17 октября 2022

$G \subset \mathbb{R}^n$ открытое ограниченное, $f : G \to \mathbb{R}$ огр. и п. в. непрерывно

$\operatorname{supp} f \subset G \Rightarrow \exists \int\limits_G f$

Теорема 1. *$G \subset \mathbb{R}^n$ открытое ограниченное, $g : G \to \mathbb{R}^n$ диффеоморфизм,*

$g(G)$ огр.,

$f : g(G) \to \mathbb{R}$ огр., п. в. непрерывно, $\operatorname{supp} f \subset g(G)$

Тогда

$$\exists \int\limits_G f \circ g |\det g'| = \int\limits_{g(G)} f$$

Лемма 16. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $g : G \to \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм*

$E \subset G : \overline{E} \subset G$. Тогда

$g(\overline{E}) = \overline{g(E)}$

$g(\operatorname{Int}) = \operatorname{Int} g(E)$

$g(G \setminus \overline{E}) = g(G) \setminus \overline{g(E)}$

$g(\delta E) = \delta g(E)$

Если G, $g(G)$ огр., g – диффеоморфизм, то

$$\mu(E) = 0 \Leftrightarrow \mu\big(g(E)\big) = 0$$

Доказательство.

$$G \ni x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in G \Leftrightarrow g(G) \ni g(x_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \in g(G)$$

$$g(x) \in g(\overline{E}) \Leftrightarrow x \in \overline{E} \Leftrightarrow g(x) \in \overline{g(E)}$$

$$x \in \operatorname{Int} E \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(x) \subset E \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(g(x)) \subset g(E) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) \in \operatorname{Int} g(E)$$

$$\left.\begin{aligned} &x \in \delta E \Leftrightarrow E \ni y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \\ &G\setminus \ni x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} g(E) \ni g(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \\ g(G \setminus E) \ni g(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \end{cases} \Leftrightarrow g(x) \in \delta g(E)$$

$$x \in G \setminus \overline{E} = \operatorname{Int}(G \setminus E) \Leftrightarrow g(x) \in \operatorname{Int}\big(g(G) \setminus g(E)\big) = g(G) \setminus \overline{g(E)}$$

$\forall \varepsilon \ \exists C_l, \ l = 1, \ldots, N$ – открытые кубы

$$E \subset \bigcup_{l=1}^N C_l, \quad \sum_{l=1}^N v(C_l) < \varepsilon$$

$l(C)$ – длина ребра куба C $\quad v(C) = (l(C))^n \quad \operatorname{diam} C = l(C)\sqrt{n}$

Если $\varepsilon < \frac{\delta}{2\sqrt{n}}^n$, $\forall l \quad v(C_l) < \varepsilon \Rightarrow l(C_1) < \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$
$\operatorname{diam} C_l < \frac{\delta}{2} \quad \operatorname{dist}(\overline{E}, \delta G) = \delta$

$$\bigcup_{l=1}^{N} C_l \subset E^{\frac{\delta}{2}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, E) < \frac{\delta}{2}\} \subset \overline{E^{\frac{\delta}{2}}} \subset G$$

$$\forall x_1, x_2 \in E^{\frac{\delta}{2}} \ \|g(x_1) - g(x_2)\| \le M \cdot \|x_1 - x_2\| \quad \max_{\overline{E^{\frac{\delta}{2}}}} \|g'\| = M$$

$$g(C_l) \subset B_{\frac{M \cdot \operatorname{diam} C_l}{2}}(g(x_l)) \subset \tilde{C}_l,\ l(\tilde{C}_l) = M \cdot \operatorname{diam} C_l$$

$$v(\tilde{C}_l) = (l(\tilde{C}_l))^n = M^n \cdot (\operatorname{diam} C_l)^n = M^n \Big(\frac{\operatorname{diam} C_l}{\sqrt{n}}\Big)^n (\sqrt{n})^n = (M\sqrt{n})^n v(C_l)$$

$$g(E) \subset \bigcup_{l=1}^{N} \tilde{C}_l, \quad \sum_{l=1}^{N} \tilde{C}_l = (M\sqrt{n})^n \cdot \varepsilon$$

