# Алгебра

13 сентября 2022

## §5 Алгебраически замкнутые поля

$K[x]$

$x-a,\ a\in K$ всегда неприводимые

**Пример.** $x^2+1$ *неприводим над* $\mathbb{R}$

$x^3+x^2+1,\ x^3+x+1,\ x^2+x+1$ *неприводимы над* $\mathbb{F}_2$

Для многочленов степени 2 и 3 из отсутствия корней следует неприводимость

**Теорема.** $K$ *– поле*

*Следующие условия эквивалентны:*

1. *Любой* $f\in K[x],\ \deg f>0$ *имеет в* $K$ *корень*
2. $\forall f\in K[x]$ *с* $\deg f>0$ *число его корней в* $K$ *равно* $\deg f$ *с учетом кратности*
3. *Любой* $f\in K[x]$ $\deg f>0$ *делится на какой-то линейный*
4. $\forall f\in K[x],\deg f>0$ *полностью раскладывается на произведение линейных сомножителей:*
$$f=b\cdot\prod_{i=1}(x_i-c_i)^{a_i}$$
5. *Всякий неприводимый над* $K$ *линеен*

**Определение.** *Поле* $K$*, удовлетворяющее любому (а значит всем) из равносильных условий теоремы называется алгебраически замкнутым полем*

*Доказательство.*

$1\Leftarrow 2$ Если корней $\deg f$, то хотя бы 1 есть

$1\Leftrightarrow 3$ Теорема Безу

$4\Rightarrow 3$ Раскладывается $\Rightarrow$ делится

$4\Leftarrow 5$
$$\begin{cases} f\in K[x] \\ \deg f>1 \\ f=\text{ произв. лин. сомножителей } >1 \end{cases}$$

$4\Rightarrow 5$
$$\begin{cases} f=\text{ произв. непр. (OTA)} \\ \text{всякий непр. – линейный} \end{cases}$$

$3 \Rightarrow 4$ $f \in K[x],\ \deg f > 0$

Индукция по $\deg f$

База: $\deg f = 1$ – доказано

Предположение: $\deg f > 1$

По п. 3: $f = (x-c)g(x)$

$\deg g = \deg f - 1$

По и. п. $g(x) = b \cdot \prod_{i=1}(x-c_i)^{a_i} = f \cdot$ пр-ие лин.

$1 \Rightarrow 2$ Индукция по $\deg f$

База: $\deg f = 1$ – выполнено

Предположение: $\deg f > 1$ (по п. 1 у $f$ $\exists$ корень $c$)

это значит, что $x - c | f$

$c$ – корень $f$ кратности $a$

$(x-c)^a | f \quad (x-c)^{a+1} \not| f$

$f_{(x)} = (x-c)^a g(x) \quad g(c) \neq 0$

Если $g = \text{const}$:

$\deg f = a$

$c$ – единственный корень $f$ кратности $a$

Если $\deg g > 0$:

то т. к. $\deg g \leq \deg f - 1$

по и. п. число корней $g$ с учетом кратности .... (тут нада дописать дальше)

Всякий корень $g$ – корень $f$ (не меньшей кратности)

$$(x-d)^e | g \Rightarrow (x-d)^e | f$$

$d$ – корень $f$, отличный от $c$, тогда $d$ – корень $g$ не меньшей кратности

$$(x-d)^e | f \Rightarrow (x-d)^e | g$$

$d \neq c \Rightarrow x-d,\ x-c$ взаимно простые

$(x-d)^e,\ (x-c)$ взаимно простые

$(x-d)^e,\ (x-c)^e$ взаимно простые

По теореме о сопряжении $(x-d)^e | g$

$c$ - не корень $f$

Корни $f$, отличные от $c$ = корни $g$, причем той же кратности

$c$ – корень $f$ кратности $a$

$\deg f = \deg g$ (ну тут тоже нада дописать чета похоже)

$\square$

**Теорема 1** (Без доказательства)**.**
*Поле $\mathbb{C}$ – алгебраически замкнутое*

***Факты:*** (Без доказательства)

1) Конечное поле сожержится в счетном алгебраически замкнутом поле
2) Всякое поле содержится в каком-то алгебраически замкнутом