Условный экстремум функции

$\boxed{\textbf{19 сентября 2022}}$

$D \subset \mathbb{R}^{n+m},\ f : D \to \mathbb{R}, \quad z \in D$

$\Phi : D \to \mathbb{R}^m \qquad$ условие $\Phi(z) = 0$

Определение. *точка $z_0 \in D$ называется условным экстремумом функции f при условии $\Phi = 0$, если $\Phi(z_0) = 0$ и $\exists U$ – окрестность z_0, $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ $\forall z \in D \cap U$: $\Phi(z) = 0$ выполняется условие $f(z) \geq f(z_0)$ (– условный* min*); $f(z) \leq f(z_0)$ (– условный* max*)*

Пусть $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, открытое, $f \in C^1(D, \mathbb{R}),\ \Phi \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$

z_0 – точка условного экстремума

$\operatorname{rank} \Phi'(z_0) = m$

Перенумеруем координаты $\boxed{\Phi'_x \mid \Phi'_y} = \Phi'$

$z = (x, y)$ так, чтобы было $\det \Phi'_y(z_0) \neq 0 \quad z_0 = (x_0, y_0)$

По *Th. о неявном отображении* $\exists U$ – окрестность x_0:

$$y = \varphi(x),\ x \in U,\ \Phi(x, \varphi(x)) = 0$$

Тогда $f(x, \varphi(x))$ имеет безусловный экстремум в точке x_0 (условие выполняется)

$\Rightarrow^{(1)} \quad \underbrace{f'_x(z)}_{1\times n} + \underbrace{f'_y(z)}_{1\times m} \cdot \underbrace{\varphi'(x)}_{m\times n} = 0$ (– это и есть необх. усл. экстремума)

$\varphi'(x_0) = -\left(\Phi'_y(z_0)\right)^{-1} \cdot \Phi'_x(z_0)$

$^{(1)}$ НУО: $f'_x(z) - \underbrace{f'_y(z)\left(\Phi'_y\right)^{-1}}_{=\lambda \text{ (см. след. §)}} \Phi'_x(z) = 0$

Метод неопределенных множителей Лагранжа

$$\begin{cases} f'_x(z) + f'_y(z)\varphi'(x) = 0 \quad n \text{ уравнений} \\ \Phi(z) = 0 \text{ – отсюда } +m \text{ уравнений, } n+m \text{ неизвестных} \end{cases}$$

$\underbrace{f'_y(z)}_{1\times m} = \underbrace{\lambda}_{1\times m} \cdot \underbrace{\Phi'_y(z)}_{m\times n}$

$\Phi'_x(z) + \Phi'_y(z)\varphi'(x) = 0$

$f'_x(z) + \cancel{f'_y(z)\varphi'(x)} - \lambda(\Phi'_x(z) + \cancel{\Phi'_y(z)\varphi'(x)}) = 0$

$f'_x(z) - \lambda\Phi'_x(z) = 0$

т. е. получаем

$$\begin{cases} f'_x(z) - \lambda\Phi'_x(z) = 0 \quad n+2m \text{ уравнений} \\ \Phi(z) = 0 \quad n+2m \text{ неизвестных} \\ f'_y(z) - \lambda\Phi'_x(z) = 0 \quad (\lambda \text{ в числе неизв.}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ т. е. система стала единообразной

$$\begin{cases} f'(z) - \lambda\Phi'(z) = 0 \\ \Phi(z) = 0 \end{cases}$$

Пусть $F(z,\lambda) = f(z) - \lambda\Phi(z)$

$F'_z(z,\lambda) = f'(z) - \lambda\Phi'(z)$

$F'_\lambda(z,\lambda) = -\Phi(z)$

$\Rightarrow \boxed{F' = 0}$

Пример 1. *Наименьшее и наибольшее значения квадратичной формы на единичной сфере*

$A = A^T \in \mathrm{Mat}^d,\ (Az,z) = \sum_{i,k=1}^d A_{ik}z_iz_k \quad z \in \mathbb{R}^d$

