$\boxed{\textbf{24 октября 2022}}$

Мы доказали теорему в случае, когда g - простейший диффеоморфизм. Теперь докажем в случае, когда g - композиция н простейших диффеоморфизмов.

Доказательство. (продолжение)

2. Пусть $g : G \to \mathbb{R}^n$ - композиция простейших диффеоморфизмов

`Индукция` (количество композиций):

$k = 1$ доказано на первом шаге.

`Переход`: верно для k, докажем для $k+1$

$g = g_{k+1} \circ \underbrace{g_k \circ \ldots \circ g_2 \circ g_1}_{=h-\text{диффеоморфизм G и h(G)}}$

g_{k+1} - диффеоморфизм $h(G)$ и $g(G)$

$f : g(G) \to \mathbb{R}$ огр. и п.в. непр.

$f \circ g_{k+1} : h(G) \to \mathbb{R}$ огр и (по первой лемме (№16) о мере ноль под диффеоморфизмом) п.в. непр.

$f \circ g_{k+1} |\det g'_{k+1}|$

$$\int_{g(G)} f \overset{1.}{=} \int_{h(G)} f \circ g_{k+1} |\det g'_{k+1}| \overset{\text{инд. предп.}}{=}$$

$$= \int_G \big(f \circ g_{k+1} |\det g'_{k+1}|\big) \circ h |\det h'|$$

$$= \int_G \underbrace{f \circ g_{k+1} \circ h}_{f \circ g} \cdot |(\det g'_{k+1} \circ h| \det h')$$

$$= \int_G f \circ g |\det g'|$$

3. Общий случай

$K = \operatorname{supp}\big(f \circ g |\det g'|\big) \subset G \quad \operatorname{dist}(\delta G, K) > 0$

$\forall x \in K \; \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subset G$

По лемме 15 $g\big|_{B_{\varepsilon_x}(x)}$ раслкадывается в композицию простейших диффеоморфизмов

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\varepsilon_x/2}(x), K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i)$$

т.к. K - компакт.

$\delta := \min\limits_{i=1,\dots,N} \dfrac{\varepsilon_{x_i}}{2}$

$\forall E \subset \mathbb{R}^n : E \cap K \neq \varnothing$ и $\mathrm{diam} E < \delta$ верно $E \subset G$ и $g\big|_E$ раскладывается в композицию

$\Big(\exists x \in K \cap E, \exists i : x \in B_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i) \wedge E \subset \big(B_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i)\big) \subset B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \subset G\Big)$

foto 1

Пусть $G \subset \Pi$ - п/п, P - разбиение $\Pi, d(P) < \min\{\delta, \mathrm{dist}(\delta G, K)\}$

$P_1 = \{\pi \in P \mid \pi \cap K \neq \varnothing\}$

Если $\pi \notin P_1$, то $\big(f \circ g |\det g'|\big)\big|_\pi \equiv 0$

Если $\pi \in P_1$, то $\pi \subset G$ и $g\big|_\pi$ раскладывается в композицию

$K \subset \bigcup_{\pi \in P_1} \pi$

$$\int_G f \circ g |\det g'| = \int_\Pi f \circ g |\det g'| \cdot \chi_G = \sum_{\pi \in P} \int_\pi f \circ g |\det g'| \cdot \chi_G$$

$$= \sum_{\pi \in P_1} \int_\pi f \circ g |\det g'| \chi_G = \sum_{\pi \in P_1} \int_\pi f \circ g |\det g'| = \sum_{\pi \in P_1} \int_{\mathrm{Int}\pi} f \circ g |\det g'| =$$

$$= \sum_{\pi \in P_1} \int_{g(\mathrm{Int}\pi)} f = f \int_{g(\bigcup_{\pi \in P_1} \mathrm{Int}\pi)} f = (*)$$

$v(\delta\pi) = 0 \implies \mu(\delta\pi) = 0 \implies \mu\big(g(\delta\pi)\big) = 0 \implies v\big(g(\delta\pi)\big) = 0$

$\mathrm{supp} f = g(K) \subset g(\bigcup_{\pi \in P_1} \pi) \subset g(G)$

$\mathrm{supp}(f \circ g) = K \subset \bigcup_{\pi \in P_1} \pi$

$$(*) = \int_{g(\bigcup_{\pi \in P_1} \Pi)} f = \int_{\Pi_x} f \cdot \chi_{g(\bigcup_{\pi \in P_1} \pi)} = \int_{\Pi_x} f \cdot \chi_{g(G)} = \int_{g(G)} f$$

$\square$

Это к ласт лекции:

$v(\pi_y) = |g'(\xi)| \cdot v(\pi_x)$

$\sum_{\pi_y} \sup_{\pi_y} f v(\pi_y) = \sum_{\pi_x} (\sup_{\pi_x}) \big|g'\big(\xi(\pi_x)\big)\big| \cdot v(\pi_x)$

