

## Условный экстремум функции

19 сентября 2022

$$D \subset \mathbb{R}^{n+m}, \quad f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \in D$$

$$\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{условие } \Phi(z) = 0$$

**Определение.** точка  $z_0 \in D$  называется *условным экстремумом функции  $f$  при условии  $\Phi = 0$* , если  $\Phi(z_0) = 0$  и  $\exists U$  – окрестность  $z_0$ ,  $U \subset \mathbb{R}^{n+m} \forall z \in D \cap U : \Phi(z) = 0$  выполняется условие  $f(z) \geq f(z_0)$  ( – условный min);  $f(z) \leq f(z_0)$  ( – условный max)

Пусть  $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ , открытое,  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ ,  $\Phi \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$

$z_0$  – точка условного экстремума

$$\text{rank } \Phi'(z_0) = m$$

Перенумеруем координаты  $\begin{bmatrix} \Phi'_x & \Phi'_y \end{bmatrix} = \Phi'$

$z = (x, y)$  так, чтобы было  $\det \Phi'_y(z_0) \neq 0$   $z_0 = (x_0, y_0)$

По Th. о неявном отображении  $\exists U$  – окрестность  $x_0$ :

$$y = \varphi(x), \quad x \in U, \quad \Phi(x, \varphi(x)) = 0$$

Тогда  $f(x, \varphi(x))$  имеет безусловный экстремум в точке  $x_0$  (условие выполняется)

$$\Rightarrow^{(1)} \underbrace{f'_x(z)}_{1 \times n} + \underbrace{f'_y(z)}_{1 \times m} \cdot \underbrace{\varphi'(x)}_{m \times n} = 0 \quad (\text{ – это и есть необх. усл. экстремума})$$

$$\varphi'(x_0) = - \left( \Phi'_y(z_0) \right)^{-1} \cdot \Phi'_x(z_0)$$

$$^{(1)} \text{ НУО: } f'_x(z) - \underbrace{f'_y(z) \left( \Phi'_y \right)^{-1}}_{=\lambda \text{ (см. след. §)}} \Phi'_x(z) = 0$$

## Метод неопределенных множителей Лагранжа

$$\begin{cases} f'_x(z) + f'_y(z) \varphi'(x) = 0 & n \text{ уравнений} \\ \Phi(z) = 0 - \text{отсюда} & + m \text{ уравнений, } n + m \text{ неизвестных} \end{cases}$$

$$\underbrace{f'_y(z)}_{1 \times m} = \underbrace{\lambda}_{1 \times m} \cdot \underbrace{\Phi'_y(z)}_{m \times n}$$

$$\Phi'_x(z) + \Phi'_y(z) \varphi'(x) = 0$$

$$f'_x(z) + \cancel{f'_y(z) \varphi'(x)} - \lambda (\Phi'_x(z) + \cancel{\Phi'_y(z) \varphi'(x)}) = 0$$

$$f'_x(z) - \lambda \Phi'_x(z) = 0$$

т. е. получаем

$$\begin{cases} f'_x(z) - \lambda \Phi'_x(z) = 0 & n + 2m \text{ уравнений} \\ \Phi(z) = 0 & n + 2m \text{ неизвестных} \\ f'_y(z) - \lambda \Phi'_y(z) = 0 & (\lambda \text{ в числе неизв.}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$  т. е. система стала единообразной

$$\begin{cases} f'(z) - \lambda \Phi'(z) = 0 \\ \Phi(z) = 0 \end{cases}$$

Пусть  $F(z, \lambda) = f(z) - \lambda \Phi(z)$

$$F'_z(z, \lambda) = f'(z) - \lambda \Phi'(z)$$

$$F'_\lambda(z, \lambda) = -\Phi(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{F' = 0}$$

**Пример.** Наименьшее и наибольшее значения квадратичной формы на единичной сфере

$$A = A^T \in \text{Mat}^d, (Az, z) = \sum_{i,k=1}^d A_{ik} z_i z_k \quad z \in \mathbb{R}^d$$

$$S^{d-1} = \{x : \|x\| = 1\}$$

$$f(z) = (Az, z)$$

$$\Phi(z) = \|z\|^2 - 1 = \sum_{i=1}^d z_i^2 - 1, \quad m = 1, n = d - 1$$

$$f'(z) = 2(Az)^T \quad \Phi'(z) = 2z^T$$

$$\forall l \quad \frac{\partial f}{\partial z_l} = \frac{\partial}{\partial z_l} \left( \sum_{k=1}^d A_{lk} z_k + \sum_{i=1}^d A_{il} z_i \right) = 2(Az)_l$$

$$\begin{cases} f'(z) - \lambda \Phi'(z) \\ \Phi(z) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2(Az - \lambda z) = 0 \\ \Phi(z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Az = \lambda z \\ \|z\| = 1 \end{cases} \quad - \text{задача на собственные знач. и векторы}$$

