Practicum Numerieke Wiskunde

Benadering van functies door veeltermen

Sarah Crombez
Zimcke Van de Staey

Inhoudsopgave

1 Achtergrond

De Chebyshev veeltermen van de eerst soort $T_k(x)$ worden gedefinieerd op basis van de volgende recursiebetrekking:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Stelling 1 *Op het interval* $[-1, 1]$ *voldoen de Chebyshev veeltermen aan volgende vergelijking:*

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)) \tag{1}$$

Bewijs: We zullen deze stelling aantonen met behulp van volledige inductie.

Basisstap:
voor $k = 0$ geldt: $T_0 = \cos(0 * \arccos(x)) = \cos(0) = 1$
voor $k = 1$ geldt: $T_1 = \cos(\arccos(x)) = x$ op het interval $[-1, 1]$ want de arccos-functie is enkel gedefinieerd op het interval $[-1, 1]$.

Inductiestap:

We nemen aan dat voor alle $j \leq n$ geldt: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Nu moet aangetoond worden dat dit ook geldt voor $n + 1$. Volgens de recursiebetrekking voor de Chebyshev veeltermen geldt: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Nu kunnen we de inductiehypothese toepassen, dit geeft: $T_{n+1}(x) = 2x \cos(n \arccos(x)) - \cos((n-1) \arccos(x))$. Met behulp van de som-en verschilformules voor de cosinus kunnen we dit schrijven als: $T_{n+1} = 2x \cos(n \arccos(x)) - \cos(n \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \sin(n \arccos(x)) \sin(\arccos(x))$
$= \cos(n \arccos(x) \cos(\arccos(x)) - \sin(n \arccos(x)) \sin(\arccos(x))$ Hierop kunnen we dan opnieuw de som-en verschil formules voor de cosinus op toepassen en dit geeft: $T_{n+1}(x) = \cos((n+1) \arccos(x))$. De veronderstelling geldt dus ook voor n+1.

Conclusie:

Uit de basisstap, de inductiestap en het principe van volledige inductie volgt het te bewijzen. □

2 Deel 1: Drie veeltermbasissen

3 Deel 2: Veelterminterpolatie

3.1 Equidistante punten en het Runge fenomeen

Figuur 1: Veelterminterpolatie van de Runge functie in de Lagrange basis

Figuur 1 toont dat, bij toenemende graad, de respectievelijke veelterminterpolatie **niet vanzelfsprekend een betere benadering** van de Runge functie oplevert. We zien duidelijk dat de veeltermen aan de uiteinden van het interval [-1,1] **sterkere oscillaties** vertoont. Tussen de interpolatiepunten, zal de Lagrange interpolatie een overschatting maken van de verandering in functiewaarden. Dit gedrag wordt versterkt naarmate men meer interpolatiepunten kiest.

Om dit extreme gedrag in de buurt van de randwaarden te minimaliseren, kan men er voor opteren de **interpolatiepunten anders te verspreiden** over het interval. De Chebyshev punten vormen een horizontale projectie van punten op de goniometrische cirkel en zullen daarom dichter bij elkaar liggen in de buurt van -1 en 1.

Figuur 2: De relatieve fout bij Lagrange veelterminterpolatie

TODO: bespreek relatieve fout

Dat de veelterminterpolatie door deze Chebyshev punten in het algemeen een **minder grote interpolatiefout** heeft dan bij het gebruik van equidistante punten, is duidelijk te zien in figuur 3.

Figuur 3: Interpolatiefout E voor toenemende graden 0,1,...,50

3.2 Verschillende basissen

Figuur 4: De interpolatiefout E van interpolatie volgens Lagrange, monomiaal en Chebyshev basis

4 Deel 3: Methode van Newton-Raphson

4.1 benaderen van nulpunten m.b.v. de methoden van Newton-Raphson

Figuur 5: Nulpuntbenadering met de methode van Newton-Raphson

Figuur 5 toont de veelterm die bekomen wordt door de vector c uit te zetten in de Chebyshev-basis. Daarnaast worden ook de nulpunten weergegeven die gevonden worden m.b.v. de methode van Newton-Raphson. Het is duidelijk te zien dat alle nulpunten van de veelterm gevonden worden. Maar daarnaast worden er ook nog een aantal extra nulpunten bekomen die niet meer tot de veelterm behoren.

