Пример с сферами (6 полусфер, 6 карт как бы, ну там конспект савелия вообщем)

## Касательное пространство

$p \in M, \dim M = m$

$m = 3 : \vec{v} = (a, b, c) \leftrightarrow a\frac{\partial}{\partial x}|_p + b\frac{\partial}{\partial y}|_p + c\frac{\partial}{\partial z}|_p$ - касательный вектор в точке $p$.

Рассмотрим гладкие функции на многообразии.

**Определение.** *Если $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ – такой линейный функционал на $C^\infty(M)$, что*

$$v(fg) = f(p) \cdot v(g) + g(p) \cdot v(f),$$

*то $v$ называется касательным вектором к многообразию $M$ в точке $p$.*

**Замечание.** $v(const) = 0$

$v(1) = v(1 \cdot 1) = 1 \cdot v(1) + 1 \cdot v(1) = 2 \cdot v(1) \implies v(1) = 0$

Касательные вектора образуют линейное пространство, обозначим его $\mathrm{T}p\, M$.

**Лемма 1.** $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p,\ i = 1, \ldots, n$ *– базис в* $\mathrm{T}p\, M$ $\quad \frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}$

*Доказательство.* $f \in C^\infty(M), f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U))$

Дальше расписываем как-то, смотрите в конспекте савелия: $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p(fg) = \ldots = f(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p(g) + g(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f)$

Дифференцирование координат попадает в касательное пространство.

Докажем, что набор частных производных координат образует базис.

Возьмём произвольный функционал, посмотрим пробные функции $\varphi^i(\cdot) = x^i \in C^\infty(M)$, точнее $\varphi^i \cdot \eta$ (продолжение функции, чтобы она была бесконечногладкой). $v(x^i) = v(x^i - \varphi^i(p)) =: a^i \in \mathbb{R}$

$\eta_1$ – тождественная единица на отрезке от 0 до 1, тождественный ноль на луче от двух до бесконечности.

Срезка в пространстве $\mathbb{R}^n : \eta = \eta_1(\frac{\|\varphi(\cdot) - \varphi(p)\|}{2\delta}), \delta = B_{2\delta}(\varphi(p)) \subset \varphi(U)$

Докажем, что действие фукнционала на такую срезку совпадает с чем-то не услышал...

$v(f\eta) = v(f), \forall f \in C^\infty(M)$

$v(1 - \eta) = v(\sqrt{1 - \eta}^2) = 2v(\sqrt{1 - \eta})\sqrt{1 - \eta}|_{\varphi(p)} = 0$

$0 = v(1) = v(\eta + 1 - \eta) = v(\eta) + v(1 - \eta) = v(\eta)$

$f \in C^\infty(M),\ (f \circ \varphi^{-1})(x) = \ldots = f(p) + \sum_{i=1}^m g_i(x)(x^i - \varphi^i(p)),\ g(x) = (f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p) + \vartheta(x - \varphi(p)))$

$v(f) = \ldots = \sum_{i=1}^m a^i \cdot g_i(\varphi(p)),\ a^i = v(\varphi^i(\cdot) - \varphi^i(p))$

$= \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f)$ чтд

$f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1})$, дифференцируем. Там сумму какую-то получаем.

$\implies \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}|_p$ – закон преобразования базиса.

$\mathrm{Tp}\, M \ni v = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_{j=1}^m b^j \frac{\partial}{\partial y^j}|_p,\ a^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i}{\partial y^j} b^j$ – контравариантный закон.

□

$\mathrm{TM} = \{(p, v) \mid p \in M, v \in \mathrm{Tp}\, M\}$ - касательное расслоение. $M$ - база расслоения

$\pi : \mathrm{TM} \to M \quad \pi(p, v) = p$

**Определение.** $f : M \to \mathrm{TM} \quad : \pi \circ f = id_M$ - *сечение касательного расслоения.*

$M = U \subset \mathbb{R}^n\ f : U \to \mathbb{R}^n \quad \mathrm{TM} = M \times \mathbb{R}^n$

**Определение.** $v \in C^\infty(M, \mathrm{TM}) : \pi \circ f = id_M$ – *гладкие сечения.*

$v(x) = \sum_{i=1}^m a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^m b^j(y) \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad a^i \in C^\infty(\varphi(U)), b^j \in C^\infty(\psi(V))$

## Дифф формы на многообразии

$F^0(M) = C^\infty(M)$

$\mathrm{Tp}^*\, M = (\mathrm{TM}\, M)^*$ – кокасательное пространство в точке $p$.