**Замечание.** Условные экстремумы в точках являются нормированным собственными векторами матрицы

$$f(z) = (Az, z) = (\lambda z, z) = \lambda \|z\|^2 = \lambda$$

$\Rightarrow$  наибольшее значение квадратичной формы  $= \max\{\lambda\}$

наименьшее  $= \min\{\lambda + \text{с. ч. } A\}$

$$B \in \text{Mat}^{m,n} \quad \|B\|^2 = \sup_{z \in S^{n-1}} \|Bz\|^2 = \sup_{z \in S^{n-1}} (Bz, Bz) =$$

$$= \sup_{z \in S^{n-1}} (B^T B, z) = \max \lambda(B^T B) = \max S(B), \quad \text{где } S(B) - \text{сингулярные числа на } B$$

$$A \in \text{Mat}^{m,n}$$

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(Ax, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m A_{ik} x_k y_i = \sum_{k=1}^n x_k (A^T y)_k = (x, A^T y)$$

$$(A^T y)_k = \sum_{l=1}^m (A^T)_{kl} y_l = \sum_{l=1}^m A_{lk} y_l$$

## Интеграл Римана в $\mathbb{R}^n$

$\Pi$  – координатный параллелепипед в  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\Pi = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

$$v(\Pi) = (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) - \text{объем}$$

$f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ , ограниченное  $(\exists c > 0 : |f(x)| < c \ \forall x \in \Pi)$

$p_i = \{[t_{k-1}, t_k], \ k = 1, \dots, N_i\}$  – разбиение  $[a_i, b_i]$ , если  $a_i = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{N_i} = b_i$

$p = \{\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n, \ \pi_i \in p_i\}$  – разбиение  $\Pi$

$$d(p) = \max_{\pi \in p} \text{diam } \pi, \quad \text{diam } \pi = \sup_{x, y \in \pi} \|x - y\|$$

$$L(f, p) = \sum_{\pi \in p} \inf_{\pi} f \cdot v(\pi) \quad - \text{нижняя сумма Дарбу}$$

$$U(f, p) = \sum_{\pi \in p} \sup_{\pi} f \cdot v(\pi) \quad - \text{верхняя сумма Дарбу}$$

$$L(f, p) \leq U(f, p)$$

**Лемма 1.** Для  $\forall$  разбиений  $p_1, p_2$   $L(f, p_1) \leq U(f, p_2)$

*Доказательство.*

1.  $p_2$  – расширение  $p_1$   $(\forall \pi \in p_1 : \pi = \bigcup_{i=1}^N \pi_i, \ \pi_i \in p_2)$

$$v(\pi) = \sum_{i=1}^N v(\pi_i)$$

$$\inf_{\pi} f \leq \inf_{\pi_i} f, \ \forall i$$

$$\sum_{i=1}^N \inf_{\pi_i} f \cdot v(\pi_i) \geq \inf_{\pi} f \cdot v(\pi)$$

$$\Rightarrow L(f, p_2) \geq L(f, p_1)$$

Аналогично для  $U(f, p_2) \leq U(f, p_1)$

2. Пусть  $p_1$  и  $p_2$  – два произвольных разбиения

Рассмотрим  $p_3 = \{\pi_1 \cap \pi_2, \ \pi_1 \in p_1, \ \pi_2 \in p_2\}$

$$L(f, p_1) \leq L(f, p_3) \leq U(f, p_3) \leq U(f, p_2)$$

□

**Следствие 1.**  $\inf_p U(f, p) \geq \sup_p L(f, p)$

**Определение.**

$$\int_{\Pi} f := \sup_p L(f, p) \quad \overline{\int}_{\Pi} f := \inf_p U(f, p)$$

$$f : \Pi \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{огранич.}$$

**Определение.** Если  $\int_{\Pi} f = \overline{\int}_{\Pi} f$ , то  $f$  называется интегрируемой по Риману и

$$\int_{\Pi} f = \overline{\int}_{\Pi} f = \int_{\Pi} f$$

$$\int_{\Pi} f = \int f(x) dx = \overbrace{\int \cdots \int}_{\Pi}^n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n - \text{кратный интеграл}$$

