Математический анализ

zimch

4 октября 2022 г.

Повторение

Линейные и нормированные пространства

L – линейное пространство

$\|\cdot\|$ – норма $\qquad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), x \in L$

Нормированное пространство $\qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

Замечание. *Норма всегда порождает метрику (нормированное $\Rightarrow$ метрическое).*

Замечание. $\forall$ *конечномерное пространство полное.*

Определение. *Полное нормированное пространство $\risingdotseq$ банохово.*

Пример 1. *Неполное нормированное пространство:*

$$C([0;1]), \quad \|f\|_< = \int_0^1 |f(x)|dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)dx \to 0 \quad \exists N : n > N < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - f_n(x))dx \to 0 \quad \exists N : n > N < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n, m > \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|dx < \varepsilon$$

$$L(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \int_0^1 |f_n(x)|dx < \infty\}$$

Линейные операторы

Определение. *Линейный оператор*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad A : L \to M \quad \text{, где } M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}, A \text{ - функционал(?)}$$

Замечание. *Операторы из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ $\leftrightarrow$ матрицы $\mathrm{Mat}^{n,m}$*

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_M}{\|x\|_L}, \quad M, L \text{ - нормированные пространства}$$

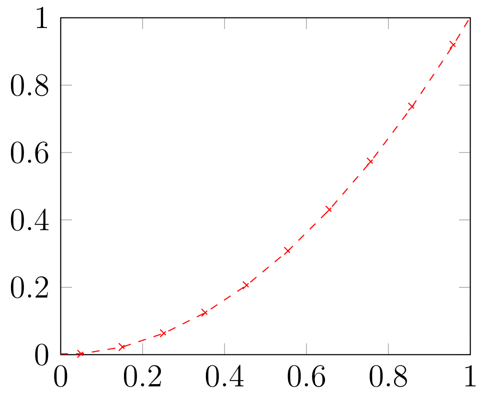
Пример 2. *Неограниченный оператор:*

$$L = C'([0,1]), \quad M = C([0,1]) \quad \|f\| = \sup_{[0,1]} |f|$$

$$\|f\| = \max_{[0,1]} |f|$$

$$(Af)(x) = f'(x)$$

$$f_n(x) = x^n \quad \|f_n\| = 1 \ \forall n \quad Af_n = f_n' = nx^{n-1} \quad \|Af\| = n$$



$$\frac{\|Af_n\|}{\|f_n\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Предложение.

$$\|A\| = \sup_{x \in B_1(x)\setminus\{0\}} \|Ax\| = \sup_{a \in S_1(0)} \|Ax\| = \sup_{x \in B_1(0)\setminus\{x\}} = \inf\{c : \|Ax\| \le c\|x\|\} \quad \forall x \in L$$

$B_r(x) = \{y \in L : \|y - x\| < r\}$ – *открытый шар радиуса* r
$B_r[x] = \{y \in L : \|y - x\| \le r\}$ – *замкнутый шар радиуса* r
$\bar{B}_r(x) \ne B_r[x]$, *где* $\bar{B}_r(x)$ – *замыкание*
$S_r(x) = \{y \in L : \|y - x\| = r\}$ – *сфера*

Предложение. $A \in B(L) \Leftrightarrow A$ *непр. в точке* $0 \Leftrightarrow A$ *непр. в* $\forall x \in L \Leftrightarrow A$ *равн. непр. на* L.

Замечание.

$$\|A_1 \cdot A_2\| \le \|A_1\| \cdot \|A_2\|$$

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ A \in \mathrm{Mat}^{n,n} \quad \|A\| \le \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} |a_{i,k}^2|}$$

Определение. *Матрицы* $\|\cdot\|$ *и* $|\cdot|$ *эквивалентны, если* $\exists c_1, c_2 > 0$ *т. ч.*

$$\forall x \in L \ c_1\|x\| \le |x| \le c_2\|x_2\|$$

Тогда $\|A\| \sim \sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}| \sim \max_{i,k\in\{1,\dots,n\}} |a_{ik}| \sim \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2}$

Замечание.

