

## Ряды и интегралы, зависящие от параметра

$X_0, X$  – метрические пространства

$E \subset X_0, f : E \rightarrow X$

$\{f \text{ непр в } x\}_{x \in X}$

Непрерывность на  $E$ :

$$\forall \varepsilon > 0, x \in E, \exists \delta > 0 : \forall x' \in E : d_0(x, x') < \delta \text{ выпол. } d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Равномерная непрерывность:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in E : d_0(x, x') < \delta \text{ вып. } d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

$\{a_n(p)\}_{n=1}^\infty, p \in P$

$\{a_n(p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a(p)\}_{p \in P}$

Сходимость :  $\forall \varepsilon > 0 \forall p \in P \exists N : \forall n > N : d(a_n(p), a(p)) < \varepsilon$

Равномерная :  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall p \in P : \forall n > N : d(a_n(p), a(p)) < \varepsilon$

**Пример.**  $a_n(p) = \frac{np}{1+(np)^2}, P = [0, 1]$

$\forall p \in P a_n(p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\varepsilon = 1/2, \forall N \exists p, n; np = 1 : \frac{np}{1+(np)^2} = 1/2$

**Теорема 1** (о двойном пределе).  $X$  – полное метрическое пространство

$\{a_{np}\}_{n,p \in \mathbb{N}}$  – двойная последовательность в  $X$

$\forall p \in \mathbb{N} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_{np} = u_p$

$\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{p \rightarrow \infty} a_{np} = v_n$

Если один из этих пределов достигается равномерно, то

$$\exists \lim_{p \rightarrow \infty} u_p, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

и они равны.

*Доказательство.* Пусть  $a_{np} \xrightarrow{p \in \mathbb{N}}_{n \rightarrow \infty} u_p$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \forall n > N_1 \forall p d(a_{np}, u_p) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$n_0 > N_1 \quad a_{n_0 p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} v_{n_0}$

для  $\varepsilon \exists N_2 : \forall p, q > N_2 d(a_{n_0 p}, a_{n_0 q}) < \frac{\varepsilon}{3}$

$$d(u_p, u_q) \leq d(u_p, a_{n_0 p}) + d(a_{n_0 p}, a_{n_0 q}) + d(a_{n_0 q}, u_q) < \varepsilon$$

Критерий Коши:  $\exists \lim_{p \rightarrow \infty} u_p =: w$

$$d(a_{np}, u_p) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\xRightarrow[p \rightarrow \infty]{} d(v_n, w) \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

$$\text{Значит, } v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} w$$

□

**Замечание** (Непрерывность расстояния).  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$

$$d(x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} d(x, y)$$

$$d(x_n, y_n) \leq d(x, y) + d(x, x_n) + d(y, y_n)$$

$$d(x, y) \leq d(x_n, y_n) + d(x, x_n) + d(y, y_n)$$

$$|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leq d(x, x_n) + d(y, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

**Пример.**  $a_{np} = \frac{n}{1+n+p}$

$$a_{np} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$a_{np} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} = 1$$

**Следствие 1.**  $X$  – полное евклидово пространство

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{np} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \lim_{p \rightarrow \infty} a_{np} \right)$$

**Следствие 2.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

**Следствие 2’.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

**Следствие 3.**  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in E} \varphi(x), \quad \forall n \quad f_n \in C(E) \Rightarrow \varphi \in C(E)$

**Следствие 3’.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \varphi(x)$$

сходится равномерно по  $x \in E, \forall n \quad f_n \in C(E) \Rightarrow \varphi \in C(E)$

**Следствие 3’’.**

$$\sum_{k=1}^n f_k \in C(E), \quad \forall n, \quad \text{равн.степ. по } n$$

$$\forall x \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \varphi(x) \quad \text{сх-ся} \Rightarrow \varphi \in C(E)$$

**Следствие 4.**

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$$

**Следствие 5.**

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow b]{x \in E} \varphi(x), \quad f(\cdot, y) \in C(E), \quad \forall y \Rightarrow \varphi \in C(E)$$

**Определение.**  $X_0, X$  – метрические пространства,  $E \subset X_0$ ,  $f_p : E \rightarrow X$ ,  $p \in P$   
 $\{f_p(x)\}_{p \in P}$  – равномерно непрерывно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in E : d_0(x, x') < \delta, \quad \forall p \in P \quad d(f_p(x), f_p(x')) < \varepsilon$$

**Суммирование двойного ряда**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \quad \text{when??}$$

$$a_{nk} \geq 0 :$$

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ - биекция} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

**Определение.**

$A$  – счетное множество индексов ( $a_\alpha \geq 0$ ):  $\exists$  биекция  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \quad \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$$

Корректность:  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow A$  др  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\psi(k)}$  (теорема об изменении порядка суммирования)

**Теорема 2.**  $a_{nk} \geq 0, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \quad \text{конеч. или } \infty$$

*Доказательство.*

$$\sum_{n=1}^{\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \leq \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{K_n} a_{nk} \leq \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk} \Rightarrow \underbrace{\lim_{k_1 \rightarrow \infty} \lim_{k_2 \rightarrow \infty} \dots \lim_{k_N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{K_n} a_{nk}}_{= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}} \leq \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \leq \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$$

1.

