Математический анализ

3 октября 2022

Характеристическая функция множества

Определение. *Характеристическая функция множества*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Лемма 12. $\{$*Точки разрыва* $\chi_E(x)\} = \delta E$

Доказательство. $x \in \operatorname{Int} E \cup \operatorname{Ext} E$

На внутренних точках $\lim \chi_E(x) = 1 = \chi_E(x)$

На внешних точках $\lim \chi_E(x) = 0 = \chi_E(x)$

На границе разрывна - очев

$\square$

Определение. $E \in \Pi$, Π - *п/п*, $f : E \to \mathbb{R}$ - *ограничена*

$\int\limits_E f = \int\limits_\Pi f \cdot \chi_E$

$\tilde{f} = f \cdot \chi_E(x)$

Лемма 13. $\mu(\delta E) = 0$, $f : E \to \mathbb{R}$ - *почти везде непрерывна на* E

Тогда $\exists \int\limits_E f$

Доказательство. Необходимо доказать, что $\exists \int\limits_\Pi \tilde{f}$

$\{$Точки разрыва $\tilde{f}$ на $\Pi\} = \{$Точки разрыва $\tilde{f}$ на $\operatorname{Int} E\} \cup \{$Точки разрыва $\tilde{f}$ на $\delta E\} \cup \underbrace{\{\text{Точки разрыва } \tilde{f} \text{ на } \operatorname{Ext} E\}}_{\emptyset}$

$\{$Точки разрыва $\tilde{f}$ на $\Pi\} \subset \{$Точки разрыва f на $\operatorname{Int} E\} \cup \delta E$

$\mu(\{$Точки разрыва $\tilde{f}$ на $\Pi\}) = 0$ - по критерию Лебега существует интеграл $\square$

Определение. E - *ограничено*, $\mu(\delta E) = 0$

$\exists \Pi \in \mathbb{R}^n$ - *п/п:* $E \in \Pi$

$\upsilon(E) = \int\limits_E 1 = \int\limits_\Pi \chi_E(x)$ - *Жорданов объём*