Математический анализ

21 ноября 2022

Теорема 1. $f_n : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f \in C([a, +\infty))$

$\forall x \in [a, +\infty)\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: \varphi(x)$

$\forall R > a$ *сходимость равномерна на* $[a, R]$

$$\forall n\ \exists \int_a^{\infty} f_n(x)dx \text{ и сходится равномерно по } n \in \mathbb{N}$$

Тогда

$$\exists \lim_{n\to a} \in_a^{+\infty} f_n(x)dx = \int_a \varphi(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Теорема 2. $f : [a, +\infty) \times (c, d) \to \mathbb{R},\ f \in C([a, +\infty) \times (c, d))$

$$\forall x, \in [a, +\infty) \times (c, d)\ \exists \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(x, y), \varphi \in C([a, +\infty) \times (c, d))$$

$$\forall y \in (c, d)\ \exists \int_a^{+\infty} f(x, y)dx,\ \exists \int_a^{+\infty} \varphi(x, y)dx,\ \text{сх. равномерно по } y \in (c, d)$$

Тогда $\exists$ *и равны*

$$\frac{d}{dx} \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x, y)dx$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx$$

Теорема 3. $f : [a, +\infty) \times (c, d) \to \mathbb{R},\ f \in C([a, +\infty) \times (c, d))$

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)dx \text{ сх. равномерно по } y \in [c, d]$$

Тогда $\exists$ *и равны*

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y)dy$$

Внешняя алгебра

L – линейное пространство, $\dim L = n$

$$e_1, \ldots, e_n \text{ – базис в } L$$

$\Lambda^2 L$ – формальные суммы $\sum_{i=1}^N \alpha_i a_i \wedge b_i,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ a_i, b_i \in L,$

профакторизованные по отношению эквивалентности, заданному правилом:

$$(\alpha a_i + \beta b_1) \wedge a_2 = \alpha a_1 \wedge a_2 + \beta b_1 \wedge a_2$$

$$a_1 \wedge a_2 = -a_2 \wedge a_1$$

$a = \sum_{i=1}^n a^i e_i,\ b = \sum_{i=1}^n b^i e_i$

$$a \wedge b = \sum_{i,j=1}^n a^i b^j e_i \wedge e_j = \sum_{i,j \in \{1,\dots,n\}, i \neq j} a^i b^j e_i \wedge e_j =$$

$$= \sum_{i,j \in \{1\dots,n\}, i<j} (a^i b^j - b^i a^j) e_i \wedge e_j$$

$e_i \wedge e_j \mid 1 \leq i < j_{\leq n}$ – базис $\Lambda^2 L \quad \dim \Lambda^2 L = C_n^2$
$\Lambda^0 L = \mathbb{R}$
$\Lambda^1 L = L$
$\Lambda^p L$ – формальные суммы $\sum \alpha a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$
факторизованные по правилам

$$(\alpha a_1 + \beta b_1) \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p = \alpha a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p + \beta b_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p$$

Базис $\Lambda^p L \quad e_{n_1} \wedge e_{n_2} \wedge \cdots \wedge e_{n_p}$, где $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_p \leq n$
$\dim \Lambda^p L = C_n^p$
Если π – перестановка $\{1, \dots, p\} \quad a_{\pi(1)} \wedge a_{\pi(2)} \wedge \cdots \wedge a_{\pi(p)} = \operatorname{sign} \pi a_1 \wedge \cdots \wedge a_p$
$\lambda = \sum_H a^H e_H \qquad b^{h_1 \dots h_p}$
если $h_1 < \cdots < h_p$, то $b_H = a_H$. При всех остальных – по антисимметричности
$\lambda = \frac{1}{p!} \sum_{h_1,\dots,h_p=1}^n b^{h_1 \dots h_p} e_{h_1} \wedge \cdots \wedge e_{n_p}$