$dx^i,\ i = 1, \ldots, m$ – базис, дуальный к $\frac{\partial}{\partial x^i}$

$dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta^i_j$

$T^* M = \{(p, w) \mid w \in \mathrm{Tp}^*\, M\}$ – кокасательное расслоение

$\pi(p, w) = p$

$F^1(M) = \{w \in C^\infty(M, T^*M) \mid \pi \circ w = id_M\}$ – гладкие сечения $T^*M$ = 1-формы на $M$.

$w = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx^i = \sum_{j=1}^n b_j(y) dy^j$

$a_i \in C^\infty(\varphi(U))$

$dx^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j, \quad a_i \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i} (*) b_j(y(x))$ – ковариантный закон

$F^l(M) = \{w \in C^\infty(M, \bigwedge^l T^*M) \mid \pi \circ w = id_M\}, \bigwedge^l T^*M = \{(p, w) \mid w \in \bigwedge^l \mathrm{Tp}^*\, M\}$

$w = \sum_H a_H(x) dx^H = \sum_K b_K(y) dy^k$

## Внешняя производная на многообразии

$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ в локальных координатах.

Это определение не зависит от выбора координатной окрестности.

Не успеваю переписать, конспект савелия!

$df = \sum_{j=1}^m \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial y^j}$

## Индуцированное отображение на многообразии

$\varphi = C^\infty(M,N)$ я совсем не успеваю

Свойства:

1. Аддитивность

2. Действие на произведение покомпонентно: $\varphi^*(\lambda \wedge \mu) = (\varphi^*\lambda) \wedge (\varphi^*\mu)$

3. Перестановка производных: $d\varphi^* w = \varphi^* dw$

Далее примеры.

## Интегрирование дифференциальных форм

$\mathbb{R}^n$

$U \subset \mathbb{R}^n$ открыто и измеримо по Жордану, $w \in F^n(U)$

$w(x) = a(x)dx^1 \wedge \dots dx^n : \int_U w := \int_U a.$

$M$ - гладкое многообразие размерности $m$, $w \in F^n(M), n \leq m, C \subset M$

**Определение.** *Множество $C$ допускает гладкую параметризацию, если существует открытое $D \subset \mathbb{R}^n,\ \varphi \in C^\infty(D,M):\ C = \varphi(D),\ (D,\varphi)$ – параметризация. $\varphi$ не обязан быть диффеоморфизмом.*

**Определение.** $(\Delta_1, \varphi_1) \sim (D_2, \varphi_2)$, *если существует диффеоморфизм $g : D_1 \to D_2 :$ $\det g' > 0,\ \varphi_1 = \varphi_2 \circ g$.*

**Определение.** *$C \subset M$ допускает параметризацию $(D,\varphi),\ D \subset \mathbb{R}^n,\ w \in F^n(M)$. $\int_C w := \int_D \varphi^* w$*

Корректность: ...

## Симплекс

0-симплекс – точка

1-симплекс – отрезок (направленный)

2-симплекс – треугольник

3-симплекс – тетраэдр

**Определение.** *$n$-симплекс $\{p = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \dots \alpha_n p_n \mid \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутая выпуклая оболочка.*

**Определение.** *Цепь - формальная сумма (конечная) $c = \sum_i \alpha_i S_i$*

**Определение.** $\delta(p_0, \dots, p_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n)$

Для отрезка: $p_1 - p_0$, треугольника: $(p_1, p_2) - (p_0, p_2) + (p_0, p_1)$, тетраэдра:$(p_1 p_2 p_3) - (p_0 p_2 p_3) + (p_0 p_1 p_3) - (p_0 p_1 p_2)$

$\delta(\delta(\text{тетраэдр})) = 0$

**Теорема 1.** $\delta(\delta C) = 0 \quad \forall C$

*Доказательство.* $\delta\delta C = \sum_{i,k} \pm(p_0, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_n)$, каждое слагаемое появляется дважды и с разными знаками □

