



GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT  
GÖTTINGEN

Fakultät für  
Physik  $\Phi$   
 $[q,p]=i\hbar$

## Bachelorarbeit

# Vorhersage raumzeitlicher Dynamiken mittels Reservoir Computing

## Predicting spatio-temporal dynamics using reservoir computing

angefertigt von

**Roland Simon Zimmermann**

aus Recklinghausen

am Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation

**Bearbeitungszeit:** 1. Juni 2017 bis 15. September 2017

**Erstgutachter/in:** Prof. Dr. Ulrich Parlitz

**Zweitgutachter/in:** Prof. Dr. Florentin Wörgötter



# Zusammenfassung

Durch die Verwendung von *Echo State Networks* (ESNs) aus dem Bereich des *Reservoir Computing* konnten in der Vergangenheit Fortschritte bei der Vorhersage zeitlicher Signale erreicht werden. In dieser Arbeit werden sie verwendet, um eine raumzeitliche (chaotische) Dynamik in einem zweidimensionalen System vorherzusagen. Dabei soll eine mögliche Verwendung in der Untersuchung von Herzen betrachtet werden. Dazu wird der Ansatz zuerst auf das *Barkley*- und das *Michell-Schaeffer*-Modell, welche beide zur Beschreibung von Herzdynamiken genutzt werden, angewendet, und mit anderen bestehenden Verfahren verglichen. Anschließend wird das komplexere *Bueno-Orovio-Cherry-Fenton*-Modell betrachtet und die vorherigen Erkenntnisse darauf angewendet. Diese Modelle beschreiben ein sogenanntes *erregbares Medium* mit mehreren Systemvariablen.

In der Arbeit werden drei Fragestellungen betrachtet: Als erstes wird eine Kreuzvorhersage zwischen den Systemvariablen durchgeführt. Anschließend wird die Dynamik aus der Kenntnis einer künstlich verschwommenen Messung durchgeführt. Abschließend werden die Erregungen in ungemessenen Arealen aus der Kenntnis der Randwerte dieser durchgeführt. Während durch die Verwendung von ESNs die ersten Aufgaben gelöst werden können, scheitern sie bei der letzten.

**Stichwörter:** Echo State Network, raumzeitliche Dynamik, Chaos, Herzdynamik, Zeitreihenvorhersage, Kreuzvorhersage

# Abstract

Great progress for the prediction of time series has been made in the past by using *Echo State Networks* (ESNs), which are part of the *reservoir computing*. In this thesis they will be used to predict the spatio-temporal (chaotic) dynamics of a two-dimensional system. Thereby, the possible application for studies of the heart shall be considered. Therefore, at first the ESNs are applied on to the *Barkley*- and the *Michell-Schaeffer*-model, which both can be used to describe the heart's dynamics, and are compared to existing methods. Later, the *Bueno-Orovio-Cherry-Fenton*-model is investigated and the ESN applied another time using the previously obtained insights. These models describe an *excitable medium* with multiple variables.

Three questions will be studied: In the beginning a cross-prediction between the different variables of the systems will be performed. Next, the real dynamics will be predicted by knowing artificial blurred measurements of those. Finally, the excitations of unmeasured regions of the system will be predicted by measuring the boundary values of those. While the ESN approach can solve the first two tasks, it fails the last one.

**Keywords:** Echo State Network, spatiotemporal dynamics, chaos, dynamics of hearts, prediction of time series, cross prediction



# Inhaltsverzeichnis

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 1.        | Symbolen . . . . .                          | vii       |
| 2.        | Abkürzungen . . . . .                       | viii      |
| <b>1.</b> | <b>Einführung</b>                           | <b>1</b>  |
| <b>2.</b> | <b>Theorie</b>                              | <b>3</b>  |
| 2.1.      | Modelle des Herzens . . . . .               | 3         |
| 2.1.1.    | Barkley-Modell . . . . .                    | 3         |
| 2.1.2.    | Mitchell-Schaeffer-Modell . . . . .         | 5         |
| 2.1.3.    | Bueno-Orovio-Cherry-Fenton-Modell . . . . . | 7         |
| 2.2.      | Klassische Methoden . . . . .               | 9         |
| 2.2.1.    | Verzögerungskoordinanten . . . . .          | 9         |
| 2.2.2.    | Nächster Nachbar Vorhersage . . . . .       | 10        |
| 2.2.3.    | Radiale Basisfunktionen . . . . .           | 12        |
| 2.3.      | Neuronale Netzwerke . . . . .               | 14        |
| 2.4.      | Echo State Network . . . . .                | 16        |
| 2.4.1.    | Aufbau . . . . .                            | 16        |
| 2.4.2.    | Theoretischer Hintergrund . . . . .         | 19        |
| 2.4.3.    | Trainingsvorgang . . . . .                  | 21        |
| <b>3.</b> | <b>Anwendungen</b>                          | <b>25</b> |
| 3.1.      | Allgemeines Vorgehen . . . . .              | 26        |
| 3.1.1.    | Echo State Network . . . . .                | 29        |
| 3.1.2.    | Klassische Methoden . . . . .               | 30        |
| 3.2.      | Kreuzvorhersage . . . . .                   | 31        |
| 3.2.1.    | Nächste Nachbar Vorhersage . . . . .        | 31        |
| 3.2.2.    | Radiale Basisfunktionen . . . . .           | 34        |
| 3.2.3.    | Echo State Network . . . . .                | 36        |
| 3.2.4.    | Vergleich . . . . .                         | 39        |

## *Inhaltsverzeichnis*

|  |           |
|--|-----------|
| 3.3. Vorhersage der Dynamik durch das Fernfeld . . . . . | 40        |
| 3.3.1. Nächste Nachbar Vorhersage . . . . .              | 41        |
| 3.3.2. Radiale Basisfunktionen . . . . .                 | 42        |
| 3.3.3. Echo State Network . . . . .                      | 42        |
| 3.3.4. Vergleich . . . . .                               | 43        |
| 3.4. Kreuzvorhersage innerer Dynamiken . . . . .         | 45        |
| 3.4.1. Nächste-Nachbar-Vorhersage . . . . .              | 46        |
| 3.4.2. Radiale Basisfunktionen . . . . .                 | 47        |
| 3.4.3. Echo State Network . . . . .                      | 48        |
| 3.4.4. Vergleich . . . . .                               | 51        |
| <b>4. Fazit</b>  | <b>55</b> |
| <b>5. Danksagungen</b>                                   | <b>57</b> |
| <b>Anhang</b>  | <b>59</b> |
| <b>A. Tabellen</b>                                       | <b>61</b> |
| <b>B. Abbildungen</b>                                    | <b>63</b> |
| <b>C. Mathematische Ausführungen</b>                     | <b>71</b> |
| C.1. Beweisskizze: Stabilitätskriterium . . . . .        | 71        |
| C.2. Laufzeitanalyse . . . . .                           | 72        |
| <b>D. Programmüberblick</b>                              | <b>75</b> |

# Nomenklatur

## 1. Symbole

| Symbol                     | Bedeutung  |
|----------------------------|--|
| $N$                        | Anzahl der Einheiten im Reservoir $\mathbf{W}$                                   |
| $\alpha$                   | Verlustrate des <i>Leaky Integrators</i>   |
| $\lambda$                  | Stärke der <i>Tikhonov Regularisierung</i>                                       |
| $\rho(\mathbf{W})$         | Spektralradius von $\mathbf{W}$  |
| $\sigma_{max}(\mathbf{W})$ | Maximaler Singulärwert von $\mathbf{W}$  |
| $\nu_{max}$                | Maximalwert des hinzugefügten Rauschens $\nu(n)$ für die Erhöhung der Stabilität |
| $\eta$                     | Anzahl der eingehenden Verbindungen für jede interne Einheit                     |
| $\epsilon$                 | Dünnheit der Gewichtsmatrix $\mathbf{W}$   |
| $\sigma$                   | Räumliche Ausdehnung der <i>Messsondentechnik</i>                                |
| $\Delta\sigma$             | Größe der Leerstellen in der <i>Messsondentechnik</i>                            |
| $\sigma_{RBF}$             | Breite der gaußschen Basisfunktion   |
| $\delta$                   | Dimension der <i>Verzögerungskoordinaten</i>                                     |
| $[ \cdot ; \cdot ]$        | Vertikales Aneinanderfügen von Vektoren/Matrizen                                 |
| $\lceil \cdot \rceil$      | Aufrundungsfunktion  |

## 2. Abkürzungen

| Abkürzung   | Bedeutung  |
|-------------|--|
| MSE         | Mittlerer quadratischer Fehler ( <i>mean squared error</i> )                                     |
| NRMSE       | Normalisierter quadratischer Mittelwert der Fehler ( <i>normalized root mean squared error</i> ) |
| ESN         | Echo State Network   |
| NN          | Nächste-Nachbar Vorhersage   |
| RBF         | Radiale Basisfunktionen  |
| BOCF-Modell | Bueno-Orovio-Cherry-Fenton-Modell  |

# 1. Einführung

Im Zuge der fortschreitenden technologischen Weiterentwicklung wurden Wissenschaftler mit neuen Methoden ausgestattet, um Herzen zu untersuchen. So ist es möglich bei sogenannten *in vitro* Experimenten ein Herz außerhalb des eigentlichen Körpers schlagen zu lassen, um sein Verhalten studieren zu können. Dabei wird die Dynamik des Herzmuskels durch unterschiedliche Ionenarten beeinflusst. Diese erzeugen sowohl im Inneren als auch auf der Oberfläche des Herzens ein elektrisches Potential, womit eine Spannung messbar ist. Mit den aktuellen Techniken ist es möglich bei solchen Experimenten die mechanische Kontraktion des Herzen und auch den Spannungsverlauf auf der Oberfläche zu messen. Doch Informationen über die Ströme und Spannungen im Inneren des Herzens sind aufgrund der erschwerten Zugänglichkeit kaum messbar. Ebenso können kaum Ströme einzelner bestimmter Ionenarten vermessen werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird versucht eine Möglichkeit zu finden, um sowohl die im Inneren auftretenden Spannungen, als auch weitere schwer messbare (verborgene) Systemvariablen zu approximieren. Dabei werden Methoden des *Machine Learning* (maschinelles Lernen) verwendet. Dafür wird das *Reservoir Computing* anhand der *Echo State Networks* angewendet und anschließend mit klassischen, bereits länger bestehenden, Methoden verglichen. Dies sind die Approximation mittels der *nächsten Nachbarn* und *radialer Basisfunktionen*.

Da die Anwendung solcher Techniken auf echte Messdaten mit einigen Hindernissen verbunden ist, werden zuerst zwei Modellsysteme betrachtet. Diese Modelle sind in der Vergangenheit entwickelt worden, um eine mathematische Beschreibung der Funktionsweise der Herzen zu geben und ihre Dynamiken zu beschreiben. In dieser Arbeit werden das *Barkley*-, das *Mitchell-Schaeffer* und das *Bueno-Orovio-Cherry-Fenton*-Modell untersucht. Diese Modelle gehören zu der Klasse der *erregbaren Medien* und zeigen raumzeitliches Chaos.

## 1. Einführung

Zu Beginn wird in Kapitel 2 ein theoretischer Überblick gegeben. Dort werden zunächst die drei verwendeten Modelle eingeführt und beschrieben, und im Anschluss die beiden klassischen Methoden vorgestellt. Darauffolgend wird in Kapitel 2.4 die Technik der *Echo State Networks* eingeführt und beschrieben. In Kapitel 3 werden diese Ansätze nun an drei verschiedenen Szenarien getestet für das *Barkley*- und das *Mitchell-Schaeffer*-Modell und verglichen: Zuerst wird in Kapitel 3.2 eine verborgene Variable auf Grundlage einer gemessenen Variable approximiert (Kreuzvorhersage). Dies wird ebenfalls für das *Bueno-Orovio-Cherry-Fenton*-Modell durchgeführt. Danach werden die Ansätze genutzt um die Qualität der gemessenen Spannungsverläufe in 3.3 zu erhöhen. Anschließend wird in Abschnitt 3.2 die Spannung im Inneren eines solchen Systems vorhergesagt.

Die einzelnen Ansätze sind in der Programmiersprache PYTHON 3.5.2 implementiert. Zusätzlich werden die Bibliotheken NUMPY und SCIPY zur Berechnung genutzt. Die graphischen Darstellungen werden mithilfe der Bibliothek MATPLOTLIB angefertigt. Der dadurch angefertigte und dokumentierte Quellcode ist auf GITHUB unter der Adresse [https://github.com/FlashTek/rcp\\_bachelor\\_thesis](https://github.com/FlashTek/rcp_bachelor_thesis) einzusehen. Der schriftlichen Ausführung ist er zudem auf einer CD beigelegt.

## 2. Theorie

Zu Beginn der Arbeit werden zunächst die zwei Modelle zur Beschreibung der Herz-dynamik eingeführt, auf die die verschiedenen Ansätze angewendet werden. Im An-schluss daran werden die theoretischen Grundlagen der klassischen Methoden der *nächsten Nachbar* Vorhersage und der *radialen Basisfunktionen* zusammengefasst. Darauffolgend wird der Ansatz des *Reservoir Computings* eingeführt und anhand der *Echo State Networks* beschrieben.

### 2.1. Modelle des Herzens

Zur Beschreibung der Herz-dynamik existieren verschiedene Modelle. In dieser Ar-beit werden zuerst *Barkley*- und das *Mitchell-Schaeffer*-Modell verwendet, um die Leistungsfähigkeit der ESNs zu überprüfen und einzuordnen. Anschließend werden die gewonnenen Erkenntnisse auf das kompliziertere *Bueno-Orovio-Cherry-Fenton*-Modell angewendet. Im Folgenden sollen die drei Modelle vorgestellt werden.

#### 2.1.1. Barkley-Modell

Das *Barkley*-Modell, welches 1990 von Dwight Barkley vorgestellt wurde, ist ein System aus gekoppelten Reaktionsdiffusionsgleichungen. Dies sind partielle Diffe-rentialgleichungen (*PDE*) zweiter Ordnung, welche einen Diffusionsterm besitzen. Das *Barkley*-Modell beschreibt ein erregbares und oszillierendes Medium. Das Mo-dell besteht aus zwei Variablen  $u(t)$ ,  $v(t)$  die den *PDEs*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D \cdot \nabla^2 u + \frac{1}{\epsilon}(1-u) \left( u - \frac{v+b}{a} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= u^\alpha - v, \end{aligned} \tag{2.1}$$

unterliegen [2]. Dabei ermöglicht  $\alpha = 1$  dem System *periodische* Wellenmuster aus-zubilden und  $\alpha = 3$  bedingt ein *chaotisches* Verhalten. Im Folgenden wird stets der

## 2. Theorie

Fall  $\alpha = 3$  betrachtet. Die Variable  $u(t)$  durchläuft hierbei eine schnellere Dynamik als die hemmende Variable  $v(t)$  [2, 5]. Das Modell kann genutzt werden, um die Dynamik der Herzgewebes zu beschreiben. Dabei nimmt die Variable  $u$  die Rolle einer Membranspannung ein.

Die Parameter  $\epsilon, b$  und  $a$  charakterisieren das Verhalten des Systems und werden in der gesamten folgenden Arbeit nach [2] als

$$a = 0.8,$$

$$b = 0.01,$$

$$\epsilon = 0.02$$

festgelegt.

Zudem wird das Modell in dieser Arbeit in zwei Dimensionen betrachtet, sodass  $u(t, x, y)$  und  $v(t, x, y)$  skalare zeitabhängige Felder sind.

Die *PDEs* werden zunächst zur Simulation des Systems zeitlich mit einem Zeitschritt  $\Delta t$  und örtlich mit einer Gitterkonstante  $\Delta x$  diskretisiert. Zur Beschreibung des Diffusionstermes wird eine Fünf-Punkte Methode

$$\nabla^2 u(t)_{i,j} \simeq \frac{u(t)_{i-1,j} + u(t)_{i+1,j} + u(t)_{i,j-1} + u(t)_{i,j+1} - 4u(t)_{i,j}}{\Delta x^2} =: \Sigma(t)_{i,j} \quad (2.2)$$

nach [2] verwendet. Die tiefergestellten Indizes stehen für den diskretisierten Ort der *x-y-Ebene*. Für kleine Zeitschritte  $\Delta t$  ist ein *explizites Eulerverfahren*

$$\begin{aligned} u(t+1)_{i,j} &= u(t)_{i,j} + \Delta t \cdot \frac{\partial u}{\partial t}, \\ v(t+1)_{i,j} &= v(t)_{i,j} + \Delta t \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.3)$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}_{i,j} &= D \cdot \Sigma(t)_{i,j} + \frac{1}{\epsilon} (1 - u(t)_{i,j}) \left( u(t)_{i,j} - \frac{v(t)_{i,j} + b}{a} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t}_{i,j} &= u(t)_{i,j}^3 - v(t)_{i,j} \end{aligned} \quad (2.4)$$

ausreichend genau. Hierbei werden *Neumann*-Randbedingungen genutzt, sodass die senkrechte Komponente der räumlichen Ableitung an den Rändern des Feldes verschwindet. Im Folgenden wird zudem, in Analogie zu [5], die Diffusionskonstante auf  $D = 1/25$ , die Gitterkonstante auf  $\Delta x = 0.1$  und die Zeitkonstante auf  $\Delta t = 0.01$  ge-

setzt. Die raumzeitliche Dynamik des Systems ist in Form der  $u$ -Variable im Anhang in Abbildung B.1 dargestellt.

### 2.1.2. Mitchell-Schaeffer-Modell

Das *Mitchell-Schaeffer*-Modell ist, ebenso wie das *Barkley*-Modell, ein System aus gekoppelten partiellen Differentialgleichungen. Es wurde vorgeschlagen, um eine phänomenologische Beschreibung der Aktionspotentiale auf der Membran von Herzzellen zu liefern. Das Modell wird durch die Membranspannung  $v(t)$  und eine Kontrollvariable  $h(t)$ , welche das Verhalten der beteiligten Ionenkanäle steuert, definiert. Hierbei wird die Spannung als dimensionslose Größe dargestellt, die Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann [19].

Diese Dynamik wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla \cdot (D \nabla v) + \frac{hv^2(1-v)}{\tau_{in}} - \frac{v}{\tau_{out}}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= \begin{cases} \frac{1-h}{\tau_{open}}, & \text{wenn } v \leq v_{gate} \\ \frac{-h}{\tau_{close}}, & \text{wenn } v \geq v_{gate} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

beschrieben. Dabei stehen die Parameter  $\tau_{in}, \tau_{out}, \tau_{open}, \tau_{close}$  für Zeitkonstanten, welche die Form des Aktionspotentials modifizieren. Die ersten beiden Konstanten beschreiben die Geschwindigkeit, mit der die Ionen durch die Membran strömen, und die letzten beiden die Geschwindigkeit mit der sich die verantwortlichen Ionenkanäle öffnen, beziehungsweise schließen. Zusätzlich stellt die Konstante  $v_{gate}$  eine Grenzspannung dar. Sowohl beim Über- als auch beim Unterschreiten dieser Grenze ändert sich der jeweilige Zustand der Ionenkanäle, indem  $h(t)$  angepasst wird. Im Rahmen dieser Arbeit werden, soweit keine anderen Angaben vorhanden sind, die Parameter durch die Werte aus Tabelle 2.1 gemäß [19] festgesetzt. Dabei ist allerdings  $\tau_{open}$  auf 20 [3, S. 134ff.] reduziert worden, da mit dieser Wahl ein chaotischeres Verhalten, ähnlich zum *Barkley*-Modell, erzeugt wird. Dies erschwert die mögliche Vorhersage der Entwicklung, wodurch eine anspruchsvolle Herausforderung erzeugt wird.

