Устойчивость по Ляпунову.

Зачем другой подход к устойчивости? Мы на самом деле доказали асимптотическую устойчивость.

Def: Пусть есть $\dot{y} = h(t, y), h(t, 0) = 0$.

'Стоп!' - скажете вы! $\dot{x} = f(t, x), \bar{x}(t)-$ решение. $y = x - \bar{x}(t)$. Тогда $x = y + \bar{x}(t)$ и $\dot{\bar{x}}(t) + \dot{y} = f(t, y + \bar{x}(t))$

$\dot{y} = f(t, y + \bar{x}(t)) - f(t, \bar{x}(t)) = h(t, y)$

Решение $y \equiv 0$ **устойчиво по Ляпунову**, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t > t_0\ \|y_0\| < \delta \implies \|y(t, y_0)\| < \varepsilon$

Def. Решение $y(t) = 0$ асимтотически устойчиво тогда, когда оно устойчиво по Ляпунову и $\exists \delta > 0\ \forall \|y_0\| < \delta\ \|y(t, y_0)\| \to 0, t \to \infty$

Неустойчиво, если $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists \{y_0^{(k)} \mid y_0^{(k) \to 0, k \to \infty}\}, \exists \{t_k \mid t_k \to \infty\} \|y(t_k, y_0^{(k)})\| = \varepsilon$

$\dot{y} = h(t, y), h(t, 0) = 0$. Замена переменных: $y = F(t, z), D(F) \supset \{t \in [t_0, \infty)\}, \|z\| < \delta_0$, причём $F(t, 0) = 0$, F непрерывна по z, равномерна по t. F однозначно разрешима относительно z, то есть есть обратная замена: $z = G(t, y), D(G) \supset U^t\{(t, y), t \in [t_0, \infty)\}, y \in D(h)$.

Тогда под действием такой замены изначальная система переходит к $\dot{z} = H(t, z)$

Лемма 1. Решение $y \equiv 0$ системы $\dot{y} = h(t, y)$ устойчиво по Ляпунову, асимптотически устойчиво или неустойчиво тогда, когда таковыми же являются решения $z \equiv 0$ системы $\dot{z} = H(t, z)$

$\triangleright\ y(t) \leftrightarrow z(t) \quad \dot{y} = h(t, y) \iff \dot{z} = H(t, z)$

Достаточно доказать, что из устойчивости $y \equiv 0$ вытекает устойчивость $z \equiv 0$ (асимптотичемская устойчивость).

$\forall \varepsilon > 0$ (в силу равномерной по t непр. $F(t, z)$) $\exists \varepsilon_1 > 0\ \forall z \in U(0), \|z\| < \varepsilon_1 \implies \underbrace{\|y\|}_{=F(t,z)} < \varepsilon$.

1.(устойчивость) Пусть $z \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову. По ε_1 выберем $\delta_1 > 0 : \forall z_0 : \|z_0\| < \delta_1 \implies \|z(t, z_0)\| < \varepsilon_1$.

$G(t, y)$ также непрерывно. По δ_1 выберем $\varepsilon > 0 : \forall y_0 : \|y_0\| < \delta \implies \underbrace{\|z_0\|}_{=G(t,y)} < \delta_1$.

$\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y_0 : \|y_0\| < \delta \implies \underbrace{\|z_0\|}_{=F(t,z_0)} < \delta_1 \implies \underbrace{\|y(t, y_0)\|}_{=F(t,z(t,z_0))} < \varepsilon$.

2. Аналогично $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall y_0 : \|y_0\| < \delta \implies \|z_0\| < \delta_1 \underset{\text{асимпт уст}}{\implies} \|z(t, z_0)\| \to 0, t \to \infty$.

$y(t) = F(t, z(t, z_0)) \implies F(t, 0) = 0, F \in C \implies \|y(t, y_0)\| \to 0, t \to \infty$.

3. Неустойчивость аналогично.

$\triangleleft$

$A = \{y_0 \mid \|y(t, y_0)\| \to 0, t \to \infty\}$ – **область притяжения** нулевого решения.
Доказать, что A открыто и связно...

Устойчивость по Ляпунову линейных однородных СДУ.

$\dot{\vec{x}} = P(t)x$

$\vec{\varphi}$ - решение, $\vec{y} = \vec{x} - \vec{\varphi} \implies \dot{\vec{y}} = P(t)y$ – то же самое уравнение.

$\implies$ всякое решение φ устойчиво по Ляпунову, асимптотически устойчиво или неустойчиво одновременно с нулевым.

