Математический анализ

28 ноября 2022

$L \quad \Lambda^p L \quad \lambda\Lambda\mu \in \bigwedge^{p+1} L \quad \bigoplus_{p=1}^{\infty} \Lambda^p L$

Дифференциальные формы

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открыто

$L = \mathbb{R}^n$, $L^* = \mathbb{R}^n$ – сопряженное пространство

Определение. *Дифференциальная p-форма – это гладое отображение из U в $\Lambda^p L$*

$$F^p(U) = C^\infty(U l \Lambda^p L^*)$$

$$F^0 = C^\infty(U)$$

$$F^1(U) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx^i, \ a_i \in C^\infty(U)$$

Пример. $f \in C^\infty(U)$

$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

$df(x,h) = f'(x)h, \ f'(x) \in L^*$

Производная – вектор из $\mathbb{R}^n$ (сост. из частных пр-ых)

$$df(x,h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) h^i$$

$$dx^i(h) = h^i, \quad dx^i \text{ – \textit{функционал}}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i}, \quad \forall i, \ j \text{ – \textit{неверно в общ. случ.}}$$

Пометка:

$$L \ni a = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i$$

Пусть теперь так:

$$\omega \in F^p(U) \quad \omega = \sum_H a_H(x) dx^H \quad a_H \in C^\infty(U), \ \forall H$$

Пример. $n = 3$, $\mathbb{R}^3$

0-*формы:* $C^\infty(U)$

1-*формы:* $p(x,y,z)dx + q(x,y,z)dy + r(x,y,z)dz \quad p,q,r \in C^\infty(U)$

2-*формы:* $a(x,y,z)dy \wedge dz + b(x,y,z)dz \wedge dx + c(x,y,z)dx \wedge dy \quad a,b,c \in C^\infty(U)$

3-*формы:* $g(x,y,z) \wedge dy \wedge dz \quad g \in C^\infty(U)$

Поточечные операции: $\omega + \eta, \ \omega \wedge \eta, \ f \cdot \omega$

$\omega \in F^p(U)$ (тут дописать)

$$\alpha \wedge \lambda = \alpha \cdot \lambda,\ \alpha \in \Lambda^0 P = \mathbb{R},\ \lambda \in \Lambda^p L$$

Внешняя производная

Пример. *Операция d (вн. произв.) действует из $F^p(U)$ в $F^{p+1}(U)$ для $p = 0, \dots, n-1$ по правилу:*

$$1.\ df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) dx^i$$

$$2.\ d(\sum_H a_H(x) dx^H) = \sum_h (da_H(x)) \bigwedge dx^H$$

$$d(a(x)dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_n}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^i}(x) dx^i \wedge dx^m \wedge \dots \wedge dx^{np}$$

Пример. $n = 3$, $\mathbb{R}^n$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx^1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz =$$

$$= (\operatorname{grad} f)_1(x,y,z)dx + (\operatorname{grad} f)_2(x,y,z)dy + (\operatorname{grad} f)_3(x,y,z)dz$$

Производная 1-формы:

$$d(p(x,y,z)dx + q(x,y,z)dy + r(x,y,z)dz) =$$

$$= (\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y})dx \wedge dy + (\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x})dz \wedge dx =$$

$$= (\operatorname{rot} F)_1 dy \wedge dz + (\operatorname{rot} F)_2 dz \wedge dx + (\operatorname{rot} F)_3 dx \wedge dy$$

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} p(x,y,z) \\ q(x,y,z) \\ r(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Производная 2-формы:

$$d(a(x,y,z)dz \wedge dz + b(x,y,z)dz \wedge dx + c(x,y,z)dx \wedge dy) =$$

$$\left(\underbrace{\frac{\partial a}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}(x,y,z)}_{=\operatorname{div} G(x,y,z)} \right) dx \wedge dy \wedge dz =$$

$$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} a(x,y,z) \\ b(x,y,z) \\ c(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Свойства внешней производной

1. Аддитивность: $d(\omega\eta) = d\omega + d\eta$
2. Действие на 0-форму: $f \in f^0(U)$
$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) dx^i$$
3. $d(\lambda \wedge \mu) = (d\lambda) \wedge \mu + (-1)^{\deg \lambda} \lambda \wedge d\mu$
4. Свойство Пуанкаре:
$$d(\omega) = 0 \quad \lambda \in F^p(U): \ \deg \lambda = p$$

Лемма. *Лемма Пуанкаре = свойство Пуанкаре*

Доказательство.