## 2. Theorie

| $\tau_{in}$ | $\tau_{out}$ | $\tau_{open}$ | $\tau_{close}$ | $v_{gate}$ |
|-------------|--------------|---------------|----------------|------------|
| 0.3         | 6.0          | 20            | 150            | 0.13       |

Tab. 2.1.: Verwendete Zeitkonstanten und Grenzspannung  $v_{gate}$  für die Betrachtung des *Mitchell-Schaeffer*-Modells

Der erste Summand der zeitlichen Ableitung von  $v$  beschreibt ein Diffusionsverhalten, welches durch die Diffusionskonstante  $D$  beschrieben wird [22].

Die meisten, auf zellulärer Ebene aufgestellten, Gleichungen haben eine hohe Komplexität. Hierdurch werden numerische Berechnungen sehr aufwendig. In der Herleitung dieses Modells sind einige vereinfachende Annahmen eingeflossen, wodurch die Komplexität und somit auch der numerische Aufwand reduziert worden sind. Trotz des phänomenologischen Charakters des *Mitchell-Schaeffer*-Modells besitzen die Parameter eine physiologische Interpretation. Zudem ist es in der Lage wichtige Eigenschaften des Aktionspotentials im Vergleich zu anderen Modellen gut wiederzugeben [22].

Analog zu der Betrachtung des *Barkley*-Modells sind für die numerische Betrachtung die beiden *PDEs* erneut in einem expliziten Verfahren mittels

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}_{i,j} &= D \cdot \Sigma(t)_{i,j} + \frac{h(t)_{i,j} v(t)_{i,j}^2 (1 - v(t)_{i,j})}{\tau_{in}} - \frac{v(t)_{i,j}}{\tau_{out}} \\ \frac{\partial h}{\partial t}_{i,j} &= \begin{cases} \frac{1-h(t)_{i,j}}{\tau_{open}}, & \text{wenn } v(t)_{i,j} \leq v_{gate} \\ \frac{-h(t)_{i,j}}{\tau_{close}}, & \text{wenn } v(t)_{i,j} \geq v_{gate} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

diskretisiert worden. Es sind die gleichen Randbedingungen wie zuvor genutzt worden. Dabei drückt  $\Sigma(t)_{i,j}$  analog zu der obigen Betrachtung die Diskretisierung des Laplace-Operators angewandt auf  $v(t)$  aus. Im Folgenden werden die Integrationskonstanten  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  und die Diffusionskonstante  $D = 5 \times 10^{-3}$  genutzt. Die raumzeitliche Dynamik des Systems ist in Form der  $v$ -Variable ebenfalls im Anhang in Abbildung B.2 dargestellt.

### 2.1.3. Bueno-Orovio-Cherry-Fenton-Modell

Ebenso wie die beiden vorherigen Modelle ist das *Bueno-Orovio-Cherry-Fenton-Modell (BOCF-Modell)* ebenso ein System aus gekoppelten partiellen Differentialgleichungen. Es ist ein sogenanntes *minimales Modell* zur Beschreibung der Aktionspotentiale auf der Membran von Herzzellen. Dies bedeutet, dass nicht jeder einzelne Ionenstrom modelliert wird, sondern diese in drei verschiedene Gruppen unterteilt und diese dann zusammen modelliert werden: Dabei werden sie in *schnell hineinströmende*, *langsam hineinströmende* und *ausströmende* Ionen unterteilt. Dieses Vorgehen reduziert die Anzahl der benötigten Variablen des Systems sehr stark: Während andere Modelle auf Ionenebene zur Beschreibung der Aktionspotentiale viele Variablen besitzen, wie beispielsweise das *Tuscher-Noble-Noble-Panfilov-Modell (TNPP-Modell)* mit 17 Variablen, benötigt das *BOCF-Modell* nur 4 Variablen - dies senkt den benötigten Rechenaufwand. Gleichzeitig beinhaltet es 28 Konstanten, welche die Form der Dynamik charakterisieren. Dadurch ist zum einen eine Anpassung an verschiedene experimentelle Messergebnisse möglich, zum anderen können auch die Ergebnisse anderer bestehender Modelle reproduziert werden. Hierdurch kommt die Bezeichnung des *minimalen Modells* zustande [1].

Die Dynamik wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D\nabla^2 u + -(J_{si} + J_{fi} + J_{so}) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= (1 - H(u - \theta_w))((v_\infty - v)/\tau_v^- - H(u - \theta_v)v/\tau_v^+) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= (1 - H(u - \theta_w))((v_\infty - w)/\tau_v^- - H(u - \theta_w)v/\tau_w^+) \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= ((1 + \tanh(k_s(u - u_s))/2 - s)/\tau_s \end{aligned} \tag{2.7}$$

beschrieben. Die drei Ströme  $J_{si}$ ,  $J_{fi}$  und  $J_{so}$  folgen den Gleichungen

$$\begin{aligned} J_{si} &= -H(u - \theta_w)ws/\tau_{si} \\ J_{fi} &= -vH(u - \theta_v)(u - \theta_v)(u_u - u)/\tau_{fi} \\ J_{so} &= (u - u_o)(1 - H(u - \theta_w))/\tau_o + H(u - \theta_w)/\tau_{so}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dabei steht  $H(x)$  für die *Heaviside-Distribution*. Zusätzlich werden sieben span-

## 2. Theorie

nungsabhängige Konstanten

$$\begin{aligned}
\tau_v^- &= (1 - H(u - \theta_v^-))\tau_{v1}^- + H(u - \theta_v^-)\tau_{v2}^- \\
\tau_w^- &= tau_{w1}^- + (\tau_{w2}^- - \tau_{w1}^-)(1 + \tanh(k_w^-(u - t_w^-)))/2 \\
\tau_{so}^- &= tau_{so1}^- + (\tau_{so2}^- - \tau_{so1}^-)(1 + \tanh(k_{so}^-(u - t_{so})))/2 \\
\tau_s^- &= (1 - H(u - \theta_w^-))\tau_{s1}^- + H(u - \theta_w^-)\tau_{s2}^- \\
\tau_o^- &= (1 - H(u - \theta_o^-))\tau_{o1}^- + H(u - \theta_o^-)\tau_{o2}^-
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$v_\infty = \begin{cases} 1, & \text{wenn } u \leq \theta_v^- \\ 0, & \text{wenn } u \geq \theta_v^- \end{cases}$$

$$w_\infty = (1 - H(u - \theta_o^-))(1 - u/\tau_{w\infty}) + H(u - \theta_o^-)w_\infty^*$$

eingeführt. In diesem Modell beschreibt die Variable  $u(t)$  die Membranspannung. Des Weiteren wird das Modell durch 28 Konstanten charakterisiert. In dieser Arbeit wird der Satz von Konstanten genutzt, welcher das *Tuscher-Noble-Noble-Panfilov*-Modell reproduziert. Die Konstanten sind in A.1 zu finden. Sie sind ausgewählt worden, weil mit ihnen eine chaotische Dynamik beobachteten werden kann [1].

Die Differentialgleichungen sind erneut, wie zuvor auch im *Barkley*- und im *Mitchell-Schaeffer*-Modell, diskretisiert und die gleichen Randbedingungen wie zuvor genutzt worden. Im Folgenden werden die Integrationskonstanten  $\Delta x = 1.0$ ,  $\Delta t = 0.1$  und die Diffusionskonstante  $D = 2 \times 10^{-1}$  genutzt. Die raumzeitliche Dynamik des Systems ist in Form der  $u$ -Variable ebenfalls im Anhang in Abbildung B.3 dargestellt.

## 2.2. Klassische Methoden

Im Folgenden werden nun die bisherigen Ansätze auf dem Gebiet der (raum)zeitlichen Vorhersage vorgestellt. Hierzu wird zuerst die Technik der *Verzögerungskoordinaten* eingeführt, welche die Grundlage der Methoden der *Nächsten-Nachbar*-Vorhersage und der *radialen Basisfunktionen* bildet.

### 2.2.1. Verzögerungskoordinanten

Die *Verzögerungskoordinaten* (Delay Coordinates) können benutzt werden um Zeitreihen zu analysieren und den Phasenraum des ursprünglichen Systems zu rekonstruieren. Hierbei wird ein Signal  $s(t)$  an diskreten Zeitpunkten betrachtet, sodass sich das diskrete Signal  $s_n = s(n\Delta t)$  ergibt. Eine solche Rekonstruktion erzeugt hieraus ein Signal, in welchem die Informationen  $\delta$  vorheriger Zeitpunkte mit dem Abstand  $\tau$  enthalten sind. Somit wird eine höherdimensionale Zeitreihe  $\vec{z}_n \in \mathbf{R}^\delta$  durch

$$\vec{z}_n = (s_{n-(\delta-1)\tau}, s_{n-(\delta-2)\tau}, \dots, s_n) \quad (2.10)$$

konstruiert [13, 35 ff.]. Bei einer ausreichend hohen Wahl der Rekonstruktionsdimension  $m$  ist es hiermit möglich den Phasenraum des Attraktors zu rekonstruieren. Für die Wahl der Verzögerungszeit  $\tau$  gibt es keine rigorose mathematische Definition oder Beschreibung, sondern es existieren verschiedene Ansätze zur Ermittlung des optimalen Wertes. Ein populärer Ansatz, welcher in dieser Arbeit verwendet wird, besteht darin,  $\tau$  durch das Auffinden der ersten Nullstelle der Autokorrelationsfunktion

$$AUC(\tau) = \sum_l^{N-\tau} (s_l - \bar{s})(s_{l+\tau} - \bar{s}) \quad (2.11)$$

zu ermitteln. Dies lässt sich dadurch motivieren, dass durch das Hinzunehmen von Signalen der Zeitreihe, die um diesen Wert  $\tau$  verschoben sind, am meisten neue Information hinzugefügt wird, da die Selbstähnlichkeit des Signals am geringsten ist [13, 30 ff.]. Die so konstruierte höherdimensionale Zeitreihe beinhaltet somit also nicht nur Informationen über den aktuellen Zustand des Systems, sondern auch über die unmittelbare Vergangenheit. Dadurch können diese rekonstruierten Datenpunkte auch genutzt werden, um das Verhalten dynamischer Systeme vorherzusagen. Hierfür werden im Folgenden zwei Methoden eingeführt.

### 2.2.2. Nächster Nachbar Vorhersage

Die erste Methode, um mittels der zuvor konstruierten höherdimensionalen Zeitreihen Vorhersagen zu treffen, ist die *Nächste-Nachbar-Vorhersage* (im Folgenden als NN-Ansatz abgekürzt). Das allgemeine Ziel des NN-Ansatzes besteht darin den funktionalen Zusammenhang  $F : X \rightarrow Y$  zu finden, welcher Daten der Menge  $X \in \mathbb{R}^n$  auf Elemente aus  $Y \in \mathbb{R}^m$  eindeutig abbildet. Hierfür wird angenommen, dass die Funktion  $F$  lokal stetig ist. Zudem werden hierfür Daten benötigt, anhand derer der Zusammenhang erlernt werden kann. Die Anzahl dieser Trainingsdaten wird im Folgenden mit  $N$  bezeichnet.

Zu Beginn werden Paare  $(\vec{x}, \vec{y}) \in X \times Y$  aus einem *Trainingsdatensatz* gebildet und eine Suchstruktur über die  $x$ -Werte gebildet. Nun kann diese Struktur genutzt werden, um für ein gegebenes  $\vec{x}$  den wahrscheinlichsten Wert  $\vec{y}$  zu suchen. Hierfür werden, unter der Annahme der lokalen Stetigkeit, die Datenpunkte  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$  aus der zuvor angelegten Suchstruktur ausgewählt, welche den geringsten Abstand  $d(\vec{x}, \vec{x}_i)$  zu  $\vec{x}$  besitzen.

Diesen  $k$  Datenpunkten ist zuvor jeweils ein eindeutiger Wert  $\vec{y}_i$  zugeordnet worden. Damit kann nun eine Approximation für den zu  $\vec{x}$  gehörigen Wert  $\vec{y}$  erstellt werden, indem beispielsweise ein gewichteter Mittelwert der  $\vec{y}_i$  genutzt wird. Hierzu kann jedem der  $k$  nächsten Nachbarn  $(\vec{x}_i, \vec{y}_i)$  ein Gewicht  $w_i(\vec{x})$  nach

$$w_i(\vec{x}) = \frac{v_i}{\sum_j v_j}, \text{ mit } v_i = \frac{1}{\|\vec{x}_i - \vec{x}\|}$$

zugeordnet werden. Diese Definition erfüllt  $\sum_i w_i = 1$  und ordnen zudem fernen Nachbarn ein geringeres Gewicht zu. Die dabei auftretende Norm  $\|\cdot\|$  wird im Folgenden als euklidisch angenommen, sofern keine weiteren Angaben gemacht werden. Somit ergibt sich für die gewichtete Vorhersage

$$F(\vec{x}) = \vec{y} = \sum_i^k \vec{y}_i \left( \sum_j \frac{\|\vec{x}_i - \vec{x}\|}{\|\vec{x}_j - \vec{x}\|} \right)^{-1}. \quad (2.12)$$

Der Schlüssel für die Bewältigung einer solchen Aufgabe liegt hauptsächlich in der Art und Weise, wie die  $k$  nächsten Nachbarn gesucht werden. Hierbei wird im Folgenden ein naiver Ansatz ebenso wie der Algorithmus K-D-TREE betrachtet. Bei dem naiven Ansatz (*brute force*) werden die nächsten Nachbarn aus dem unsortierten Trainingsdatensatz durch pures Ausprobieren aller möglichen Punkte ermittelt.

### k-d-tree

Ein K-D-TREE ist eine Spezialform eines Binärbaumes, und eine oftmals genutzte Methode um Suchvorgänge in Datenstrukturen durchzuführen. Eine Darstellung ist in Abbildung 2.1 zu finden. Das zugrundeliegende Prinzip eines solchen Baumes ist, dass wenn der Punkt  $P_1$  weit entfernt von  $P_2$  liegt, aber  $P_3$  nahe an  $P_2$  liegt, so folgt daraus, dass  $P_1$  und  $P_3$  weit voneinander entfernt liegen müssen. Durch diese Argumentation muss bei einem solchem Suchvorgang die Distanz zweier Punkte seltener berechnet werden, wodurch Rechenzeit eingespart werden kann.

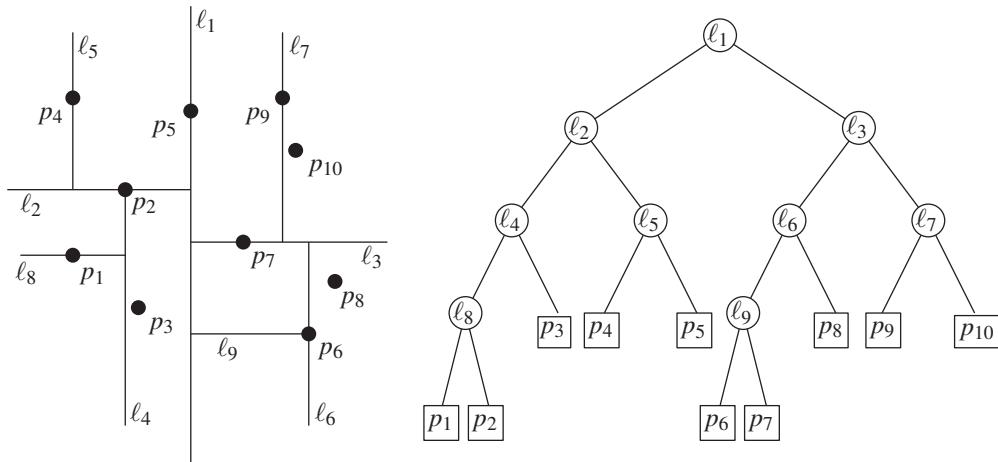


Abb. 2.1.: Exemplarische Darstellung eines K-D-TREES für  $d = 2$  Dimensionen. In der linken Hälfte ist die graphische Interpretation der Aufteilung und in der rechten der Aufbau des entstehenden Baumes zu finden [8]. Der in der  $i$ -ten Iteration bestimmte Median ist als  $l_i$  eingetragen. An jeder Astgabelung werden die Elemente, falls sie in einer ausgewählten Dimension kleiner als der Median  $l_i$  sind, in den linken und ansonsten in den rechten Zweig einsortiert.

Der Suchvorgang besteht aus zwei Phasen. Zuerst wird die Aufbauphase des Baumes durchgeführt, bei der die Trainingsdaten eingesortiert werden und damit ein Suchindex erzeugt wird. Anschließend folgt die Suchphase, bei der der zuvor erstellte Suchindex nach dem nächsten Nachbarn durchsucht wird.

Add search path example to the graph?

In der Aufbauphase wird zuerst eine Dimension ausgewählt und der Median  $l_i$  der Daten in dieser Dimension bestimmt. Dieser Wert bildet eine Trennlinie, anhand

## 2. Theorie

derer die Punkte in zwei Mengen unterteilt werden, die entweder nur größere oder nur kleinere Elemente bezogen auf jene Dimension beinhalten. Die beiden Mengen bilden die ersten Äste des Baumes. Nun wird dieser Schritt rekursiv auf alle Äste angewendet und die hierbei zum Vergleich genutzte Dimension iteriert [8]. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis eine bestimmte maximale Anzahl  $N_{max}$  an Knotenpunkten pro Ast erreicht wird. Ab dieser unteren Grenze wird das Erstellen des Binärbaumes beendet, da nun der Zugriff auf die verschiedenen Elemente und das Aufteilen in neue Äste mehr Zeit benötigt, als das Berechnen der Abstände zwischen den verbleibenden  $N_{max}$  Knoten und dem Suchpunkt. Eine beispielhafte Darstellung des Verfahrens ist in Abbildung 2.1 vorhanden.

Die Suchphase wird nun wieder rekursiv durchgeführt. Hierbei werden wieder iterierend die verschiedenen Dimensionen verglichen, und sich somit immer weiter im Suchbaum nach unten ein Weg gebahnt [8]. In der untersten Ebene, also wenn nur noch eine Suche zwischen maximal  $N_{max}$  Elementen durchgeführt werden muss, wird nun die *brute force*-Suche genutzt. In dieser Arbeit ist für alle Anwendungen diese Schwelle auf  $N_{max} = 40$  gesetzt worden [21].

Die Methode des K-D-TREES zeichnet sich durch eine Laufzeit aus, welche sich für einen einzelnen Suchvorgang wie  $\mathcal{O}(\log(N))$  verhält [4]. Wird die Vorhersage für  $m$  Datenpunkte durchgeführt, ergibt sich die Laufzeit zu  $\mathcal{O}(m \log(N))$ . Diese ist geringer, als die Laufzeit eines naiven Suchvorgangs, welche sich wie  $\mathcal{O}(mN)$  verhält. Zusätzlich muss bei der Verwendung des K-D-TREES auch noch die Baumstruktur aufgebaut werden. Hierfür besteht eine ungefähre Laufzeit  $\mathcal{O}(N \log(N))$ . Außerdem besitzt die Laufzeit des K-D-TREES auch eine Abhängigkeit von der Dimensionalität  $d$ . Es hat sich gezeigt, dass wenn  $d$  hinreichend groß ist, die Vorteile geringer werden, und für hohe Dimensionalitäten ( $\approx d > 20$ ) die Suche ineffizient abläuft [21].

### 2.2.3. Radiale Basisfunktionen

Eine weitere Methode um einen funktionalen Zusammenhang  $F : X \rightarrow Y$  zu finden, welcher Daten der Menge  $X \in \mathbb{R}^n$  auf Elemente aus  $Y \in \mathbb{R}^m$  eindeutig abbildet, bieten die *radialen Basisfunktionen* (im Folgenden als RBF abgekürzt) an. Auch dafür werden Daten benötigt, anhand derer der Zusammenhang erlernt werden kann. Diese Trainingsdaten sollen im Folgenden aus  $N$  Datensätzen bestehen.