Лемма 2. $\Phi(t), \Psi(t) \quad t \in [t_0, \infty) \quad \Phi(t) = \Psi(t)Q(t)$, где $\det Q \neq 0$,
$\forall t \ \|Q(t)\| < C_1, \|Q^{-1}\| < C_2 \implies \Psi(t)$ ограничена, неограничена, бесконечно мала по норме при $t \to \infty \iff \Phi(t)$ такова же,

$\triangleright \|\Phi(t)\| = \|\Psi(t)Q(t)\| = \|\Psi(t)\|\|Q(t)\| \leq C_1\|\Psi(t)\|$

$\|\Psi(t)\| = \|\Phi(t)\|\|Q^{-1}(t)\| \leq C_2\|\Phi(t)\| \quad \triangleleft$

Следствие 1. $\widetilde{\Phi}(t, t_0)$ - фундаментальная матрица $\widetilde{\Phi}(t_0, t_0) = I \implies \forall\Phi(t)$ - фунд. и ограничена, неограничена, бесконечно мала одновременно с $\widetilde{\Phi}$

Теорема 1. 1. Уравнение $\dot{y} = P(t)y$ устойчиво по Ляпунову $\iff \Phi(t)$ - фунд. и ограничена M.

2. Уравнение асимтотически устойчиво $\iff \Phi(t)$ - фунд. и бесконечно мала ($\|\Phi(t)\| \to 0, t \to \infty$).

$\triangleright \|\widetilde{\Phi}\| < M \implies \vec{x}(t, x_0) = \widetilde{\Phi}(t, t_0)\vec{x_0}$. Возьмём норму:

$\|\vec{x}(t, x_0)\| \leq \|\widetilde{\Phi}(t, t_0)\|\|\vec{x_0}\| \leq M\|x_0\|$.

$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \varepsilon/M \ \forall t \geq t_0 \ \|x_0\| < \delta : \|x(t, x_0)\| \leq M\varepsilon/M = \varepsilon$.

Вправо: $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \vec{x}_0^{(1)} = (\delta/2, 0 \ldots, 0)^T, \vec{x} = \widetilde{\Phi}(t, t_0)\vec{x_0} = \vec{\varphi}^{(1)} \cdot \delta/2, \ \|\delta/2 \cdot \vec{\varphi}^{(1)}\| = \delta/2 \cdot \|\vec{\varphi}^{(1)}\| < \varepsilon$. Домножим на $2/\delta$:

$\|\vec{\varphi}^{(1)}\| < 2\varepsilon/\delta = M < \infty$.

$\vec{x_0}^{(k)} = (0, \ldots, \delta/2, \ldots, 0)^T \implies \|\vec{\varphi}^{(1)}\| < 2\varepsilon/\delta = M < \infty$

2. Влево $\|\Phi(t, t_0)\| \to 0, \ t \to \infty, \ \|x(t, x_0)\| \leq \|x_0\|\|\Phi(t, t_0)\| \to 0, t \to \infty$.

Вправо $\exists\Delta > 0 : \forall\vec{x}_0 : \|\vec{x}_0\| < \Delta \ \|x(t, t_0)\| \to 0$,

$\vec{x}_0^{(k)} = (0, \ldots, \Delta/2, \ldots, 0)^T \implies \Delta/2 \cdot \|\vec{\varphi}^{(k)}(t)\| \to 0, \ t \to \infty \quad \triangleleft$

Теорема 2. Пусть $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с постоянными коэфф. Тогда

1. Система устойчива по Ляпунову $\iff$ среди собственных чисел λ_j матрицы A $\mathbb{R}\lambda_j \leq 0$ и для чисто мнимых $\lambda_j = iB_j$ и $\lambda_j = 0$ они либо простые (кратности 1), либо их геометрические или алгебраические кратности совпадают.

2. Асимтотически устойчива iff все λ_j имеют строго отрицательные вещественные части.

$\triangleright Q \sim e^{Jt} \triangleleft$

$forall$ чисто мрнимы

$\lambda = 0 \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \|e^{Jt}\| = \|I + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\|,$ норма последней матрицы равна $|t|c, \ c > 0$

$\dot{x} = P(t)x \quad P(t+\omega) = P(t), \ P(t) = G(t)e^{Jt}, \ \det G(t) \neq 0, \ G(t+\omega) = G(t), \ G \in C$

$\|G(t)\| < C_1, \ \|G^{-1}(t)\| \leq C_2, \quad t \in [0, \omega]$

λ_j - характеристические множители. $\lambda_j = 1/\omega \cdot \ln \mu_j, \ \mu_j$ - собственные числа матрицы Монодромии