3. $\lambda = a(x)dx^H, \ \mu = b(x)dx^K$
$$d(\lambda \wedge \mu) = d(a(x)b(x) \wedge dx^K) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (ab)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^H \wedge dx^K =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a(x) \frac{\partial b}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^H \wedge dx^K +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b(x) \frac{\partial a}{\partial x^i}(x) dx^i \wedge dx^H \wedge dx^K = d\lambda \wedge \mu f (-1)^p \lambda \wedge d\mu$$
4. $\omega = a(x)dx^H$
$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^H$$
$$dd\omega = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 a}{\partial x^j \partial x^i}(x) dx^j dx^i \right) \wedge dx^H = 0$$

$\square$

Лемма. *Операция d со свойствами $1-4$ единственна*

Доказательство. Пусть $\tilde{d}$ – такая операция $(1-4)$

$\forall H \quad \tilde{d}(dx^H) = 0$??

Индукция: $\quad p = 1$

$$\tilde{d}(dx^i) = \tilde{d}(\tilde{d}x^i); \quad d(x^i) = dx^i = \tilde{d}(x^i)$$

Переход: $\quad (p-1) \to p$

$$dx^H = \tilde{d}(x^{h_1} \cdot dx^{h_2} \wedge \cdots \wedge dx^{h_p}) =$$

$$= (\tilde{d}x^{h_1}) \wedge (dx^{h_2} \wedge \cdots \wedge dx^{h_p}) + x^{h_1} \underbrace{\tilde{d}(dx^{h_2} \wedge \cdots \wedge dx^{h_p})}_{=0}$$

$$0 = \tilde{d}(dx^{h_1} \cdot dx^{h_2} \wedge \cdots \wedge dx^{h_p}) = \tilde{d}(dx^H)$$

$$\tilde{d}(\sum_H a_H(x)dx^H) = \sum_H \tilde{d}(a_H(x)dx^H) = \sum_H (\tilde{d}a_H(x) \wedge dx^H + a_H(x) \wedge \tilde{d}(dx^H))$$

$$= \sum_H \tilde{d}a_H(x)dx^H = \sum_H \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_H(x)}{\partial x^i}(x)dx^i \wedge dx_H =$$

$$d\left(\sum_H a_H(x)dx^H\right)$$

$$\Rightarrow \tilde{d} = d$$

□

Индуцированное отображение

$U \subset \mathbb{R}^n, \ V \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in U, \, y \in V$

$\Phi \in C^\infty(U, V)$

$f \in C^\infty(V) = F^0(V)$

$\Phi^* f = f \circ \Phi \quad \Phi^* : F^*(V) \to F^0(U)$

$$\Phi^*(dy^i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Phi^i}{\partial x^j}(x)dx^j = d\Phi^i(x), \quad \Phi(x) = y$$

$H = (h_1, \ldots, h_p) \quad \Phi^*(a_H(x)dx^{h_1} \wedge \cdots \wedge dx^{h_p}) = (\Phi^*(a_H))(x)\Phi^*(dy^{h_1}) \wedge \cdots \wedge \Phi^*(dy^{h_p})$

Пример. $U; V \subset \mathbb{R}^2$

$$\Phi^*(dy^1 \wedge dy^2) = \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^i}(x)dx^i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \Phi^2}{\partial x^j}(x)dx^j\right)$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial Phi^1}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi^2}{\partial dx^j} dx^i dx^j = \left(\frac{\partial \Phi^1}{\partial x^2} \frac{\partial \Phi^2}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2$$

$$= \det \Phi'(x) dx^1 dx^2$$

Свойства индуцированного отображение

1. $\Phi^*(\omega\eta) = \Phi^*\omega + \Phi^*\Phi^*\eta$
2. $\Phi^*(\omega \wedge \eta) = (\Phi^*\omega) \wedge (\Phi^*\eta)$
3. $\Phi^*(d\omega) = d\Phi^*\omega$
4. $(\psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \psi^*$

Доказательство.

3. По индукции

   база: $p = 0$

$$\Phi^* df = d\Phi^* f, \quad f \in C^\infty(V)$$

$$d(\Phi^* f) = d(f \circ \Phi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \Phi)}{\partial x^i} dx^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y^j} (\Phi(x)) \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} dx^i = \sum_{j=1}^{m} \Phi^* \frac{\partial f}{\partial y^j} \Phi^* dy^j =$$

$$\Phi^* \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y^j} dy^j \right) = \Phi^*(df)$$

... тут фото карочи ...

$$d\omega = d(g, d\eta) = dg \wedge d\eta$$

$$= \Phi^*(dg) \wedge \Phi^*(d\eta) + \ldots \text{ ватафак я тут нипон}$$

4. Достаточно доказать для $p = 0$ и $p = 1$

   $p = 0$: $(\psi \circ \Phi)^* f = f \circ \psi \circ \Phi = (f \circ \psi) \circ \Phi = (\psi^* f) \circ \Phi = \Phi^* \psi^* f$

   $p = 1$: $(\psi \circ \Phi)^* dz^i =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (\psi \circ \Phi)^j}{\partial x^i} dx^i$$

   $\Phi^* \psi^* dz^j =$

блять я ничо не пон нужна фотка или конспект от руки

$\square$