Practicum Numerieke Wiskunde

Benadering van functies door veeltermen

Sarah Crombez
Zimcke Van de Staey

Inhoudsopgave

1 Achtergrond

De Chebyshev veeltermen van de eerst soort $T_k(x)$ worden gedefinieerd op basis van de volgende recursiebetrekking:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Stelling 1 *Op het interval* $[-1, 1]$ *voldoen de Chebyshev veeltermen aan volgende vergelijking:*

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)) \tag{1}$$

Bewijs: We zullen deze stelling aantonen met behulp van volledige inductie.

Basisstap:
voor $k = 0$ geldt: $T_0 = \cos(0 * \arccos(x)) = \cos(0) = 1$
voor $k = 1$ geldt: $T_1 = \cos(\arccos(x)) = x$ op het interval $[-1, 1]$ want de arccos-functie is enkel gedefinieerd op het interval $[-1, 1]$.

Inductiestap:

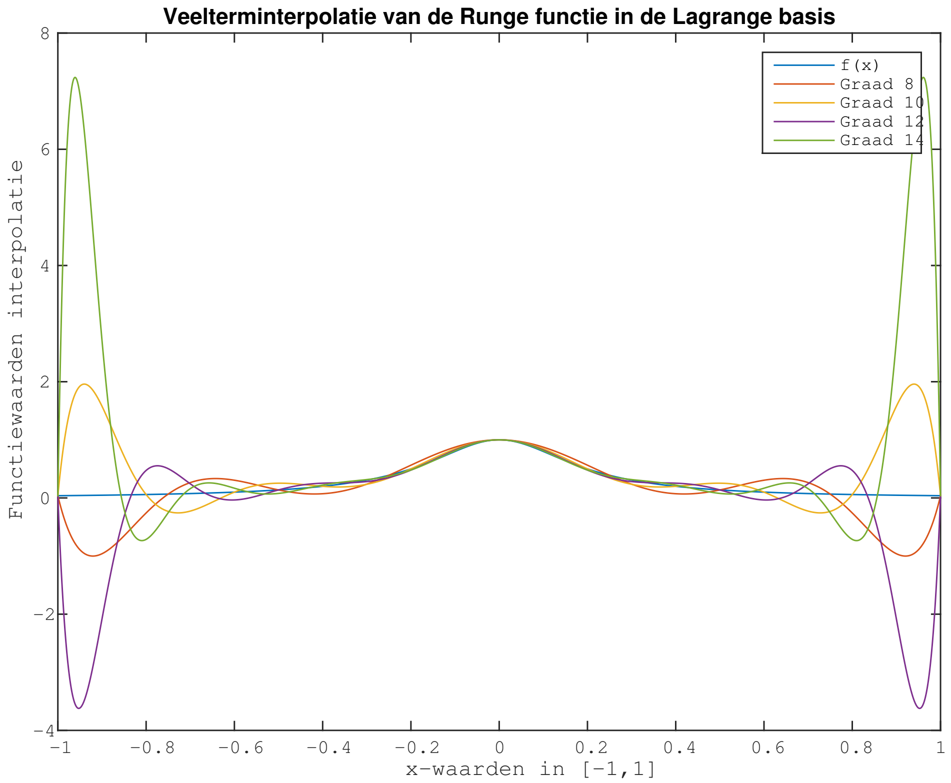
We nemen aan dat voor alle $j \leq n$ geldt: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Nu moet aangetoond worden dat dit ook geldt voor $n + 1$. Volgens de recursiebetrekking voor de Chebyshev veeltermen geldt: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Nu kunnen we de inductiehypothese toepassen, dit geeft: $T_{n+1}(x) = 2x\cos(n \arccos(x)) - \cos((n-1) \arccos(x))$. Met behulp van de som-en verschilformules voor de cosinus kunnen we dit schrijven als: $T_{n+1} = 2x\cos(n \arccos(x)) - \cos(n \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \sin(n \arccos(x)) \sin(\arccos(x))$
$= \cos(n \arccos(x) \cos(\arccos(x)) - \sin(n \arccos(x)) \sin(\arccos(x))$ Hierop kunnen we dan opnieuw de som-en verschil formules voor de cosinus op toepassen en dit geeft: $T_{n+1}(x) = \cos((n+1) \arccos(x))$. De veronderstelling geldt dus ook voor n+1.