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk} = \sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} < \infty$$

$$\forall \varepsilon \exists L : \forall l > L : \sum_{j=1}^l a_{\varphi(j)} > \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk} - \varepsilon$$

$$K = \{\varphi(l) \mid l = 1, \dots, L+1\} \exists N : K = \bigcup_{n=1}^N \tilde{K}_n$$

$$\tilde{K}_n = \{n\} \times K_n$$

$$K_n = \{k \mid (n, k) \in K\} = \pi_y \tilde{K}_n$$

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk} - \varepsilon < \sum_{j=1}^{L+1} a_{\varphi(j)} = \sum_{n=1}^N \sum_{k \in K_n} a_{nk} \leq \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

$$\forall \varepsilon \exists N : \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \geq \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk} - \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \geq \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$$

$$2. \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk} = \infty$$

(вместо  $\varepsilon$  и  $\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$  ставим  $M$ , а последний переход равен бесконечности)

Аналогично  $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} a_{nk}$

□

**Теорема 3.**  $\{a_{nk}\}_{n,k \in \mathbb{R}}$  – двойная последовательность в  $\mathbb{R}$

$$\sum_{n,k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| < \infty$$

$(n, k) \in \mathbb{N}^2$  Тогда сходятся и равны:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}$$

*Доказательство.*

$$\forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \sum_{n,k \in \mathbb{N}} |a_{nk}|$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \text{ сходится асб.}$$

$$\forall \varepsilon \exists N : \forall m > n > N : \sum_{i=n}^m \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| \leq \sum_{i=n}^m \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| < \varepsilon$$

$$\xRightarrow{\text{к. Коши}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \text{ ряд сходится}$$

Рассмотрим подпоследовательность  $\{\varphi_{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} |a_{ij}|$$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \exists N : \forall n > N : \sum_{l=n^2+1}^{\infty} |a_{\varphi(l)}| &< \varepsilon \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{ij}| + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \varepsilon \\ \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{ij}| \\ \left| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| &= \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| \leq \sum_{n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \end{aligned}$$

Сложим две оценки:

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| < \varepsilon$$

$$\text{Аналогично } \left| \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right| < \varepsilon$$

$$\xRightarrow{\forall \varepsilon \exists N} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

□

## Интегрирование

**Теорема 4.**  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall n \ f_n \in C([a, b])$$

$$\forall x \in [a, b] : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \varphi(x), \text{ равномерно по } x \in [a, b]$$

Тогда

$$\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) dx$$

**Замечание.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$ , если  $f$  равномерно сх

*Доказательство.* (теоремы)  $\varphi \in C([a, b])$  (по сл. 3)

$$\forall \varepsilon \exists N \forall n > N, x \in [a, b] : |f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Проинтегрируем

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon$$

□

**Следствие 6.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx$ , если ряд справа сходится равномерно

**Следствие 7.**  $\lim_{y \rightarrow c} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow c} f(x, y) dx$ , если предел  $f$  равномерно по  $x$

**Следствие 8.**  $K \subset \mathbb{R}^n$  компактно,  $f \in C([a, b] \times K)$   $\int_a^b f(x, y) dx = \varphi(y) : K \rightarrow \mathbb{R}$   
Тогда  $\varphi \in C(K)$

## Дифференцирование

**Теорема 5.**  $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall n f_n \in C^1(a, b)$$

$$\forall x \in (a, b) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \varphi(x)$$

$$\forall x \in (a, b) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \psi(x), \text{ достигается равномерно}$$

$$\text{Тогда } \varphi \in C^1(a, b) \text{ и } \varphi' = \psi$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{df_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)$$

*Доказательство.*  $x_0 \in (a, b)$

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

$$\longrightarrow \varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x \psi(t) dt \Rightarrow \varphi' = \psi$$

□

**Следствие 9.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)$ , если ряд производных с.х. равномерно.

**Следствие 10.**  $\lim_{y \rightarrow c} \frac{df}{dx}(x, y) = \frac{d}{dx} (\lim_{y \rightarrow c} f(x, y))$ , если слева равн. с.х.

**Теорема 6.** (Дифференцирование интеграла по параметру)

$$f : [a, b] \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C([a, b] \times (c, d))$$

$$\forall x, y \in [a, b] \times (c, d) \quad \exists \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(x, y), \quad \varphi(x, y) \in C([a, b] \times (c, d))$$

Тогда

$$\exists \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x, y) dy$$

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

Доказательство.

$$\underbrace{\frac{1}{h} \int_a^b (f(x, y+h) - f(x, y)) dx}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \int_a^b f(x, y) dx} = \underbrace{\int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$$

$$g(h) = f(x, y+h) - f(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h$$

$$g(h) = g(h) - g(0) = g'(\xi) \cdot h, \quad \xi \leftarrow [0, h] \quad (\text{т. Лагранжа})$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) h$$

$$\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\xi(h)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \in C([a, b] \times (c, d)), \text{ возьмём такую } h, \text{ чтобы } (y-h, y+h) \subset (c, d) :$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \in C([a, b] \times [y-\delta, y+\delta])$$

$\Rightarrow$  Равномерно непрерывна??? или чоо тут

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\xi(h)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \xi \in (-\delta, \delta), \forall x \in [a, b] \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall h \in (-\delta, \delta), \forall \xi(h) \in [0, h] \text{ или } [h, 0], \forall x \in [a, b]$$

$$\left| \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\xi(h)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$\underbrace{\frac{1}{h} \int_a^b (f(x, y+h) - f(x, y)) dx}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \int_a^b f(x, y) dx} = \underbrace{\int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$$

□