

чѐ

$G \subset \mathbb{R}^n$ откp., огp., $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ огp и п.в. неnp.

$\text{supp} f \subset G$

$$\implies \exists \int_G f$$

Теорема 1. $G \subset \mathbb{R}^n$ откp., огp.,

$g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ диффеоморфизм

$g(G)$ огp.,

$f : g(G) \rightarrow \mathbb{R}$ огp. и п.в. неnp., $\text{supp} f \subset g(G)$

Тогда

$$\exists \int_G f \circ g |\det g'| = \int_{g(G)} f$$

Доказательство.

Лемма 10. $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм (биекция, неnp. в обе стороны)

$$E \subset G : \bar{E} \subset G$$

Тогда

$$g(\bar{E}) = \overline{g(E)}$$

$$g(\text{Int} E) = \text{Int} g(E)$$

$$g(G \setminus \bar{E}) = g(G) \setminus \overline{g(E)}$$

$$g(\delta E) = \delta g(E)$$

$$\text{Если } G, g(G) \text{ огp., } g - \text{диффеоморфизм, то } \mu(E) = 0 \iff \mu(g(E)) = 0$$

Доказательство. $G \ni x_n \rightarrow x \in G, n \rightarrow \infty \iff g(G) \ni g(x_n) \rightarrow g(x) \in g(G), n \rightarrow \infty$

$$g(x) \in g(\bar{E}) \iff x \in \bar{E} \iff g(x) \in \overline{g(E)}$$

$$x \in \text{Int} E \iff \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset E \iff \exists \delta > 0 : B_0(g(x)) \subset g(E) \iff g(x) \in \text{Int} g(E)$$

это g, g^{-1} неnp.

$$x \in \delta E \iff E \ni y_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty$$

$$G \setminus E \ni z_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty$$

$$\iff \begin{cases} g(E) \ni g(y_n) \rightarrow g(x), n \rightarrow \infty \\ g(G \setminus E) \ni g(z_n) \rightarrow g(x) \end{cases} \iff g(x) \in \delta g(E)$$

$$x \in G \setminus \bar{E} = \text{Int}(G \setminus E) \iff g(x) \in g(x) \in \text{Int}(g(G) \setminus \overline{g(E)}) = g(G \setminus \overline{g(E)}) \quad \square$$

g - диффеоморфизм, $G, g(G)$ огp., $\mu(E) = 0$

$\forall \varepsilon \exists C_l, l = 1, \dots, N$ открытые кубы $E \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l, \sum_{l=1}^{\infty} v(C_l) < \varepsilon$

$l(C)$ - длина ребра куба $C, v(C) = (l(C))^n$

$$\text{diam} C = l(C) \cdot \sqrt{n}$$

Если $\varepsilon < (\frac{\delta}{2\sqrt{n}})^n$

$\forall l \quad v(C_l) < \varepsilon \implies l(C_l) < \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$

$\text{diam} C_l < \frac{\delta}{2}$

$\text{dist}(E, \delta G) = \delta$

$E \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \subset G$

$\bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \subset E^{\frac{\delta}{2}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, E) < \frac{\delta}{2}\} \subset \overline{E^{\delta/2}} \subset G$

$\max_{\overline{E^{\delta/2}}} \|g'\| = M$

$\forall x_1, x_2 \in E^{\delta/2} \quad \|g(x_1) - g(x_2)\| < M \cdot \|x_1 - x_2\|$

x_l - центр куба l

$G(C_l) \subset B_{M \text{diam} C_l \cdot 0.5}(g(x_l)) \subset \tilde{C}_l, l(\tilde{C}_l) = M \cdot \text{diam} C_l$

$v(\tilde{C}_l) = (l(\tilde{C}_l))^n = M^n (\text{diam} C_l)^n = M^n (\frac{\text{diam} C_l}{\sqrt{n}})^n (\sqrt{n})^n = (M\sqrt{n})^n v(C_l)$

$g(E) \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \tilde{C}_l, \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{C}_l = (M\sqrt{n})^n \cdot \varepsilon$

