

# Математический анализ

26 сентября 2022

## Определение интеграла Римана через интегральные суммы

$\Pi \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  орг.

$p$  – разбиение  $\Pi$ ,  $= \{\pi_i, i = 1, \dots, N\}$

$\Xi = \{\xi_i \in \pi_i, | i = 1, \dots, N\}$

$\sum(f, p, \Xi) := \sum_{i=1}^N f(\xi_i) v(\pi_i)$  – интегральная сумма Римана

**Определение.** Если  $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \{p_k\}_{k=1}^\infty : d(p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \{\Xi\}_{k=1}^\infty$

$$\sum(f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} I, \quad \text{то } f \text{ интегрируема по Риману и } I = \int_{\Pi}$$

**Теорема 1.**

$$\exists I \quad \forall \{p_k\} : d(p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \{\Xi\} \quad \sum(f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} I \Leftrightarrow \underline{\int}_{\Pi} = \overline{\int}_{\Pi} = \int_{\Pi}$$

*Доказательство.*

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \varepsilon, p_k : d(p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \pi \in p_k \quad \exists \xi \in \pi :$$

$$f(\xi) - \inf_{\pi} f < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{Получим } \Xi_k \quad \sum(f, p_k, \Xi_k) - L(f, p_k) &= \sum_{\pi \in p_k} (f(\xi(\pi)) - \inf_{\pi} f) \cdot v(\pi) < \\ < \varepsilon \cdot \sum_{\pi \in p} v(\pi) = \varepsilon \cdot v(\pi) \end{aligned}$$

$$\text{По Л. 3 } L(f, p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \underline{\int}_{\Pi} \Rightarrow 0 \leq I - \underline{\int}_{\Pi} \leq \varepsilon \cdot v(\pi)$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon \Rightarrow \underline{\int}_{\Pi} = I \\ \text{Аналогично } \overline{\int}_{\Pi} = I \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \int_{\Pi} = I$$

$$\boxed{\Leftarrow} \quad \text{Пусть } \underline{\int}_{\Pi} = \overline{\int}_{\Pi} = \int_{\Pi}. \text{ Возьмем произвольные}$$

$$\{p_k\}, \quad d(p_k) \rightarrow 0, \quad \{\Xi_k\} \quad (*) :$$

$$L(f, p_k) \leq \sum(f, p_k, \Xi_k) = \sum_{\pi \in p_k} \underbrace{f(\xi(\pi))}_{(*)} v(\pi) \leq U(f, p_k)$$

$$(*) \quad \inf_{\pi} \leq \dots \leq \sup_{\pi} f$$

$$L(f, p_k) \xrightarrow[\text{Л. 3, } k \rightarrow \infty]{} \underline{\int}_{\Pi} = \overline{\int}_{\Pi} \xleftarrow[\text{Л. 3, } k \rightarrow \infty]{} U(f, p_k)$$

$$\Rightarrow \sum (f, p_k, \Xi_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} I$$

□

## Множество меры ноль

**Определение.**  $E \subset \mathbb{R}^n$  имеет меру ноль, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  покрытие  $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ , где  $C_k$  – открытые кубы

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(C_k) \leq \varepsilon \quad \mu(E) = 0 \quad - \text{мера}$$

**Замечание.** Открытые кубы  $\Leftrightarrow$  замкнутые

**Замечание.**  $E_1 \subset E, \mu(E) = 0 \Rightarrow \mu(E_1) = 0$

**Лемма 12.**  $\mu(E_k) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$

*Доказательство.*  $\forall k \exists$  покрытие кубами с  $\sum$  объемов  $< \varepsilon \cdot (\frac{1}{2})^k$

Тогда  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  будут покрыты и  $\sum$  объемов  $< \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = \varepsilon$

□

**Определение.**  $E \subset \mathbb{R}^n$  имеет объем ноль, если  $\forall \varepsilon \exists$  конечное покрытие

$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ , где  $c_k$  – открытый куб

$$\sum_{k=1}^N v(C_k) < \varepsilon \quad v(E) = 0$$

**Замечание.**

1. открытые  $\Leftrightarrow$  замкнутые кубы

2.  $v(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$

**Теорема 2.**  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  не может иметь объем 0

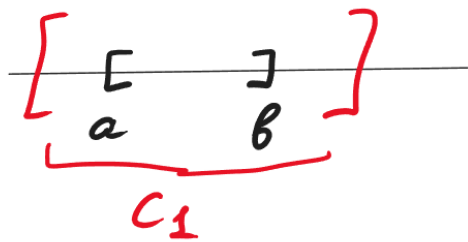
*Доказательство.* докажем, что если  $[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^N C_k$ ,

$$C_k - \text{отрезки, то } \sum_{k=1}^N v(C_k) \geq b - a$$

база :  $N = 1$

$$[a, b] \subset C_1 \Rightarrow v(C_1) \geq b - a$$

База:

