TP 1: Géométrie projective et Coordonnées homogènes

Master TSI, 2024-2025

M.M. Nawaf

Objectif

Dans ce TP, il s'agit de mettre en œuvre les connaissances acquises lors du cours. Les exercices seront réalisés en Python.

1 Coordonnées homogènes

En cours, nous avons vu le concept de coordonnées homogènes, introduit pour permettre une représentation linéaire des équations de projection. Les exercices suivants permettent de manipuler ces coordonnées homogènes.

1.1 Représentation de points et droites en coordonnées homogènes

Dans la première partie de cet exercice, nous nous limiterons au plan 2D. Un point $[x, y]^\top$ dans le plan $2D$ peut être représenté en coordonnées homogènes par un vecteur de trois dimension $[wx, wy, w]^\top$ où $w \neq 0$ est une valeur réelle. Toutes les valeurs de $w \neq 0$ représentent le même point 2D. Diviser les coordonnées d'un point homogène $[x_1, x_2, x_3]^\top$ par sa 3ème coordonnée permet de revenir à son équivalent 2D cartésien $[x_1/x_3, x_2/x_3]\top$.

Considérons une droite dans le plan 2D, dont l'équation est donnée par $ax+by+c = 0$. Cette équation peut s'écrire de manière équivalente par $\mathbf{l}^\top\mathbf{x} = 0$, où $\mathbf{l} = [a, b, c]^\top$ et $\mathbf{x} = [x, y, 1]^\top$.

Notons que $\mathbf{x}$ est la représentation homogène de $[x, y]^\top$ et $\mathbf{l}$ est la représentation homogène de la droite $ax + by + c = 0$. Soulignons que la droite $(ka)x + (kb)y + (kc) = 0$ avec $k \neq 0$ est la même que $ax + by + c = 0$, ainsi la représentation homogène de la droite peut être donnée de manière équivalente par $[a, b, c]^\top$ ou $[ka, kb, kc]^\top$ avec $k \neq 0$.

Donc, un point $\mathbf{x}$ en coordonnées homogènes vérifie l'équation de la droite homogène $\mathbf{l}$ si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\mathbf{l}^\top\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{l}^\top = \mathbf{x}.\mathbf{l} = 0 \tag{1}$$

1.2 Intersection de droites en 2D

Soient $\mathbf{l} = [a, b, c]^\top$ et $\mathbf{l}' = [a', b', c']^\top$, deux droites en 2D. Nous souhaitons trouver leur intersection. En utilisant le vecteur $\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}'$, et la formule [1] $\mathbf{l}.(\mathbf{l} \times \mathbf{l}') = \mathbf{l}'.(\mathbf{l} \times \mathbf{l}') = 0$, nous pouvons vérifier que $\mathbf{l}^\top\mathbf{x} = \mathbf{l}'^\top\mathbf{x} = 0$. Ainsi, si $\mathbf{x}$ est considéré comme représentant un point, alors ce point se trouve à l'intersection des deux droites $\mathbf{l}$ et $\mathbf{l}'$.

1. `https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product`

1.3 La droite qui passe par deux points

Comment peut-on obtenir l'équation homogène d'une droite $\mathbf{l}$ passant par 2 points homogènes $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_2}$? (en utilisant un argument analogue à celui du point d'intersection de deux droites).

1.4 Exercices en Python

— Considérons les 2 droites $x + y - 5 = 0$ et $4x - 5y + 7 = 0$. Quel est le point d'intersection en coordonnées homogènes ? Convertir ce point en coordonnées cartésiennes.

— Considérons maintenant les 2 droites $x + 2y + 1 = 0$ et $3x + 6y - 2 = 0$. Quel est le point d'intersection en coordonnées homogènes ? Convertir ce point en coordonnées cartésiennes. commenter !

— Trouvez la droite qui passe par les points $(1, 3)$ et $(2, 7)$.

2 Transformations Géométriques

Cette partie aborde les bases relatives aux transformations et à la construction des matrices utilisées en vision par ordinateur.

— Soit la transformation affine 3D décrite par la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 0.75 & -0.43 & 0.5 & 5 \\ 0.65 & 0.625 & -0.43 & 2 \\ -0.125 & 0.65 & 0.75 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Créer cette matrice avec Numpy. Soit $W = M[0:3, 0:3]$ et $Q = M[0:3, 3]$. Que représentent W et Q ? Que représente $M[3, :]$?

— Soit la matrice suivante, représentant une transformation affine 3D :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Créer cette matrice. Créer ensuite un vecteur définissant des coordonnées 3D : A = [3, 4, 5]. Appliquer cette transformation spatiale à A. Calculer et comparer la norme de A avant et après la transformation. Pourquoi la norme est préservé (ou non).

— On peut définir les matrices de rotation à l'aide des angles d'Euler. Dans l'espace 3D, il existe 3 rotations, autour des 3 axes X, Y, et Z. On définit ainsi les matrices :

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de rotation globale est alors le produit des 3 matrices.

$$R = R_x(\theta)R_y(\theta)R_z(\theta) \tag{2}$$

Les matrices de translation se définissent ainsi :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices de changement d'échelle se définissent ainsi :

$$S = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Créer une fonction qui prends comme paramétrés 3 angles, 3 valeurs pour la translation, et un facteur d'échelle, et renvoie la matrice de transformation $M = TRS$

— Créer maintenant 4 points définissant un carré sur le plan XY : $A(-0.5, -0.5, 0)$, $B(-0.5, 0.5, 0)$, $C(0.5, -0.5, 0)$, $D(0.5, 0.5, 0)$. Utiliser la fonction crée dans l'étape précédente pour appliquer la transformation $\theta = [45, 0, 45]$, $T = [0.5, 0.5, 2]$, et $S = 2$ aux 4 points. Affichez les points en 3D avant et après la transformation.