$\dim \Lambda^p L = C_n^p$
$\dim \Lambda^h L = 1$
$\Lambda^n L = \{c e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \mid c \in \mathbb{R}\}$
Пусть $A \in B(L)$, $\det A =$
Рассмотрим $g_A(a_1, \dots, a_n) = (A a_1) \wedge \cdots \wedge (A a_n)$
$g_A : L^n \to \Lambda^L$
Скажем, что $\exists f_a \in \Lambda^n L \quad f_A(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) = g_A(a_1, \dots, a_n) \qquad f^{A^{-1}}$ умножение на число

Утверждение: $f_A(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) = (\det A) a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$

Доказательство. $a_1, \dots, a_n$ лин. нез. : $0 = 0$

$$a_1, \dots, a_n \Rightarrow \text{ это базис } L$$

$$Aa_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} a_k$$

$$f_A(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) = g_A(a_1, \dots, a_n) = (Aa_1) \wedge \dots \wedge (Aa_n) =$$

$$= \left(\sum_{k_1=1}^{n} A_{k_1 1 a_{k_1}} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{k_n=1}^{n} A_{k_n n} a_{k_n} \right)$$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_n \in \{1,\dots,n\}, k_i \neq k_j, i \neq j} A_{k_1 1} \dots A_{k_n n} \underbrace{a_{k_1} \wedge \dots \wedge a_{k_n}}_{\operatorname{sign}(k_1,\dots,k_n)}$$

$$= (\det A) a_1 \wedge \dots \wedge a_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Aa_1) \wedge \dots \wedge (Aa_n) \ \det A a_1 \wedge \dots \wedge a_n$$

□

Внешее произведение

$$(\underbrace{a_1 \wedge \dots \wedge a_p}_{\in \Lambda^p L}) \wedge (\underbrace{b_1 \wedge \dots \wedge b_q}_{\in \Lambda^q L}) := a_1 \wedge \dots (a_p \wedge b_1) \wedge \dots \wedge b_1 \in \Lambda^{p+q} L$$

на полиномах – по линейности

$$\underbrace{\lambda}_{\in \Lambda^p L} \wedge \underbrace{\mu}_{\in \Lambda^q L} = (-1)^{pq} \mu \wedge \lambda$$

Пример. $L = \mathbb{R}^3$

$(a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3) \wedge (b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3) = (a^1 b^2 - b^1 a^2) e_1 \wedge e^2 +$
$+ (a^2 b^3 - b^2 a^3) e_2 \wedge e_3 + (a^3 b^1 - b^3 a^1) e_3 \wedge e_1$

$(a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3) \wedge (b^1 e_2 \wedge e_3 + b^2 e_3 \wedge e_1 + b^3 e_1 \wedge e_2) =$
$= (a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3) e_1 \wedge e^2 \wedge e^3.$

$A \in B(M, N) \quad \Lambda^p A \in B(\Lambda^p M, \Lambda^p N)$

$(\Lambda^p A)(\underbrace{a_1 \wedge \dots \wedge a_p}_{\in \Lambda^p M}) = (Aa_1) \wedge \dots \wedge (Aa_p) \quad \Lambda^n A = \det A$

$e_1, \dots, e_m$ – базис в M

$f_1, \dots, d_n$ – базис в N

$\Lambda^p A e H = (\Lambda^p A)(e_{h_1} \wedge \dots \wedge e_{n_p}) = (Ae_{h_1}) \wedge \dots \wedge (Ae_{h_p}) =$
$= \left(\sum_{k_1=1}^{n} A_{k_1 h_1} f_{k_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{k_p=1}^{n} A_{k_1 h_p} f_{k_p} \right) =$

$= \sum_{k_1,\dots,k_p\in\{1,\dots,n\},k_i\neq k_j,i\neq j} A_{k_1h_1}\dots A_{k_ph_p} f_{k_1}\wedge\dots\wedge f_{k_p} =$
$\sum_{k=(k_1,\dots,k_p),1\le k_1<\dots<k_p\le n}\sum_\pi A_{k_1h_1}\dots A_{k_ph_p}\operatorname{sign}\pi f_{k_p} = A_{KH}$
$\Lambda^p AeH = \sum_K A_{KH} f_K$