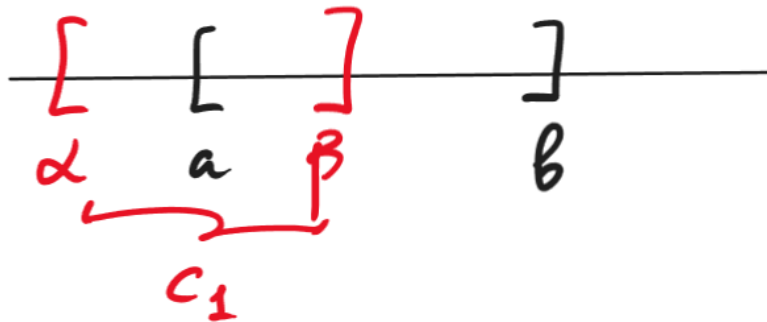


$$v(C_1) \geq b - a$$

переход :  $N + 1$

$a \in U_{k=1}^{N+1} C_k \Rightarrow \exists k : a \in C_k$  перенумеруем  $C_k$  так, чтобы  $a \in C_1 = [\alpha, \beta]$

$$\alpha \leq a \leq \beta \leq b$$



Если  $b \in [\alpha, \beta]$ , то  $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$ ,

$$\sum_{k=1}^{N+1} v(C_k) > v(C_1) = \beta - \alpha \geq b - a$$



Если  $b \notin [\alpha, \beta]$ ,  $b > \beta$

$$\begin{aligned}
 (\beta, b] &\subset \bigcup_{k=2}^{N+1} C_k \\
 \Rightarrow [\beta, b] &\subset \bigcup_{k=2}^{N+1} C_k \xRightarrow[\text{инд. п.}]{N+1} \sum_{k=2}^{N+1} v(C_k) \geq b - \beta \\
 v(C_1) &\geq \beta - a \\
 \Rightarrow \sum_{k=1}^{N+1} v(C_k) &\geq b - a
 \end{aligned}$$

□

**Лемма 13.** Если  $K \subset \mathbb{R}^n$  компактно, то  $v(K) = 0 \Leftrightarrow \mu(K) = 0$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  очев. (уже доказали)

$\Leftarrow$  Пусть  $K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$  открытые кубы,

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(C_k) < \varepsilon$$

$\exists$  конечное подпокрытие  $K \subset \bigcup_{j=1}^N C_{kj}$ ,

$$\sum_{j=1}^N v(C_{kj}) < \varepsilon \Rightarrow v(K) = 0$$

□

**Пример 1.**  $E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  – разные точки  $[a, b] = \{q_k, k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{q_k\}$

$$\mu(\{q_k\}) = 0 \quad \forall k \xRightarrow[\text{Л. 4}]{\text{Л. 4}} \mu(E) = 0$$

при этом  $v(E) \neq 0$

$$\text{Пусть } E \subset \bigcup_{k=1}^N C_k \Rightarrow \bar{E}_{[0,1]} \subset \bigcup_{k=1}^N C_k \xRightarrow[\text{Л. 5}]{\text{Л. 5}} \sum_{k=1}^N v(C_k) \geq 1$$

## Критерий интегрируемости Лебега

*Почти везде*  $\equiv$  везде, кроме множества точек, имеющего меру 0

$E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  огранич.

$$x \in \bar{E}, \quad \delta > 0$$

$$M_{\delta}(f, x) := \sup_{B_{\delta}(x)} f, \quad m_{\delta}(f, x) := \inf_{B_{\delta}(x)} f$$

$M_{\delta}(f, x) \uparrow$ ,  $m_{\delta}(f, x) \downarrow$  - имеется в виду возрастание и убывание при росте  $\delta$

$$M_{\delta}(f, x) - m_{\delta}(f, x) \uparrow \text{ по } \delta$$

**Определение.**  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} M_{\delta}(f, x) - m_{\delta}(f, x) = w(f, x)$  – колеб.  $\phi$ -ли  $f$  в точке  $x$

**Лемма 14.**  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  *огр.*  $x \in \bar{E}$

$f$  *непр.* в точке  $x \Leftrightarrow w(f, x) = 0$

*Доказательство.*

Расписать непрерывность на языке эпс-дельта, учесть монотонность колебания функции

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall y \in B_\delta(x) \cap E \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow M_{\delta_\varepsilon}(x) - m_{\delta_\varepsilon}(x) \leq \varepsilon$$