Bei diesem Ansatz wird die gesuchte Funktion  $F$  als Linearkombination aus vielen radialen Funktionen approximiert. Dafür werden  $l$  Elemente  $\{\vec{x}_i\}, i = 1, \dots, l$  aus den Trainingsdaten ausgewählt und diese als so genannte *Zentren*  $\{\vec{z}_i\}$  genutzt. Hiermit lassen sich die Funktionen als  $\phi_i(\vec{x}) = \phi(\|\vec{x} - \vec{z}_i\|), i = 1, \dots, l$  darstellen [7]. Eine mögliche Wahl der Basisfunktionen sind zum Beispiel Gaußfunktionen

$$\phi_i(\vec{x}) = \exp\left(-\frac{\|\vec{x} - \vec{z}_i\|}{\sigma_{RBF,i}^2}\right),$$

wobei  $\sigma_{RBF,i}$  für die Breite der  $i$ -ten Gaußfunktion steht. Die Linearkombination führt zu dem Ansatz

$$\vec{y} = F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^l \vec{\omega}_i \phi_i(\|\vec{x} - \vec{z}_i\|). \quad (2.13)$$

Die  $\vec{\omega}_i \in \mathbb{R}^m$  stehen hier für die *Gewichtsvektoren* der einzelnen Basisfunktionen  $\phi_i$  im Rahmen der Linearkombination.

Das Ziel besteht jetzt darin die Gewichtsvektoren  $\omega_i$  approximativ zu bestimmen. Dafür werden zunächst drei Matrizen definiert, durch die das Problem ausgedrückt werden kann.

Die Matrix  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times m}$  repräsentiert die Funktionswerte der Abbildung und beinhaltet als Zeilen die  $N$  verschiedenen Funktionswerte  $\vec{y}_i$  der Trainingsdaten

$$\mathbf{Y} := \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{N1} & \dots & y_{Nm} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Die Matrix  $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{l \times m}$  beinhaltet dagegen als Zeilen die Gewichtsvektoren

$$\mathbf{\Omega} := \begin{pmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{l1} & \dots & \omega_{lm} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Die dritte Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times m}$  repräsentiert Anwendungen der radialen Basisfunktio-

## 2. Theorie

nen auf die Trainingsdaten

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{Nm} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

wobei die einzelnen Elemente als  $A_{ij} := \phi(||\vec{x}_i - \vec{y}_j||)$  definiert sind.

Das Problem lässt sich somit durch

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (2.17)$$

ausdrücken [7]. Da die Matrizen  $\mathbf{Y}$  und  $\mathbf{A}$  konstruiert sind, besteht die Aufgabe lediglich darin die Matrix  $\boldsymbol{\Omega}$  der Gewichte zu ermitteln. Der naheliegende Ansatz, das direkte ermitteln der Inversen  $\mathbf{A}^{-1}$  stellt sich dafür aus ungeeignet heraus, da das Problem meistens überkonditioniert ist und die Matrix nicht quadratisch ist, wodurch keine Inverse gefunden werden kann. Stattdessen ist es geschickter, das Problem als eine lineare Optimierungsaufgabe zu betrachten, bei der der Fehler  $||\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_i - \vec{y}_i||^2$  minimiert werden soll.

Durch die Verwendung der *Moore-Penrose Pseudoinversen*  $\mathbf{A}'$  wird zugleich gewährleistet, dass die Lösung ausgewählt wird, die zudem auch die kleinsten Gewichte besitzt. Dies hilft den Effekt des *Overfittings* zu verringern [7]. Das *Overfitting* beschreibt den Effekt, dass das Vorhersage-Modell zu stark auf die Trainingsdaten angepasst ist, und das Verhalten nicht stark genug generalisiert. Dies ist an einem (deutlich) höheren Test- als Trainingsfehler zu erkennen.

Mit diesem Ansatz ergibt sich die Lösung zu

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{Y}. \quad (2.18)$$

Um nun Funktionswerte vorherzusagen, wird der oben eingeführte Zusammenhang 2.13 zwischen den zuvor ermittelten Gewichten und der Zielvariable  $\vec{y}$  genutzt.

## 2.3. Neuronale Netzwerke

In den letzten Jahren hat die Technik der Neuronalen Netzwerke (Neural Networks) erneut stark an Popularität gewonnen. Dies liegt zum einen an der gestiegenen ver-

fügbaren Rechenleistung und zum anderen an der Entwicklung hierfür notwendiger Algorithmen.

Es ist möglich diese Netze in zwei große Gruppen aufzuteilen: die der *Feed Forward Neural Networks* und die der *Recurrent Neural Networks*, welche im Folgenden als FFNN respektive RNN bezeichnet werden.

Ein FFNN besteht aus mehreren Ebenen, welche jeweils aus verschiedenen nicht-linearen Einheiten zusammengesetzt sind. Die erste dieser Ebenen wird zur Eingabe und die letzte zur Ausgabe eines Signals genutzt. Eine schematische Darstellung ist im linken Teil der Abbildung 2.2 zu finden. Die Einheiten zweier benachbarter Ebenen sind mit individuellen Gewichten vollständig in Richtung der Ausgabe verbunden. Dies bedeutet, dass jede Einheit  $x_i^n$  sein Signal an alle Einheiten der folgenden Ebene  $x_j^{n+1}$  mit einem individuellen Gewicht  $w_{i \rightarrow j}^n$  weitergibt. Zwischen den Einheiten innerhalb einer Ebene bestehen keinerlei Verbindungen.

Damit ein solches Netzwerk Vorhersagen treffen kann, müssen die Gewichte in einem Trainingsvorgang angepasst werden. Dies wird durch den *Backpropagation*-Algorithmus erreicht. Dabei wird eine Kostenfunktion  $L$  minimiert. Dies geschieht, indem die Gewichte des Netzwerkes immer in die entgegengesetzte Richtung des Gradienten  $\nabla_w L$  angepasst werden. Dadurch wird versucht ein Minimum der zu  $L$  gehörigen Kostenlandschaft zu erreichen [6, S. 225-290]. Solche FFNN eignen sich besonders gut zur Lösung von Klassifizierungsproblemen.

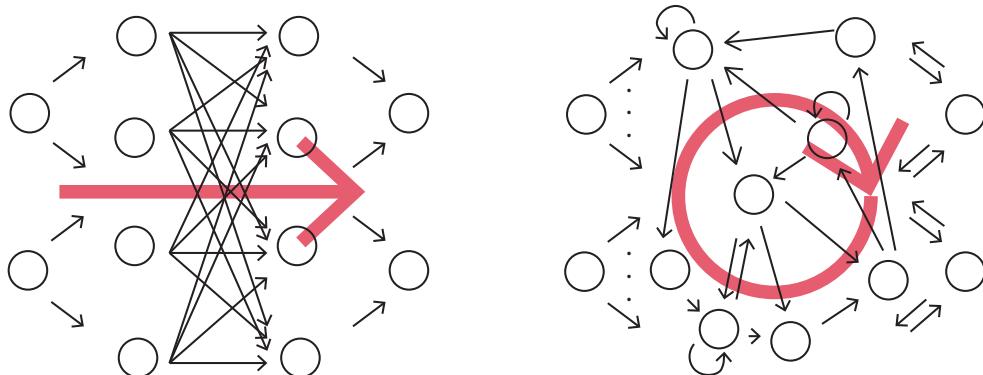


Abb. 2.2.: Schematische Darstellung eines FFNN mit vier Ebenen (links) und eines RNN (rechts) mit ihren jeweiligen Verbindungen und der Eingangs- und Ausgangsebene. Der Informationsfluss ist in rot eingetragen (nach [10]).

Ein RNN hat einen ähnlichen Aufbau, doch hier können alle Einheiten an alle

## 2. Theorie

anderen Einheiten Signale weitergeben und auch von diesen erhalten. Die schematische Struktur ist im rechten Teil der Abbildung 2.2 dargestellt. Hierdurch erhält das Netzwerk eine Art Gedächtnisfunktion, wodurch temporale Strukturen verarbeitet und berücksichtigt werden können. Dies kann die Vorhersage in bestimmten Anwendungsbeispielen wie zum Beispiel der Text- und Sprachanalyse verbessern. Ein Nachteil ist, dass zum Trainieren, aufgrund der rekurrenten Struktur, nicht mehr der einfachere *Backpropagation*-Algorithmus genutzt werden kann, sondern eine für RNNs abgewandelte Form genutzt werden muss. Für den prominentesten Algorithmus werden die verschiedenen Zustände, die das RNN im Laufe der Signal-Propagation annimmt, nacheinander betrachtet und auf diese zeitliche Entwicklung anschließend der *Backpropagation*-Algorithmus angewendet. Diese Methode ist unter dem Namen *Backpropagation through Time* (BTT) bekannt. Sie ist zum einen rechenaufwendiger und zum anderen auch instabiler, da das Verschwinden und auch das Explodieren des Gradienten der Kostenfunktion deutlich wahrscheinlicher als bei der gewöhnlichen *Backpropagation* ist [10, 20]. Da bei diesem Ansatz die Gewichte ebenfalls anhand des Gradienten der Kostenfunktion angepasst werden, wird der Algorithmus instabil, falls die Gradienten explodieren, oder ineffizient, wenn sie verschwinden.

## 2.4. Echo State Network

Um die zuvor erwähnten Probleme der RNN zu umgehen, wurden als mögliche Lösung die ECHO STATE NETWORKS von H. Jäger vorgeschlagen [9]. Etwa zeitgleich wurde von W. Maas das Modell der *Liquid State Machines* entwickelt. In diesem Modell steht der biologische Hintergrund im Fokus, doch sind die Ergebnisse denen der *Echo State Networks* (ESN) sehr ähnlich [18].

### 2.4.1. Aufbau

Ein ESN ist eine Spezialform eines RNNs. Hierbei wird eine auf dem ersten Blick eigenartige Entscheidung getroffen: Während des gesamten Trainingsvorganges werden die Verbindungen der einzelnen Einheiten größtenteils nicht verändert. Es wird versucht durch das *Echo* der vorherigen Signale, welche noch im Netzwerk gespeichert sind, diese Signale zu rekonstruieren - hieraus ergibt sich auch der Name [15]. Im Folgenden wird der Aufbau und anschließend die Funktionsweise eines solchen

Netzwerkes nach [12] beschrieben.

Allgemein bildet das Netzwerk  $E$  ein zeitliches Signal  $\vec{u}(n) \in \mathbb{R}^{N_u}$  auf eine zeitlich variable Ausgabe  $\vec{y}(n) \in \mathbb{R}^{N_y}$  für die Zeiten  $n = 1, \dots, T$  ab. Zudem besitzt das System ein sogenanntes *Reservoir* aus  $N$  nicht-linearen Einheiten. Der innere Zustand des Netzwerkes wird durch diese Einheiten beschrieben und als  $s(n) \in \mathbb{R}^N$  bezeichnet.

Die Verbindungen der inneren Einheiten untereinander werden durch die Gewichtsmatrix  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  beschrieben. Das Eingangssignal wird zusammen mit einem *Bias*  $b_{in} \in \mathbb{R}$  durch die Matrix  $\mathbf{W}_{in} \in \mathbb{R}^{N \times (N_u+1)}$  auf die inneren Einheiten weitergeleitet. Eine Rückkopplung zwischen Ausgabesignal und internen Einheiten wird durch die Matrix  $\mathbf{W}_{fb} \in \mathbb{R}^{N \times N_y}$  ermöglicht. In Abbildung 2.3 ist die vollständige Struktur eines ESNs mit den Matrizen  $\mathbf{W}_{in}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{W}_{fb}$  und  $\mathbf{W}_{out}$  dargestellt.

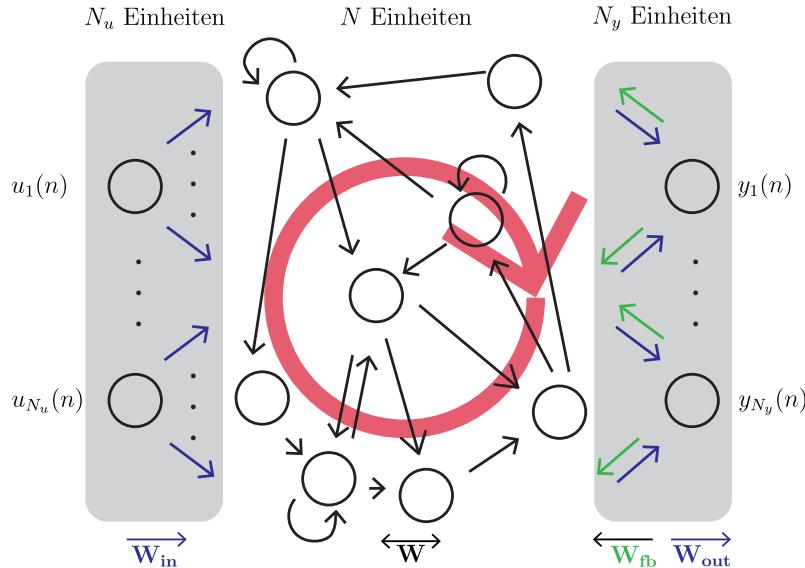


Abb. 2.3.: Schematische Darstellung eines ESN. Von links nach rechts durchläuft das Eingangssignal  $u(n)$  erst  $N_u$  Eingangseinheiten, danach ein Reservoir mit  $N$  Einheiten, bis schließlich die Ausgabe  $y(n)$  mittels  $N_y$  Ausgabeeinheiten gebildet wird. (nach [10, 17]).

Die zeitliche Entwicklung der inneren Zustände kann, motiviert durch ein gewöhnliches Neuron, durch die Zustandsgleichung

$$\vec{s}(n) = f_{in} (\mathbf{W}_{in}[b_{in}; \vec{u}(n)] + \mathbf{W}\vec{s}(n-1)). \quad (2.19)$$

## 2. Theorie

bestimmt werden. Dabei ist  $f_{in}$  eine beliebige, meistens *sigmoid*-förmige, Transferfunktion, wie  $\tanh(x)$  oder  $(1 + e^{-x})^{-1}$  und  $[\cdot; \cdot]$  das vertikale Aneinanderfügen von Vektoren beziehungsweise Matrizen. In dieser Arbeit wird die Transferfunktion  $f_{in} = \tanh(\cdot)$  genutzt.

Bessere Ergebnisse lassen sich durch das Abändern der Zustandsgleichung zu

$$\vec{s}(n) = (1 - \alpha) \cdot \vec{s}(n - 1) + \alpha \cdot f_{in}(\mathbf{W}_{\text{in}}[b_{in}; \vec{u}(n)] + \mathbf{W}\vec{s}(n - 1)), \quad (2.20)$$

erreichen. Für diese Zustandsgleichung wurde das Modell eines *Leaky Integrator Neurons* genutzt, wobei  $\alpha \in (0, 1]$  die Verlustrate beschreibt. Für  $\alpha = 1$  ergibt sich als Spezialfall ein gewöhnliches Neuron mit der oben beschriebenen Zustandsgleichung.

Da für manche Anwendungsfälle auch eine direkte Rückkopplung wünschenswert ist, kann das System noch um eine Ausgabe-Rückkopplung erweitert werden. Diese verbindet die Ausgabe erneut mit den inneren Einheiten durch die Matrix  $\mathbf{W}_{\text{fb}} \in \mathbb{R}^{N \times N_y}$ . Somit ergibt sich

$$\vec{s}(n) = (1 - \alpha) \cdot \vec{s}(n - 1) + \alpha \cdot f_{in}(\mathbf{W}_{\text{in}}[b_{in}; \vec{u}(n)] + \mathbf{W}\vec{s}(n - 1) + \mathbf{W}_{\text{fb}}\vec{y}(n)) \quad (2.21)$$

als Zustandsgleichung. Solche Rückkopplungen werden meist nur benutzt, um autonom arbeitende Modelle zu erzeugen. Da dies für die Anwendungen in dieser Arbeit nicht gewünscht ist, wird im Folgenden die Rückkopplungsmatrix weggelassen.

Anhand der inneren Zustände lassen sich nun noch die sogenannten erweiterten inneren Zustände  $\vec{x}(n) = [b_{out}; \vec{s}(n); \vec{u}(n)] \in \mathbb{R}^{1+N+N_u}$  definieren, wobei  $b_{out}$  einen *Bias* für die Ausgabe darstellt.

Aus diesen erweiterten inneren Zuständen kann nun die Ausgabe  $\vec{y}(n)$  konstruiert werden. Dies kann entweder im Sinne einer Linearkombination durch die Ausgangsmatrix  $\mathbf{W}_{\text{out}} \in \mathbb{R}^{N_y \times (1+N+N_u)}$  oder durch andere nicht lineare Regressionsalgorithmen, wie beispielsweise einer SUPPORT VECTOR MACHINE (SVM), durchgeführt werden. Im Folgenden wird nur der Fall einer Linearkombination betrachtet, da sich für die anderen Methoden ein analoges Verfahren ergibt. In diesem Fall berechnet

sich die Ausgabe mittels

$$\vec{y}(n) = f_{out}(\mathbf{W}_{\text{out}} \vec{x}(n)) = f_{out}(\mathbf{W}_{\text{out}}[b_{out}; \vec{s}(n); \vec{u}(n)]), \quad (2.22)$$

wobei  $f_{out}$  die Transferfunktion der Ausgabe ist. Für diese kann in den meisten Fällen (so auch in dieser Arbeit) die Identität  $f_{out}(x) = x$  genutzt werden.

Während die Matrix  $\mathbf{W}_{\text{out}}$  durch den Trainingsvorgang bestimmt wird, werden die Matrizen  $\mathbf{W}_{\text{in}}$  und  $\mathbf{W}$  a priori generiert und festgelegt. Hierbei hat sich für das Generieren der Eingangsmatrix eine zufällige Anordnung von gleichförmig verteilten Gleitkommazahlen zwischen  $-0.5$  und  $0.5$  als geschickt herausgestellt. Falls ein Feedback gewünscht ist, also Gleichung (2.21) genutzt wird, wird  $\mathbf{W}_{\text{fb}}$  gleichartig konstruiert. Die innere Matrix  $\mathbf{W}$  wird ebenfalls zufällig generiert, doch soll diese zugleich dünnbesetzt sein. Zudem gibt es hierfür weitere Merkmale, die erfüllt sein sollen. Darauf wird in Abschnitt 2.4.2 genauer eingegangen.

## 2.4.2. Theoretischer Hintergrund

Um die mathematischen Eigenschaften beschreiben zu können, sind zuerst zwei Definitionen nötig [23].

**Definition 1** (Kompatibler Zustand). *Sei  $E : S \times U \rightarrow S$  ein ESN für den Zustandsraum  $S$  und den Raum  $U$  des Eingangssignals mit der Zustandsgleichung  $\vec{s}(n+1) = F(\vec{s}(n), \vec{u}(n+1))$ . Eine Folge von Zuständen  $(\vec{s}(n))_n$  ist kompatibel mit der Eingangsfolge  $(\vec{u}(n))_n$ , wenn  $\vec{s}(n+1) = F(\vec{s}(n), \vec{u}(n+1)), \forall n$  erfüllt ist.*

**Definition 2** (Echo State Eigenschaft (ESP)). *Ein ESN  $E : S \times U \rightarrow S$  besitzt die Echo State Eigenschaft genau dann wenn eine Nullfolge  $(\delta(n))_{n \geq 0}$  existiert, sodass für alle Paare von Zustandsfolgen  $(\vec{s}(n))_n, (\vec{s}'(n))_n$ , die kompatibel mit der Eingangsfolge  $(\vec{u}(n))_n$  sind, gilt, dass  $\forall n \geq 0 : \|\vec{s}(n) - \vec{s}'(n)\| < \delta_n$*

Das Vorliegen der *ESP* bedeutet anschaulich, dass nachdem das Netzwerk lange genug betrieben worden ist, der Zustand nicht mehr von dem beliebig gewählten Anfangszustand abhängt. Stattdessen wird ein für das Signal und Netzwerk charakteristischer Zustand angenommen. Diese Eigenschaft ist notwendig, damit das ESN Vorhersagen treffen kann [10].

