

Practicum Numerieke Wiskunde

Benadering van functies door veeltermen

**Sarah Crombez
Zimcke Van de Staey**

Inhoudsopgave

1	Achtergrond	3
---	-------------	---

1 Achtergrond

De Chebyshev veeltermen van de eerste soort $T_k(x)$ worden gedefinieerd op basis van de volgende recursiebetrekking:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \end{aligned}$$

Stelling 1 *Op het interval $[-1, 1]$ voldoen de Chebyshev veeltermen aan volgende vergelijking:*

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)) \quad (1)$$

Bewijs: We zullen deze stelling aantonen met behulp van volledige inductie.

Basisstap:

voor $k = 0$ geldt: $T_0 = \cos(0 * \arccos(x)) = \cos(0) = 1$

voor $k = 1$ geldt: $T_1 = \cos(\arccos(x)) = x$ op het interval $[-1, 1]$ want de arccos-functie is enkel gedefinieerd op het interval $[-1, 1]$.

Inductiestap:

We nemen aan dat voor alle $j \leq n$ geldt: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Nu moet aangetoond worden dat dit ook geldt voor $n + 1$. Volgens de recursiebetrekking voor de Chebyshev veeltermen geldt: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Nu kunnen we de inductiehypothese toepassen, dit geeft: $T_{n+1}(x) = 2x \cos(n \arccos(x)) - \cos((n-1) \arccos(x))$. Met behulp van de som-en verschilformules voor de cosinus kunnen we dit schrijven als: $T_{n+1} = 2x \cos(n \arccos(x)) - \cos(n \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \sin(n \arccos(x)) \sin(\arccos(x))$
 $= \cos(n \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \sin(n \arccos(x)) \sin(\arccos(x))$ Hierop kunnen we dan opnieuw de som-en verschil formules voor de cosinus op toepassen en dit geeft: $T_{n+1}(x) = \cos((n+1) \arccos(x))$. De veronderstelling geldt dus ook voor $n+1$.

Conclusie:

Uit de basisstap, de inductiestap en het principe van volledige inductie volgt het te bewijzen. □

Example Figure

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.