и более того,  $\forall \delta < \delta_\varepsilon \quad M_\delta(x) - m_\delta(x) < \varepsilon$

$$M_\delta(f, x) - m_\delta(f, x) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0$$

то есть  $w(f, x) = 0$

$$\boxed{\Leftarrow} \quad w(f, x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon \quad \exists \delta_\varepsilon : \forall \delta < \delta_\varepsilon$$

$$M_\delta(f, x) - m_\delta(f, x) < \varepsilon$$

$$\forall y \in B_\delta(x) \cap E \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

$$f(y) \xrightarrow{y \rightarrow x} f(x)$$

□

**Лемма 15.**  $F \subset \mathbb{R}^n$  *замкн.*,  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  *огр.*

$\forall \varepsilon > 0 : F_\varepsilon := \{x \in F \mid w(f, x) \geq \varepsilon\}$ . Т. д.  $F_\varepsilon$  – *замкн.*

*Доказательство.* Докажем, что  $\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon$  – *откр.*

$$\begin{aligned} 1. & \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus F \quad \xRightarrow{??} \delta > 0 \quad B_\delta(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon \\ 2. & \quad x \in F \setminus F_\varepsilon \end{aligned}$$

$$1. \quad x \in \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus F}_{\text{откр.}} \Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B_\delta(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus F \subset \mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon$$

$$2. \quad x \in F \setminus F_\varepsilon \Rightarrow w(f, x) < \varepsilon \Rightarrow \exists \delta > 0 : M_\delta(f, x) - m_\delta(f, x) < \varepsilon$$

$$y \in B_\delta(x) \quad \exists \delta' > 0 \quad B_{\delta'}(y) \subset B_\delta(x)$$

$$(\delta' < \delta - \|x - y\|)$$

если  $y \notin F$ , то  $y \in \mathbb{R}^n \setminus F \subset \mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon$

если  $y \in F$ , то  $w(f, y) < \varepsilon$

$$M(f, \delta_1, y) - m(f, \delta_1, y) \leq M(f, \delta, x) - m(f, \delta, x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow w(f, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in \mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon$$

Тогда  $\forall y \in B_\delta(x)$  верно, что  $y \notin F_\varepsilon$  или  $B_\delta(x) \cap F_\varepsilon = \emptyset$

$x \in F \setminus F_\varepsilon$ ,  $B_\delta(x)$  полностью лежит в  $F \setminus F_\varepsilon$ , значит оно открыто,  $F$  - замкнуто,  
 $F \setminus (F \setminus F_\varepsilon) = F_\varepsilon$  - замкнуто

□

**Лемма 16.**  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  *огр.*

Если  $\forall x \in \Pi \quad w(f, x) < \varepsilon$ , то  $\exists$  разбиение  $p$ :

$$U(f, p) - L(f, p) < \varepsilon \cdot v(\Pi)$$

*Доказательство.*  $\forall x \in \Pi \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (M_\delta(f, x) - m_\delta(f, x)) = 0$

$$\exists \delta_\varepsilon : M_{\delta_\varepsilon}(f, x) - m_{\delta_\varepsilon}(f, x) < \varepsilon$$

$$\forall x \exists \pi_x \text{ открытый п/п} : \sup_{\pi_x} f - \inf_{\pi_x} f < \varepsilon$$

$\Pi \subset \bigcup_{x \in \Pi} \pi_x$ ,  $\Pi$  компактен  $\Rightarrow \exists$  конечное подпокрытие

$$\Pi \subset \bigcup_{k=1}^N \pi_{x_k}$$

разрешем  $\Pi$  гранями всех  $\pi_{x_k}$ ,  $k = 1, \dots, N$

$\Rightarrow$  получаем разбиение  $p$

$$U(f, p) - L(f, p) = \sum_{\pi \in p} (\sup_{\pi} f - \inf_{\pi} f) v(\pi) < \varepsilon \cdot \sum_{\pi \in p} v(\pi) = \varepsilon v(\Pi)$$

$$\forall \pi \in p \exists k \quad \pi \subset \pi_{x_k}$$

$$\Rightarrow \sup_{\pi} f - \inf_{\pi} f \leq \sup_{\pi_{x_k}} f - \inf_{\pi_{x_k}} f < \varepsilon$$

□

**Теорема 3.** *Критерий Лебега*

$\Pi \in \mathbb{R}^n$  -  $n/n$   $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  - *огр*

