|x_1 - x_2\| \quad \text{(нер-во треуг.)}$$

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq C - \|x_1 - x_2\|$$

   $f$ – биекция из $K$ в $f(K)$

   $f^{-1}$ – из $f(K)$ в $K$ непр.

4. $\delta(K)$ компактно, поскольку это сфера, сфера замкнута, сферу можно вписать в куб, куб - компакт, сфера - его закмкнутое подмножество, значит тоже компакт.

$$\|f(\cdot) - f(x_0)\|_{\geq 0} \in C(\delta(K), \mathbb{R}),\ x_0 \notin \delta(K)$$

Если $\inf_{x \in \delta(K)} \|f(x) - f(x_0)\| = 0$, то $\exists x' \in \delta(K) : f(x') = f(x_0)$.

Это означало бы, что $x' = x_0 \in \delta(K)$ (т. к. $f\big|_K$ биекция)

Значит, $\inf_{x \in \delta(K)} \|f(x) - f(x_0)\| > 0$. $\exists d > 0\ B_d(f(x_0)) \cap f(\delta(K)) = \emptyset$

5. $V = B_{\frac{d}{2}}(f(x_0))$

$x \in \delta(K),\ y \in V$

$$\|f(x) - y\| = \| \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\|\cdot\| > d} - \underbrace{(y - f(x_0))}_{\|\cdot\| < \frac{d}{2}} \| > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$

$h_y(x) = \|f(x) - y\|^2 \in C^1(K, \mathbb{R}_+)$ - производная скалярного произведения

$x \in \delta(K) \quad h_y(x) > \frac{d^2}{4}$

$x = x_0 \quad h_y(x_0) = \|f(x_0) - y\|^2 < \frac{d^2}{4}$

$\Rightarrow x_y \notin \delta(K),\ x_y \in \operatorname{Int} K$

$h'_y(x_y) = (f(x) - y, f(x) - y)'\Big|_{x = x_y} = 2(f(x) - y)^T \cdot f'(x)\big|_{x = x_y} = 0$

$V \subset f(K) \Rightarrow f(x_y) = y \Rightarrow y \in f(K)$

6. $x \in U$

$$\underbrace{\underbrace{f(x+h)}_{y+k} - \underbrace{f(h)}_{y}}_{k} = f'(x)h + \varphi(x,h) \quad \frac{\|\varphi(x,h)\|}{\|h\|} \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} x$$

$$\text{В силу биекции} \begin{cases} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \\ x + h = f^{-1}(y+k) \end{cases}$$

$$k = f^{-1}(x) \cdot (f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)) + \varphi(f^{-1}(y,h))$$

$$\left(\text{требовали в п. 2:} \|f'(x) - I\| < \frac{1}{2} \Rightarrow \exists (f'(x))^{-1}\right)$$

$$f^{-1}(y+k) = f^{-1}(y) + (f'(x))^{-1} \cdot k - \underbrace{(f'(x))^{-1} \cdot \varphi(f^{-1}(y), h)}_{= o(\|k\|),\ \|k\| \to 0}$$

$$(*) \left(\frac{\|(f(x))^{-1} \cdot \varphi(f^{-1}(y), h)\|}{\|k\|}\right) \leq \frac{\|\,(f(x))^{-1}\,\| \cdot \|\varphi(f^{-1}(y), f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y))\|}{\|k\|}$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\|x_1 - x_2\|}_{h} \le \underbrace{\|f(x_1) - f(x_2)\|}_{k} \le \frac{3}{2}\underbrace{\|x_1 - x_2\|}_{h}$$

$$\overset{(*)}{\le} \|(f'(x))^{-1}\| \cdot \underbrace{\frac{\|\varphi(f^{-1}(y), f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y))\|}{\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)\|}}_{\xrightarrow[n\to 0\ \ (k\to 0)]{} 0} \cdot \frac{\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)\|}{\|k\|}$$

$$\Rightarrow \exists (f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$$

7. $\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(f'(f^{-1}(y))\right)^{-1}$

   $f^{-1} : y \mapsto f^{-1}(y) \quad f^{-1} \in C(V, U)$

   $f' : f^{-1}(y) \mapsto f'(f^{-1}(y)) \quad f' \in C(D, \mathbb{R}^n)$

   $A \mapsto A^{-1}$ непрерывное отображение

   $\Rightarrow f^{-1} \in C^1(V, U)$

8. Общий случай $\quad f^{-1}(x_0) = A,\ \det A \neq 0$

   $\tilde{f}(x) := A^{-1} f(x)$

   $\tilde{f}'(x) = A^{-1} f'(x)$

   $\tilde{f}'(x_0) = A^{-1} A = I$

   $\exists U, \tilde{V}, \tilde{f}\big|_U$ – биекция, $\tilde{f}^{-1} \in C^1(\tilde{V}, U)$

   $(\tilde{f}^{-1})'(\tilde{V}) = (\tilde{f}')^{-1}(U)$

   $f(x) = A\tilde{f}(x) \quad f\big|_U$ биекция м. $U$ и $A\tilde{V} := V$

   $y = A\tilde{f}(x) \quad x = \tilde{f}^{-1}(A^{-1}y) \Rightarrow f^{-1} \in C^1(V, U)$

   $A^{-1}y = \tilde{f}(x) \quad f^{-1} = \tilde{f}^{-1} \cdot A^{-1}$

$$(f^{-1})'(f(x)) = (\tilde{f}^{-1})(\overbrace{A^{-1}f(x)}^{=\tilde{f}(x)})A^{-1} = (\tilde{f}'(x))^{-1}A^{-1} =$$

$$= (A^{-1}f'(x))^{-1}A^{-1} = (f'(x))^{-1}AA^{-1} = (f'(x))^{-1}$$

□

**Замечание.**

$$\begin{cases} f \in C^r(D, \mathbb{R}^n) \\ \dots \\ \dots \end{cases} = \begin{cases} f^{-1} \in C^r(D, \mathbb{R}^n) \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

$(f^{-1})' = (f')^{-1}_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta}$ *выражается через* $\frac{\partial f_l}{\partial x_m}$, $\quad l, m = 1, 2, \dots, n$