оценим точнее разность супремумов

$\Big| sup_{\pi_x}(f \circ g) \cdot |g'\big(\xi(\pi_x)\big)| - \sup_{\pi_x}(f \circ g|g'|)\Big| = \Big| \sup_{\pi_x}(f \circ g)(x)\big(|g'(\xi(\pi_x))| - |g'(x)|\big)\Big| \leq \underbrace{\sup_{\pi_x} |f \circ g|}_{<M} \cdot \underbrace{\sup_{x \in \pi_x} \big|g'(\xi(\pi_x))|g'(x)|\big|}_{w_{|g'|}(d(P_x))}$

$\sup_{g([a,b])} f = M < \infty \quad +M \cdot \frac{w_{|g'|}(d(P_x))}{d(P_x) \to 0}(b-a)$

Следствие 1. *Жорданов объем не меняется при движениях и поворотах и не зависит от выбора координат*

Переход к новому базису $g(X) = a + Ux \quad U^TU = UU^T = I$ *- ортогональная матрица*

$\det U = \pm 1$

$g'(x) = U \quad |\det g'(x)| = 1$

$$\int_{(g(E))} 1 = \int_E 1$$

А как посчитать объем шара? $v(B_R(0))-?$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g(r, \vartheta, \varphi) \qquad g : (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$

$x = r \sin\vartheta \sin\varphi$

$y = r \sin\vartheta \cos\varphi$

$z = r \cos\vartheta$

$\det g' = r^2 \sin\vartheta$

$B_R(0) = g\overbrace{\big((0, R) \times (0, \Pi) \times (0, 2\pi)\big)}^{=\Pi_R}$

$\{x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$

$$v\big(B_R(0)\big) = \int_C \chi_{B_R(0)} = \int_{B_R(0)} 1 = \int_{g(\Pi_R)} 1 = \iiint_{\Pi_R} 1 \cdot r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Несобственные кратные собиратели (интрегалы)

Определение. $E \subset \mathbb{R}^n \quad \{E_k\}_k^\infty, E_k \subset E_{k+1} \subset E, \forall k : E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$, *измеримы по жордану.*

Такая последовательность называется ***исчерпанием*** *множества* E

Лемма 20. $E \subset \mathbb{R}^n$ *измеримо по Жордану,*

$\{E_k\}_{k=1}^\infty$ *- исчерпание* E*. Тогда*

$$v(E_k) \underset{k\to\infty}{\to} v(E)$$

И для любой $f : E \to \mathbb{R}$ *огр и п.в. непр. :*

$$\int_{E_k} f \underset{k\to\infty}{\to} \int_E f$$

Доказательство. $v(E_k) \le v(E) \qquad v(E_k) \le v(E_{k+1})$

$\implies \exists \lim_{k\to\infty} v(E_k) \le v(E)$

E измеримо по Ж. $\implies \overline{E}, \delta E$ огр., компактно, $\mu(\delta E) = 0 \implies v(\delta E) = 0$

$\forall \varepsilon \exists C_1, \dots, C_k$ октрытые кубы, $\delta E \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^{N} C_i}_{=\Delta}, \sum_{i=1}^N v(C_i) < \varepsilon$

$\overline{E} \subset E \cup \bigcup_{i=1}^N C_i = E \cup \Delta$ - откр множество

$\forall k : \overline{E_k} \subset \underbrace{E_k \cup \Delta_k}_{\text{откр}}, v(\Delta_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

компакт $\overline{E} \subset E \cup \Delta = (\bigcup_{k=1}^\infty E_k) \cup \Delta \subset \bigcup_{k=1}^\infty (E_k \cup \Delta_k) \cup \Delta$ - открытое покрытие

$\overline{E} \subset \left(\bigcup_{i=1}^N E_{k_i} \cup \Delta_{k_i}\right) \cup \Delta = E_{k_N} \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \Delta_{k_i}\right) \cup \Delta$

$v(E) = v(\overline{E}) \le v(E_{k_N}) + \sum\limits_{i=1}^{N} v(\Delta_{k_i}) + v(\Delta) \le \lim\limits_{k\to\infty} v(E_k) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^k} + \varepsilon = \lim\limits_{k\to\infty} v(E_k) + 2\varepsilon$

$\implies v(E) \le \lim_{k\to\infty} v(E_k)$

Значит, $\lim_{k\to\infty} v(E_k) = v(E)$

$f : E \to \mathbb{R}$ огр и п.в. непр.