Conclusie:

Uit de basisstap, de inductiestap en het principe van volledige inductie volgt het te bewijzen. □

2 Deel 1: Drie veeltermbasissen

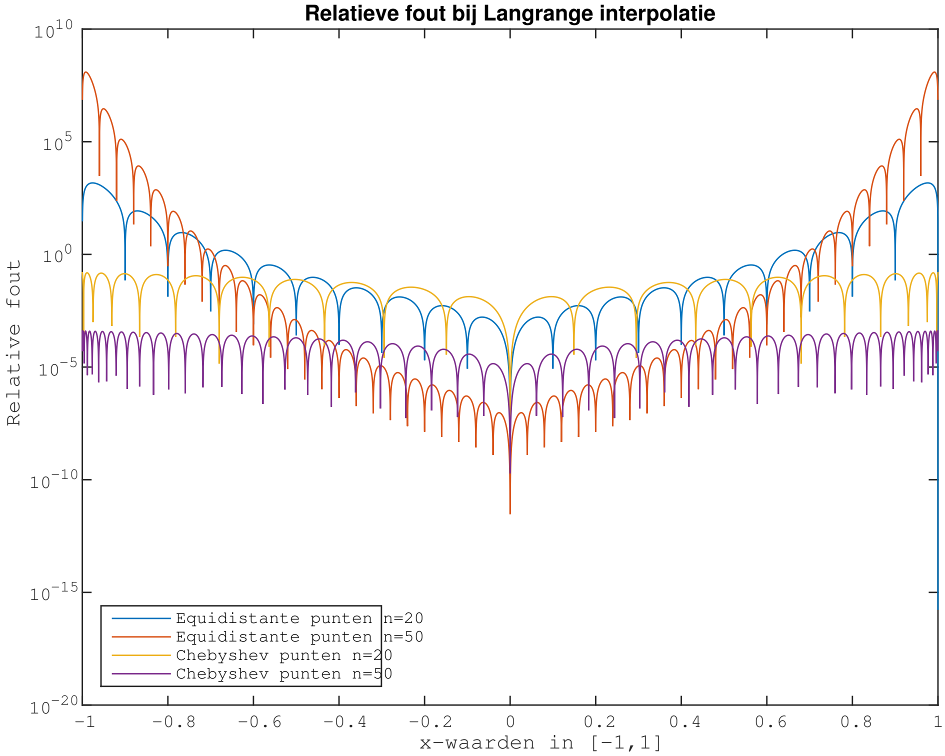
3 Deel 2: Veelterminterpolatie



Figuur 1: Veelterminterpolatie van de Runge functie in de Lagrange basis

Figuur 1 toont dat, bij toenemende graad, de respectievelijke veelterminterpolatie **niet vanzelfsprekend een betere benadering** van de Runge functie oplevert. We zien duidelijk dat de veeltermen aan de uiteinden van het interval [-1,1] **sterkere oscillaties** vertoont. Tussen de interpolatiepunten, zal de Lagrange interpolatie een overschatting maken van de verandering in functiewaarden. Dit gedrag wordt versterkt naarmate men meer interpolatiepunten kiest.

Om dit extreme gedrag in de buurt van de randwaarden te minimaliseren, kan men er voor opteren de **interpolatiepunten anders te verspreiden** over het interval. De Chebyshev punten vormen een horizontale projectie van punten op de goniometrische cirkel en zullen daarom dichter bij elkaar liggen in de buurt van -1 en 1.