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \exists a \in \mathbb{R}^n \ \forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = (a; x) \quad \|A\| \underset{B(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}{=} \|a\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ \exists a \in \mathbb{R}^n \ \exists x \in \mathbb{R} : Ax = a \cdot x \quad \|A\| \underset{B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}{=} \|a\|_{\mathbb{R}^n}$$

Обратный оператор

$A : L \to M$ – линейный оператор

1. $\exists A : M \to L\ :\ AB = I_M$ – ед. оператор в пространстве M

   $B \leftrightharpoons$ правый обратный

2. $\exists C : M \to L\ :\ CA = I_l$ – ед. оператор в пространстве L

   $C \leftrightharpoons$ левый обратный

3. $\exists$ оба и равны, ьл $A^{-1} \leftrightharpoons$ обратный оператор

$A \in \mathrm{Mat}^n : \exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n$

Теорема 0.1. $A \in B(\mathbb{R}^n), \exists A^{-1}, B \in B(\mathbb{R}^n), \|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$
Тогда B обратим,

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\left\|\frac{1}{A^{-1}}\right\| - \|B - A\|}, \|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|B - A\|}{\left\|\frac{1}{A^{-1}}\right\| - \|B - A\|}$$

Доказательство. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Bx\| = \|Ax - (A - B)x\| \geq \|Ax\| - \|(B - A)x\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\| \cdot \|x\| = (\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\| \|x\|)$$

Так как:

$$\|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} \quad x = (A^{-1})(Ax) \quad \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|$$

$$Bx = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \operatorname{Ker} B = \{0\} \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$\begin{matrix} y = Bx \\ x = B^{-1}y \end{matrix} \quad \|y\| \geq (\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|)\|B^{-1}y\|,\ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|}$$

$$B^{-1}A^{-1} = B^{-1}(I - BA^{-1}) = B^{-1}(A - B)A^{-1}$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|B - A\|}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|}$$

□

Замечание.

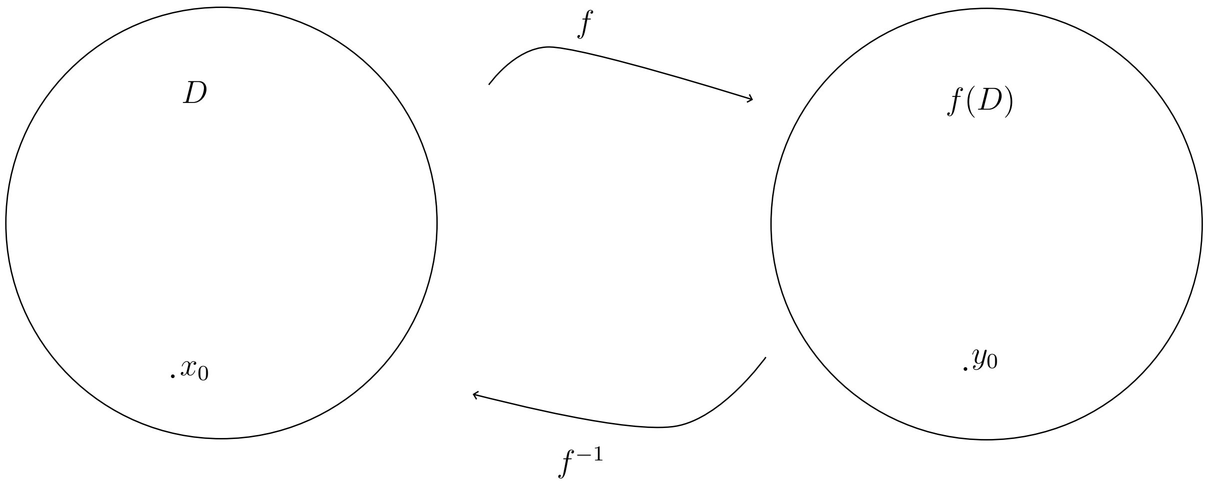
1. *Множество операторов открыто*

2. *Отображение $A \mapsto A^{-1}$ непрерывно*

Дифференцирование обратной функции

$D \subset \mathbb{R}^n \quad f : D \to \mathbb{R}^n \quad x \in \operatorname{Int} D \quad \exists A \in B(\mathbb{R}^n.\mathbb{R})$

Определение. *Если* $f(x+h) = f(x) + Ah + o(\|h\|), \quad h \to 0$, *тогда говорят* A *– производная* f *в точке* x.



Рассмотрим $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$

Продифференцируем : $(f^{-1})'(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0}) \cdot f'(x_0) = I$

Пусть теперь есть функция на открытом множестве:

D открыто $\quad f \in C'(D, \mathbb{R}^n) \quad x_0 \in D \ f'(D_0)$ обратима

Пример 3.

1. $f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y - e^x \sin y \\ e^x \sin y + e^x \cos y \end{pmatrix}$$

2. $n = 1 \quad f \in C^1(D, \mathbb{R})$

   $f'(x_0) \neq 0$

   $f\big|_U$ *– биекция между* U *и* V

$$\exists (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f(f^{-1}(y))} \qquad \begin{matrix} f \in C^1(U,V) \\ f^{-1} \in C^1(V,U) \end{matrix}$$