Ряды podiФуре

ахахахахаха

Будем говорить про Гильбертовы пространства.

Гильбертовы пространства

Енто частный случай евклидового пространства.

E - евклидово, если оно линейно, и на нём задано скалярное произведение.

Есть норма $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$, неравенство КБ: $|(f,g)| \le \|f\| \cdot \|g\|$.

$\rho(f,g) = \|f-g\|$ – расстояние.

Определение. *Если евклидово пространство полное и бесконечномерное, то оно* ***гильбертово****.*

$f \perp g \iff (f,g) = 0.$

Определение. *Система $\{f_\alpha\}$ ортогональна, если $f_\alpha \perp f_\beta$ $\forall \alpha \neq \beta$.*

Предложение. *Система ортогональна $\iff$ линейно независима.*

Доказательство. $\sum_{i=1}^n c_{\alpha_i} f_{\alpha_i} = 0 \implies \sum_{i=1}^n (c_{\alpha_i} f_{\alpha_i}, f_{\alpha_i}) = c_{\alpha_k} \|f_{\alpha_k}\|^2 = 0 \implies c_{\alpha_k} = 0$ $\forall k$ □

Определение. *Система $\{f_\alpha\}$ полна $\iff$ замыкание её линейной оболочки - всё пространство.*

Определение. *Система полна и ортагональна $\iff$ ортогональный базис.*

Определение. *Ортогональный базис из векторов единичной длины - ортонормированный базис.*

Для ортонормированной системы $(f_\alpha, f_\beta) = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases}$

Пример 1. $\mathbb{R}^n$, $e_i = (0, \dots, 1, \dots 0)$ *- стандартный базис* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *- онб.*

Пример 2. $l^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}) = \{(x_1, x_2, \dots),\ x_i \in \mathbb{C},\ \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty\}$ *- гильбертово.*

$(x,y) = \sum_{i=1}^\infty x_i \bar{y}_i$

$|x_i \cdot \bar{y}_i| \le \frac{|x_i|^2 + |y_i|^2}{2}$

Пример 3. *Не гильбертово:*

$C([a,b]) \quad (f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$

Такую систему возьмём: $1/2$, $\cos(\frac{2\pi nx}{b-a})$, $\sin(\frac{2\pi nx}{b-a})$, $n \ge 1$, *пространство неполно.*

$L^2(a,b)$ *будет гильбертовым.*

Определение. *Подпространство* ***плотно*** $\iff$ *его замыкание совпадает со всем пространством.*

Определение. *Если в евклидовом пространстве есть счётное и плотное множество, то оно* ***сепарабельно****.*

Теорема 1. *В сепарабельном евклидовом пространстве любая ортогональная система не более, чем счётна.*

Доказательство. Предъявим набор подмножеств пространства множества системы, но не превосходящей мощности плотного множества?

На плоскости круги с центром в $(1,0),(0,1)$ радиуса корень из двух не пересекаются.

$\{f_\alpha\}$ ортогональная. Перейдём к ортонормированной системе $\{\varphi_a = \frac{f_\alpha}{\|f\|_\alpha}$ он система в E.

$B_{1/\sqrt{2}}(\varphi_\alpha) \cap B_{1/\sqrt{2}}(\varphi_\beta),\ \alpha \neq \beta$
$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{(-,-)} = \sqrt{(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) - (\varphi_\beta, \varphi_\beta)} = \sqrt{2}$

Если икс попал бы в пересечение, то посчитаем по неравенству треугольника: $\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| \leq \|\varphi_\alpha - x\| + \|x - \varphi_\beta\| < 2 \cdot 1/\sqrt{2} = \sqrt{2} \implies$ такого икса не существует.

В любом шарике есть хотя бы по одной точке, мощность множества шариков не может превосходить мощности множества точек, следовательно их не более чем счётное количество.

(объяснение номер два) Пусть есть пространство $E,\ \bar{S} = E,\ S$ счётно. $\forall \alpha\ \exists s_\alpha \in S \cap B_{1/\sqrt{2}}(\varphi_\alpha)$ т.к. существует последовательность в S, сх. к φ_α, и окрестность $B_{1/\sqrt{2}}(\varphi_\alpha)$ содержит элементы этой последовательности, начиная с некоторого номера. Значит, хотя бы один элемент существует внутри шарика. Получается, что множество этих шариков содержит элементов не более, чем $|S|$.

Они не пересекаются, следовательно там столько же элементов, как и в системе, следовательно система (не более чем) счётна. □

Теорема 2. *Любую линейно независимую систему можно привести к ортонормированности.*

$\varphi_n = \alpha_{n1} f_1 + \ldots + a_{nn} f_n \neq 0$

Доказательство. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

По индукции: $n = 1 : \frac{f_1}{\|f_1\|} = \varphi_1$

Переход: $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ построены.

$f_n - (f_n, \varphi_1) \cdot \varphi_1 - \ldots - (f_n, \varphi_{n-1}) \cdot \varphi_{n-1} = h_n.$

h_n ортогонален каждому φ_n.