## 2. Theorie

Nun stellt sich die Frage, wann ein Netzwerk diese Eigenschaft besitzt. Da die Gewichtsmatrix  $\mathbf{W}$  die internen Verbindungen beschreibt und somit einen sehr starken Einfluss auf die Dynamik hat, ist anzunehmen, dass die Eigenschaft hauptsächlich durch die Gewichtsmatrix  $\mathbf{W}$  bestimmt wird.

In den letzten Jahren sind drei verschiedene Kriterien für das Auftreten der *ESP* aufgestellt worden. Chronologisch ist zuerst bekannt gewesen, dass für einen Spektralradius  $\rho(\mathbf{W}) > 1$  die Eigenschaft nicht auftreten kann, sofern  $\vec{u}_n = 0$  möglich ist [9, 12]. Hieraus ergab sich lange Zeit die falsche Annahme, dass für Systeme mit  $\rho(\mathbf{W}) < 1$  die Eigenschaft stets garantiert ist. Wie allerdings gezeigt werden konnte, ist dies nicht der Fall [23].

Darauffolgend ist die hinreichende Bedingung für die *ESP*

$$|1 - \alpha(1 - \sigma_{max}(\mathbf{W}))| < 1 \quad (2.23)$$

aufgestellt worden, wobei  $\sigma_{max}(\mathbf{W})$  der maximale Singulärwert von  $\mathbf{W}$  ist. Eine Beweisskizze der Herleitung dieser Bedingung ist in Anhang C.1 zu finden.

Darauf basierend ist eine weitere hinreichende Bedingung

$$\rho(\alpha|\mathbf{W}| + (1 - \alpha)\mathbf{I}) < 1 \quad (2.24)$$

hergeleitet worden. Wobei als Betrag der Matrix hier das elementweise Betragsnehmen gemeint ist. Diese Bedingung ist weniger einschränkend als die Gleichung (2.23) [23].

Weitergehend hat sich in Experimenten gezeigt, dass eine dünnbesetzte Gewichtsmatrix  $\mathbf{W}$  zu reicherer Dynamiken innerhalb des Reservoirs führen kann. Dabei werden in der Literatur oftmals mehr als 80% der Einträge auf 0 gesetzt [9]. Eine solche dünnbesetzte Matrix bedeutet, dass nicht mehr jedes Neuron mit jedem anderen Neuron verbunden ist, sondern dass nur noch ein relativer Anteil  $\epsilon$  dieser Verbindungen vorhanden ist. Da durch eine größere Anzahl an verschiedenen internen Dynamiken vielfältigere Funktionen besser approximiert werden können, kann die Vorhersagequalität durch einen geringen  $\epsilon$  Wert erhöht werden.

Auf diesen Erkenntnissen basierend kann nun eine Methode nach [23] angegeben werden, um die Gewichtsmatrix  $\mathbf{W}$  zu konstruieren:

1. Generiere zufällige Matrix  $\mathbf{W}$  mit  $|\mathbf{W}| = \mathbf{W}$  bei der in jeder Zeile nur  $\epsilon/N$  Einträge ungleich 0 sind.
2. Skaliere  $\mathbf{W}$ , sodass Gleichung (2.24) erfüllt ist.
3. Tausche zufällig das Vorzeichen von ungefähr der Hälfte aller Einträge.

Statt dieser Vorschrift wurde zuvor oftmals  $\mathbf{W}$  zufällig generiert und anschließend nur  $\rho(\mathbf{W})$  statt  $\rho(|\mathbf{W}|)$  skaliert, was mitunter zu instabilen Systemen geführt hat. Da allerdings die *ESP* auch für Systeme mit einem Spektralradius  $> 1$  für nicht verschwindende Eingänge  $\vec{u}_n$  beobachtet werden kann, ist es ratsam auch effektive Spektralradien jenseits von 1 auszuprobieren.

Zusätzlich zu diesen Eigenschaften wird die Dynamik des Reservoirs auch von dessen Größe  $N$  bestimmt. Es kann gezeigt werden, dass die Gedächtnisleistung eines Reservoirs stark von dieser abhängt. Somit ist es ratsam für Aufgaben, die eine lange Gedächtnisleistung benötigen, ein großes und für Aufgaben, die nur ein Kurzzeitgedächtnis benötigten, ein kleines Reservoir zu benutzen [10]. Bei einer zu kleinen Wahl für  $N$  kann das Reservoir nicht die volle Dynamik des eigentlichen Systems wiedergeben. Bei einer zu großen Wahl von  $N$  kann das *Overfitting* auftreten: Dabei generalisiert das ESN die tatsächliche Dynamik des Systems nicht stark genug, sodass zwar ein geringer Trainingsfehler aber ein deutlich höherer Testfehler erreicht wird [10].

Write something  
about runtime com-  
plexity?

### 2.4.3. Trainingsvorgang

Nachdem der Aufbau des Netzwerkes beschrieben ist, ergibt sich nun die Frage, wie der Trainingsvorgang durchgeführt wird.

Hierfür wird für die Zeiten  $n = 0, \dots, T_0$  das ESN mit dem Signal  $\vec{u}(n)$  betrieben, wobei  $T_0$  die *transiente Zeit* beschreibt. Hierdurch soll das System aus seinem zufällig gewähltem Anfangszustand in einen charakteristischen Zustand übergehen. Anschließend wird das System für Zeiten  $n < T + T_0$  weiter betrieben und die erweiterten Zustände  $\vec{x}(n)$  als Spalten in der *Zustandsmatrix*  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{(1+N_u+N) \times T}$  gesammelt. Analog dazu werden die gewünschten Ausgaben  $\vec{y}(n)$  als Spalten in der

## 2. Theorie

Ausgabematrix  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N_y \times T}$  gesammelt. Nun wird eine Lösung der Gleichung

$$\mathbf{Y} = f_{out}(\mathbf{W}_{\text{out}} \mathbf{X}) \Leftrightarrow f_{out}^{-1}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}_{\text{out}} \mathbf{X} \quad (2.25)$$

für  $\mathbf{W}_{out}$  gesucht, wobei das Inverse  $f_{out}^{-1}$  der Ausgabe-Transferfunktion  $f_{out}$  elementweise angewendet wird. Hierfür stehen mehrere Verfahren zur Verfügung, von denen zwei prominente folgend erwähnt werden.

Zum einen kann die Lösung durch eine *Tikhonov-Regularisierung* erhalten werden. Dabei wird die Kostenfunktion

$$\sum_n \|\vec{y}(n) - \mathbf{W}_{\text{out}} \vec{x}(n)\|^2 + \beta \cdot \sum_i \|\vec{W}_{out,i}\|^2 \quad (2.26)$$

minimiert, welche aus der Summe der Fehlerquadrate und einem Gewichtsterm  $\beta \cdot \sum_i \|\vec{W}_{out,i}\|^2$  besteht [16]. Dabei steht  $\vec{W}_{out,i}$  für die jeweils  $i$ -te Zeile der Gewichtsmatrix und  $\beta$  für die Regularisierungskonstante. Der Gewichtsterm sorgt dafür, dass die Lösung ausgewählt wird, bei der zum einen die Fehler im Trainingsvorgang möglichst gering sind, aber trotzdem die Gewichte nicht zu groß werden. Da große Gewichte ein Zeichen dafür sind, dass eine zu starke Anpassung an die Trainingsdaten vorliegt, kann also die Regularisierung den Effekt des *Overfittings* unterdrücken. Die Lösung des Minimierungsverfahrens der zuvor eingeführten Kostenfunktion

$$\mathbf{W}_{out} = \mathbf{Y} \mathbf{X}^T \left( \mathbf{X} \mathbf{X}^T + \beta \mathbf{I} \right)^{-1} \quad (2.27)$$

ist sehr leistungsstark, sodass bei geeigneter Wahl von  $\beta$  die besten Ergebnisse hinsichtlich der Genauigkeit der Vorhersage erzielt werden können. Durch die Verwendung der Matrixinversion kann dieses Verfahren allerdings auch numerisch instabil werden [15]. Trotzdem wird in dieser Arbeit auf Grund der hohen Genauigkeit nur dieses Lösungsverfahren verwendet [16]. Die weiteren Lösungsansätze für das Gleichungssystem sind nur aus Gründen der Vollständigkeit angegeben.

Zum anderen kann zur Lösung die *Moore-Penrose-Pseudoinverse*  $\mathbf{X}'$  genutzt werden, sodass für die Ausgabematrix

$$\mathbf{W}_{\text{out}} = \mathbf{Y} \mathbf{X}' \quad (2.28)$$

folgt. Dieses Verfahren ist zwar sehr rechenaufwendig aber dafür numerisch stabil

[11, 15]. Nichts desto trotz, kann jedoch auf Grund des Fehlens einer Regularisierung leicht der Effekt des *Overfittings* auftreten, wodurch die Qualität der Vorhersage sinkt. Auf Grund dessen wird es in dieser Arbeit nicht verwendet.

Um das *Overfitting* bei der Verwendung der Psuedoinversen zu reduzieren, kann in der Zustandsgleichung (2.20) (beziehungsweise (2.21)) eine leichte normalverteilte Störung  $\vec{\nu}(n)$  addiert werden. Wenn die *Tikhonov Regularisierung* zur Lösung verwendet wird, erhöht die Verwendung der zufälligen Störung die Stabilität der Vorhersage des Systems. Dieser Ansatz beruht auf Empirie, da eine mathematische Begründung hierfür noch nicht vollständig gelungen ist [9, 15]. Anschaulich lässt sich das Vorgehen dadurch motivieren, dass hierdurch künstliche Datenpunkte in der Nähe der vorhandenen Trainingsdaten emuliert werden und somit eine größere Vielfalt an Daten während der Trainingsphase beobachtet wird.

Zusammenfassend ergibt sich somit der folgende Funktionsablauf für die Anwendung eines ESN:

1. Zufälliges Generieren der Matrizen  $\mathbf{W}_{\text{in}}, \mathbf{W}_{\text{fb}}$  und Konstruktion der Matrix  $\mathbf{W}$
2. Einspeisen des Signals  $u(n)$  und Konstruktion der Zustandsmatrix  $\mathbf{X}$  und der Ausgabematrix  $\mathbf{Y}$
3. Berechnung der Ausgabematrix  $\mathbf{W}_{\text{out}}$
4. Einspeisen des Signals  $\vec{u}(n)$  für Vorhersagen des Signales  $\vec{y}(n)$  für  $n > T + T_0$

Dieser Ablauf ist schematisch in den Abbildungen D.1 und D.2 dargestellt.



## 3. Anwendungen

Die zuvor in Kapitel 2 eingeführten Methoden werden nun in drei verschiedene Szenarien ausprobiert und verglichen. Der Fokus liegt dabei auf der Verwendung und Erprobung der ESNs. Da die klassischen Methoden der *Nächsten-Nachbarn* (NN) und der *radialen Basisfunktionen* (RBF) bereits seit längerer Zeit bekannt sind und eine populäre Lösung solcher Problemfälle darstellen, dienen sie als Bezugsgröße.

Jedes der drei Szenarien wird sowohl auf ein *Barkley*-System als auch auf ein System nach dem *Mitchell-Schaeffer*-Modell angewendet. Diese Systeme bestehen aus  $150 \times 150$  Gitterpunkten und nutzen die zuvor beschriebenen Parameter. Für ihre Startverteilung werden die Felder der beiden Systemvariablen in  $10 \times 10 = 100$  gleichgroße Quadrate mit einer Seitenlänge von 15 Gitterpunkten unterteilt. Innerhalb dieser Quadrate werden die Variablen homogen mit einem Zufallswert zwischen 0 und 1 initialisiert. Anschließend werden die Systeme über 20000 Zeitschritte ( $\cong 200.0$  Zeiteinheiten) simuliert, um ein transientes Verhalten abzuwarten. Durch das weitere Simulieren der Systeme wird der wirkliche Datensatz generiert, der benutzt wird. Dieser wird in einen Trainingsdatensatz, einen Evaluationsdatensatz und einen Testdatensatz aufgeteilt. Der Erste wird für das Trainieren der Modelle und Ansätze verwendet, der Zweite für das Auswählen der optimalen Hyperparameter und der Dritte für die finale Bewertung der Leistung eines Ansatzes. Es wird für das *Barkley*-System eine Samplingzeit von 0.1 und für das *Mitchell-Schaeffer*-Modell von 1.0 Zeiteinheiten benutzt.

Die erste Aufgabe besteht darin, aus der Kenntnis einer der beiden Systemvariablen die andere Unbekannte zu ermitteln (Kreuzvorhersage). Dabei wird die Spannungsvariable als Quelle genutzt. Dies ist in den zuvor eingeführten Modellen jeweils die Größe, welche den Diffusionsterm beinhaltet; also die  $u$ -Variable im *Barkley*-Modell und die  $v$ -Variable im *Mitchell-Schaeffer*-Modell.

Im zweiten Szenario werden die Techniken verwendet, um aus Messdaten einer si-

### 3. Anwendungen

mulierten Fernfeldmessung der Spannungsvariable diese wiederherzustellen. Diese Fernfeldmessung wird durch eine gauß'sche Unschärfe simuliert.

Abschließend wird die Spannungsvariable der inneren Punkte eines Quadrates nur durch die Kenntnis der Randwerte des Systems vorhergesagt.

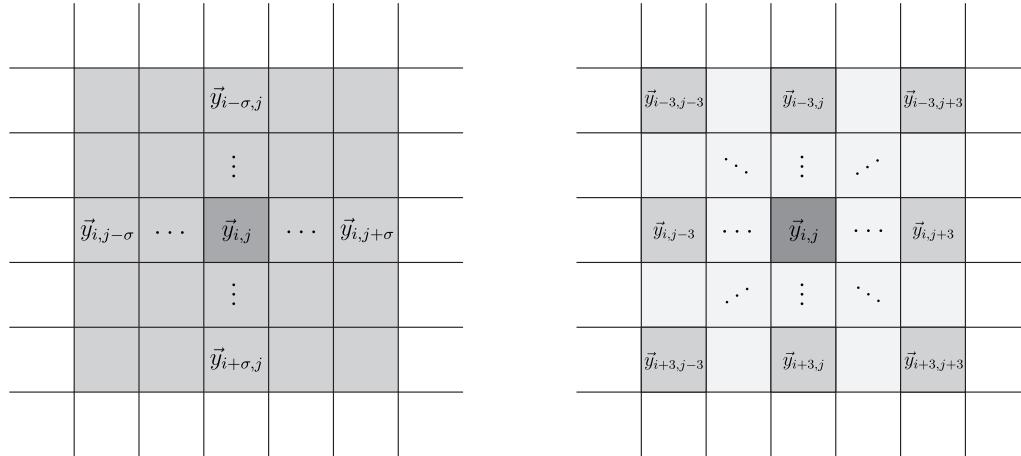
Für das *BOCF*-Modell wird, um den Umfang dieser Arbeit beschränkt zu halten, lediglich die erste Aufgabe betrachtet: Es wird eine Kreuzvorhersage zwischen der  $u(t)$  Variable und der  $v(t)$ ,  $w(t)$  und  $s(t)$  Variable durchgeführt. Dazu wird zuerst ein *BOCF*-System mit  $500 \times 500$  Gitterpunkten und den zuvor eingeführten Konstanten simuliert. Dabei wird zuerst wieder ein transientes Verhalten abgewartet, um anschließend mit einer Samplingzeit von 2.0 Zeiteinheiten die Zeitreihe aufzuzeichnen. Die gewählte Systemgröße wird benötigt, um eine langanhaltende chaotische Dynamik zu erzeugen. Im Anschluss werden die Felder des Systems auf  $150 \times 150$  Einheiten mittels einer *bilinearen Interpolation* reskaliert, um eine ähnliche Situation wie für die anderen beiden Modelle zu betrachten.

Add subchapter?

## 3.1. Allgemeines Vorgehen

Das Ziel aller drei Aufgaben besteht jeweils darin ein zweidimensionales Feld vorherzusagen. Eine naheliegende Möglichkeit dies zu erreichen besteht darin, den gesamten Inhalt des  $150 \times 150$  Einheiten großen Feldes auf einmal vorherzusagen. Da dabei die Ausgabe der Vorhersage aus einem 22500-dimensionalen Vektor besteht, werden sehr viele Trainingsdaten benötigt, um genügend Informationen über eine solch hochdimensionale Ausgabe zu erhalten. Um dieses Problem zu umgehen, wird stattdessen ein Verfahren benutzt, bei dem jeder Punkt einzeln vorhergesagt wird. Dieses Aufteilen einer großen Vorhersage in viele kleinere bietet zudem eine Verbesserung der Ressourcennutzung, bei der zugleich der Bedarf an Arbeitsspeicher und auch die Rechenzeit sinkt (Details siehe 3.1.1). Eine schematische Darstellung ist in Abbildung D.3 zu finden.

Des Weiteren kann angenommen werden, dass die Dynamiken einen ausgeprägten lokalen Charakter besitzen, sodass zumindest bei den ersten beiden Aufgaben weit entfernte Punkte keinen unmittelbaren Einfluss auf die Vorhersage haben. Darauf basierend kann eine sogenannte *Messsondentechnik* entwickelt und für diese genutzt



(a) Messsonde ohne Abstände zwischen den Messpunkten

(b) Messsonde mit einem Abstand von zwei Einheiten zwischen den Messpunkten

Abb. 3.1.: Illustration der verwendeten *Messondentechnik*. Abbildung 3.1a deutet an, wie aus einem  $\sigma^2$  großem Quadrat um den eigentlichen Messpunkt Daten für die Vorhersage genutzt werden. Dagegen ist in Abbildung 3.1b das Verfahren für  $\sigma = 5$  und  $\Delta\sigma = 2$  dargestellt, sodass insgesamt die Information aus 9 Punkten genutzt wird.

werden. Hierbei werden nicht nur die Informationen an einem Punkt  $(i, j)$  für die Vorhersage, sondern auch die benachbarten Punkte, welche in einem Quadrat um  $(i, j)$  liegen, verwendet. Eine Veranschaulichung ist in 3.1a zu finden. Die Größe des Quadrates wird durch den Parameter  $\sigma$  bestimmt und ergibt sich zu  $\sigma^2$ . Da direkte Nachbarn unter Umständen durch den geringen Abstand sehr ähnliche Informationen beinhalten können, wird zudem ein Parameter  $\Delta\sigma$  eingeführt, welcher den Abstand zweier benachbarter Punkte, deren Informationen simultan verwendet werden, angibt. Eine beispielhafte Darstellung hiervon ist für  $\sigma = 5, \Delta\sigma = 2$  in Abbildung 3.1b dargestellt. Dabei werden nur die Zeitreihen der Gitterpunkte genutzt, welche dunkelgrau hinterlegt sind, und die hellgrauen Informationen verworfen. Die Parameter, welche für die ersten beiden Aufgaben überprüft werden, sind in Tabelle 3.1 aufgelistet. Es ist anzumerken, dass die Diskretisierung des Diffusionstermes in den Differentialgleichungen einem Wert  $\sigma = 3$  entsprechen würde. Da in der Nähe der Gitterränder nicht genug Punkte zur Verfügung stehen, um die Technik mit  $\sigma > 1$  zu benutzen, wird  $\sigma$  auf dem Weg zu den Rändern schrittweise auf 1 reduziert. Durch dieses Vorgehen kann für jeden Gitterpunkt ein  $\left\lceil \frac{\sigma}{\Delta\sigma} \right\rceil^2$ -dimensionaler Eingabevektor erstellt und für die ersten beiden Vorhersage-Aufgaben genutzt werden.

### 3. Anwendungen

|                |   |   |   |   |
|----------------|---|---|---|---|
| $\sigma$       | 1 | 3 | 5 | 7 |
| $\Delta\sigma$ | 1 | 1 | 1 | 2 |

Tab. 3.1.: In den ersten beiden Aufgaben verwendete Parameter  $\sigma$  und  $\Delta\sigma$  für die *Messondentechnik*.