**Пример.**

$$1. f \equiv c \quad \forall p \forall \pi \in p \quad \inf_{\pi} f = \sup_{\pi} f = c$$

$$L(f, p) = U(f, p) = c \cdot v(\pi)$$

$$\Rightarrow \int_{\Pi} f = c \cdot v(\pi)$$

$$2. \pi = [0, 1]^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \forall p \quad \forall \pi \in p \quad \inf_{\pi} f = 0$$

$$L(f, p) = 0 \quad U(f, p) = 1 \quad \Rightarrow \int_{\Pi} f$$

**Лемма 2.**  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  — о.г.р.

$$f \text{ интегрируема} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \quad U(f, p) - L(f, p) < \varepsilon$$

*Доказательство.*

$$\boxed{\Leftarrow} \quad \overline{\int}_{\Pi} f - \int_{\Pi} f \leq U(f, p) - L(f, p)$$

$$\forall \varepsilon \quad \exists p : U(f, p) - L(f, p) < \varepsilon \Rightarrow = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \sup_p L(f, p) = \inf_p U(f, p) \Rightarrow \exists p_2 : U(f, p_2) - \inf_p U(f, p) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \exists p_1 : \sup_p L(f, p) - L(f, p_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Рассмотрим } p_3 = \{ \pi_1 \cap \pi_2, \pi_1 \in p_1, \pi_2 \in p_2 \}$$

$$U(f, p_2) - L(f, p_1) < \varepsilon$$

$$U(f, p_3) - L(f, p_3) \leq U(f, p_2) - L(f, p_1) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \text{вот } \exists p = p_3$$

□

**Лемма 3.**  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ , *огр.*

Пусть  $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$  – последовательность разбиений  $\Pi$

$$d(p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \text{ Тогда } L(f, p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_{\Pi} f$$

$$U(f, p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \overline{\int_{\Pi} f}$$

*Доказательство.*  $\varepsilon > 0 \quad \exists p_{\varepsilon} : \int_{\Pi} f - L(f, p_{\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\int_{\Pi} f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, p_{\varepsilon}) \leq \int_{\Pi} f$$

$$p_k = p'_k \cup p''_k \quad \begin{cases} \pi \in p'_k, & \text{если } \exists \pi_1 \in p_{\varepsilon} : \pi \supset \pi_1 \\ \pi \in p''_k, & \text{если } \pi \text{ имеет непустое пересечение с границами п-да из } p_{\varepsilon} \end{cases}$$

Рассмотрим  $p_{\varepsilon, k} := \{\pi_1 \cap \pi_2, \pi_1 \in p_k, \pi_2 \in p_{\varepsilon}\}$

$$L(f, p_k) - L(f, p_{\varepsilon, k}) = \sum_{\pi'' \in p''_k} \inf_{\pi''} f v(\pi'') - \sum_{\substack{\pi \in p_{\varepsilon, k} \\ \pi \in \bigcup_{\pi'' \in p_k} \pi}} \inf_{\pi} f v(\pi)$$

$S(p_{\varepsilon})$  – сумма площадей всех граней п-ов из  $p_{\varepsilon}$

$$\sum_{\pi'' \in p''_k} v(\pi'') \leq \mathbf{2} \cdot S(p_{\varepsilon}) \cdot d(p_k)$$

$$\left| \sum_{\pi'' \in p''_k} v(\pi'') \right|, \left| \sum_{\substack{\pi \in p_{\varepsilon, k} \\ \pi \in \bigcup_{\pi'' \in p_k} \pi''}} \inf_{\pi} f v(\pi) \right| \leq$$

$$\sup_{\pi} |f| \cdot \sum_{\pi'' \in p''_k} v(\pi'') \leq 2S(p_{\varepsilon}) \cdot \sup_{\pi} |f| \cdot d(p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\exists K \forall k > K \quad L(f, p_{\varepsilon, k}) - L(f, p_k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_{\Pi} f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, p_{\varepsilon}) - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f, p_{\varepsilon, k}) - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, p_k) < \int_{\Pi} f \Rightarrow L(f, p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_{\Pi} f$$

□