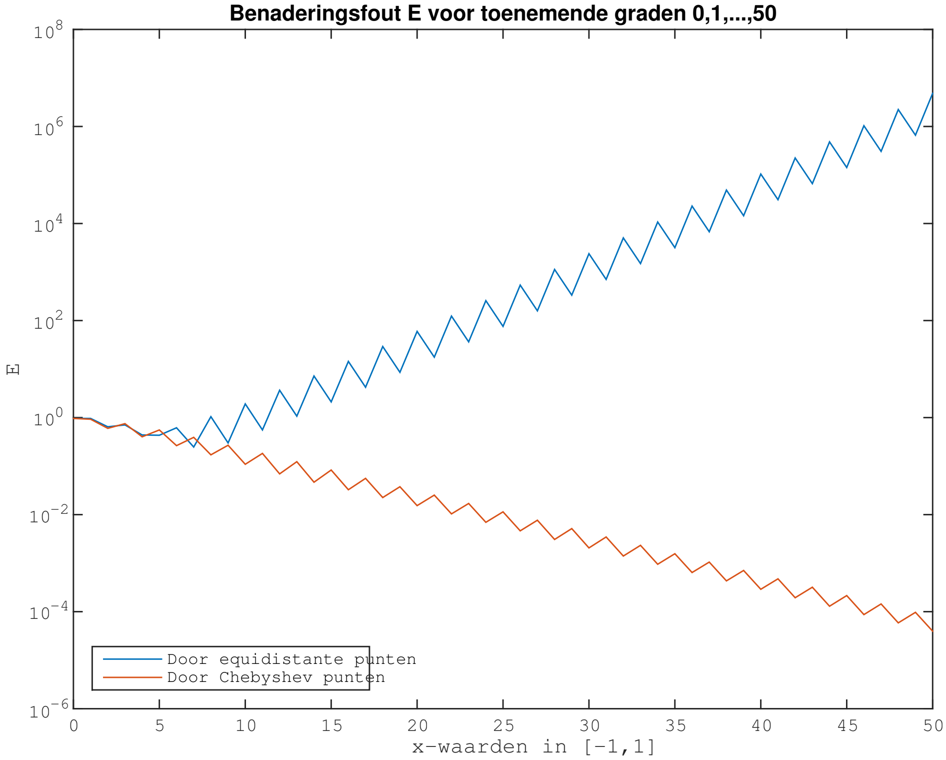


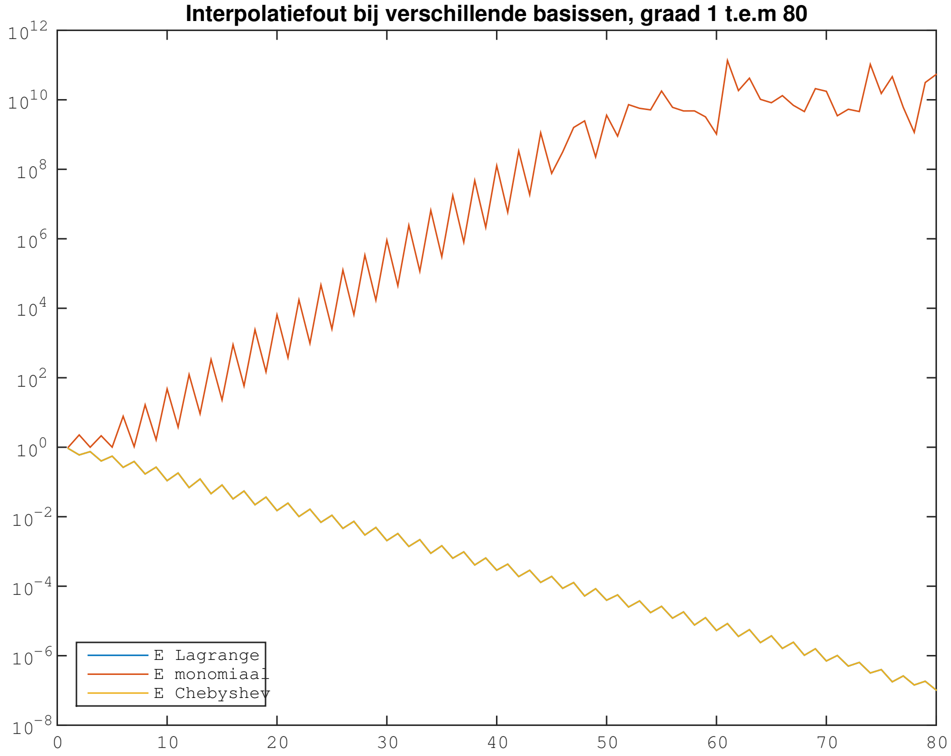
Figuur 2: De relatieve fout bij Lagrange veelterminterpolatie

TODO: bespreek relatieve fout

Dat de veelterminterpolatie door deze Chebyshev punten in het algemeen een **minder grote interpolatiefout** heeft dan bij het gebruik van equidistante punten, is duidelijk te zien in figuur 3.

3.2 Verschillende basissen





Figuur 4: De interpolatiefout E van interpolatie volgens Lagrange, monomiaal en Chebyshev basis

4 Deel 3: Methode van Newton-Raphson