Математический анализ

14 ноября 2022

Ряды и интегралы, зависящие от параметра

$X_0,\ X$ – метрические пространства

$E \subset X_0,\ f : E \to X$

$\{f$ непр в $x\}_{x \in X}$

Непрерывность на E:

$$\forall \varepsilon > 0,\ x \in E,\ \exists \delta > 0 : \forall x' \in E : d_0(x, x') < \delta \text{ выпол. } d\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$$

Равномерная непрерывность:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in E : d_0(x, x') < \delta \text{ вып. } d\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$$

$\{a_n(p)\}_{n=1}^{\infty},\ p \in P$

$\{a_n(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} a(p)\}_{p \in P}$

Сходимость : $\forall \varepsilon > 0\ \forall p \in P\ \exists N : \forall n > N : d\big(a_n(p), a(p)\big) < \varepsilon$

Равномерная : $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall p \in P : \forall n > N : d\big(a_n(p), a(p)\big) < \varepsilon$

Пример 1. $a_n(p) = \frac{np}{1+(np)^2},\ P = [0, 1]$

$\forall p \in P\ a_n(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\varepsilon = 1/2, \forall N\ \exists p, n; np = 1 :\ \frac{np}{1+(np)^2} = 1/2$

Теорема 1 (о двойном пределе)**.** X *– полное метрическое пространство*

$\{a_{np}\}_{n,p \in \mathbb{N}}$ *– двойная последовательность в* X

$\forall p \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{n\to\infty} a_{np} = u_p$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{p\to\infty} a_{np} = v_n$

Если один из этих пределом достигается равномерно, то

$$\exists \lim_{p\to\infty} u_p,\ \exists \lim_{n\to\infty} v_n$$

и они равны.

Доказательство. Пусть $a_{np} \rightrightarrows_{n\to\infty}^{p\in\mathbb{N}} u_p$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n > N_1\ \forall p\ d(a_{np}, u_p) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$n_0 > N_1 \quad a_{n_0p} \xrightarrow[p\to\infty]{} v_n$

для $\varepsilon\ \exists N_2 : \forall p, q > N_2\ d(a_{n_0p}, a_{n_0q}) < \frac{\varepsilon}{3}$

$$d(u_p, u_q) \le d(u_p, a_{n-p}) + d(a_{n_0p}, a_{n_0q}) + d(a_{n_0q}, u_q) < \varepsilon$$

Критерий Коши: $\exists \lim_{p\to\infty} u_p =: w$

$d(a_{np}, u_p) < \frac{\varepsilon}{3}$

$\xRightarrow[p\to\infty]{} d(v_n, w) \le \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

Значит, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} w$ $\square$

Замечание (Непрерывность расстояния)**.** $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

$d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(x, y)$

$d(x_n, y_n) \le d(x, y) + d(x, x_n) + d(y, y_n)$

$d(x, y) \le d(x_n, y_n) + d(x, x_n) + d(y, y_n)$

$|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \le d(x, x_n) + d(y, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Пример 2. $a_{np} = \frac{n}{1+n+p}$

$a_{np} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$a_{np} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} = 0,\ \lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} = 1$$

Следствие 1. X *– полное евклидово пространство*

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{np}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{p\to\infty} a_{np}\right)$$

Следствие 2.

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Следствие 2'.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Следствие 3. $f_n(x) \rightrightarrows_{n\to\infty}^{x\in E} \varphi(x),\ \forall n\ f_n \in C(E) \Rightarrow \varphi \in C(E)$

Следствие 3'.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \varphi(x)$$

сходится равномерно по $x \in E, \forall n\ f_n \in C(E) \implies \varphi \in C(E)$

Следствие 3".

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \in C(E),\ \forall n,\ \ \textit{равностеп. по } n$$

$$\forall x\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \varphi(x)\ \ \text{сх-ся} \Rightarrow \varphi \in C(E)$$

Следствие 4.

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)$$

Следствие 5.

$$f(x,y) \rightrightarrows_{y\to b}^{x\in E} \varphi(x),\ \ f(\cdot,y)\in C(E),\ \ \forall y \Rightarrow \varphi\in C(E)$$

Определение. $X_0,\ X$ *– метрические пространства,* $E\subset X_0,\ \ f_p: E\to X,\ \ p\in P$

$\{f_p(x)\}_{p\in P}$ *– равностепенно непрерывно, если*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x,x'\in E: d_0(x,x')<\delta,\ \ \forall p\in P\quad d\big(f_p(x),f_p(x')\big)<\varepsilon$$

Суммирование двойного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}\qquad \text{when??}$$

$a_{nk}\geq 0:$

$$\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\text{ - биекция}\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Определение.

A – счетное множество индексов ($a_\alpha\geq 0$): $\exists$ биекция $\varphi:\mathbb{N}\to A$

$$\sum_{\alpha\in A} a_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}\qquad \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$$

Корректность: $\psi:\mathbb{N}\to A$ др $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\psi(k)}$ (теорема об изменении порядка суммирования)

Теорема 2. $a_{nk}\geq 0,\ \ \forall n,k\in\mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}\quad \textit{конеч. или } \infty$$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \leq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K_n} a_{nk} \leq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk} \Rightarrow \underbrace{\lim_{k_1\to\infty}\lim_{k_2\to\infty}\dots\lim_{k_N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K_n} a_{nk}}_{=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}} \leq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \leq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$$

1.