$(h_n,\varphi_i)=(f_n,\varphi_i)-\sum_{k=1}^{n-1}(f_n,\varphi_k)(\varphi_i,\varphi_k)=(f_n,\varphi_i)-(f_n,\varphi_i)=0$

$\varphi_n=\frac{h_n}{\|h_n\|},\;\; f_n=(f_n,\varphi_1)\varphi_1+\ldots+(f_n,\varphi_{n-1})\varphi_n+\|h_n\|\varphi_n=\alpha_{n1}\varphi_1+\ldots+\alpha_{nn}\varphi_n$

$\varphi_n=\dfrac{f_n-(f_n,\varphi_1)\varphi_1-\cdots-(f_n,\varphi_{n-1})\varphi_{n-1}}{\|h_n\|}$ $\square$

Заметим, что $\langle f_n\rangle=\langle\varphi_n\rangle$

Предложение. *Пространство сепарабельно $\implies$ в нём есть ОНБ.*

Доказательство. $S\subset E,\;\bar S=E$

$S=\{f_n,\;n\in\mathbb{N}\}\quad C=\{\varphi_k:=f_{n_k},\;k\in\mathbb{N}\},\;f_{n_k}$ не выражается через $f_{n_1},\ldots,f_{n_{k-1}}$. $f_n,\;n\neq n_k$, выражается через f_{n_k}.

Тогда C - л.н. система, $S\subset\langle C\rangle\,,E=\bar S=\overline{\langle C\rangle}\implies$ полно, т.е. онб.

Берём эту систему и нормируем. $\{\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|},\;n\in\mathbb{N}\}$ - ОНБ. $\square$

Ряды Фурье в евклидовом (на самом деле унитарном) пространстве

$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированная система.

$f\in E,\quad\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cdot\varphi_k\quad c_k=(f_k,\varphi_k)$ - ряд Фурье.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k$

$0\le\|S_n-f\|^2=(f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k,f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k)=$

$\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}c_k\underbrace{(\varphi_k,f)}_{=\bar c_k}-\sum_{k=1}^{n}\bar c_k\underbrace{(f,\varphi_k)}_{=c_k}+\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\underbrace{(\varphi_k,\varphi_k)}_{=1}=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$

$\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\le\|f\|^2\implies\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\le\|f\|^2$ - неравенство Бесселя, означает, что рядик сходится, сумма ряда $\le\|f\|^2$ (Если равенство, то называется Парсеваля) Геом смысл извинити пропустил.

Определение. *$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - о/н система. Если $\forall f\in E:\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$, то $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - замкнута.* ($\iff S_n\longrightarrow f,\;n\to\infty$)

Теорема 3. *Если E сепарабельно, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ о/н система, то для неё замкнутость $\iff$ полнота.*

Доказательство. $\boxed{\implies}$ $\forall f\in E\;\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)\varphi_k\longrightarrow f,\;n\to\infty\implies\langle\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}\rangle$ плотна в E.

$\boxed{\impliedby}$ $\forall\varepsilon,f\;\exists\;\|\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k-f\|<\varepsilon$

$\|f-\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k\|^2=\|f\|^2-(f,\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k)-(\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k,f)+(\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k,\sum_{l=1}^{n}a_l\varphi_l)=$
$\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}\bar a_kc_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\bar c_k+\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2=\|f\|^2-\sum|c_k|^2+\sum\underbrace{(|c_k|^2-2\mathbb{R}(a_k\bar c_k))+|a_k|^2}_{=|c_k-a_k|^2}$

$\ge\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$

$\forall f \in E, \varepsilon > 0 \ \exists n : \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 < \varepsilon^2$

Значит, $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \|f\|^2$ $\square$

$f \in C([a,b]) \implies f = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(\frac{2\pi n x}{b-a}) + b_k \sin(\frac{2\pi n x}{b-a}) \Big)$

$a_k = \int_a^b f(x) \cos(\frac{2\pi n x}{b-a}) dx / \| \cos(...)\|^2$

$b_k =$ сейм, только кос на син.

$\|f\|_C = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad \|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \le \|f\|_C \cdot \sqrt{b-a}$

Теорема 4. *(Рисса-Фишера) Если есть последовательность из L^2, то найдется вектор, у которого она будет коэф ряда Фурье.*

H - сепарабельное гильбертово пространство, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - о/н система

$\{c_k\}_{k=1}^{\infty}, : \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$. Тогда $\exists f \in H : c_k = (f, \varphi_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$($\iff$ ряд Фурье сходится).

Доказательство. $f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$

$\|f_n - f_m\|^2 = \| \sum_{k=n+1}^{m} c_k \varphi_k \|^2 \overset{\text{ск.пр.}}{=} \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (кр. Коши)

$\underset{H \text{ полное}}{\implies} \exists f \in H : f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$

$n \ge k : (f_n, \varphi_k) = c_k,\ f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \implies (f, \varphi_k) = c_k$ по непр. ск произв по первому аргументу, которое следует из н-ва КБ.

$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \to f$ - это и есть равносильное условие сходимости Парсеваля.

$\square$

Следствие 1. *H - сепарабельное гильбертово, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ о/н система.*

Она полна $\iff \nexists g \in H \setminus \{0\} : \forall n \ g \perp \varphi_n$.

Доказательство. $\boxed{\implies}$ Пусть существует. $g \in H$ $c_k = (g, \varphi_k) = 0$. Полна, значит замкнута. Н-во Парсеваля:

$\|g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = 0 \implies g = 0$

$\boxed{\impliedby}$ Полнота нарушается, если есть элемент, на котором нарушается неравентсво Парсеваля:

$\exists h : \|h\|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2,\ c_k = (h, \varphi_k)$.

По т. Рисса-Фишера $\exists f \in H : c_k = (f, \varphi_k) \ \forall k,\ \|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 (\implies f \ne h)$

Посмотрим их разность: $g = h - f \ne 0 \quad (g, \varphi_k) = 0 \ \forall k \ (g \perp \varphi_k)$ $\square$