

Математический анализ

26 сентября 2022

Определение интеграла Римана через интегральные суммы

$\Pi \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ орг.

p – разбиение Π , $= \{\pi_i, i = 1, \dots, N\}$

$\Xi = \{\xi_i \in \pi_i, i = 1, \dots, N\}$

$\sum(f, p, \Xi) := \sum_{i=1}^N f(\xi_i) v(\pi_i)$ – интегральная сумма Римана

Определение. Если $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \{p_k\}_{k=1}^\infty : d(p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \{\Xi\}_{k=1}^\infty$

$$\sum(f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} I, \quad \text{то } f \text{ интегрируема по Риману и } I = \int_{\Pi} f$$

Теорема 1.

$$\exists I \quad \forall \{p_k\} : d(p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \{\Xi\} \quad \sum(f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} I \Leftrightarrow \int_{\Pi} f = \overline{\int}_{\Pi} f = \int_{\Pi} f$$

Доказательство.

$$\Rightarrow \varepsilon, p_k : d(p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \pi \in p_k \quad \exists \xi \in \pi :$$

$$f(\xi) - \inf_{\pi} f < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{Получим } \sum(f, p_k, \Xi_k) - L(f, p_k) &= \sum_{\pi \in p_k} (f(\xi(\pi)) - \inf_{\pi} f) \cdot v(\pi) \leq \\ &\leq \varepsilon \cdot \sum_{\pi \in p_k} v(\pi) = \varepsilon \cdot v(\Pi) \end{aligned}$$

$$\text{По Л. 3 } L(f, p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_{\Pi} f \Rightarrow 0 \leq I - \int_{\Pi} f \leq \varepsilon \cdot v(\Pi)$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon \Rightarrow \int_{\Pi} f = I \\ \text{Аналогично } \overline{\int}_{\Pi} f = I \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \int_{\Pi} f = I$$

$$\Leftarrow \text{ Пусть } \int_{\Pi} f = \overline{\int}_{\Pi} f = \int_{\Pi} f. \text{ Возьмем произвольные}$$

$$\{p_k\}, \quad d(p_k) \rightarrow 0, \quad \{\Xi_k\} \quad (*) :$$

$$L(f, p_k) \leq \sum(f, p_k, \Xi_k) = \sum_{\pi \in p_k} \underbrace{f(\xi(\pi))}_{(*)} v(\pi) \leq U(f, p_k)$$

$$(*) \quad \inf_{\pi} f \leq \dots \leq \sup_{\pi} f$$

$$L(f, p_k) \xrightarrow[\text{Л. 3, } k \rightarrow \infty]{} \int_{\Pi} f = \overline{\int}_{\Pi} f \xleftarrow[\text{Л. 3, } k \rightarrow \infty]{} U(f, p_k)$$

$$\Rightarrow \sum (f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} I$$

□

Множество меры ноль

Определение. $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру ноль, если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ покрытие $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, где C_k – открытые кубы

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(C_k) \leq \varepsilon \quad \mu(E) = 0 \quad - \text{мера}$$

Замечание. Открытые кубы \Leftrightarrow замкнутые

Замечание. $E_1 \subset E, \mu(E) = 0 \Rightarrow \mu(E_1) = 0$

Лемма 4. $\mu(E_k) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$

Доказательство. $\forall k \exists$ покрытие кубами с \sum объемов $< \frac{\varepsilon}{2^k}$

Тогда $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ будут покрыты и \sum объемов $< \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon$

□

Определение. $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет объем ноль, если $\forall \varepsilon \exists$ конечное покрытие

$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, где c_k – открытый куб

$$\sum_{k=1}^N v(C_k) < \varepsilon \quad v(E) = 0$$

Замечание.