$S^{d-1} = \{x : \|z\| = 1\}$

$f(z) = (Az,z)$

$\Phi(z) = \|z\|^2 - 1 = \sum_{i=1}^d z_i^2 - 1, \quad m = 1, n = d-1$

$f'(z) = 2(Az)^T \quad \Phi'(z) = 2z^T$

$\forall l\ \frac{\partial f}{\partial z_l} = \frac{\partial}{\partial z_l}\left(\sum_{k=1}^d A_{lk}z_k + \sum_{i=1}^d A_{il}z)i = 2(Az)_l\right)$

$$\begin{cases} f'(z) - \lambda\Phi'(z) \\ \Phi(z) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2(Az - \lambda z) = 0 \\ \Phi(z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Az = \lambda z \\ \|z\| = 1 \end{cases} \quad \text{– задача на собственные знач. и векторы}$$

Замечание. *Условные экстремумы в точках является нормированным собственными векторами матрицы*

$$f(z) = (Az,z) = (\lambda z, z) = \lambda\|z\|^2 = \lambda$$

$\Rightarrow$ наибольшее значение квадратичной формы $= \max\{\lambda\}$

наименьшее $= \min\{\lambda +$ с. ч $A\}$

$B \in \mathrm{Mat}^{m,n} \quad \|B\|^2 = \sup_{z\in S^{n-1}} \|Bz\|^2 = \sup_{z\in S^{n-1}}(Bz,Bz) =$

$= \sup_{z\in S^{n-1}}(B^TB,z) = \max\lambda(B^TB) = \max S(B),$ где $S(B)$ – сингулярные числа на B

$A \in \mathrm{Mat}^{m,n}$

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$(Ax,y) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m A_{ik}x_ky_i = \sum_{k=1}^n x_k(A^Ty)_k = (x, A^ty)$$

$$(A^T y)_k = \sum_{l=1}^{m} (A^T)_{kl} y_l = \sum_{l=1}^{m} A_{lk} y_l$$

Интеграл Римана в $\mathbb{R}^n$

Π – координатный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$,
$\Pi = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$
$v(\Pi) = (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ – объем

$f : \Pi \to \mathbb{R}$, ограниченное $\quad (\exists c > 0 : |f(x)| < c \ \forall x \in \Pi)$
$p_i = \{[t_{k-1}, t_k],\ k = 1, \ldots, N_i\}$ – разбиение $[a_i, b_i]$, если $a_i = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{N_i} = b_i$
$p = \{\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n,\ \pi_i \in p_i\}$ – разбиение Π

$$d(p) = \max_{\pi \in p} \operatorname{diam} \pi, \qquad \operatorname{diam} \pi = \sup_{x, y \in \pi} \|x - y\|$$

$L(f, p) = \sum_{\pi \in p} \inf_{\pi} f \cdot v(\pi)$ – нижняя сумма Дарбу
$U(f, p) = \sum_{\pi \in p} \sup_{\pi} f \cdot v(\pi)$ – верхняя сумма Дарбу
$L(f, p) \leq U(f, p)$

Лемма 1. *Для* $\forall$ *разбиений* $p_1,\ p_2 \quad L(f, p_1) \leq U(f, p_2)$

Доказательство.

1. p_2 – расширение $p_1 \quad (\forall \pi \in p_1 : \pi = \bigcup_{i=1}^{N} \pi_i,\ \pi_i \in p_2)$

   $v(\pi) = \sum_{i=1}^{N} v(\pi_i)$

   $\inf_{\pi} f \leq \inf_{\pi_i} f,\ \forall i$

   $\sum_{i=1}^{N} \inf_{\pi_i} f \cdot v(\pi_i) \geq \inf_{\pi} f \cdot v(\pi)$

   $\Rightarrow L(f, p_2) \geq L(f, p_1)$

   Аналогично для $U(f, p_2) \leq U(f, p_1)$

2. Пусть p_1 и p_2 – два произвольных разбиения

   Рассмотрим $p_3 = \{\pi_1 \cap \pi_2,\ \pi_1 \in p_1,\ \pi_2 \in p_2\}$

   $L(f, p_1) \leq L(f, p_3) \leq U(f, p_3) \leq U(f, p_2)$

□

Следствие 1. $\inf_p U(f, p) \geq \sup_p L(f, p)$

Определение.
$$\underline{\int_\Pi} f := \sup_p L(f,p) \qquad \overline{\int_\Pi} f := \inf_p U(f,p)$$
$$f:\Pi\to\mathbb{R} \qquad \textit{огранич.}$$

Определение. *Если* $\underline{\int_\Pi} f = \overline{\int_\Pi} f$, *то* f *называется интегрируемой по Риману и*
$$\underline{\int_\Pi} f = \overline{\int_\Pi} f = \int_\Pi f$$

$$\int_\Pi f = \int f(x)dx = \overbrace{\int\cdots\int_\Pi}^{n} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n \text{ – \textit{кратный интеграл}}$$

Пример 2.

