

1 начало

Диффура (ОДУ) - обыкновенные дифференциальные уравнения

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

- обычное дифф уравнение n -ного порядка

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$$

Это был общий вид.

Канонический вид:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

второй закон ньютона:

$$\begin{cases} m\vec{a} &= \vec{F} \\ m\vec{X}''(t) &= \vec{F}(t, \vec{x}(t), \vec{x}'(t)) \end{cases} \text{ это типичное дифф. уравнение}$$

Задача Коши:

Теорема Пикара: $\exists!$ решения задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \text{ чета пусто непон} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y = \varphi(x)$ - ищем такое решение

$(x_0, y_0) \in \text{Int}(X, Y)$

1) $f \in C(\overline{X}, \overline{Y})$, X, Y - области

2) Функция Липшицева по y , равномерна по $x \in \overline{X}$, если

$$\exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Доказательство: Возьмём интеграл от задачи Коши:

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \implies y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \implies y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Теперь решим после стрелочки вправо:

$$\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$$

$$\varphi_0 = y_0$$

$$\varphi_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_0(t)) dt$$

...

$$\varphi_m = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{m-1}(t)) dt$$

...

$$\varphi_k \in C(\overline{X} \subset \overline{K}), K - \text{компакт}, \varphi_k \xrightarrow{k} \varphi, k \rightarrow \infty$$

$$\varphi_0(x) + (\varphi_1(x) - \varphi_0(x)) + (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) + \dots = ? = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k - \varphi_{k-1}) \leq \text{суммируемая мажоранта}$$

чета про верштраса и мажоранты посчитаем модуль разницы

$$|\varphi_m(x) - \varphi_{m-1}(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \varphi_{m-1}(t)) - f(t, \varphi_{m-2}(t))| dt \leq \text{липшецевость}$$

$$\begin{aligned} x, x_0 \in K - \text{компакт} \\ \leq L \int_{x_0}^x |\varphi_{m-1}(t) - \varphi_{m-2}(t)| dt \leq \end{aligned}$$

по индукции предполагаем, что этот модуль не превосходит ...

$$\begin{aligned} M &= \max_{x, y \in (\bar{X}, \bar{Y})} |f(x, y)| \\ \max_{x \in K} |\varphi_m(x) - \varphi_{m-1}(x)| &\leq \frac{ML^{m-1}|x - x_0|^m}{m!} \end{aligned}$$

продолжение дела...

$$\leq L \int_{x_0}^x |\varphi_m(x) - \varphi_{m-1}(x)| dt \leq \frac{ML^{m-2}L}{(m-1)!} \int_{x_0}^x |t - x_0|^{m-1} dt \leq \frac{ML^{m-1}|x - x_0|^m}{m!}$$

$$\text{База } |\varphi_1 - \varphi_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt$$

$$\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k - \varphi_{k-1}) \leq \frac{M}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{L^m |x - x_0|^m}{m!} = |\varphi_0| + \frac{M}{L} (e^{L|x-x_0|} - 1)$$

$$\varphi_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{k-1}(t)) dt \leq M|x - x_0|, k \rightarrow \infty$$

равномерно перделим $\varphi_k(x)$ к $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

чета по теореме Бэроу про переменный верхний пердел показали существование короче.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \mid \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\begin{cases} y' = f(x, y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

осталась единственность. Положим, что есть два решения. φ и ψ .

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) dt \quad \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

$$|\psi(x) - \varphi(x)|$$

$\uparrow \uparrow$

$$\begin{aligned}
|\psi(x) - \varphi_m(x)| &\leq \int_{x_0}^x \left| f(t, \psi(t)) - f(t, \varphi_{m-1}(t)) \right| dt \\
&\leq L \int_{x_0}^x |\psi - \varphi_{m-1}| dt = M \frac{L^{m-1} |x - x_0|^m}{m!} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

$$\text{база: } |\psi(x) - \varphi_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \psi(t))| dt \leq M|x - x_0| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned}
\text{ип: } |\psi - \varphi_m| &\leq \frac{L^m M |x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \\
&\Rightarrow \psi = \varphi
\end{aligned}$$

доказали на компакте $K \subset U_\varepsilon(x_0)$. Он входит в некую окрестность точки x_0 .

// M связно, если для любых двух открытых множеств G_1, G_2 и $M \in G_1 \cup G_2$ и $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$

Следствие 1:

Пусть $\bar{x} = [x_0 - a, x_0 + a]$, $\bar{y} = [y_0 - b, y_0 + b]$ - отрезки.

\exists пикаровский интервал $[x_0 - h, x_0 + h]$, φ - решение задачи Коши:

$$\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h], h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

$$|\varphi(x) - y_0| \leq M|x - x_0| \leq b$$

Следствие 2:

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x)) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}^{(0)} \end{cases}$$

$$\vec{y}, \vec{f} \in \mathbb{R}^n$$

$$1.) \vec{f} \in C(\bar{X}, \bar{Y})$$

$$2.) ||\vec{f}(x, \vec{y}^{(1)}) - \vec{f}(x, \vec{y}^{(2)})|| \leq L ||\vec{y}^{(1)} - \vec{y}^{(2)}||$$

Следствие 3:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C(\bar{Y}) \implies L = \max_{K \subset Y} \left| \frac{\delta f}{\delta y} \right|$$

Следствие 4:

пусть условие липшецевости выполнено независимо

$$\forall a > 0, ||\vec{y}|| < \infty \exists L_a = L$$

$$||f(x, \vec{y}^{(1)}) - f(x, \vec{y}^{(2)})|| \leq L ||\vec{y}^{(1)} - \vec{y}^{(2)}|| \implies \exists! \vec{\varphi}(x), \text{ определенная на } [x_0 - a, x_0 + a]$$

Если же $L_a = L(a) \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}$, то вообще говоря не всякое решение продолжимо, даже на отрезке $[x_0 - a, x_0 + a]$

Непрерывная зависимость решения задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = m \end{cases}$$

$$z = y - m \implies \begin{cases} z' = f(x, z + m) \\ z(x_0) = 0 \end{cases} = f(x, z, m)$$

Теорема:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, m) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$1. f(x, y, m) \in C(\overline{D}), \overline{D} = \{|x - x_0| \leq y, |y - y_0| \leq b, |m - m_0| \leq c\}$$

$$2. |f(x, y, m) - f(x, y_2, m)| \leq L|y_1 - y_2|$$

$$\implies [x_0 - h, x_0 + h], h_1 = \min\{a, \frac{b}{m}\}$$

$$\exists! \varphi_m(x) \in C_m[m_0 - c, m_0 + c]$$

Литература:

- Курс обыкновенных диффузов. Петровский
- Чето тоже про дифуры. Эльцгольц