Замечание. В условии теоремы $\exists \int_G f \circ g | \det g' |$

Доказательство. $\text{supp} f = \{y \in g(G) \mid f(y) \neq 0\}$

$\text{supp}(f \circ g | \underbrace{\det g'}_{>0}) = \text{supp} f \circ g = \{x \in G \mid (f \circ g)(x) \neq 0\}$

$g(\{x \in G \mid f \circ g \neq 0\}) = \{y \in g(G) \mid f(y) \neq 0\}$

\implies л.12 замыкания совпадают

$\text{supp}(f \circ g | \det g' |)$ компактен

$\sup_{\text{supp}(f \circ g | \det g' |)} | \det g' | < \infty \implies f \circ g | \det g' |$ орг.

f п.в. непр. на $g(G) \implies f \circ g$ п.в. непр. на G

$| \det g' | \in C(G) \implies f \circ g | \det g' |$ п.в. непр. на G

Значит, $\exists \int_G f \circ g | \det g' |$ □

Разобьем область на маленькие кусочки, на каждом кусочке локально сможем представить диффеоморфизм в виде композиции простейших диффеоморфизмов, меняющих одну коорд.

Лемма 11. $G \subset \mathbb{R}^n$ откр.,

$g : G \rightarrow R$ диффеоморфизм

$\forall x \in G \quad \exists$ окрестность $U \subset G$:

$$g|_U = g_1 \circ \dots \circ g_n$$

g_k - диффеоморфизм простейшего вида, т.е. $(g_k)_i(x) = x_i, \forall i \neq k$

Доказательство. Индукция

база: $k = 1$: уже простейший

переход: $(g(x))_i = x_i, \quad i \geq k + 1$

$$x = (y = (x_1, \dots, x_k), z)$$

$$\text{Пусть } x_0 \in G, g'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

$0 \neq \det g'(x_0) = \det \frac{\partial g}{\partial y}(x_0) \implies$ не все миноры порядка $k-1$ нулевые. Найдётся $k-1$ независимый столбик.

Перенумеровкой компонент добьемся того, чтобы главный минор не был равен 0

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (f(x))_i = \begin{cases} (g(x))_i, & i < k \\ x_i, & i \geq k \end{cases}$$

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ & I_{n-k+1} \end{pmatrix}$$

$$\det f'(x_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{k-1} \neq 0$$

$$f \in C^1(G)$$

\exists окрестность $U \ni x_0$ $f|_U$ - диффеоморфизм

Рассм $h = g \circ (f|_U)^{-1}$ - диффеоморфизм

$$h : f(U) \rightarrow g(U)$$

$$g|_U = h \circ f|_U$$

Для $f \exists$ окрестность x_0 , в которой f раскладывается в композицию простейших по инд предп.

$$u \in F(U)$$

$$i < k \quad (h(u))_i = (g \circ f^{-1}(u))_i = (f \circ f^{-1}(u))_i = u_i$$

$$i > k \quad (h(u))_i = (g \circ f^{-1}(u))_i = (f^{-1}(u))_i = u_i$$

$$\underbrace{(f(x))_i}_{=u} = x_i = (f^{-1}(u))_i \quad i > k$$

т.е. h - простейший диффеоморфизм и g раскладывается

□

Лемма 12. Утверждение теоремы верно при $n = 1$

Лемма 13. В условиях теоремы на G и на g при $n = 1$ для $\forall f : g(G) \rightarrow \mathbb{R}$ огр. : $\text{supp} f \subset g(G)$

$$\int_{\underline{g}} f \circ g | \det g' | = \int_{\underline{g(G)}} f, \quad \overline{\int}_G f \circ g | \det g' | = \overline{\int}_{g(G)} f$$

Доказательство. $\text{supp} f$ компактен.