Der Trainingsvorgang wird jeweils über  $N_{Training} = 15000$  Schritte durchgeführt und der anschließende Evaluationsdurchgang auf  $N_{Evaluation} = 2000$  Schritten. Der finale Testvorgang ist ebenfalls  $N_{Testing} = 2000$  Schritte lang. Zur Bewertung der Leistung einer Vorhersage werden die beiden Fehlergrößen MSE und NRMSE eingeführt. Im Allgemeinen ist der MSE (*Mean Squared Error*) durch

$$MSE(y) = \frac{1}{m \cdot N_{Testing}} \sum_i^m \sum_t^{N_{Testing}} (y(t)_i - \hat{y}(t)_i)^2 \quad (3.1)$$

definiert und charakterisiert die Genauigkeit einer Vorhersage  $\hat{y}$  im Vergleich zu dem tatsächlichen Wert  $y \in \mathbb{R}^m$  über den Zeitraum  $N_{Testing}$ . Der NRMSE (*Normalized Root Mean Squared Error*) normiert diesen Fehler noch auf eine Vorhersage, bei der der Mittelwert  $\langle y \rangle$  über die Trainingsphase als vorhergesagter Wert genutzt wird. Er ist als

$$NRMSE(y) = \sqrt{\frac{MSE(y)}{MSE(\langle y \rangle)}} \quad (3.2)$$

definiert. Ein NRMSE von 0.0 steht für eine optimale Vorhersage. Steigt der NRMSE auf  $> 1.0$  an, so ist die Vorhersage durch den Mittelwert des Trainingsdatensatzes präziser als die zuvor bestimmte Vorhersage.

Zusätzlich zu diesen Fehlermaßen werden im Folgenden oftmals auch die Laufzeiten der Ansätze angegeben, um ihre Geschwindigkeit einzuordnen. Hierbei ist zu beachten, dass diese nicht über mehrere Ausführungen des identischen Programmes gemittelt worden sind, und deshalb nicht als statistisch signifikante Information sondern nur als ein Hinweis gesehen werden können.

Unter der Kenntnis, dass in den *Barkley-* und *Mitschell-Schaeffer*-Modellen nur Werte zwischen 0 und 1 angenommen werden können, werden die Vorhersagen auf das Intervall  $[0, 1]$  beschränkt. Dafür werden die Werte beider Variablen der Systeme

sowohl nach unten als auch nach oben hin durch

$$x = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \leq 0 \\ x, & \text{wenn } 0 \geq x \geq 1 \\ 1, & \text{wenn } x \geq 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

abgeschnitten, wobei  $x$  für eine der beiden Variablen in dem jeweiligen Modell steht.

Zur Erprobung unterschiedlicher Hyperparameter innerhalb der verschiedenen Ansätze ist ein SUN GRID ENGINE-Cluster genutzt worden. Dabei besteht jeder Knoten aus zwei INTEL(R) XEON(R) CPU E5-2650 v2 CPUs mit einem Takt von 2.650 GHz und 64 GB Arbeitsspeicher. Diese werden durch das Betriebssystem SUSE LINUX ENTERPRISE SERVER 11 betrieben. Die angegebenen Laufzeiten beziehen sich jeweils auf die Ausführung auf einem dieser Knoten.

Add more information about the cluster

### 3.1.1. Echo State Network

*Echo State Networks* besitzen viele verschiedene Hyperparameter, die die Qualität der Vorhersage beeinflussen können. Dazu zählen nach 2.4 die Reservoirgröße  $N$ , der Spektralradius  $\rho$ , die Verlustrate  $\alpha$ , die Amplitude der zufälligen Störung  $\nu$ , die Stärke der Regularisierung  $\lambda$  und der Anteil der vorhandenen internen Verbindungen  $\epsilon$ . Da es zum aktuellen Zeitpunkt noch keinen zufriedenstellenden mathematischen Algorithmus für das selbstständige optimale Einstellen eines ESNs gibt, müssen die Parameter manuell ermittelt werden. Hierfür wird in dieser Arbeit eine GRIDSEARCH benutzt. Bei diesem Verfahren wird der Hyperparameterraum in festgelegten Schritten abgetastet und die Leistung des somit entstehenden Netzwerkes evaluiert und dadurch die besten Parameter ermittelt. Wegen der hohen Anzahl von einstellbaren Hyperparametern und der nicht zu vernachlässigenden Rechenzeit für das Trainieren und Evaluieren eines Netzwerkes, ist es nicht sinnvoll, diese Suche für alle Komponenten des hochdimensionalen Zielvektors gleichzeitig durchzuführen. Stattdessen wird zuerst, unter der Annahme, dass die Dynamik sich lokal an allen Punkten ähnlich verhält, ein Punkt in der Mitte des Feldes ausgewählt, und nur versucht diesen einen einzelnen Punkt vorherzusagen. Diese Aufgabe kann deutlich schneller berechnet werden, sodass nun die optimalen Hyperparameter mit einer GRIDSEARCH gesucht werden können. Im Anschluss können die Hyperparameter des zuvor ermittelten ESN für die Vorhersage aller Punkte genutzt werden.

### 3. Anwendungen

Abschließend wird noch einmal versucht, das gefundene Reservoir manuell zu verbessern, indem die Parameter  $N$  und  $\lambda$  erneut variiert werden.

Es ist zu erwarten, dass die hierbei gefundenen Hyperparameter eine akzeptable Leistung für die jeweiligen Probleme erzielen können. Bei dem zuvor beschriebenen Verfahren können bei weitem nicht alle sinnvollen Hyperparameter getestet werden. Stattdessen besteht die Möglichkeit, dass es noch besser geeignete Reservoirs mit anderen Hyperparametern gibt, welche einen noch geringeren Fehler erzielen können.

Statt für jeden Punkt einzeln eine Vorhersage zu treffen, ist es bei einem Reservoir-Ansatz auch vorstellbar alle Punkte gleichzeitig vorherzusagen und dabei innerhalb des Reservoirs die räumliche Struktur der Dynamik stärker abzubilden. Hierfür wäre ein sehr großes Reservoir, welches etwa so viele Einheiten besitzt, wie es Gitterpunkte gibt, vorstellbar. Da nach Anhang C.2 die Laufzeit des ESN allerdings mit mindestens  $\mathcal{O}(N^{2.376})$  anwächst, würde die Laufzeit mit  $(N_{\text{Gitter}}^2)^{2.376}$  zunehmen. Dahingegen wächst die Laufzeit mit dem zuvor vorgestellten Ansatz mit  $(N_{\text{Gitter}})^2 \cdot N^{2.376}$ , wobei  $N$  die Anzahl der internen Einheiten ist. Es ist zu erkennen, dass für hinreichend große Gittergrößen die Laufzeit des großen Ansatzes stärker anwächst als das erläuterte Vorgehen. Zudem lässt sich das zuvor vorgestellte Verfahren auch besser parallelisieren, da die Vorhersage jedes einzelnen Punktes unabhängig von der Vorhersage der übrigen Punkte ist.

Add plot to show  
the development of  
the curves?

#### 3.1.2. Klassische Methoden

Die klassischen Methoden sind nicht von alleine in der Lage zeitlich ausgeprägte Dynamiken vorherzusagen, da den Methoden a priori keine Informationen über die vorherigen Zustände vorliegen. Um dieses Problem zu lösen, können *Verzögerungs-koordinaten* nach der in Abschnitt 2.2.1 beschriebenen Methode für die in Abschnitt 3.1 beschriebenen Vektoren aufgestellt werden. Die über die Autokorrelation ermittelte zeitliche Verzögerung  $\tau$  ist für beide Systeme in Tabelle 3.2 dargestellt.

| $\tau_{\text{Barkley}}$ | $\tau_{\text{Mitchell-Schaeffer}}$ |
|-------------------------|------------------------------------|
| 0.64 Zeiteinheiten      | 2.38 Zeiteinheiten                 |

Tab. 3.2.: Verwendete zeitliche Verzögerung  $\tau$  für die *Delay Reconstruction* für das *Mitchell-Schaeffer*- und das *Barkley*-Modell

## 3.2. Kreuzvorhersage

Momentan ist es durch in vitro Experimente bereits möglich die Ausbreitung der elektrischen Erregung auf der Oberfläche des Herzmuskels experimentell aufzuzeichnen. In Folge dessen stellt sich die Frage, ob anhand beispielsweise der Messung der Membranspannung weitere Variablen des Systems, wie die Kalium-Konzentration oder ähnliches, ermittelt werden können. Diese Fragestellung wird in dem ersten Szenario betrachtet. Es wird die Vorhersage von der Spannungsvariable auf die zweite Variable des jeweiligen Modells sowohl für das *Barkley*- als auch für das *Mitchell-Schaeffer*-Modell durchgeführt. Dabei wird zuerst die *Nächste-Nachbar*-Methode, anschließend die *radialen Basisfunktionen* und schlussendlich die *ESNs* verwendet. Die daraus resultierenden Ergebnisse werden einzeln präsentiert und anschließend einem abschließenden Vergleich unterzogen.

### 3.2.1. Nächste Nachbar Vorhersage

Die Ergebnisse für die optimalen Hyperparameter des Modells  $\delta \in \{3, 4, 5\}, k \in \{2, 3, 4, 5\}$  sind in Tabelle 3.3 zu finden. Die Werte für  $\sigma$  und  $\Delta\sigma$  sind wie zuvor beschrieben variiert worden. Es sind nur die Ergebnisse für die Werte von  $\sigma$  und  $\Delta\sigma$  aufgelistet, die zu den geringsten Fehlern führen. Dabei sind sowohl die verwendeten Parameter als auch die erzielten Fehler MSE und NRMSE aufgelistet.

|                | Barkley        | Mitchell-Schaeffer |
|----------------|----------------|--------------------|
| $\sigma$       | 1              | 7                  |
| $\Delta\sigma$ | 1              | 1                  |
| $\delta$       | 3              | 3                  |
| k              | 5              | 5                  |
| Laufzeit [s]   | 40             | 5252               |
| <b>MSE</b>     | <b>0.00098</b> | <b>0.01891</b>     |
| <b>NRMSE</b>   | <b>0.1317</b>  | <b>0.8795</b>      |

Tab. 3.3.: Ermittelte Hyperparameter der *Nächsten Nachbar-Vorhersage* für das *Mitchell-Schaeffer*- und das *Barkley*-Modell, welche zu den geringsten Fehlern führen.

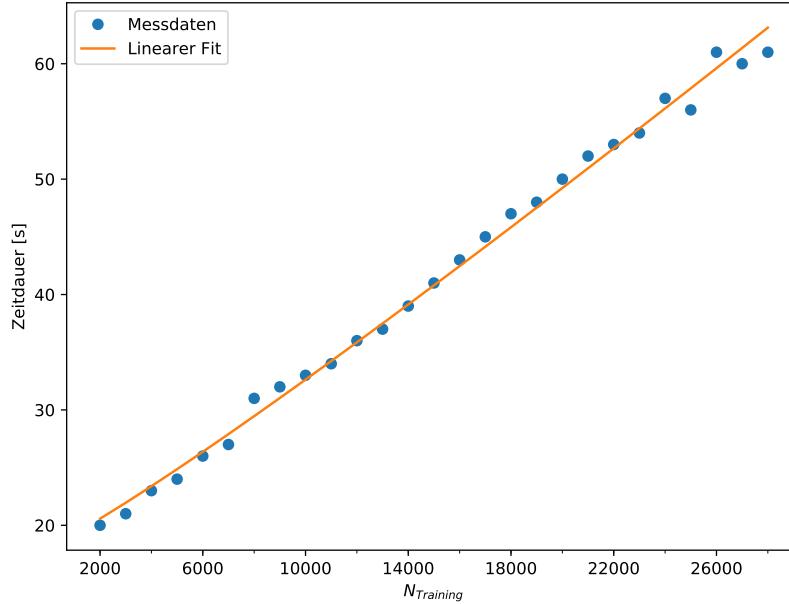
Die stark unterschiedliche Laufzeit der beiden Vorhersagen ist sehr auffällig. Allerdings lässt sich dies durch die verschiedenen Dimensionalitäten der Quellvariable erklären: Während beim *Barkley*-Modell lediglich ein 3-dimensionaler Vektor für die Vorhersage die besten Ergebnisse erzielt, konnten beim *Mitchell-Schaeffer*-Modell

### 3. Anwendungen

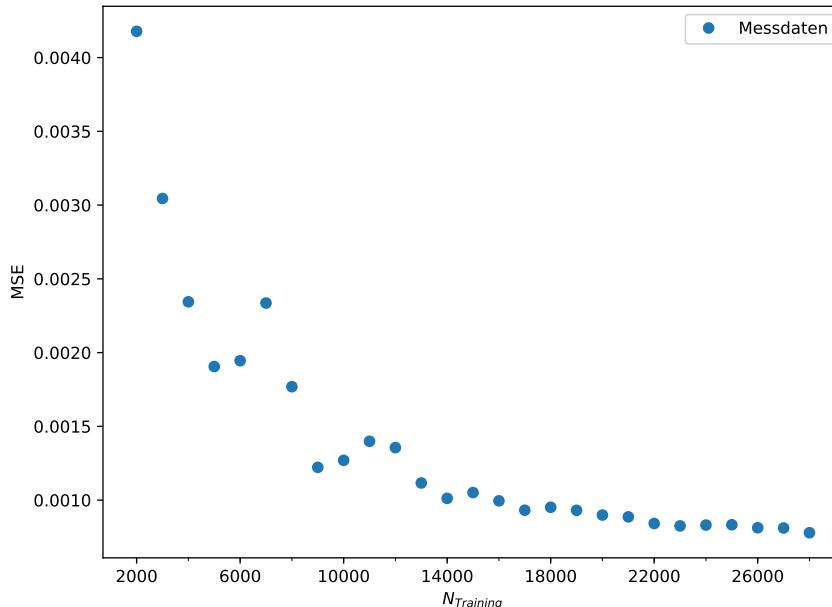
durch die Verwendung eines 147-dimensionalen Quellvektors die besten Ergebnisse erzielt werden. Da, wie in Abschnitt 2.2.2 erwähnt, die benötigte Zeit für eine Vorhersage sehr stark mit der Dimension zunimmt, lässt sich somit der Anstieg von 40 auf 5252 Sekunden erklären.

Da eine *Nächste-Nachbar*-Vorhersage nur anhand der in der Trainingsphase gesehenen Datenpunkte eine Vorhersage erstellt, ist anzunehmen, dass die Qualität dieser sehr stark von der Länge der Trainingsphase abhängt. Um dies zu untersuchen, ist für die zuvor ermittelten Hyperparameter eine Vorhersage für verschiedene Trainingslängen  $N_{Training}$  durchgeführt und die dabei auftretenden MSEs und die benötigte Laufzeit gemessen worden. Währenddessen lassen sich zwei Effekte beobachten. Bei der Betrachtung der grafischen Darstellung der benötigten Laufzeit in Abbildung 3.2 für das *Barkley*-Modell ist zu erkennen, dass sich der Zusammenhang zwischen  $N_{Training}$  und der Laufzeit durch eine linearithmische Ausgleichskurve beschreiben lässt. Dies ist, nach der theoretischen Betrachtung in Abschnitt 2.2.2, ein erwartetes Ergebnis. Der erzielte Fehler verhält sich dagegen anders und sinkt asymptotisch gegen eine untere Schranke ab.

Eine analoge Darstellung für das *Mitchell-Schaeffer*-Modell ist in B.5 zu sehen. Anzumerken ist, dass die Sättigung des Fehlers im *Barkley*-Modell schon ab etwa  $N_{Training} = 15000$  eintritt, doch beim *Mitchell-Schaeffer*-Modell erst deutlich später. Es handelt sich um einen Hinweis, dass die Dynamiken im Letzten chaotischer und unregelmäßiger als beim Ersten ablaufen. Zusammenfassend lässt sich die Wahl der Trainingslänge von  $N_{Training} = 15000$  für alle Szenarien und alle drei Methoden damit begründen, dass man für die *Nächste-Nachbar*-Vorhersage, welche am empfindlichsten auf diese Länge reagiert, einen akzeptablen Kompromiss zwischen der Rechenzeit und der Genauigkeit erhält.



(a) Abhängigkeit der Laufzeit von  $N_{Training}$ .



(b) Abhängigkeit des MSEs von  $N_{Training}$ .

Abb. 3.2.: Darstellung der Abhängigkeit der benötigten Laufzeit (oben) und des MSE (unten) von der verwendeten Anzahl an Trainingsdaten  $N_{Training}$  für das Barkley-Modell bei der Benutzung einer Nächsten-Nachbar-Vorhersage.

### 3. Anwendungen

#### 3.2.2. Radiale Basisfunktionen

Bei der Verwendung *radialer Basisfunktionen* stellt zudem sowohl die Breite  $\sigma_{RBF}$  der Gaußfunktionen als auch die Anzahl der Basisfunktionen  $l$  einen wichtigen Parameter dar. Im Rahmen dieser Arbeit ist die Anzahl der Basisfunktionen auf  $l = 100$  festgelegt worden - diese Wahl wird im Folgenden weiter motiviert werden. Um die anderen Parameter zu finden, sind  $\sigma$  und  $\Delta\sigma$  wie oben beschrieben,  $\delta \in \{3, 4, 5\}$  und  $\sigma_{RBF} \in \{0.5, 1.0, 3.0, 5.0, 7.0, 9.0\}$  variiert worden. In Tabelle 3.4 sind die dadurch gefundenen optimalen Parameter, die damit erreichten Fehler und die benötigte Laufzeit erneut für beide Modelle aufgelistet. Wichtig zu sagen ist, dass die optimalen Werte für  $\sigma$ ,  $\Delta\sigma$  und  $\delta$  mit denen für die NN-Vorhersage übereinstimmen.

|                | Barkley        | Mitchell-Schaeffer |
|----------------|----------------|--------------------|
| $\sigma$       | 1              | 7                  |
| $\Delta\sigma$ | 1              | 1                  |
| $\delta$       | 3              | 3                  |
| $\sigma_{RBF}$ | 0.5            | 5                  |
| Laufzeit [s]   | 1430           | 1434               |
| <b>MSE</b>     | <b>0.01046</b> | <b>0.00948</b>     |
| <b>NRMSE</b>   | <b>0.1023</b>  | <b>0.6228</b>      |

Tab. 3.4.: Ermittelte Hyperparameter der radialen Basisfunktionen für das *Mitchell-Schaeffer*- und das *Barkley*-Modell, welche zu den geringsten Fehlern führen.

Analog zu der Untersuchung des Einflusses der Trainingslänge  $N_{Training}$  bietet es sich für die radialen Basisfunktionen an, den Einfluss der Anzahl der verwendeten Basisfunktionen  $l$  auf die Genauigkeit und die benötigte Laufzeit zu untersuchen, um die zuvor angegebene Wahl  $l = 100$  zu begründen. Dabei werden die besten zuvor ermittelten Hyperparameter verwendet. Hierfür sind die gemessenen Laufzeiten gegen die Anzahl der Basisfunktionen  $l$  in Abbildung 3.3 für das *Barkley*-Modell aufgetragen worden. Zusätzlich ist auch der Zusammenhang zwischen dem erreichten MSE und der Anzahl der Basisfunktionen in Abbildung 3.4 aufgetragen. Eine dazu analoge Darstellung für das *Mitchell-Schaeffer*-Modell ist in Abbildung B.6 zu finden. Es ist anzunehmen, dass näherungsweise ein linearer Zusammenhang zwischen der Laufzeit und der Anzahl der Basisfunktionen auf dem untersuchten Bereich besteht.

