Алгебра

13 октября 2022

§Жорданова форма оператора с единственным собственным числом

K – алгебраически замкнуто
V – векторное пространство над K, $\dim V\ n < \infty$
$\varphi \in \mathrm{End}(K)$ – линейный оператор
$\chi_\varphi(t) = (-1)^n (t - \lambda)^n$

Надо показать, что $\exists$ базис, в котором $[\varphi]$ состоит из жордановых клеток, отвечающих собственному числу λ

$$\{0\} \subsetneqq U_0(\lambda) \subsetneqq U_1(\lambda) \subsetneqq \cdots \subsetneqq U_n(\lambda) = V$$

$U_i,\ i = 0, \ldots, n$ – корневые подпространства

Лемма 1. *Если* $U_i(\lambda) = U_{i+1}(\lambda)$*, то*

$$U_i(\lambda) = U_k(\lambda),\ \forall k \geq i$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $U_{i+2}(\lambda) = U_{i+1}(\lambda)$
$v \in U_{i+2}(\lambda)$
$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{i+2}(v) = 0 \quad (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(v) \in U_{i+1}(\lambda) = U_i(\lambda)$
$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{i+1}((\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(v)) = 0$
$\Rightarrow (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{i}((\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(v)) = 0$
$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{i+1}(v) = 0 \quad v \in U_{i+1}(\lambda)$ $\square$