Om te zien welke startwaarde naar welk nulpunt convergeert, worden op onderstaande figuur de residus i.f.v. de startwaarden geplot. De residu is de functie-waarde die bekomen wordt in de uiteindelijke benadering.

Figuur 6: residus i.f.v. de startwaarden

Het is makkelijk in te zien dat er niet voor elk punt convergentie zal zijn. De methode van Newton-Rapshon bepaalt immers een rij van punten $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n)}$. Als ergens in deze rij $f(x_n) = 0$ dan zal x_{n+1} niet bestaan en is er dus geen convergentie. Een andere manier om de formule van Newton-Raphson te interpreteren is door x_{n+1} te zien als het snijpunt van de x-as met de rechte door het punt $(x_n, f(x_n)$ in de richting van $f(x_n)$. Als $f(x_n) = 0$ dan is deze rechte evenwijdig met de x-as, en er zal dus nooit een snijpunt zijn met de x-as en dus ook geen convergentie.

4.2 fout en orde van convergentie voor verschillende startwaarden

Figuur 7: fout i.f.v de iteratiesstap

Op figuur 7 is de fout in functie van de iteratiestap geplot voor de startwaarden $x_0 = -0.9$ en $x_0 = 0.5$. Het is duidelijk merkbaar dat er voor de startwaarde 0.5 een veel snellere convergentie is. Met behulp van de formule $\rho_p = \lim_{n\to\inf} \dfrac{x_{n+1} - x*}{x_n - x*}$ kan de convergentie-orde bepaalt worden. Als ρ_p een reel getal is dan is n de orde van convergentie. Omdat er in de methode van Newton-Raphson maar een eindig aantal iteraties gebeurd, kan de limiet van n naar oneindig niet genomen worden maar moet het aantal iteraties in rekening gebracht worden. Het aantal iteraties hangt af van de nmax,het maximaal aantal iteraties, en de gekozen tolerantie, dit is het minimale verschil tussen twee opeenvolgende iteratiepunten.
Door toepassing van deze formule wordt voor de startwaarde -0.9 een convergentie-orde van 1 gevonden, deze convergeert dus lineair. Voor de startwaarde 0.5 is de convergentie-orde 2 en dus is er kwadratische convergentie.

4.3 fout en orde van convergentie met voorwaartse differenties

Figuur 8: fout i.f.v de iteratiesstap

Vanaf nu wordt gebruikt gemaakt van de methode van Newton-Raphson waarbij de afgeleide berekend wordt m.b.v. voorwaartse differenties. Op Figuur 8 wordt de fout geplot voor startwaarde $x_0 = 0.5$ met verschillende waarden voor de parameter h. Op de figuur is duidelijk dat er geen convergentie is voor $h = 10^{-1}$ en voor $h = 10^{-1.5}$. Voor de andere waarden is er wel convergentie dus kan de orde bepaald worden. Dit kan opnieuw met behulp van de formule die in de vorige paragraaf gegeven werd. Voor $h = 10^{-2}$ is er lineaire convergentie. Voor $h = 10^{-3}$ en $h = 10^{-6}$ is er kwadratische convergentie

4.4 extra rekenkost

Stel dat de methode van Newton-Rapshon wordt toegepast, maar i.p.v. de afgeleide te berekenen m.b.v. voorwaartse differenties, worden nu centrale differenties gebruikt dan is er geen extra rekenkost. Om een centrale differentie van orde n uit te rekenen moeten n+1 functie-evaluaties uitgevoerd worden, dit is exact evenveel als bij een voorwaartse differentie. Het kan natuurlijk ook nog zijn dat n van de twee minder nauwkeurig is, en dat er dus meer differenties moeten gezocht worden om een afgeleide met een zelfde nauwkeurigheid te benaderen. Maar na evalueren van de formules van Gauss en Stirling, blijkt dat beide ongeveer even nauwkeurig zijn.