Bei der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen MSE und der Anzahl der Basisfunktionen ist zum einen ein asymptotischer Anteil zu sehen, sodass der Fehler zuerst für mehr Basisfunktionen abnimmt. Zum anderen lässt das Verhalten für das

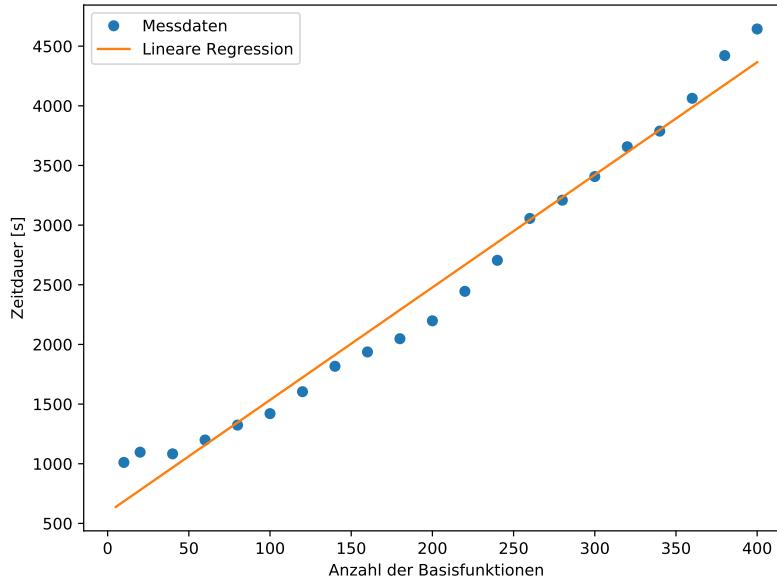
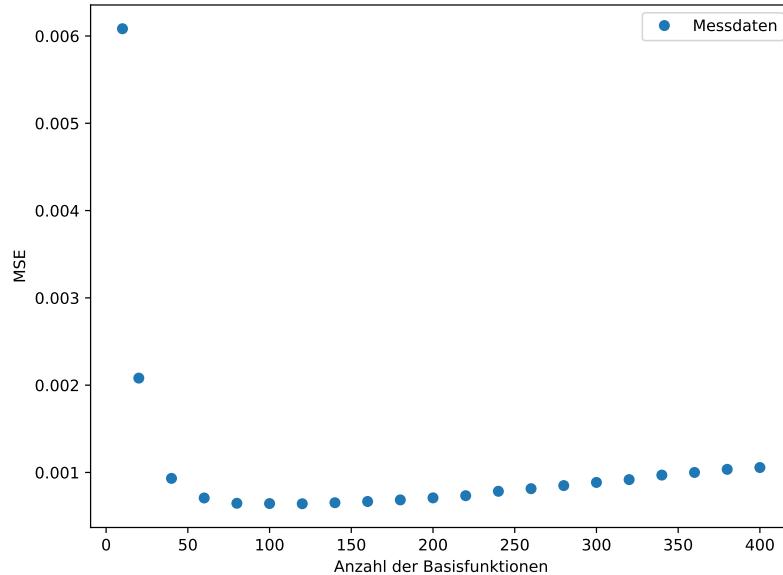
(a) Abhängigkeit der Laufzeit von  $l$ .

Abb. 3.3.: Darstellung der Abhängigkeit der benötigten Laufzeit von der Anzahl der Basisfunktionen  $l$  für das *Barkley*-Modell bei der Verwendung radialer Basisfunktionen.

*Barkley*-Modell erahnen, dass es hierbei einen optimalen Wert gibt, ab dem der Fehler wieder ansteigt. Dies kann durch eine schlechtere Generalisierung der Dynamik und ein zu starkes Anpassen an die Trainingsdaten (auch bekannt als *Overfitting*) erklärt werden. Daraus resultiert, dass die Wahl von 100 Basisfunktionen eine akzeptable Abschätzung ist, sodass sowohl der Fehler als auch die Laufzeit möglichst gering gehalten wird. Diese Annahme wird im Folgenden ohne weitere qualitative Untersuchungen auf die anderen beiden Probleme übertragen, um den benötigten Rechenaufwand für die Parametersuche in einem angebrachten Rahmen zu halten.

### 3. Anwendungen



(a) Abhängigkeit des  $MSE$ s von  $l$ .

Abb. 3.4.: Darstellung der Abhängigkeit des  $MSE$  (unten) von der Anzahl der Basisfunktionen  $l$  für das *Barkley*-Modell bei der Verwendung radialer Basisfunktionen.

#### 3.2.3. Echo State Network

Abschließend ist dieses Problem nun mit den *ESNs* gelöst worden. Dazu sind die Hyperparameter nach Abschnitt 3.1.1 gesucht worden. Die gefundenen Parameter und die damit erreichten Ergebnisse sind in Tabelle 3.5 aufgelistet. Es ist auffällig, dass die optimalen Werte für  $\sigma$  und  $\Delta\sigma$  hier von denen der NN- und der RBF-Vorhersage abweichen. Des Weiteren ist es erstaunlich, dass für beide Modelle die gleichen Hyperparameter die höchste Genauigkeit erzielen.

Zusätzlich wird in diesem Szenario auch noch das kompliziertere *BOCF*-Modell betrachtet. Die Vorhersagen in diesem Modell stellen eine größere Herausforderung dar, da es nicht nur über zwei sondern vier Systemvariablen verfügt.

Im Folgenden soll nun die Kreuzvorhersage von der  $u(t)$  Variable ausgehend auf die  $v(t)$ ,  $w(t)$  und  $s(t)$  Variable durchgeführt werden. Dazu sind analog zu den anderen beiden Modellen die Hyperparameter nach Abschnitt 3.1.1 gesucht worden. Die gefundenen Parameter und die damit erreichten Ergebnisse sind in Tabelle 3.6 aufgelistet.

|                      | Barkley                                | Mitchell-Schaeffer |
|----------------------|--|--------------------|
| $\sigma$             | 3                                      | 3                  |
| $\Delta\sigma$       | 1                                      | 1                  |
| $N$                  | 400                                    | 400                |
| $\rho( \mathbf{W} )$ | 0.95                                   | 0.95               |
| $\alpha$             | 0.05                                   | 0.05               |
| $\epsilon$           | 0.1                                    | 0.1                |
| $\nu_{max}$          | $1 \times 10^{-4}$                     | $1 \times 10^{-4}$ |
| $\lambda$            | $5 \times 10^{-6}$                     | $5 \times 10^{-6}$ |
| Laufzeit [s]         | 3710                                   | 3733               |
| <b>MSE</b>           | <b><math>8.7 \times 10^{-7}</math></b> | <b>0.00075</b>     |
| <b>NRMSE</b>         | <b>0.0039</b>                          | <b>0.1859</b>      |

Tab. 3.5.: Ermittelte Hyperparameter des ESN für das *Mitchell-Schaeffer*- und das *Barkley*-Modell, welche zu den geringsten Fehlern führen.

Es ist zu erkennen, dass eine Kreuzvorhersage mit einem ESN möglich ist und zu einem akzeptablen Fehler führt, welcher in einem ähnlichen Bereich liegt wie bei den Modellen mit zwei Systemvariablen. Deswegen ist anzunehmen, dass auch bei den folgenden zwei Szenarien eine ähnliche Vorhersagequalität, wie bei den anderen beiden Modellen, erreicht werden kann. Für die Vorhersage der  $v(t)$  und der  $s(t)$  Variable führen identische Hyperparameter zu den genauesten Vorhersagen. Auf Grund dieser Beobachtung ist es auch denkbar, dass für ein zugrunde liegendes System mit mehr als zwei Variablen eine Wahl von Hyperparametern existiert, die für beliebige Richtungen der Kreuzvorhersage gute Ergebnisse liefert. Um den Rahmen der Arbeit nicht zu übersteigen, muss auf die Untersuchung dieser Fragestellung verzichtet werden; allerdings wird empfohlen sie in einer weiterführende Arbeit zu untersuchen.

Zuvor ist die Annahme getroffen worden, dass die Dynamik sich an jedem Punkt im Inneren des Feldes lokal ähnelt. Um diese Annahme zu untersuchen, bietet es sich an, die unterschiedlichen trainierten Gewichtsmatrizen  $\mathbf{W}_{out}$  zu betrachten. Dies ist exemplarisch für die ermittelten Hyperparameter für das *Barkley*-Modell durchgeführt und in Abbildung 3.5 dargestellt. Dabei gibt die vertikale Achse den Index  $i$  des  $i$ -ten Eintrages von  $\mathbf{W}_{out}$  an. Dafür sind die Matrizen  $\mathbf{W}_{out} \in \mathbb{R}^{(1+N_u+N) \times 1}$  mit  $N_u = 9$  jeweils spaltenweise für 900 Pixel in einem  $30 \times 30$  Einheiten messendem Quadrat in der Mitte des Feldes aufgetragen.

Write something  
about the vanishing  
first 9 entries?

### 3. Anwendungen

|                      | $u(t) \rightarrow v(t)$ | $u(t) \rightarrow w(t)$ | $u(t) \rightarrow s(t)$ |
|----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $\sigma$             | 1                       | 3                       | 1                       |
| $\Delta\sigma$       | 1                       | 1                       | 1                       |
| $N$                  | 50                      | 400                     | 50                      |
| $\rho( \mathbf{W} )$ | 1.10                    | 0.95                    | 1.10                    |
| $\alpha$             | 0.95                    | 0.05                    | 0.95                    |
| $\epsilon$           | 0.1                     | 0.1                     | 0.1                     |
| $\nu_{max}$          | $1 \times 10^{-5}$      | $1 \times 10^{-4}$      | $1 \times 10^{-5}$      |
| $\lambda$            | $5 \times 10^{-6}$      | $5 \times 10^{-3}$      | $5 \times 10^{-6}$      |
| Laufzeit [s]         | 1598                    | 3785                    | 1576                    |
| <b>MSE</b>           | <b>0.00041</b>          | <b>0.00009</b>          | 0.00041                 |
| <b>NRMSE</b>         | <b>0.0716</b>           | <b>0.0616</b>           | <b>0.0716</b>           |

Tab. 3.6.: Ermittelte Hyperparameter des ESN für das *BOCF*-Modell, welche zu den geringsten Fehlern führen.

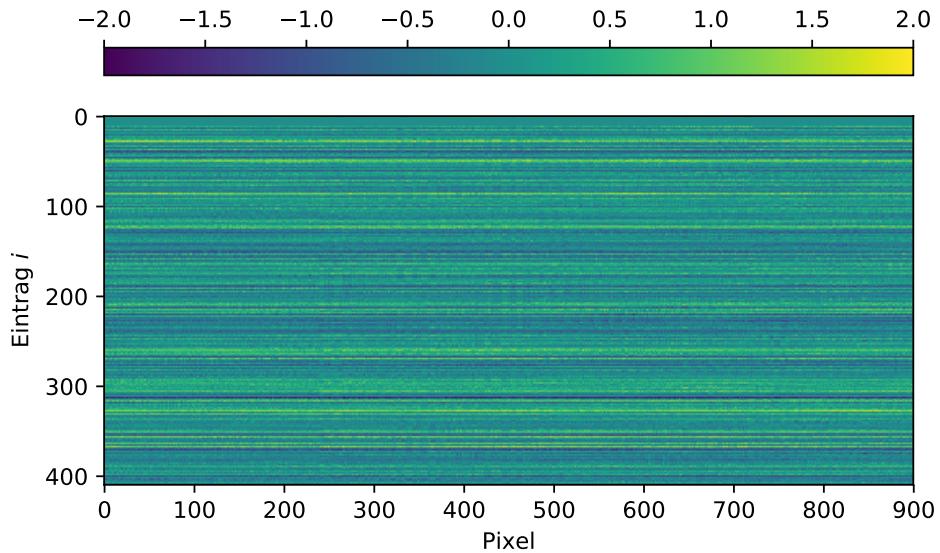


Abb. 3.5.: Exemplarische Darstellung der Einträge der Gewichtsmatrix  $\mathbf{W}_{out}$  des ESN für das *Barkey*-Modell anhand von 900 verschiedene Bildpunkten, wobei  $\mathbf{W}_{out}$  jeweils als Spalte in der Grafik dargestellt ist.

Dabei ist eine große Ähnlichkeit innerhalb der einzelnen Matrizen zu erkennen. Es sind einige markante horizontale Linien in der Abbildung ersichtlich. So sind gewisse Einträge bei den Matrizen aller Pixel relativ stark beziehungsweise schwach. Trotzdem ist noch eine leichte Varianz zu erkennen. Vermutlich wird sie dadurch ver-

ursacht, dass innerhalb der endlichen Trainingszeit nicht alle Dynamiken an jedem Pixel auftreten. Zusammenfassend kann dies als eine Bestätigung der Annahme der lokalen Ähnlichkeit gesehen werden. In weiteren Arbeiten bietet es sich an, auch diese Frage weiter zu untersuchen und den Effekt dahingehend auszunutzen, sodass die Trainingsdaten mehrerer Punkte zusammengefasst werden können, damit bereits aus einer kurzen Trainingszeit eine ausreichende Menge an Trainingsdaten gewonnen werden kann. Zudem ist es denkbar, nur noch für einen einzelnen Punkt den Trainingsvorgang durchzuführen, und die folglich bestimmte Gewichtsmatrix  $\mathbf{W}_{\text{out}}$  für alle Bildpunkte zu nutzen. Dies führt zu einer Reduktion der Laufzeit.

### 3.2.4. Vergleich

Abschließend ist es möglich die drei verwendeten Methoden hinsichtlich ihrer Laufzeit und der erzielten Genauigkeiten zu vergleichen. Dieser ist in Tabelle 3.7 zu finden. Die jeweils besten Ergebnisse sind hervorgehoben. Die *ESNs* erzielen für beide Modelle den geringsten Fehler, also die höchste Genauigkeit. Dabei ist der NRMSE für das *Barkley*-Modell mehrere Größenordnung kleiner als bei den Konkurrenz-Ansätzen. Für das *Mitchell-Schaeffer*-Modell ist diese überaus hohe Genauigkeit nicht erreicht worden. Hier beträgt der Fehler trotzdem etwa nur ein Drittel von dem der anderen Ansätze. Im Austausch für die hohe Genauigkeit ist allerdings die benötigte Zeit für die Vorhersage höher als bei den Konkurrenten. Unter der Voraussetzung, dass die Rechenzeit nur eine untergeordnete Rolle spielt, erweisen sich die *ESNs* als bester Ansatz für die Kreuzvorhersage.

|              | Barkley   |         |                      | Mitchell-Schaeffer |             |                |
|--------------|-----------|---------|----------------------|--------------------|-------------|----------------|
|              | NN        | RBF     | ESN                  | NN                 | RBF         | ESN            |
| Laufzeit [s] | <b>40</b> | 1430    | 3710                 | 5252               | <b>1434</b> | 3733           |
| MSE          | 0.00098   | 0.01046 | $8.7 \times 10^{-7}$ | 0.01891            | 0.00948     | <b>0.00075</b> |
| NRMSE        | 0.1317    | 0.1023  | <b>0.0039</b>        | 0.8795             | 0.6228      | <b>0.1859</b>  |

Tab. 3.7.: Vergleich der benötigten Laufzeit und des erreichten Fehlers der drei Ansätze für das *Mitchell-Schaeffer*- und das *Barkley*-Modell, welche zu den geringsten Fehlern führen.

### 3. Anwendungen

## 3.3. Vorhersage der Dynamik durch das Fernfeld

Bei der Durchführung von *in vitro* Experimenten mit Herzen gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Messung der elektrischen Erregung auf der Herzoberfläche durchzuführen. Zum einen können Elektroden zur Messung benutzt werden, zum anderen können auch Fluoreszenzmessungen durchgeführt werden. Bei der Verwendung von Elektroden wird effektiv nicht das unmittelbare elektrische Feld auf der Herzoberfläche sondern ein Fernfeld dessen gemessen. Es stellt sich nun die Frage, ob aus der Kenntnis dieses Fernfeldes die korrekte Erregung auf der Oberfläche bestimmt werden kann. Eine experimentelle Untersuchung dieser Fragestellung wird im Folgenden durchgeführt. Hierfür müssen zuerst diese Fernfeldaufnahmen für das *Barkley*- und für das *Mitchell-Schaeffer*-Modell erzeugt werden. Das Fernfeld wird dabei nicht korrekt simuliert, sondern durch eine gaußsche Unschärfe nachgebildet. Im Folge dessen wird auf das gesamte Feld der Spannungsvariable beider Modelle eine solche Unschärfe mit einer Breite  $\sigma_{Blur} = 8.0$  mittels einer Faltung angewendet. Eine exemplarische Darstellung des emulierten Fernfeldes und des tatsächlichen Feldes ist in Abbildungen 3.6 und 3.7 zu finden.

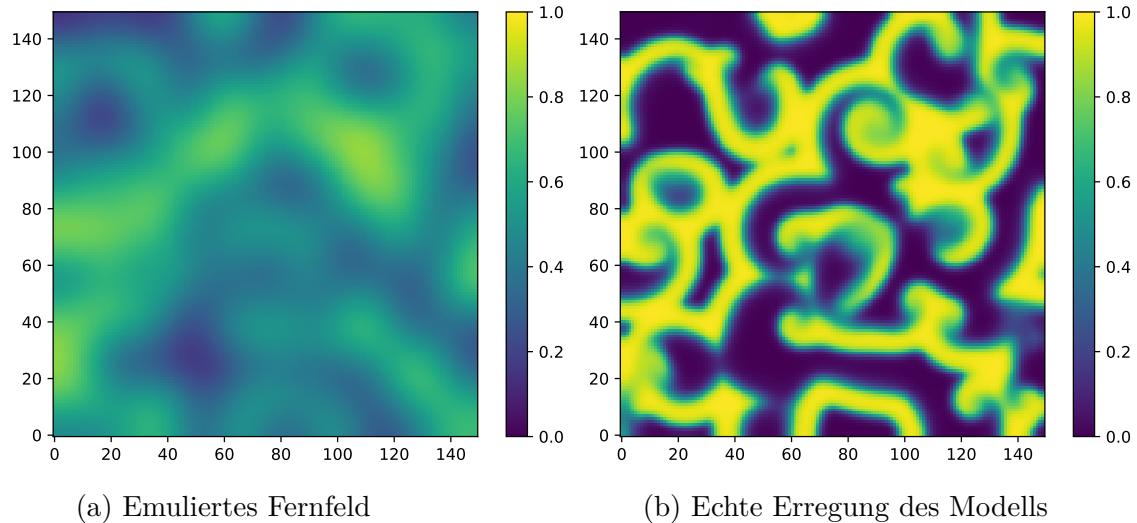


Abb. 3.6.: Graphische Darstellung der  $u$ -Variable des *Barkley*-Modells. Links ist das emulierte Fernfeld und rechts das tatsächliche  $u$ -Feld des Modells zu sehen.

### 3.3. Vorhersage der Dynamik durch das Fernfeld

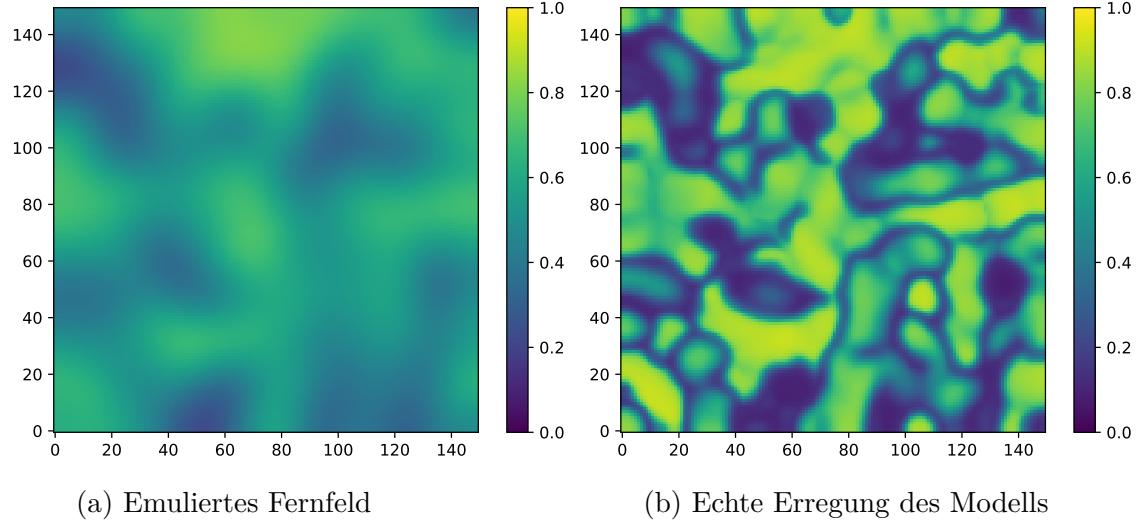


Abb. 3.7.: Graphische Darstellung der  $v$ -Variable des *Mitchell-Schaeffer*-Modells. Links ist das emulierte Fernfeld und rechts das tatsächliche  $v$ -Feld des Modells zu sehen.