1. открытые \Leftrightarrow замкнутые кубы

2. $v(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$

Теорема 2. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ не может иметь объем 0

Доказательство. докажем, что если $[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^N C_k$,

$$C_k - \text{отрезки, то } \sum_{k=1}^N v(C_k) \geq b - a$$

база : $N = 1$

$$[a, b] \subset C_1 \Rightarrow v(C_1) \geq b - a$$

переход : $N + 1$

$a \in \bigcup_{k=1}^{N+1} C_k \Rightarrow \exists k : a \in C_k$ перенумеруем C_k так, чтобы $a \in C_1 = [\alpha, \beta]$

$$\alpha \leq a \leq \beta \leq b$$

Если $b \in [\alpha, \beta]$, то $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$,

$$\sum_{k=1}^{N+1} v(C_k) > v(C_1) = \beta - \alpha \geq b - a$$

Если $b \notin [\alpha, \beta]$, $b > \beta$

$$\begin{aligned} (\beta, b] &\subset \bigcup_{k=2}^{N+1} C_k \\ \Rightarrow [\beta, b] &\subset \bigcup_{k=2}^{N+1} C_k \xRightarrow{\text{инд. п.}} \sum_{k=2}^{N+1} v(C_k) \geq b - \beta \\ v(C_1) &\geq \beta - a \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{N+1} v(C_k) &\geq b - a \end{aligned}$$

□

Лемма 5. Если $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно, то $v(K) = 0 \Leftrightarrow \mu(K) = 0$

Доказательство. \Rightarrow очев. (уже доказали)

\Leftarrow Пусть $K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ открытые кубы,

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(C_k) < \varepsilon$$

\exists конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{j=1}^N C_{kj}$,

$$\sum_{j=1}^N v(C_{kj}) < \varepsilon \quad \varepsilon A \Rightarrow v(K) = 0$$

□

Пример 1. $E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ – разные точки $[a, b] = \{q_k, k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{q_k\}$

$$\mu(\{q_k\}) = 0 \quad \forall k \xRightarrow{\text{Л. 4}} \mu(E) = 0$$

при этом $v(E) \neq 0$

$$\text{Пусть } E \subset \bigcup_{k=1}^N C_k \Rightarrow \bar{E}_{=[0,1]} \subset \bigcup_{k=1}^N C_k \xRightarrow{\text{Л. 5}} \sum_{k=1}^N v(C_k) \geq 1$$

Критерий интегрируемости Лебега

Почти везде \equiv везде, кроме множества точек, имеющего меру 0

$E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ огранич.

$$x \in \bar{E}, \quad \delta > 0$$

$$M_\delta(f, x) := \sup_{B_\delta(x)} f, \quad m_\delta(f, x) := \inf_{B_\delta(x)} f$$

$$M_0(f, x) \uparrow, \quad m_0(f, x) \uparrow$$

$$M_\delta(f, x) - m_\delta(f, x) \uparrow \text{ по } \delta \Rightarrow E : \downarrow$$

Определение. $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} M_\delta(f, x) - m_\delta(f, x) = w(f, x)$ – колеб. ф-ии f в точке x

Лемма 6. $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ огр. $x \in \bar{E}$

$$f \text{ непр. в точке } x \Leftrightarrow w(f, x) = 0$$

Доказательство.

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall y \in B_{\delta_\varepsilon}(x) \cap E \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow M_{\delta_\varepsilon}(x) - m_{\delta_\varepsilon}(x) < \varepsilon < \varepsilon$$

$$\text{и более того, } \forall \delta < \delta_\varepsilon \quad M_\delta(x) - m_\delta(x) < \varepsilon$$

$$M_\delta(f, x), m_\delta(f, x) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0$$

$$\text{то есть } w(f, x) = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow} \quad w(f, x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon \quad \exists \delta_\varepsilon : \forall \delta < \delta_\varepsilon$$

$$M_\delta(f, x) - m_\delta(f, x) < \varepsilon$$

$$\forall y \in B_\delta(x) \cap E \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

$$f(y) \xrightarrow{y \rightarrow x} f(x)$$

□

Лемма 7. $F \subset \mathbb{R}^n$ замкн., $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ огр.

$$\forall \varepsilon > 0 : F_\varepsilon := \{x \in F \mid w(f, x) \geq \varepsilon\}. \quad \text{Т. д. } F_\varepsilon - \text{замкн.}$$