

Понижение порядка в СЛДУ.

Пусть известны $m < n$ лин нез решений. Рассмотрим матрицу $\Phi_1^{n \times n} = \{\vec{\phi}_1, \dots, \vec{\phi}_m\}$
 $rank \Phi_1 = m, \forall t_o \in (a, b) \exists$ ненулевой минор порядка $m \implies$ пусть s

$$B \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad S(t) = (\Phi_1 | B) \implies \det S(t) \neq 0 \quad \vec{X}(t) = S(t) \vec{y}(t) =$$

подставив $A(t) \vec{x}$

$$\dot{\Phi}_1 = A \Phi_1 \dot{S} \vec{y} + S \dot{\vec{y}} = A S \vec{y} = (A \Phi_1 | A B) \vec{y} = (A \Phi_1 | 0) \vec{y} + (0 | A B) \vec{y}$$

$$\dot{S} \vec{y} = (\dot{\Phi}_1 | 0) \vec{y} = (A \Phi_1 | 0) \vec{y}$$

Отсюда $\vec{y} = (0 | S^{-1}(t) A(t) B) \vec{y}$. Обозначим всё в круглых скобках за Q .

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_1 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{y}}_1 = Q_1(t) \vec{y}_2 & m \\ \dot{\vec{y}}_2 = Q_2(t) \vec{y}_2 & (n-m) \times (n-m) \end{cases}$$

Решения второй строчки обозначим за $\phi_j(t), j = \overline{n-m, \dots, n}$

$$(Q_1(t) \phi_n^{n-m})_j = f_j(t) \implies \dot{\vec{y}}_j^{(1)} = f(t)$$

$$\implies \vec{y}_j^{(1)} = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + C \quad j = \overline{1, m}.$$

Пусть $\Psi_2 = \{\vec{\Psi}_{m+1}, \dots, \vec{\Psi}_n\}$ $n-m$ линейно независ решений второго уравнения

$$\dot{\Psi} = Q_1(t) \Psi_2(t) \text{ выберем константу } C \text{ так, чтобы в } t_0 \Psi_1(t_0) = I$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1(t) & 0 \\ 0 & \Psi_2(t) \end{pmatrix}. \text{ В силу блочной структуры } \det \Psi \neq 0 \implies \Psi \text{ фундаментальна}$$

по построению $\dot{\vec{y}} = Q(t) \vec{y}$

$$\Phi(t) = S(t) \Psi(t)$$

Рассмотрим системы ЛДФУ с постоянными матрицами. Решение сущ если коэф постоянны

Однородные системы ЛДФУ с постоянными коэф.

$\dot{\vec{X}} = A \vec{X}$. Фундаментальная сисьтема решений: $\Phi(t) = e^{At}$ А как взять экспоненту от матрицы? По формуле Тейлора: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$\text{Выбираем норму } \|A\| = \max_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|A \vec{x}\|$$

$$\|A\| = \lambda_A$$

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} |t|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_A^k}{k!} |t|^k = e^{\lambda_A |t|} < \infty$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A e^{At}$$

Подобные матрицы $\dot{\vec{x}} = A \vec{x}$ заменим $\vec{x} = S \vec{y}, \det S \neq 0; \vec{y} = S^{-1} \vec{x}$

$$S^{-1} | S \dot{\vec{y}} = A S \vec{y} \implies \dot{\vec{y}} = \underbrace{S^{-1} A S}_{=B} \vec{y}$$

A и B подобны. $A \sim B \iff \exists S, \det S \neq 0$

$$B = S^{-1} A S, A = S B S^{-1}$$

$$1. A \sim A$$

$$2. A \sim B \iff B \sim A$$

$$3. A B, B C \iff A C$$

$$B = S^{-1} A S \quad C = T^{-1} S^{-1} A S T, C = T^{-1} B T$$

$$\det B = \det S^{-1} A S = \det S^{-1} \det A \det S$$

$$\chi_B(\lambda) = \chi_A(\lambda)$$

Т. Жордана

$$\forall A \sim J = \text{diag}\{J_0, J_1, \dots, J_q\} \quad J_0 = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$$

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda_{p+n} I_{rk} + Z_{rk}$$

Z_{rk} – нулевая матрица с побочной диагональю единиц

сл1.

$$\det J = \prod_{j=1}^n \lambda_j, \quad \text{Tr } J = \sum_{j=1}^n \lambda_j \implies \det A = \prod_{j=1}^n \lambda_j, \quad \text{Tr } A = \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