#### 3.3.1. Nächste Nachbar Vorhersage

Zuerst wird diese Aufgabe erneut mit dem NN-Ansatz betrachtet. Die besten gefundenen Hyperparameter dafür sind in Tabelle 3.8 aufgelistet. Bemerkenswert ist erneut die geringe Laufzeit dieses Ansatzes. Dies wird durch die verhältnismäßig geringe Dimensionalität des Eingabevektors begünstigt. Allerdings sind die Fehlerwerte sehr hoch, sodass die Vorhersage nur geringfügig besser ist als eine Schätzung mit dem Mittelwert als Vorhersage, wie an dem  $\text{NRMSE} \approx 1.0$  ersichtlich ist.

|                | Barkley        | Mitchell-Schaeffer |
|----------------|----------------|--------------------|
| $\sigma$       | 1              | 1                  |
| $\Delta\sigma$ | 1              | 1                  |
| $\delta$       | 4              | 3                  |
| $k$            | 5              | 5                  |
| Laufzeit [s]   | 53             | 42                 |
| <b>MSE</b>     | <b>0.10089</b> | <b>0.06452</b>     |
| <b>NRMSE</b>   | <b>0.8308</b>  | <b>0.9737</b>      |

Tab. 3.8.: Ermittelte Hyperparameter der *Nächsten-Nachbar*-Vorhersage für das *Mitchell-Schaeffer*- und das *Barkley*-Modell, welche zu den geringsten Fehlern führen.

### 3. Anwendungen

#### 3.3.2. Radiale Basisfunktionen

Im Folgenden sind nun die radialen Basisfunktionen ebenfalls auf das Problem angewendet worden. Die dabei gefundenen Hyperparameter sind in Tabelle 3.9 präsentiert. Die optimalen Werte für  $\sigma$  und  $\Delta\sigma$  sind nicht mit denen des NN-Ansatzes identisch.

|                | Barkley        | Mitchell-Schaeffer |
|----------------|----------------|--------------------|
| $\sigma$       | 3              | 5                  |
| $\Delta\sigma$ | 1              | 2                  |
| $\delta$       | 3              | 3                  |
| $\sigma_{RBF}$ | 5.0            | 9.0                |
| Laufzeit [s]   | 1840           | 1842               |
| <b>MSE</b>     | <b>0.03984</b> | <b>0.03384</b>     |
| <b>NRMSE</b>   | <b>0.5170</b>  | <b>0.7052</b>      |

Tab. 3.9.: Ermittelte Hyperparameter der radialen Basisfunktionen für das *Mitchell-Schaeffer*- und das *Barkley*-Modell, welche zu den geringsten Fehlern führen.

#### 3.3.3. Echo State Network

Nachdem die klassischen Methoden bereits auf dieses Problem angewendet worden sind, kann es mittels der ESNs erneut betrachtet werden. Hierfür sind die verwendeten Hyperparameter erneut nach Abschnitt 3.1.1 gesucht worden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.10 zu finden. Auffällig ist hierbei, dass die optimale Größe  $N$  des Reservoirs für beide Modelle unter der maximal betrachteten Größe  $N \leq 400$  liegt. Dies kann ein Anzeichen dafür sein, dass für das Bewältigen der Aufgabe kein ausgeprägtes Langzeitgedächtnis vorhanden sein muss, da diese nach Abschnitt 2.4 mit der Größe  $N$  des Reservoirs skaliert.

Add more details  
on:long time memo-  
ry vs N dependency  
in theory.

### 3.3. Vorhersage der Dynamik durch das Fernfeld

|                      | Barkley             | Mitchell-Schaeffer |
|----------------------|---------------------|--------------------|
| $\sigma$             | 7                   | 7                  |
| $\Delta\sigma$       | 1                   | 1                  |
| $N$                  | 200                 | 50                 |
| $\rho( \mathbf{W} )$ | 1.50                | 0.10               |
| $\alpha$             | 0.20                | 0.05               |
| $\epsilon$           | 0.1                 | 0.1                |
| $\nu_{max}$          | $1 \times 10^{-5}$  | $1 \times 10^{-4}$ |
| $\lambda$            | $5 \times 10^{-10}$ | $5 \times 10^{-6}$ |
| Laufzeit [s]         | 1603                | 1540               |
| <b>MSE</b>           | <b>0.02443</b>      | <b>0.02645</b>     |
| <b>NRMSE</b>         | <b>0.4048</b>       | <b>0.6234</b>      |

Tab. 3.10.: Ermittelte Hyperparameter des ESN für das *Mitchell-Schaeffer*- und das *Barkley*-Modell, welche zu den geringsten Fehlern führen.

#### 3.3.4. Vergleich

Zusammenfassend können nun die Ergebnisse der drei Ansätze abermals verglichen werden. Eine vergleichende Übersicht darüber ist in Tabelle 3.11 zu finden. Auch dazu lässt sich erneut sagen, dass die ESNs die geringsten Fehlerwerte erzeugen, doch der NN-Ansatz deutlich schneller berechnet werden kann.

Zusätzlich zu der Tabelle ist noch ein exemplarischer grafischer Vergleich der Resultate der drei Ansätze mit der Zielvariable in Abbildung 3.8 dargestellt. Dort fällt auf, dass die Vorhersage des NN-Ansatzes sogar die Struktur der Dynamik kaum korrekt auflöst. Im Vergleich dazu ist die Vorhersage des RBF-Ansatzes und des ESN deutlich feiner und beinhaltet die Makrostruktur der Dynamik. Des Weiteren ist zu bemerken, dass diese mit dem ESN etwas feiner aufgelöst worden ist, als mit RBF-Ansatz. Zwar stimmen hier auch nicht die feinen Details der Dynamik mit dem Original überein, jedoch ist eine starke Verbesserung im Vergleich zu dem nachgebildeten Fernfeld zu bemerken. Unter Umständen wäre es für zukünftige Arbeiten bei dieser Aufgabe angebracht, eine andere Fehlermetrik als die mittlere quadratische Abweichung zu benutzen, welche die Ähnlichkeit zwischen den Strukturen der Felder stärker berücksichtigt.

### 3. Anwendungen

|              | Barkley   |         |                | Mitchell-Schaeffer |         |                |
|--------------|-----------|---------|----------------|--------------------|---------|----------------|
|              | NN        | RBF     | ESN            | NN                 | RBF     | ESN            |
| Laufzeit [s] | <b>53</b> | 1840    | 3604           | <b>42</b>          | 1842    | 3823           |
| MSE          | 0.10089   | 0.03984 | <b>0.02443</b> | 0.06452            | 0.03384 | <b>0.02645</b> |
| NRMSE        | 0.8308    | 0.5170  | <b>0.4048</b>  | 0.9737             | 0.7052  | <b>0.6234</b>  |

Tab. 3.11.: Vergleich der benötigten Laufzeit und des erreichten Fehlers der drei Ansätze für das *Mitchell-Schaeffer*- und das *Barkley*-Modell, die zu den geringsten Fehlern führen.

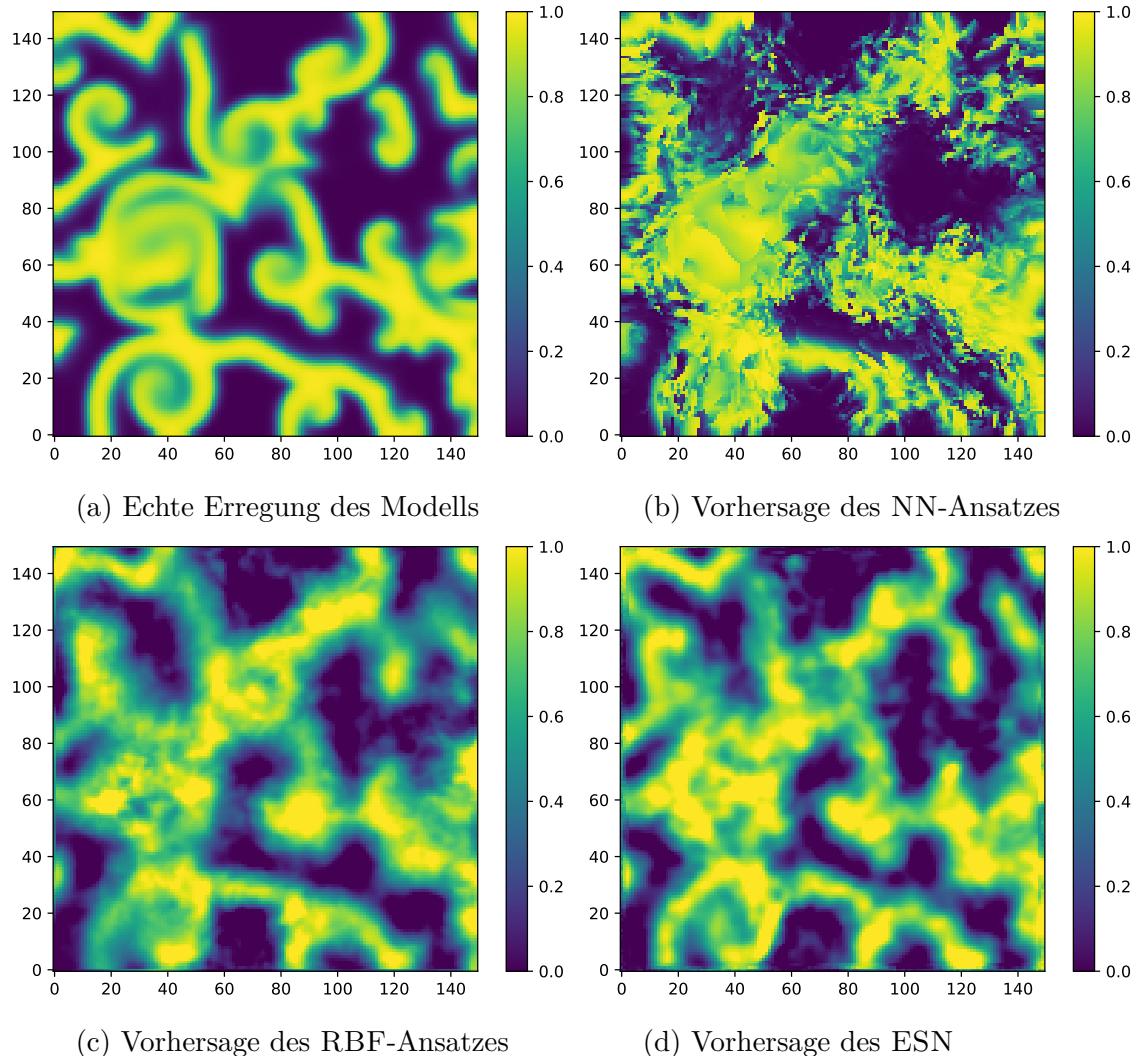


Abb. 3.8.: Graphische Darstellung der  $u$ -Variable des *Barkley*-Modells für den 100. Zeitschritt des Evaluationsdatensatzes. Oben links ist das tatsächliche Feld des Modells zu sehen. Danach folgen in Leserichtung die Vorhersagen des NN-Ansatzes, des RBF-Ansatzes und des ESN.

### 3.4. Kreuzvorhersage innerer Dynamiken

Bei Messungen der elektrischen Erregung des Herzens können nach aktuellem Stand meist nur die Erregungen auf der Herzoberfläche gemessen werden. Die Ausbreitungen im Inneren des räumlich ausgedehnten Herzens bleiben somit verborgen. Zudem ist anzunehmen, dass die Gesamtdynamik nicht nur durch die Oberfläche, sondern auch durch die Erregung im Inneren bestimmt und charakterisiert wird. So mit kommt die Frage auf, ob die innere Erregung des Herzens ausschließlich durch die Kenntnis der Oberflächendynamik vorhergesagt werden kann. In diesem Abschnitt soll versucht werden, diese Fragestellung erneut mit den ESNs und den klassischen Methoden zu untersuchen. Dabei wird diese Frage statt an einem dreidimensionalen System an den zuvor bereits benutzten zweidimensionalen Modellen untersucht.

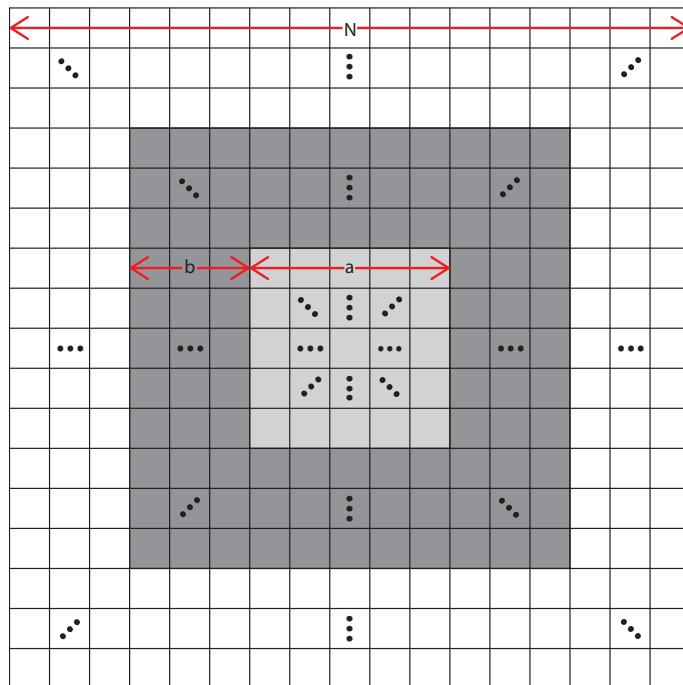


Abb. 3.9.: Darstellung des Aufbaus. Das gesamte  $N \times N$  große Feld der Spannungsvariable ist in weiß, wohingegen der vorherzusagende Bereich der Größe  $a \times a$  in hellgrau dargestellt ist. Drumherum liegt der dunkelgraue Rahmen der Breite  $b$  dessen Pixel für die Vorhersage des Inneren genutzt werden.

Hierbei wird nur das Feld der Spannungsvariable betrachtet. In diesem  $N \times N$  Einheiten großen Feld wird ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a$  ausgewählt, für dessen

### 3. Anwendungen

Pixel die Spannungsvariable bestimmt werden soll. Dazu wird um das innere Quadrat ein Rahmen der Breite  $b$  gewählt und die Spannungsvariable der beinhalteten Pixel als Quelle genutzt. Eine graphische Illustration dieses Aufbaus ist in Abbildung 3.9 dargestellt. Somit wird die Spannung im Inneren für  $a^2$  Punkte durch die Kenntnis der  $(a + 2b)^2 - a^2$  umgebenden Pixel vorhergesagt.

Dieses Szenario ist für die in Tabelle 3.12 angegebenen Parameterkombinationen durchgeführt worden. Im Folgenden werden jeweils nur die gefundenen Hyperparameter und Ergebnisse für den  $b$ -Wert vorgestellt, der zu dem geringsten Fehler führt.

| $a$ | 4     | 8     | 16    | 32    | 64    | 128*  | 146* | 148* |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| $b$ | 1 2 3 | 1 2 3 | 1 2 3 | 1 2 3 | 1 2 3 | 1 2 3 | 2 1  | 1    |

Tab. 3.12.: Verwendete Parameter  $a$  und  $b$  für die Abmessungen des inneren und äußeren Quadrates. Die mit \* markierten Werte sind nur für die ESNs untersucht worden.

#### 3.4.1. Nächste-Nachbar-Vorhersage

Für die letzte Aufgabe ist zuerst der NN-Ansatz getestet worden. Es ist anzumerken, dass dieser nicht für alle Parameterkombinationen  $a, b$  aus Tabelle 3.12 durchgeführt worden ist, da der Rechenaufwand teilweise zu groß geworden ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Dimension der Eingabevervariablen mit

$$(a + 2b)^2 - a^2 = 4b^2 + 4ab$$

skaliert. Da zudem die Rechenzeit für diesen Ansatz nach 2.2.2 für wachsende Dimensionen sehr stark zunimmt, kann diese Aufgabe für große Abmessungen des vorherzusagenden Bereiches nicht mehr in einer angebrachten Zeit berechnet werden. Die optimalen gefundenen Hyperparameter und die damit erreichten Ergebnisse sind in Tabelle 3.13 aufgelistet.

Auffällig ist, dass die Qualität der Vorhersage mit steigendem  $a$  stark abnimmt. So kann für das *Barkley*-Modell nur für  $a \in \{4, 8\}$  ein NRMSE, der deutlich unter 0.50 liegt, erreicht werden. Für größere Bereiche steigt der NRMSE sogar auf  $> 1.0$  an, sodass die Vorhersage nicht mehr präzisere Ergebnisse liefert als eine naive Vorhersage mittels des Mittelwertes des Trainingsdatensatzes. Die Vorhersagen des

### 3.4. Kreuzvorhersage innerer Dynamiken

|              | Barkley        |                |                |                |                |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $a$          | 4              | 8              | 16             | 32             | 64             |
| $b$          | 1              | 1              | 1              | 1              | 1              |
| $\delta$     | 3              | 3              | 4              | 3              | 3              |
| $k$          | 5              | 5              | 5              | 4              | 5              |
| Laufzeit [s] | $\approx 1$    | 8              | 287            | 1809           | 14754          |
| MSE          | <b>0.00368</b> | <b>0.01572</b> | <b>0.09410</b> | <b>0.20458</b> | <b>0.26571</b> |
| NRMSE        | <b>0.3517</b>  | <b>0.3914</b>  | <b>0.7726</b>  | <b>1.1640</b>  | <b>1.2963</b>  |

|              | Mitchell-Schaeffer |                |                |                |                |
|--------------|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $a$          | 4                  | 8              | 16             | 32             | 64             |
| $b$          | 1                  | 1              | 1              | 1              | 1              |
| $\delta$     | 3                  | 3              | 3              | 4              | 4              |
| $k$          | 5                  | 5              | 5              | 5              | 5              |
| Laufzeit [s] | $\approx 1$        | 17             | 194            | 2482           | 20272          |
| MSE          | <b>0.00463</b>     | <b>0.02182</b> | <b>0.08295</b> | <b>0.10699</b> | <b>0.12297</b> |
| NRMSE        | <b>0.5160</b>      | <b>0.6365</b>  | <b>0.9888</b>  | <b>1.1646</b>  | <b>1.1837</b>  |

Tab. 3.13.: Ermittelte Hyperparameter der *Nächsten-Nachbar*-Vorhersage und Werte für  $b$  für das *Barkley*-Modell (oben) und das *Mitchell-Schaeffer*-Modell (unten) für verschiedene Größen  $a$  des vorherzusagenden Bereichs, welche zu den geringsten Fehlern führen.

*Mitchell-Schaeffer*-Modells zeigen eine gleichartige Tendenz, dennoch ist hier der Fehler für die kleinste innere Abmessung  $a = 4$  deutlich stärker als im *Barkley*-Modell.

#### 3.4.2. Radiale Basisfunktionen

Analog zu den vorherigen Ausführungen sind die radialen Basisfunktionen ebenfalls auf dieses Problem angewendet worden. Dabei ist mit einer analogen Begründung, wie bei den nächsten Nachbarn, nur der eingeschränkte Wertebereich für  $a$  durchlaufen worden. Die dafür gefundenen Hyperparameter und die Fehler können der Tabelle 3.14 entnommen werden.