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk} = \sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} < \infty$$

$$\forall\varepsilon\ \exists L : \forall l > L : \sum_{j=1}^{l} a_{\varphi(l)} > \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk} - \varepsilon$$

$K = \{\varphi(l) \mid\ l = 1, \dots, L+1\}\ \exists N : K = \bigcup_{n=1}^{N} \widetilde{K}_n$

$\widetilde{K}_n = \{n\} \times K_n$

$K_n = \{k \mid (n,k) \in K\} = \pi_y \widetilde{K}_n$

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk} - \varepsilon < \sum_{j=1}^{L+1} a_{\varphi(j)} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k\in K_n} a_{nk} \leq \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

$$\forall\varepsilon\ \exists N : \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \geq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk} - \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \geq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$$

2. $\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk} = \infty$

   (вместо ε и $\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$ ставим M, а последний переход равен бесконечности)

   Аналогично $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$

$\square$

Теорема 3. $\{a_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{R}}$ – *двойная последовательность в* $\mathbb{R}$

$$\sum_{n,k\in\mathbb{N}} |a_{nk}| < \infty$$

$(n,k) \in \mathbb{N}^2$ *Тогда сходятся и равны:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}$$

Доказательство.

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \sum_{n,k\in\mathbb{N}} |a_{nk}|$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \text{ сходится асб.}$$

$$\forall\varepsilon\ \exists N: \forall m > n > N: \sum_{i=n}^{m}\Big|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big| \le \sum_{i=n}^{m}\Big|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big| < \varepsilon$$

$$\xRightarrow[\text{к. Коши}]{} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \text{ ряд сходится}$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{\varphi_{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}|a_{ij}|$$

$$\forall\varepsilon\ \exists N: \forall n > N: \sum_{l=n^2+1}^{\infty}|a_{\varphi(l)}| < \varepsilon$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{\infty}|a_{ij}| + \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}| < \varepsilon$$

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big| \le \Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{ij}\Big| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{\infty}|a_{ij}|$$

$$\Big|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\Big| = \Big|\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\Big| \le \sum_{n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|$$

Сложим две оценки:

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\Big| < \varepsilon$$

Аналогично $\Big|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij} - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\Big| < \varepsilon$

$$\xRightarrow{\forall\varepsilon\ \exists N} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$$

□

Интегрирование

Теорема 4. $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\forall n\ f_n \in C([a,b])$

$\forall x \in [a,b] : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x)$, *равномерно по* $x \in [a,b]$

Тогда

$$\int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \varphi(x)dx$$

Замечание. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$, *если* f *равномерно сх*

Доказательство. (теоремы) $\varphi \in C([a,b])$ (по сл. 3)

$$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N,\ x \in [a,b] : |f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Проинтегрируем

$$\Big| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \Big| \le \int_a^b \big|f_n(x) - \varphi(x)\big| dx < \varepsilon$$

□

Следствие 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx$, *если ряд справа сходится равномерно*

Следствие 7. $\displaystyle\lim_{y\to c} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y\to c} f(x,y)dx$, *если предел f равномерно по x*

Следствие 8. *$K \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $f \in C([a,b] \times K)$ $\quad \int_a^b f(x,y)dx = \varphi(x) : K \to \mathbb{R}$*

Тогда $\varphi \in C(K)$

Дифференцирование

Теорема 5. *$f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$*

$\forall n\ f_n \in C^1(a,b)$

$\forall x \in (a,b)\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x)$

$\forall x \in (a,b)\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \psi(x)$, достигается равномерно

Тогда $\varphi \in C^1(a,b)$ и $\varphi' = \psi$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)$$

Доказательство. $x_0 \in (a,b)$

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt$$

$$\longrightarrow \varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \psi(t)dt \Rightarrow \varphi' = \psi$$

□

Следствие 9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)$, *если ряд производных сх. равномерно.*

Следствие 10. $\displaystyle\lim_{y\to c} \frac{df}{dx}(x,y) = \frac{d}{dx}(\lim_{y\to c} f(x,y))$, *если слева равн. сх.*

Теорема 6. *(Дифференцирование интеграла по параметру)*

$f : [a,b] \times (c,d) \to \mathbb{R},\ f \in C\big([a,b] \times (c,d)\big)$

$\forall x, y \in [a,b] \times (c,d) \quad \exists \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(x,y),\ \varphi(x,y) \in C\big([a,b] \times (c,d)\big)$

Тогда

$$\exists \frac{d}{dy} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x,y)dy$$

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Доказательство.

$$\underbrace{\frac{1}{h} \int_a^b (f(x,y+h) - f(x,y))dx}_{\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dx} = \underbrace{\int_a^b \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} dx}_{\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

$g(h) = f(x,y+h) - f(x,y)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)h$

$g(h) = g(h) - g(0) = g'(\xi) \cdot h,\ \xi \leftarrow [0,h]$ (т. Лагранжа)

$= \Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big)h$

$\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,y+\xi(h)\big) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} \in C\big([a,b] \times (c,d)\big)$, возьмём такую h, чтобы $(y-h, y+h) \subset (c,d)$:

$\frac{\partial f}{\partial y} \in C\big([a,b] \times [y-\delta, y+\delta]\big)$

$\Rightarrow$ Равномерно непрерывна??? или чоо тут

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,y+\xi(h)\big) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \rightrightarrows^{x\in[a,b]}_{h\to 0} 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \xi \in (-\delta,\delta), \forall x \in [a,b] \quad \Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall h \in (-\delta,\delta),\ \forall \xi(h) \in [0,h] \text{ или } [h,0],\ \forall x \in [a,b]$$

$$\Big|\frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}\Big| = \Big|\frac{\partial f}{\partial y}\big(x,y+\xi(h)\big) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \rightrightarrows^{x\in[a,b]}_{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$\underbrace{\frac{1}{h} \int_a^b \big(f(x,y+h) - f(x,y)\big)dx}_{\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dx} = \underbrace{\int_a^b \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} dx}_{\rightrightarrows_{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

□