сделаем несколько общих наблюдений

Функции от матриц

$$\{A_k\}_{k=1}^\infty, A_k \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A \iff \|A_k - A\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

$$\sum_{k=0}^\infty A_k < \infty \iff \exists \lim_{p \rightarrow \infty} S_p, S_p = \sum_{k=0}^p A_k$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k, \text{ ряд с ненулевым радиусом сходимости.}$$

$$f(A) := \sum_{k=0}^\infty a_k A^k$$

Л1.

$$A = S^{-1} J S \implies f(J) \text{ и } f(A) \text{ сх. и расх. одновременно.}$$

$$f(A) = S^{-1} f(J) S$$

$$S^{-1} A^k S = S^{-1} A S S^{-1} A S \dots S^{-1} A S$$

$$\text{d: } S_p(A) = \sum_{k=0}^p a_k (S^{-1} J S)^k = S^{-1} \sum_{k=0}^p a_k J^k S = S^{-1} S_p(J) S \text{ пределим } p \rightarrow \infty$$

Л2.

$$J = \text{diag}\{J_0, \dots, J_q\}, f(J) \text{ сх-ся} \iff f(J_0), \dots, f(J_q) \text{ сх-ся}$$

$$// J^k = \text{diag}\{J_0^k, \dots, J_q^k\}$$

$$f(J) = \text{diag}\{f(J_0), \dots, f(J_q)\}, \text{ а если хотя бы один блок расходится, то и } f \text{ от него тоже. d: } S_p(f(J)) = \sum_{k=0}^p a_k \text{diag}\{J_0^k, \dots, J_q^k\} = \text{diag}\{\sum_{k=0}^p a_k J_0^k, \dots, \sum_{k=0}^p a_k J_q^k\} \implies S_p(f(J)) \rightarrow f(J) = \text{diag}\{f(J_0), \dots, f(J_q)\}$$

Л3.

$$f(z) = \sum_{j=0}^\infty a_j z^j \text{ с радиусом сходимости } \rho.$$

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n - \text{ корни } \chi_A(z) \text{ и } |\lambda_j| < \rho, j = 1, \dots, n \implies f(A) \text{ сх-ся} \implies f(A) = S^{-1} \text{diag}\{f(J_0), \dots, f(J_q)\} S, \text{ а если сущ. } \lambda > \rho, \text{ тогда } f(A) \text{ расх-ся.}$$

$$\text{d: } f(J_0) = \text{diag}\{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_p)\} - \text{ очевидно.}$$

$$f(J_k) = \begin{pmatrix} f(\lambda_{p+k}) & f'(\lambda_{p+k}) & \dots & \frac{f^{(r_k-1)}(\lambda_{p+k})}{(r_k-1)!} \\ 0 & f(\lambda_{p+k}) & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & f(\lambda)p+k \end{pmatrix}$$

z - побочная диаг 1, z^2 - сдвинется диагональ на 1 вправо, $z^r = 0$

$$S_p(J) = \sum_{k=0}^p a_k (\lambda I + z)^k$$

$$(\lambda I + z)^k = \sum_{j=0}^{\min(k, r-1)} C_k^j \lambda^{k-j} z^j = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{r-2} \lambda^{k-r+2} & C_k^{r-1} \lambda^{k-r+1} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{r-2} \lambda^{k-r+2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

$$C_k^l = \frac{k(k-1)\dots(k-l+1)}{l!}$$

$$\sum_{k=j}^p a_k C_k^J \lambda^{k-j} = \frac{S_p^{(j)}(\lambda)}{j!} \implies S_p(J) = \begin{pmatrix} S_p(\lambda) & S_p'(\lambda) & \dots & \frac{S_p^{(r-1)}(\lambda)}{(r-1)!} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & S_p(\lambda) \end{pmatrix} p \rightarrow \infty$$

Сл. $t \in \mathbb{C}$, посмотрим $F(tA)$, $tA = S^{-1}tJS$

$$f(tA) = S^{-1} \text{diag}\{F(tJ_0), \dots, F(tJ_q)\}$$

$$tJ = t\lambda I + tz, (tz)^l = t^l z^l$$

$$F(tJ_k) = \begin{pmatrix} f(\lambda t) & t \cdot f'(\lambda t) & \dots & \frac{t^{r-1} f^{(r-1)}(\lambda t)}{(r-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t \cdot f'(\lambda t) \\ 0 & \dots & 0 & f(\lambda t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} = Ax, \Phi(t) = e^{tA} = S^{-1}e^{tJ}S$$

$$e^{tJ} = \text{diag}\{e^{tJ_0}, \dots, e^{tJ_q}\}$$

$$e^{tJ_k} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_{p+k}t} & t \cdot e^{\lambda_{p+k}t} & \dots & \frac{t^{r-1} \cdot e^{\lambda_{p+k}t}}{(r-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t \cdot e^{\lambda_{p+k}t} \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_{p+k}t} \end{pmatrix}$$