Свойства внешней степени оператора

1. $\Lambda^p(AB) = \Lambda^p A\Lambda^p B$

   $(\Lambda^p(AB))(a_1\wedge\dots\wedge a_p) = (ABa_1)\wedge\dots\wedge(ABa_p) =$

   $= (\Lambda^p A)((Ba_1)\wedge\dots\wedge(Ba_p)) = (\Lambda^p A\Lambda^p B)(a_1\wedge\dots\wedge a_p)$

2. $\lambda\in\Lambda^p M,\ \mu\in\Lambda^q M$

   $(\Lambda^{p+q}A)(\lambda\wedge\mu) = (\Lambda^p A\lambda)\wedge(\Lambda^q A\mu)$

   По линейности для мономов: $\lambda = a_1\wedge\dots\wedge a_p,\ \mu = b_1\wedge\dots\wedge b_q$

   $(\Lambda^{p+q}A)(\lambda\wedge\mu) = \underbrace{(Aa_1)\wedge\dots\wedge(Aa_p)}_{\Lambda^p A\lambda}\wedge\underbrace{(Ab_1)\wedge\dots\wedge(Ab_q)}_{\Lambda^p A\mu}$

Индефинитное скаларое произведение

Скалярное произведение, внутреннее произведение, "индефинитная метрика"
$(\cdot,\cdot)$ – симметричная невырожденная билинейная форма

$$\text{невырожденность: } (a,b)=0,\ \forall b\in L\Rightarrow a=0$$

$$(a,b)=(b,a),\forall a,b\in L$$

Пример (Лоренцево произведение).
$a=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\quad (a_1,a_2) = x_1x_2+y_1y_2+z_1x_2-t_1t_2$

Невырожденность $\Leftrightarrow$

$$\Big((e_i,e_j)\Big)_{i,j=1}^n \text{ – матрица Грамма,}\quad \det\neq 0$$

$\exists$ ортонормированный базис $\sigma_i,\ i=1,\dots,n$

$$(v_i,v_j)=\mp\delta_{ij}$$

r_+ – число знаков $+$, r_- – число знаков $-$, $s=r_+-r_-$ – сигнатура

$$f\in L^*\ \exists b_+\in L\ \forall a\in L\ f(a)=(b_f,a)$$

Скалярное произведение в $\Lambda^p L$

$\lambda = a_1 \wedge \dots \wedge a_p$
$\mu = b_1 \wedge \dots \wedge b_p$
$(\lambda, \mu)_{\Lambda^p L} := \det \left((a_i, b_j) \right)_{i,j=1}^{p}$
$\sigma_H = \sigma_{h_1} \wedge \dots \wedge \sigma_{h_p}$
$(\sigma_H, \sigma_K)_{\Lambda^p L} = 0,\ H \neq K$ (столбец из нулей в матрице $(\sigma_{h_i}, \sigma_{k_j})_{i,j=1}^{p}$)
$(\sigma_H, \sigma_H) = \det \operatorname{diag}\{(\sigma_{h_i}, \sigma_{h_i}),\ i = 1, \dots, p\} = \prod_{i=1}^{p} (\sigma_{h_i}, \sigma_{h_i}) \neq 0 = \pm 1$
$\Lambda^p L,\ \dim = n$

$$\alpha_n \sigma_1 \wedge \wedge \dots \wedge \sigma_{n-1},\ \alpha_{n-1} = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_{n-2} \wedge \sigma_n$$

$$\alpha_i = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_{i+1} \wedge \dots \wedge \sigma_n$$

$$(\alpha_i, \alpha_j)_{\Lambda^n L} = \prod_{j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} (\sigma_j, \sigma_j) = (-1)^{r_-} (\sigma_i, \sigma_i)_L$$