□

Замечание. *В условие теоремы* $\exists \int\limits_G f \circ g |\det g'|$

Доказательство. $\operatorname{supp} f = \overline{\{y \in g(G) \mid f(y) \ne 0\}}$
$\operatorname{supp}(f \circ g |\det g'|) = \operatorname{supp} f \circ g = \overline{\{x \in G \mid (f \circ g)(x) \ne 0\}}$
$g(\{x \in G \mid f \circ g \ne 0\}) = \{y \in g(G) \mid f(y) \ne 0\}$
$\xRightarrow[\text{л. 16}]{}$ замыкание совпадает
$\operatorname{supp}(f \circ g |\det g'|)$ компактен
$\sup_{\operatorname{supp}(f \circ g |\det g'|)} |\det g'| < \infty \Rightarrow f \circ g \cdot |\det g'|$ огр.
f п. в. непрерывно на $g(G) \xRightarrow[\text{л. 16}]{} f \circ g$ п. в. непрерывно на G
$|\det g'| \in C(G) \Rightarrow f \circ g |\det g'|$ п. в. непрерывно на G
Значит, $\exists \int\limits_G f \circ g |\det g'|$ □

Лемма 17. $G \subset \mathbb{R}^n$ *открыто,* $g : G \to \mathbb{R}$ *диффеоморфизм*
$\forall x \in G \ \exists$ *окрестность* $U \subset G$

$$g\big|_U = g_1 \circ \dots \circ g_n$$

где g_k *– простейший диффеоморфизм, т. е.*

$$((g_k)(x))_i = x_i, \quad \forall i \ne k, \quad i \text{ – координата}$$

Доказательство. Индукция

База $k = 1$: уже простейший

Переход $\quad \big(g(x)\big)_i = x_i, \quad i \geq k+1 \quad x = \big(y = (x_1, \dots, x_k), z\big)$

Пусть $x_0 \in G \quad g'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$

$0 \neq \det g'(x_0) = \det \frac{\partial g}{\partial y}(x_O) \Rightarrow$ не все миноры порядка $k-1$ нулевые

перенумерацией компонентов добъемся того, чтобы главный минор был $\neq 0$

$$f : G \to \mathbb{R}^n \quad (f(x))_i = \begin{cases} (g(x))_i, \ i < k \\ x_i, \ i \geq k \end{cases}$$

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{k-1} \\ & I_{n-k+1} \end{pmatrix}$$

$$\det f'(x_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{k-1} \neq 0$$

$f \in C^1(G) \quad \exists U \ni x_0 \quad f\big|_U$– диффеоморфизм

Положим $h = g \circ (f\big|_U)^{-1}$ – диффеоморфизм $f(U) \to g(U)$

$$g\big|_U = h \circ f\big|_U$$

Для f $\exists$ окрестность x_0, в которой f раскладывается в композицию простейших

$u \in f(U)$

$$i < k \quad (h(u))_i = (g \circ f^{-1}(u))_i = (f \circ f^{-1}(u))_i = u_1$$

$$i \geq k \quad (h(u))_i = (g \circ f^{-1}(u))_i = (f^{-1}(u))_i = u_i$$

$$(\underbrace{f(x)}_{=u})_i = x_i = (f^{-1}(u))_i, \quad i > k$$

$\square$

Лемма 18. *Утверждение теоремы верно при* $n = 1$

Лемма 19 (14’). *В условиях теоремы на* G *и на* g *при* $n = 1$ *для* $\forall f : g(G) \to \mathbb{R}$ *огр. :* $\operatorname{supp} f \subset g(G)$

$$\underline{\int_G} f \circ g |\det g'| = \underline{\int_{g(G)}} f, \overline{\int_G} f \circ g |\det g'| = \overline{\int_{g(G)}} f$$

Доказательство. $\operatorname{supp} f$ компактен

$$\forall x \in \operatorname{supp} f \ \exists \varepsilon_x > 0 \quad [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset g(G)$$

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{x \in \operatorname{supp} f} (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) \Rightarrow \operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^{N} (x_i-\varepsilon_{x_i}, x_i+\varepsilon_{x_i})$$