$|\int_E f - \int_{E_k} f| = |\int_{E\setminus E_k} f| \le \sup_E |f| \cdot v(E \setminus E_k) = (\sup_E |f|) \underbrace{\big(v(E) - v(E_k)\big)}_{\to 0}$

$\implies \int_{E_k} f \underset{k\to\infty}{\to} \int_E f$ ∎

Определение. $E \subset \mathbb{R}^n, f : E \to \mathbb{R}$

Если $\exists I \in \mathbb{R} \quad \forall \{E\}_{k=1}^\infty$ *- исчерпание* $E : \forall k f\big|_{E_k}$ *огр. и п.в. непр.*

$\int_{E_k} f \underset{k\to\infty}{\to} I$, *то* $\exists$ ***несобств. собиратель*** $\int_E f = I$

Пример. $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{B_n(0)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_0^n dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} rdy =$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{2} \int_0^n de^{-r^2} = \lim_{n\to\infty} \Pi(1 - e^{-n^2}) = \pi$

$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Лемма 21. *Если* $f \ge 0$ *и* $\exists \{E_k\}_{k=1}^\infty$ *- исчерпание* E

$\exists \displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$, *то* $\exists$ *несобств. собиратель* $\int_E f$

Доказательство. нужно д-ть, что для любого другого исчерпания $\{\widetilde{E}_l\}_{k=1}^\infty : \int_{\widetilde{E}_l} f \to \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$

$f\big|_{\widetilde{E}_l}$ огр. и п.в. непр.

$\int_{\widetilde{E}_l \cap E_k} \le \int_{E_k} f \le \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f \qquad \{\widetilde{E}_l \cap E_k\}_{l=1}^\infty$ - исчерпание E_k

$\{\widetilde{E}_l \cap E_k\}_{k=1}^\infty$ - исчерпание $\widetilde{E}_l$

$\overset{\text{лемма}}{\implies} \lim_{l\to\infty} \int_{\widetilde{E}_l \cap E_k} f = \int_{E_k} f \le \lim_{l\to\infty} \int_{\widetilde{E}_l} f$

$\implies \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f \le \lim_{l\to\infty} \int_{\widetilde{E}_l} f$

$\lim_{k\to\infty}\int_{\widetilde{E_l}\cap E_k} f=\int_{\widetilde{E_l}} f \leq \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f$

$\implies \exists \lim_{l\to\infty}\int_{\widetilde{E_l}} f \leq \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f$

$$\implies \lim_{l\to\infty}\int_{\widetilde{E_l}} f = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f$$

□

Лемма 22. $E\subset\mathbb{R}^n, f:E\to\mathbb{R},\quad g:E\to[0,+\infty),\quad |f|\leq g$

$\forall\widetilde{E}\subset E$ *изм. по Ж.* $f|_{\widetilde{E}}$ *огр и п.в. непр.* $\iff g|_{\widetilde{E}}$ *огр. и п.в. непр.*

$\exists$ *несобств.* $\int_E g \implies \exists$ *несобств.* $\int_E |f|$ *и* $\int_E f$

g - ***складываемая (суммируемая) мажоранта***

Доказательство. $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ - исчерпание $E:\forall k f|_{E_k}, g|_{E_k}$ огр. и п.в. непр.

по кр. Коши $n>K:\int_{E_n}|f|=\int_{E_k}|f|=\int_{E_n\setminus E_k}|f|\leq\int_{E_n\setminus E_k} g=\int_{E_n} g-\int_{E_k} g$

$\exists\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} g \overset{\text{кр.коши}}{=} \exists\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f| \overset{\text{лемма}}{\implies} \exists$ несобств. $\int_E |f|$

$|\int_{E_n}-\int_{E-k} f|\leq\int_{E_n\setminus E_k}|f|\leq\int_{E_k} g-\int_{E_n} g$

$f=f_r-f$

$f_r=\frac{f+|f|}{2}\geq 0\quad f_-=\frac{|f|-f}{2}\geq 0$

$0\leq f_\pm\leq|f|\leq g$

$f_\pm=|f_\pm|$

$\exists$ несобств. $\int_E |f\pm|=\int_E f_\pm$

$\forall\{E_k\}_{k=1}^\infty$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f_+-\int_{E_k} f_-=\int_E f_+-\int_E f_-\implies\exists\int_E f$$

□

$f(x)-\frac{(-1)^{n-1}}{n},\quad x\in[n-1,n)\quad[0,+\infty]\to\mathbb{R}$

$[0,+\infty)=\bigcup_{n=1}^\infty[0,n)$

$\int_{[0,n)} f=\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k}\underset{n\to\infty}{\to}\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$\lim_{k\to\infty}\int_0^R f(x)dx=\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$\forall I\in\mathbb{R}\exists\varphi$ - биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$

$\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{\varphi(k)-1}}{\varphi(k)}=I$

$E=\bigcup_{k=1}^n[\varphi(k)-1,\varphi(k))$

$\int_{E_n} f=\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{\varphi(k)-1}}{\varphi(k)}\underset{n\to\infty}{\to} I$