Practicum Numerieke Wiskunde

Benadering van functies door veeltermen

Sarah Crombez
Zimcke Van de Staey

Inhoudsopgave

1 Achtergrond

De Chebyshev veeltermen van de eerst soort $T_k(x)$ worden gedefinieerd op basis van de volgende recursiebetrekking:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Stelling 1 *Op het interval* $[-1, 1]$ *voldoen de Chebyshev veeltermen aan volgende vergelijking:*

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)) \tag{1}$$

Bewijs: We zullen deze stelling aantonen met behulp van volledige inductie.

Basisstap:
voor $k = 0$ geldt: $T_0 = \cos(0 * \arccos(x)) = \cos(0) = 1$
voor $k = 1$ geldt: $T_1 = \cos(\arccos(x)) = x$ op het interval $[-1, 1]$ want de arccos-functie is enkel gedefinieerd op het interval $[-1, 1]$.

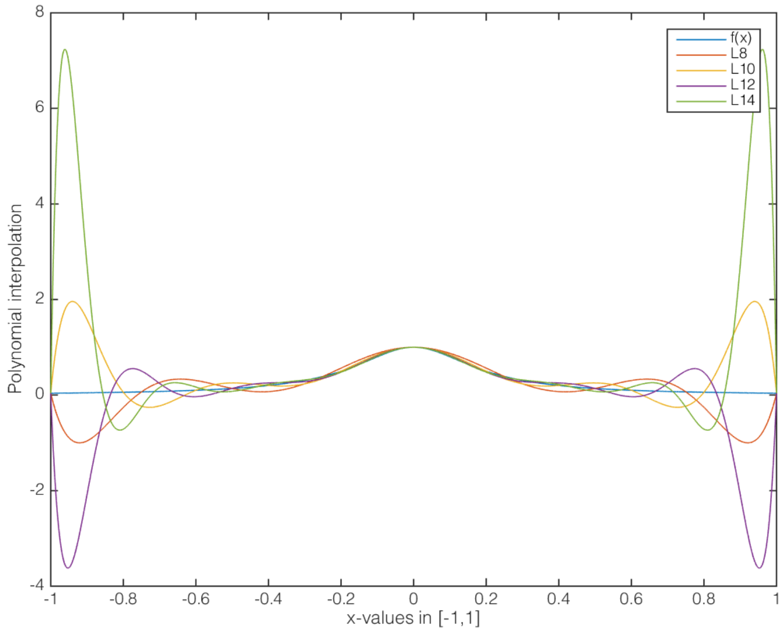
Inductiestap:

We nemen aan dat voor alle $j \leq n$ geldt: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Nu moet aangetoond worden dat dit ook geldt voor $n + 1$. Volgens de recursiebetrekking voor de Chebyshev veeltermen geldt: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Nu kunnen we de inductiehypothese toepassen, dit geeft: $T_{n+1}(x) = 2x \cos(n \arccos(x)) - \cos((n-1) \arccos(x))$. Met behulp van de som-en verschilformules voor de cosinus kunnen we dit schrijven als: $T_{n+1} = 2x \cos(n \arccos(x)) - \cos(n \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \sin(n \arccos(x)) \sin(\arccos(x))$
$= \cos(n \arccos(x) \cos(\arccos(x)) - \sin(n \arccos(x)) \sin(\arccos(x))$ Hierop kunnen we dan opnieuw de som-en verschil formules voor de cosinus op toepassen en dit geeft: $T_{n+1}(x) = \cos((n + 1) \arccos(x))$. De veronderstelling geldt dus ook voor n+1.

Conclusie:

Uit de basisstap, de inductiestap en het principe van volledige inductie volgt het te bewijzen. □

2 Deel 1: Drie veeltermbasissen



Figuur 1: de Runge functie en de betreffende Lagrange interpolaties

3 Deel 2: Veelterminterpolatie

3.1 Equidistante punten en het Runge fenomeen

4 Deel 3: Methode van Newton-Raphson