1 начало

Диффура (ОДУ) - обыкновенные диффиренциальные уравнения

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

- обычное дифф уравнение n-ного порядка

$$\frac{\delta F}{\delta y^{(n)}} \neq 0$$

Это был общий вид.
Канонический вид:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

второй закон ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1}$$

$$m\vec{X}''(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t), \vec{x}'(t)) \tag{2}$$

это типичное дифф. уравнение
Задача Коши:
Теорема Пуанкаре: $\exists!$ решения задачи коши

$$y' = F(x, y) \text{ чета пусто непон}$$
$$y(x_0) = y_0$$

$y = \phi(x) -$ чзх
$(x_0, y_0) \in Int(X, Y)$
1) $f \in C(\overline{X}, \overline{Y}), X, Y$ - области
2) Функция Липшицева по у, равномерна по $x \in \overline{X}$ $\exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

$$\int_{x_0}^{x} \cdot dt | y'(x) = f(x, y(x)) \implies y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \implies y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

как решить последнюю gbrfhjdtybt

$$\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$$

$$\begin{array}{cc} \phi_0 = & y_0 \\ \phi_1 = & y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_0(t))dt \\ \dots & \\ \phi_m = & y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_{m-1}(t))dt \\ \dots & \end{array}$$

$$\phi_k \in C(\overline{X \sup K}), \phi_k \to^k \phi, k \to \infty$$

$$\phi_0(x)+(\phi_1(x)-\phi_o(x))+(\phi_2(x)-\phi_1(x))+\ldots=?=\phi_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\phi_k-\phi_{k-1})\leq \text{ суммируемая мажоранта}$$

чета про веерштраса и мажоранты посчитаем модуль разницы

$$|\phi_m(x)-\phi_{m-1}(x)|\leq \inf_{x_0}^{x}|f(t,\phi_{m-1}(t))-f(t,\phi_{m-2}(t))|dt\leq^{\text{липцевость}}$$

$$x,x_o\in K-\text{ компакт}$$

$$\leq L\int_{x_0}^{x}|\phi m-1(t)-\phi_{m-2}(t)|dt\leq$$

по индукции предполгаем, что этот модуль не превосходит ...

$$M=\max_{x,y\in(\overline{X},\overline{Y})}|f(x,y)|$$

$$\max_{x\in K}|\varphi_m(x)-\varphi_{m-1}(x)|\leq\frac{ML^{m-1}(x-x_0)^m}{m!}$$

продолжение дела...

$$\leq L\int_{x_0}^{x}||dt\leq\frac{ML^{m-2}L}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x}|t-x_0|^{m-1}dt\leq\frac{ML^{m-1}(x-x_0)^m}{m!}$$

База $|\varphi_1-\varphi_0|\leq\int_{x_0}^{x}|f(t,y_0)|dt$

$$\varphi_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k-\varphi k-1)\leq\frac{M}{L}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{L^m(x-x_0)^m}{m!}=|\varphi_0|+\frac{M}{L}(e^{L|x-x_0|-1)}$$

$$\varphi_k(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi_{k-1}(t))dt\leq M(x-x_0),k\to\infty$$

перделим $\varphi_k(x)$ к $\varphi(x)$

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))dt$$

чета по теореме Бэроу про переменный верхний пердел показали существование короче. осталась единственность. Положим, что есть два решения. φ и ψ.

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\psi(t))dt\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))dt$$

$|\psi(x)-\varphi(x)|$

$|\psi(x)-\varphi_m(x)|\leq\int_{x_0}^{x}|f(t,\psi(t))-f(t,\varphi(t))|dt\leq\dfrac{Lm-1(x-x_0)^m}{m!}$

$|\psi(x)-y_0|\leq\int_{x_0}^{x}F(t,\psi(t))dt\leq M|x-x_0|\to 0,m\to\infty$

доказали на комакте K. Он входит в некую окрестность точки x_0.

// M связно, если для любых двух открытых множеств G_1,G_2 и $M\in G_1\cup G_2$ и

$G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ Следствие 1:
Пусть $\overline{x} = [x_0 - a, x_0 + a]$, $\overline{y} = [y_0 - b, y_0 + b]$ - отрезки.
$\exists$ пикаровский интервал $[x_0 - h, x_0 + h]$, φ - решение задачи коши
$\forall x \in [x_0 + h, x_0 - h], h = \min\{a, fracbM\}$
$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) dt$

$|\varphi(x) - y_0| \leq M|x - x_0| \leq b$

Следствие 2: $\begin{cases} \vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x)) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}^{(0)} \end{cases}$

$\vec{y}, \vec{f} \in \mathbb{R}^n$

1.)$\vec{f} \in C(\overline{X}, \overline{Y})$
2.)$||\vec{f}(x, \vec{y}^{(1)} - \vec{f}(x, \vec{y}^{(2)})|| \leq L||\vec{y}^{(1)} - \vec{y}^{(2)}||$

Следствие 3:
$\frac{\delta f}{\delta y}(x, y) \in C(\overline{Y}) \implies L = \max_{K \subset Y} |\frac{\delta f}{\delta y}|$

Следствие 4:

пусть условие липшевости выполнено независимо

$\forall a > 0, ||\vec{y}|| < \infty \exists L_a = L$

$||f(x, \vec{y}^{(1)}) - f(x, \vec{y}^{(2)})|| \leq L||\vec{y}^{(1)} - \vec{y}^{(2)} \implies \exists! \vec{\varphi}(x)||$, определенная на $[x_0 - a, x_0 + a]$

Если же $L_a = L(a) \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}$, то вообще говоря не всякое решение продолжимо, даже на отрезке $[x_0 - a, x_0 + a]$

Непрерывная зависимость решения задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x, y_1) \\ y(x_0) = m \end{cases}$
$z = y - m \implies \begin{cases} z' = f(x, z + m) \\ z(x_0) = 0 \end{cases} = f(x, z, m)$
Теорема:

$\begin{cases} y' = f(x, y, m) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

1. $f(x, y, m) \in C(\overline{D}), \overline{D} = \{|x - x_0| \leq y, |y - y_0| \leq b, |m - m_0 \leq c|\}$
2. $|f(x, y, m) - f(x, y_2, m)| \leq L|y_1 - y_2|$
$\implies [x_0 - h, x_0 + h), h_1 = \min\{a, \frac{b}{m}\}$
$\exists! \varphi_m(x) \in C_m[m_0 - c, m_0 + c]$

Литература:

- Курс обыкновенных диффуров. Петровский
- Чето тоже про дифуры. Эльцгольц