1. $f\equiv c$ $\forall p\forall\pi\in p$ $\inf_\pi f=\sup_\pi f=c$

   $L(f,p)=U(f,p)=c\cdot v(\pi)$

   $\Rightarrow\exists\int_\Pi f=c\cdot v(\pi)$

2. $\pi=[0,1]^2$, $f(x,y)=\begin{cases}0 & ,x\in\mathbb{Q}\\ 1 & ,x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ $\qquad \forall p\ \forall\pi\in p\ \inf_\pi f=0$

   $L(f,p)=0 \qquad U(f,p)=0$

Лемма 2. $f:\Pi\to\mathbb{R}$ *огр.*
f *интегрируема* $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists p\ U(f,p)-L(f,p)<\varepsilon$

Доказательство.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\overline{\int_\Pi} f-\underline{\int_\Pi} f\le U(f,p)-L(f,p)$

$\forall\varepsilon\ \exists p: U(f,p)-L(f,p)<\varepsilon\Rightarrow=0$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\sup_p L(f,p)=\inf_p U(f,p)\Rightarrow\exists p_2: U(f,p_2)-\inf_p U(f,p)<\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists p_1:\sup_p L(f,p)-L(f,p_1)<\frac{\varepsilon}{2}$

Рассмотрим $p_3=\{\pi_1\cap\pi_2,\ \pi_1\in p_1,\pi_2\in p_2\}$

$U(f,p_2)-L(f,p_1)<\varepsilon$

$U(f,p_3)-L(f,p_3)\le U(f,p_2)-L(f,p_1)<\varepsilon$

$\Rightarrow$ вот $\exists p=p_3$

$\square$

Лемма 3. $f : \Pi \to \mathbb{R}$, *огр.*

Пусть $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– последовательность разбиений* Π

$d(p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. *Тогда* $L(f, p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \underline{\int\limits_{\Pi}} f$

$U(f, p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \overline{\int\limits_{\Pi}} f$

Доказательство. $\varepsilon > 0 \quad \exists p_\varepsilon : \underline{\int\limits_{\Pi}} f - L(f, p_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\underline{\int\limits_{\Pi}} f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, p_\varepsilon) \le \underline{\int\limits_{\Pi}} f$$

$$p_k = p_k' \cup p_k'' \quad \begin{cases} \pi \in p_k', & \text{если } \exists \pi_1 \in p_\varepsilon : \pi \supset \pi_1 \\ \pi \in p_k'', & \text{если } \pi \text{ имеет непустое пересечение с гранями п-да из } p_\varepsilon \end{cases}$$

Рассмотрим $p_{\varepsilon,k} := \{\pi_1 \cap \pi_2,\ \pi_1 \in p_k, \pi_2 \in p_\varepsilon\}$

$$L(f, p_k) - L(f, p_{\varepsilon,k}) = \sum_{\pi'' \in p_k''} \inf_{\pi''} f v(\pi'') - \sum_{\substack{\pi \in p_{\varepsilon,k} \\ \pi \in \bigcup\limits_{\pi'' \in p_k} \pi''}} \inf_{\pi} f v(\pi)$$

$S(p_\varepsilon)$ – сумма площадей всех граней п-ов из p_ε

$$\sum_{\pi'' \in p_k''} v(\pi'') \le 2 \cdot S(p_\varepsilon) \cdot d(p_k)$$

$$\left| \sum_{\pi'' \in p_k''} v(\pi'') \right|, \left| \sum_{\substack{\pi \in p_{\varepsilon,k} \\ \pi \in \bigcup\limits_{\pi'' \in p_k} \pi''}} \inf_{\pi} f v(\pi) \right| \le$$

$$\sup_{\pi} |f| \cdot \sum_{\pi'' \in p_k''} v(\pi'') \le 2S(p_\varepsilon) \cdot \sup_{\pi} |f| \cdot d(p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$\exists K\ \forall k > K \quad L(f, p_{\varepsilon,k}) - L(f, p_k) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\underline{\int\limits_{\Pi}} f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, p_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \le L(f, p_{\varepsilon,k}) - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, p_k) < \underline{\int\limits_{\Pi}} f \Rightarrow L(f, p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \underline{\int\limits_{\Pi}} f$$

□