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^{N} [x_i-\varepsilon_{x_i}, x_i+\varepsilon_{x_i}] \quad \text{отрезки не пересек}$$

$$\forall i \quad (g^{-1})'\big|_{[x_i-\varepsilon_{x_i}, x_i+\varepsilon_{x_i}]} \ \text{имеет постоянный знак}$$

$$g^{-1}([x_i-\varepsilon_{x_i}, x_i+\varepsilon_{x_i}]) \text{ – отрезок} \Rightarrow \ \text{достаточно доказать:}$$

$$\int\limits_{g([a,b])} g = \int\limits_{[a,b]} f \circ g |\det g'|$$

$$g' > 0 \quad \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy = \int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx$$

$$g' < 0 \quad \int_{g(b)}^{g(a)} f(y)dy = \int_a^b f\big(g(x)\big)|g'(x)|dx$$

(кусок далее надо сделать красиво)

P_y - разбиение $g([a,b])$ $\quad P_x = g^{-1}(P_y)'' = \{g^{-1}(\pi) | \pi \in P_y\}$
$\min_{g[a,b]} |(g^{-1})'| \cdot d(P_y) \leq d(P_x) \leq \max_{g([a,b])} |(g^{-1})'| \cdot d(P_y)$
$\sum_{\pi_y \in P_y} \sup_{\pi_y} f \cdot v(\pi_y) = \sum_{\pi_x \in P_x} \sup_{\pi_x} (f \circ g)|g'(\xi(\pi_x))| \cdot v(\pi_x)$
$\pi_y = g(\pi_x)$
$v(\pi_y) = |g(\beta) - g(\alpha)| = |g'(\xi)| \cdot (\beta\alpha)$
прадалжаем неравенство (емае неправильное все стёр....) $\leq \underbrace{\sup_{[a,b]} |g'|}_{<\infty} \sum_{\pi_x \in P_x} \sup_{\Pi_x} f \circ g \cdot$
$v(\pi_x)$
$P_{x,k} : d(P_{x,k}) \to 0, k \to \infty$
$P_{y,k} : d(P_{y,k}) \to 0, k \to \infty$
$\forall \pi_x \exists \xi(\pi_x) < \pi_x \quad v(\pi_y) = |g'(\xi(\pi_x))| \cdot v(\pi_x)$
$U(f, P_{y,k}) \leq \sum_{\pi_x \in P_x} \sup_{\pi_x} f \circ g |g'| \cdot v(\pi_x) = U(f \circ g|g'|, P_{x,k})$
слева $\overline{\int}_{g([a,b])} f \leq$ справа $\int_{[a,b]} f \circ g |\det g'|$
$\overline{\int}_{g^{-1}g([a,b])} f \circ g |g'| \leq \overline{\int}_{g([a,b])} f \circ g \circ g^{-1} |g' \circ g^{-1}| \cdot |g^{-1}|$
$\implies \overline{\int}_{g([a,b])} f = \overline{\int}_{[a,b]} f \circ g |g'|$ $\square$

Доказательство. (Теоремы)

1. Простейший диффеоморфизм $(g(x))_i = x_i, \ i < n$

$$g(G) = \Pi_y = \Pi_1 \times \Pi_{y_n} \quad \Pi_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}, \Pi_{y_n} \subset \mathbb{R}$$

$$G = \Pi_x = \Pi_1 \times \Pi_{x_n} \quad \Pi_{x_n} \subset \mathbb{R}$$

$$\int\limits_{g(G)} = \int\limits_{\Pi_y} f\chi_{g(G)} \overset{\text{Фубини}}{=} \int\limits_{\Pi_1} dy_1 \ldots dy_{n-1} \int\limits_{\overline{\Pi_{y_n}}} dy_n f\chi_{g(G)} =$$

$$= \int\limits_{\Pi_1} dy_1 \ldots dy_{n-1} \int\limits_{\pi_n[g(G)\cap \overline{(y_1,\ldots,y_{n-1})}\times\mathbb{R}]} f(y) dy_n \overset{\text{Лемма 14}}{=}$$

$$= \int\limits_{\Pi_1} dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{\pi_n[G\cap \overline{(y_1,\ldots,y_n)}\times\mathbb{R}]} (f\circ g)(x) \underbrace{\left|\frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x)\right|}_{=|\det g'|} dx_n =$$

$$= \int\limits_{\Pi_1} dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{\overline{\Pi_{x_n}}} f\circ g |\det g'| \chi_G =$$

$$= \int\limits_{\Pi_x} f\circ g |\det g'| \chi_G = \int\limits_G f\circ g |\det g'|$$

$\square$