$S_n$ – стандартный симплекс в $\mathbb{R}^n$

## Симплексы на многообразии

**Определение.** *$\sigma \subset M$ – $n$-симплекс на многообразии $M$, $\dim M = m$, если $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ и симплекс $S \subset U$, а также такое $\varphi \in C^\infty(U, M)$, что $\sigma = \varphi(S) \subset M$*

$\varphi(\delta S) = \delta\sigma$

Граница симлпекса на многообразии - граница на многообразии, можем интегрировать:

$\sigma = (u, s, \varphi) \quad \int_\sigma w = \int_S \varphi^* w, \quad \int_C w = \sum$ ой

## Теорема Стокса

**Теорема 2.** *$w \in F^p(M)$, $c$ - $(p+1)$-цепь*

$$\int_{\delta C} w = \int_C dw$$

*Доказательство.* ну короче всё понятно я считаю □

## Криволинейные интегралы

$\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ – путь

$\gamma \in C^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ – гладкий путь

$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \exists\varphi \in C([a_1, b_1], [a_2, b_2]) : \gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$

регулярный путь: $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t$

Простой путь: $t_1 \neq t_2 \implies \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

Замкнутый: $\gamma(a) = \gamma(b)$

Кривая - одномерное многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^n$. $\gamma'(x) = 0$. Погружение: $\gamma(x_1) \neq \gamma(x_2) \ \forall x_1, x_2$

$\frac{d}{dt}|_p \leftrightarrow \frac{d\gamma}{dt}(t) \in \mathbb{R} \quad p = \gamma(t)$

$dl = \|\frac{d\gamma}{dt}\|dt \in F^1(M_\gamma)$ – 1-форма на $M_\gamma$ – форма длины.
$\|\gamma'(t)\|dt = \|\widetilde{\gamma}'(s)\|ds$
$dt = \frac{dt}{ds}ds, \quad t(s) = \gamma^{-1} \circ \widetilde{\gamma}$
$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d(\widetilde{\gamma}(s(t)))}{dt} = \frac{d\widetilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$
$l(\widetilde{PQ}) = \int_{\widetilde{PQ}} dl = \int_{\gamma^{-1}(P)}^{\gamma^{-1}(Q)} \gamma^* dl = \int_p^q \|\frac{d\gamma}{dt}(t)\|dt$
$\widetilde{PQ}$ - участок кривой.

**Определение.** $f \in C^\infty(M_\gamma) : \int_P^Q f \cdot dl = \int_p^q (f \circ \gamma)(t)\|\frac{d\gamma}{dt}(t)\|dt$ *– криволинейный интеграл первого рода (или наоборот непон)*

**Определение.** $w \in F^1(M_\gamma) : \int_P^Q w = \int_{\widetilde{PW}} w$ *– криволинейный интеграл второго рода*

$w \in F^1(U),\ U \subset \mathbb{R}^n$ открытое, $M_\gamma \subset U$
$w = a_1(x)dx^1 + \ldots + a_n(x)dx^n$
$id : M_\gamma \to U$
$id^* : F^1(U) \to F^1(M_\gamma)$
$id^* w = a_1(x)dx^1 + \ldots + a_n(x)dx^n$
$\int_P^Q a_1(x)dx^1 + \ldots + a_n(x)dx^n = \int_{\widetilde{PQ}} id^* w = \ldots = \int_p^q (a(\gamma(t)), \tau(\gamma(t)))dl = \int_p^q (a, \tau)dl$ – выражение инт второго рода через первого рода (или наоборот непон)
$\tau(p) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, dl = \|\gamma'(t)\|dt$

## Поверхностные интегралы

Гладкое многообразие с краем или без края, вложенное в $\mathbb{R}^n$
$x(t) = \varphi^{-1}(t)$
ВСЁ. я устал. дальше конспект савелия.
Вектор нормали в $\mathbb{R}^3$ :
$N = \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial r} = (\det \frac{D(x^2,x^3)}{D(u,v)}, \det \frac{D(x^3,x^1)}{D(u,v)}, \det \frac{D(x^1,x^2)}{D(u,v)})$
$n = \frac{N}{\|N\|}$ – единичный вектор нормали.
$\|N\| = \sqrt{\det g}$
ВСЁ. я устал. дальше конспект савелия. ...

## Формула Грина

## Формула Стокса

## Теорема Остроградского-Гаусса