$D = \{x \in \Pi | f - \text{разрывна в } x\}$

Тогда:

$$\exists \int_{\Pi} f \Leftrightarrow \mu(D) = 0$$

*Доказательство.* Пусть  $\Pi_\varepsilon = \{x \in \Pi | w(f, x) \geq \varepsilon\}$  - замкнутые по Лемме, ограниченные из ограниченности исходного п/п, значит компактные

$$D \subset \bigcup_{\varepsilon > 0} \Pi_\varepsilon$$

$$\boxed{\Leftarrow} \mu(D) = 0$$

$$\mu(\Pi_\varepsilon) = 0, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow v(\Pi_\varepsilon) = 0$$

$$\Pi_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^N \pi_k, \sum_{k=1}^N < \varepsilon, \pi_k\text{-открытые кубы}$$

Разрежем  $\Pi$  гранями  $\pi_1 \dots \pi_N$  - получим разбиение  $P$

$P = P_1 \cup P_2$ ,  $P_1, P_2$  - не разбиения, но состоят из кубов

$$P_1 = \{\pi \in P \mid \exists k : \pi \in \overline{\pi_k}\}$$

$$P_2 = P \setminus P_1$$

$$\sum_{\pi \in P_1} v(\pi) \leq \sum_{k=1}^N v(\pi_k) < \varepsilon$$

$f$  - огр, значит  $\exists M > 0 : \forall x \in \Pi |f(x)| < M$

$$\sum_{\pi \in P_1} (M_\pi(f) - m_\pi(f)) \cdot v(\pi) \leq 2M \cdot \sum_{\pi \in P_1} v(\pi) \leq 2M \cdot \varepsilon$$

$$\forall \pi \in P_2 : \forall x \in \pi : w(f, x) < \varepsilon$$

$$\exists P(\pi) : U(f, P(\pi)) - L(f, P(\pi)) < \varepsilon \cdot v(\pi)$$

Разрежем  $\Pi$  гранями  $\pi' \in P(\pi)$  для всех  $\pi \in P_2$

Получим разбиение  $\Pi$ :  $P' = P'_1 \cup P'_2$ ,  $P'_1, P'_2$  - более мелкие по сравнению с  $P_1, P_2$

$$\sum_{\pi' \in P'_1} (sup_{\pi'} f - inf_{\pi'} f) v(\pi') \leq 2M \cdot \sum_{\pi' \in P'_1} v(\pi') < 2M \cdot \varepsilon$$

$$\sum_{\pi' \in P'_2} (sup_{\pi'} f - inf_{\pi'} f) v(\pi') = \sum_{\pi \in P_2} \sum_{\pi' \in P(\pi)} (sup_{\pi'} f - inf_{\pi'} f) v(\pi') < \sum_{\pi \in P_2} \varepsilon \cdot v(\pi) < \varepsilon \cdot v(\Pi)$$

$$U(f, P') - L(f, P') = \sum_{\pi' \in P'} (sup_{\pi'} f - inf_{\pi'} f) v(\pi') < \varepsilon \cdot (2M + v(\Pi)) \Rightarrow \exists \int_{\Pi} f$$

$$\boxed{\Rightarrow} \exists \int_{\Pi} f$$



Хотим доказать, что  $\mu(D) = 0$

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_{1/k}$$

Если  $\forall k : \mu(\Pi_{1/k}) = 0$ , то по лемме о мере счётного объединения множеств меры 0 докажем необходимое

Из существования интеграла:  $\forall \varepsilon > 0 \exists P : U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{k}$

$$P_k = \{\pi \in P \mid \text{Int } \pi \cap \Pi_{1/k} \neq \emptyset\}$$

$$\Pi_{1/k} \subset \bigcup_{\pi \in P_k} \pi$$

$$\forall \pi \in P_k \exists x \in \text{Int } \pi : w(f, x) \geq \frac{1}{k}$$

$$\exists \delta > 0 : B_\delta(x) \in \text{Int } \pi \sup_{B_\delta(x)} f - \inf_{B_\delta(x)} f \geq \frac{1}{k}$$

$$\sup_{\pi} f - \inf_{\pi} f \geq \sup_{B_\delta(x)} f - \inf_{B_\delta(x)} f \geq \frac{1}{k}$$

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{\pi \in P} (\sup_{\pi} f - \inf_{\pi} f) v(\pi) \geq \sum_{\pi \in P_k} (\sup_{\pi} f - \inf_{\pi} f) v(\pi) \geq \frac{1}{k} \cdot \sum_{\pi \in P_k} v(\pi)$$

$$\sum_{\pi \in P_k} v(\pi) \leq k \cdot (U(f, P) - L(f, P)) < \varepsilon$$

$$v(\Pi_{1/k}) = 0$$

□