$$\forall x \in \text{supp} f \quad \exists \varepsilon_x > 0 : [x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x] \subset G$$

$$\text{supp} f \subset \bigcup_{x \in \text{supp} f} (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \implies \text{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^N (x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i})$$

$$\text{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^N [x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}] \text{ отрезки не пересекаются}$$

$$\forall i \quad (g^{-1})'|_{[x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}]} \text{ имеет постоянный знака}$$

$$g^{-1}([x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}]) - \text{отрезок}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \text{достаточно доказать, что } \int_{g([a,b])} f = \int_{[a,b]} f \circ g |g'| \\
&g' > 0 : \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx \\
&g' < 0 : \int_{g(b)}^{g(a)} f(y) dy = \int_a^b f(g(x)) |g'(x)| dx \\
&P_y - \text{разбиение } g([a,b]) \quad P_x = g^{-1}(P_y)'' = \{g^{-1}(\pi) | \pi \in P_y\} \\
&\max_{[a,b]} |g'| \cdot d(P_y) \leq d(P_x) \leq \max_{g([a,b])} |(g^{-1})'| \cdot d(P_y) \\
&\sum_{\pi_y \in P_y} \sup_{\pi_y} f \cdot v(\pi_y) = \sum_{\pi_x \in P_x} \sup_{\pi_x} (f \circ g) |g'(\xi(\pi_x))| \cdot v(\pi_x) \\
&\pi_y = g(\pi_x) \\
&v(\pi_y) = |g(\beta) - g(\alpha)| = |g'(\xi)| \cdot (\beta - \alpha) \\
&\text{продолжаем неравенство (не правильное он все стер суака)} \leq \underbrace{\sup_{[a,b]} |g'|}_{< \infty} \sum_{\pi_x \in P_x} \sup_{\pi_x} f \circ g \cdot v(\pi_x) \\
&P_{x,k} : d(P_{x,k}) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \\
&P_{y,k} : d(P_{y,k}) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \\
&\forall \pi_x \exists \xi(\pi_x) < \pi_x \quad v(\pi_y) = |g'(\xi(\pi_x))| \cdot v(\pi_x) \\
&U(f, P_{y,k}) \leq \sum_{\pi_x \in P_x} \sup_{\pi_x} f \circ g |g'| \cdot v(\pi_x) = U(f \circ g |g'|, P_{x,k}) \\
&\text{слева } \int_{g([a,b])} f \leq \text{справа } \int_{[a,b]} f \circ g |\det g'| \\
&\int_{g^{-1}g([a,b])} f \circ g |g'| \leq \int_{g([a,b])} f \circ g \circ g^{-1} |g' \circ g^{-1}| \cdot |g^{-1}| \\
&\implies \int_{g([a,b])} f = \int_{[a,b]} f \circ g |g'| \quad \square
\end{aligned}$$

1. g - простейший диффеоморфизм $(g(x))_i = x_i \quad i < n$

$$g(G) = \Pi_y = \underbrace{\Pi_1}_{\subset \mathbb{R}^n} \times \underbrace{\Pi_{yn}}_{\subset \mathbb{R}}$$

$$G = \Pi_x = \Pi_1 \times \underbrace{\Pi_{xn}}_{\subset \mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned}
\int_{g(G)} f &= \int_{\Pi_y} f \cdot \chi_g(G) \stackrel{\text{Фубини}}{=} \int_{\Pi_1} dy_1 \dots dy_{n-1} \int_{\Pi_2} dy_n f \cdot \chi_g(G) = \\
&= \int_{\Pi_1} dy_1 \dots dy_{n-1} \underbrace{\int_{\Pi_n [g(G) \cap (y_1, \dots, y_{n-1}) \times \mathbb{R}]} f(y) dy_n}_{\text{открытое огр мнжво}}
\end{aligned}$$

лемма 14 $\int_{\Pi_1} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{\Pi_n [G \cap (y_1, \dots, y_n) \times \mathbb{R}]} (f \circ g)(x) \left(\frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \right) dx_n$ что-та в последней скобке равно $\det g'(x)$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Pi_1} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{\Pi_{xn}} f \circ g |\det g'| \cdot \chi_G = \int_{\Pi_x} f \circ g |\det g'| \cdot \chi_G = - \int_G f \circ g |\det g'| \\
&\text{видимо некст раз докажем} \quad \square
\end{aligned}$$