Es ist anzumerken, dass der NRMSE für beide Modelle und alle betrachteten Größen  $a$  kleiner als 1.0 bleibt. Nichtsdestotrotz steigt er ebenfalls mit wachsendem  $a$  an, wie auch schon bei den nächsten Nachbarn. Für die größten beiden  $a$ -Werte ist in beiden Modellen der Fehler allerdings schon so groß, dass die Vorhersage kaum nützliche Informationen liefert.

### 3. Anwendungen

|                | Barkley        |                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $a$            | 4              | 8              | 16             | 32             | 64             |
| $b$            | 1              | 1              | 1              | 1              | 1              |
| $\delta$       | 3              | 3              | 4              | 4              | 3              |
| $\sigma_{RBF}$ | 9              | 5              | 9              | 9              | 7              |
| Laufzeit [s]   | $\approx 1$    | 8              | 45             | 260            | 1839           |
| <b>MSE</b>     | <b>0.00051</b> | <b>0.00450</b> | <b>0.04009</b> | <b>0.08783</b> | <b>0.13903</b> |
| <b>NRMSE</b>   | <b>0.0601</b>  | <b>0.1909</b>  | <b>0.4885</b>  | <b>0.8816</b>  | <b>0.9805</b>  |

|                | Mitchell-Schaeffer |                |                |                |                |
|----------------|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $a$            | 4                  | 8              | 16             | 32             | 64             |
| $b$            | 1                  | 1              | 1              | 1              | 1              |
| $\delta$       | 3                  | 3              | 3              | 4              | 4              |
| $\sigma_{RBF}$ | 9                  | 9              | 9              | 5              | 7              |
| Laufzeit [s]   | $\approx 1$        | 7              | 43             | 237            | 1756           |
| <b>MSE</b>     | <b>0.00064</b>     | <b>0.00497</b> | <b>0.02220</b> | <b>0.04745</b> | <b>0.05588</b> |
| <b>NRMSE</b>   | <b>0.0925</b>      | <b>0.2842</b>  | <b>0.7178</b>  | <b>0.9530</b>  | <b>1.0094</b>  |

Tab. 3.14.: Ermittelte Hyperparameter der radialen Basisfunktionen und Werte für  $b$  für das *Barkley*-Modell (oben) und das *Mitchell-Schaeffer*-Modell (unten) für verschiedene Größen  $a$  des vorherzusagenden Bereichs, welche zu den geringsten Fehlern führen.

### 3.4.3. Echo State Network

Im Gegensatz zu den anderen beiden Methoden wächst die benötigte Rechenzeit bei der Verwendung der ESNs nicht so schnell an. Folglich können hiermit auch deutlich größere innere Felder betrachtet werden. Zur Optimierung des Ansatzes ist erneut das in Abschnitt 3.1.1 beschriebene Verfahren durchgeführt worden. Es ist allerdings so modifiziert worden, dass bei der groben Hyperparameterbestimmung des ESN vier Punkte, statt wie zuvor ein Punkt, des inneren Quadrates betrachtet worden sind.

Zudem ergibt sich bei dieser Aufgabe ein weiteres Problem, das eine Modifikation erfordert: In den vorherigen Aufgaben ist die Dimension des Eingangssignals in das ESN  $N_u < 50$  gewesen. Nun wächst die Dimension des Eingangssignals allerdings sehr stark mit  $N_u = 4b(b + a)$  an. Dies würde bei der Konstruktion der Eingangsmatrix  $\mathbf{W}_{\text{in}}$  nach Abschnitt 2.4.1 dazu führen, dass die inneren Einheiten des Reservoirs zu viele Eingangssignale erhalten und somit unter Umständen schnell

### 3.4. Kreuzvorhersage innerer Dynamiken

zu einer Sättigung des  $\tanh(\cdot)$  in der zeitlichen Entwicklungsgleichung 2.20 führt. Um dies zu lösen ist ein neuer Hyperparameter  $\eta$  eingeführt worden, der die Anzahl von Eingangssignalen pro innerer Einheit beschränkt. Dadurch wird die Matrix  $\mathbf{W}_{\text{in}}$  dünn besetzt. Dies wird zusätzlich dadurch motiviert, dass viele Einträge des Eingangssignals aus Bildpunkten mit einem geringen Abstand zueinander stammen, wodurch redundante Informationen eingespeist werden würden. Durch eine dünn besetzte Matrix  $\mathbf{W}_{\text{in}}$  kann dieser Effekt reduziert werden. Des Weiteren wird versucht eine reichhaltigere innere Dynamik durch diesen Schritt, analog zu der Begründung der Dünnbesetztheit der Matrix  $\mathbf{W}$ , zu erzeugen.

Bei der Untersuchung ist auch ersichtlich geworden, dass der untersuchte Bereich der Regularisierung  $\lambda \in [5 \times 10^{-2}, 5 \times 10^{-6}]$  zu gering ist, da der optimale Wert stets am linken Rand des Intervalls gefunden worden ist. Deswegen ist ergänzend eine Suche auf dem größeren Parameterbereich  $\lambda \in [5 \times 10^{-4}, 5 \times 10^4]$  durchgeführt worden. In Tabelle 3.15 sind die Fehler und benötigten Laufzeiten für die besten Reservoirs für die beiden Modelle aufgelistet. Die ermittelten Hyperparameter sind in den Tabellen A.2 und A.3 aufgeführt. Es kann erneut der Trend beobachtet werden, dass der Fehler mit steigendem  $a$  ebenso zunimmt, und der Fehler im *Mitchell-Schaffer*-Modell für kleine Werte für  $a$  größer ist als im *Barkley*-Modell.

|              | Barkley        |                |                |                |                |                |                |  |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--|
| $a$          | 4              | 8              | 16             | 32             | 64             | 128            | 148            |  |
| $b$          | 2              |                | 2              |                | 2              |                | 1              |  |
| Laufzeit [s] | 5              |                | 15             |                | 60             |                | 170            |  |
| MSE          | <b>0.00005</b> | <b>0.00111</b> | <b>0.01447</b> | <b>0.09301</b> | <b>0.13093</b> | <b>0.15106</b> | <b>0.18380</b> |  |
| NRMSE        | <b>0.0121</b>  | <b>0.0801</b>  | <b>0.3386</b>  | <b>0.7398</b>  | <b>0.9438</b>  | <b>1.0098</b>  | <b>1.1049</b>  |  |

|              | Mitchell-Schaeffer |                |                |                |                |                |                |  |
|--------------|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--|
| $a$          | 4                  | 8              | 16             | 32             | 64             | 128            | 148            |  |
| $b$          | 1                  |                | 3              |                | 2              |                | 1              |  |
| Laufzeit [s] | 3                  |                | 9              |                | 27             |                | 121            |  |
| MSE          | <b>0.00023</b>     | <b>0.00177</b> | <b>0.02969</b> | <b>0.05061</b> | <b>0.06330</b> | <b>0.06842</b> | <b>0.06761</b> |  |
| NRMSE        | <b>0.0661</b>      | <b>0.1704</b>  | <b>0.6703</b>  | <b>0.8861</b>  | <b>0.9775</b>  | <b>1.0166</b>  | <b>1.0049</b>  |  |

Tab. 3.15.: Auflistung der Fehlerwerte MSE und NRMSE zusammen mit der Laufzeit für das jeweils beste ESN, welches zu den geringsten Fehlern führt, für das *Barkley*-Modell (oben) und das *Mitchell-Schaeffer*-Modell (unten) für verschiedene Größen  $a$  des vorherzusagenden Bereichs. Dabei ist der Wert für  $b$  ebenfalls optimiert worden.

### 3. Anwendungen

Es ist anzunehmen, dass für die Vorhersage eines Punktes der weit von den bekannten Randwerten entfernt liegt, nicht nur sein vorheriger Wert und die aktuellen Randwerte benötigt werden. Vielmehr werden die vergangenen Randwerte einen starken Einfluss nehmen. Dies kann anhand eines Beispiels schnell deutlich gemacht werden: Würde eine ebene Welle durch das Feld propagieren, so können weit entfernte Punkte erst deutlich nachdem die Welle durch die Ränder hindurch gelaufen ist, hiervon beeinflusst werden. Somit benötigt das System eine ausgeprägte Gedächtnisleistung. Bei den ESNs skaliert nach 2.4 die Gedächtnisleistung mit der Größe  $N$  des Netzwerkes. Es wäre also anzunehmen, dass möglichst große Reservoirs eine optimale Leistung erzielen können. Dies kann experimentell nicht bestätigt werden. So erzielen zwar teilweise die größtmöglichen Reservoirs ( $N = 400$ ) die besten Ergebnisse, doch gibt es auch Werte für  $a$ , bei denen kleinere Reservoirs ( $N = 50$ ) besser arbeiten.

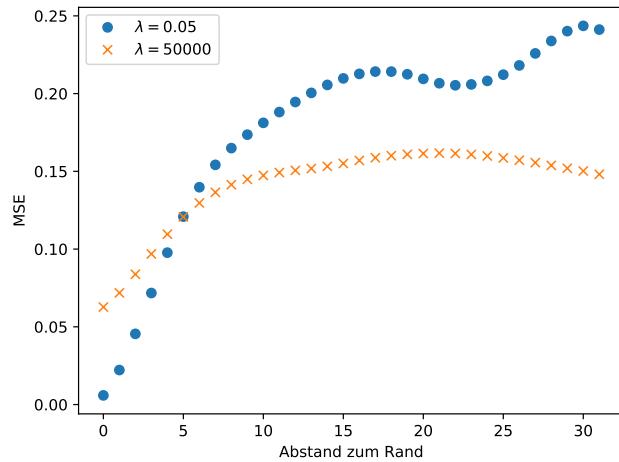


Abb. 3.10.: Graphische Darstellung der Abhängigkeit des MSE für die Vorhersage der  $u$ -Variable des *Barkley*-Modells vom Abstand zum Rand. In Blau ist die Abhängigkeit für das ESNs mit starker und in Orange für das mit schwacher Regularisierung dargestellt.

Um den Einfluss der Regularisierung hervorzuheben, sind in Abbildung 3.11 die Vorhersagen des optimalen Reservoir mit der hohen Regularisierung ( $\lambda = 5 \times 10^4$ ) und eines zuvor ermittelten Reservoirs mit einer geringeren Regularisierung ( $\lambda = 0.05$ ) exemplarisch für das *Barkley*-Modell dargestellt. Im Falle der starken Regularisierung ist die Vorhersage stark verschwommen und so wird beinahe der Mittelwert

der Erregung anstelle der feineren Strukturen vorhergesagt. Dagegen wird bei der geringeren Regularisierung eine feinere Struktur bestimmt. Zudem ist in Abbildung 3.10 die Abhängigkeit des mittleren quadratischen Fehlers für jene beiden Reservoirs dargestellt. Dabei ist zu erkennen, dass für geringe Abstände die Vorhersage mit der kleinen Regularisierung deutlich kleinere Fehler verursacht, wohingegen ab einem Abstand von fünf Gitterpunkten eine stärkere Regularisierung geringere Fehler erzeugt. Des Weiteren scheint der Fehler dabei schnell gegen eine obere Schranke zu konvergieren. Dies lässt sich damit vereinbaren, dass dieses Reservoir hauptsächlich noch den Mittelwert der Dynamik vorhersagt.

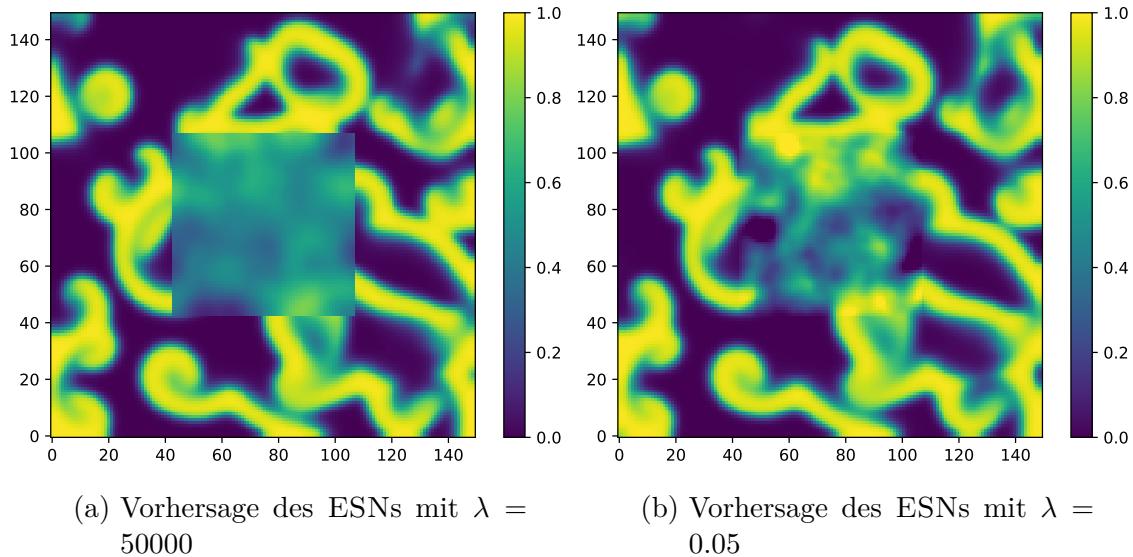
[Add details?](#)


Abb. 3.11.: Graphische Darstellung der  $u$ -Variable des *Barkley*-Modells für den 1000. Zeitschritt des Evaluationsdatensatzes. Links ist die Vorhersage des ESNs mit starker und rechts mit schwacher Regularisierung dargestellt.

### 3.4.4. Vergleich

Zuerst kann bemerkt werden, dass für den NN- und den RBF-Ansatz der optimale Wert für die Randdicke  $b = 1$  lautet, wohingegen bei den ESNs Werte mit  $b > 1$  besserer Ergebnisse liefern. Dieser Unterschied lässt sich dadurch erklären, dass das Eingangssignal für das ESN nicht vollständig genutzt worden ist, sondern durch die Verwendung der dunnenbesetzten Eingangsmatrix  $\mathbf{W}_{\text{in}}$  nur einzelne zufällig ausgewählte Punkte genutzt worden sind. Somit können in diesem Fall, durch einen breiteren Rand, Eingangssignale aus einer größeren Menge an unterschiedlichen Signalen gewählt werden. Für einen genaueren Vergleich der drei Methoden bietet es

[Make this more clear.](#)

### 3. Anwendungen

sich an die Ergebnisse für den größten  $a$ -Wert durchzuführen, der mit allen drei Ansätzen betrachtet worden ist. Dieser Anforderung entspricht der Wert  $a = 64$ . Eine Übersicht der verschiedenen Ergebnisse ist in Tabelle 3.16 zu finden.

|              | Barkley |         |                | Mitchell-Schaeffer |         |                |
|--------------|---------|---------|----------------|--------------------|---------|----------------|
|              | NN      | RBF     | ESN            | NN                 | RBF     | ESN            |
| Laufzeit [s] | 14754   | 1845    | <b>1206</b>    | 20272              | 1756    | <b>1089</b>    |
| MSE          | 0.24599 | 0.13615 | <b>0.12882</b> | 0.09283            | 0.05588 | <b>0.05464</b> |
| NRMSE        | 1.2963  | 0.9805  | <b>0.9438</b>  | 1.1837             | 1.0094  | <b>0.9081</b>  |

Tab. 3.16.: Vergleich der benötigten Laufzeit und des erreichten Fehlers der drei Ansätze für das *Mitchell-Schaeffer*- und das *Barkley*-Modell für  $a = 64$ , welche zu den geringsten Fehlern führen.

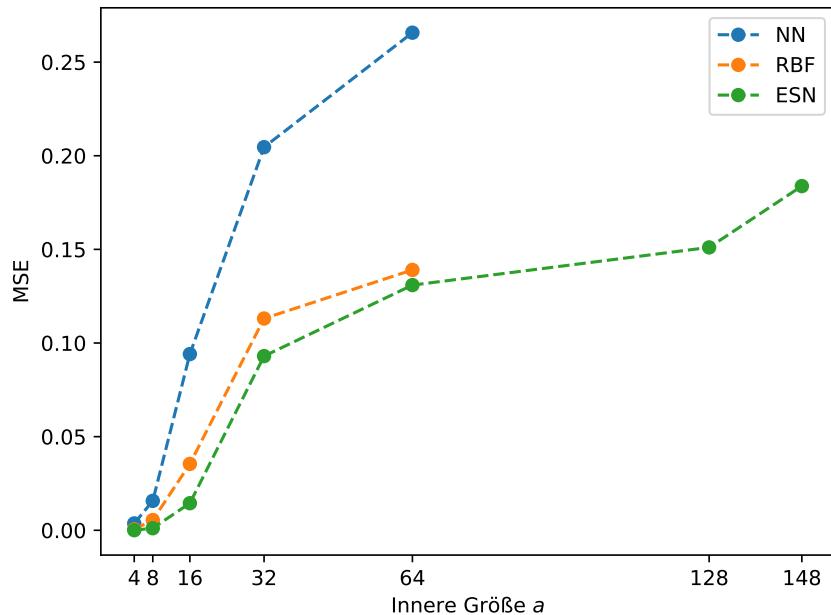


Abb. 3.12.: Graphische Darstellung des Fehlerwertes MSE für die drei verschiedenen Ansätze in Abhängigkeit von der Größe  $a$  des vorherzusagenden Bereichs für das *Barkley*-Modell.

Ergänzend ist ein grafischer Vergleich der Fehlerwerte MSE durchgeführt worden, welcher in Abbildung 3.12 für das *Barkley*-Modell zu finden ist. Eine analoge Darstellung für das *Mitchell-Schaeffer*-Modell ist in Abbildung B.7 aufgetragen. Wieder zeigt sich, dass die Vorhersagen der klassischen Methoden einen höheren Fehler haben. Während der NN-Ansatz bei beiden Modellen schlechtere Ergebnisse als die

### 3.4. Kreuzvorhersage innerer Dynamiken

Vorhersage mittels des Mittelwertes liefert, sind die radialen Basisfunktionen und die ESNs geringfügig besser als diese. Dabei erreichen die ESNs und radialen Basisfunktionen in etwa die gleiche Genauigkeit. Da der NRMSE für beide Methoden nah an 1.0 liegt, ist die Vorhersage kaum besser als die Vorhersage mittels des Mittelwertes. Die Vorhersagequalität reicht bei keiner der drei Methoden aus, um sie tatsächlich sinnvoll verwenden zu können.

Des Weiteren wächst der Fehler mit steigender Größe des vorherzusagenden Bereiches bei allen drei Ansätzen an. Es ist somit zu vermuten, dass dies nicht nur eine reine Beschränkung der einzelnen Methoden ist, sondern dass es womöglich eine Eigenschaft der betrachteten Modelle ist.

In Abbildung 3.13 werden exemplarisch die aus den drei Ansätzen resultierenden Felder der Spannungsvariable  $u(t)$  des *Barkley*-Modells, zusammen mit dem originalen Feld, dargestellt. Eine analoge Darstellung für das *Mitchell-Schaeffer*-Modell ist im Anhang als Abbildung B.4 zu finden. Es fällt auf, dass sowohl die Vorhersage der RBF als auch die des ESN stark verschwommen ist und kaum Details zeigt. Im Gegensatz dazu macht der NN-Ansatz eine sehr scharfe Vorhersage. Dies ist da hingehend interessant, als das zum einen jeder Bildpunkt einzeln vorhersagt wird, und zum anderen immer die nächsten fünf Nachbarn genutzt werden. Daraus können zwei Konsequenzen folgen. Erstens spricht die hohe Auflösung dafür, dass die Vorhersage nahezu perfekt einem Bereich aus den Trainingsdaten entspricht. Da die Vorhersage aber (zumindest in diesem Moment) nicht gut mit dem Original übereinstimmt, bedeutet dies, dass die Verzögerungskoordinaten, die genutzt worden sind, den Bereich nicht eindeutig beschreiben. Zweitens kann daraus auch gefolgert werden, dass für diese Aufgabe die Länge der Trainingsdaten zu gering gewählt worden ist.

Add comparison images

### 3. Anwendungen

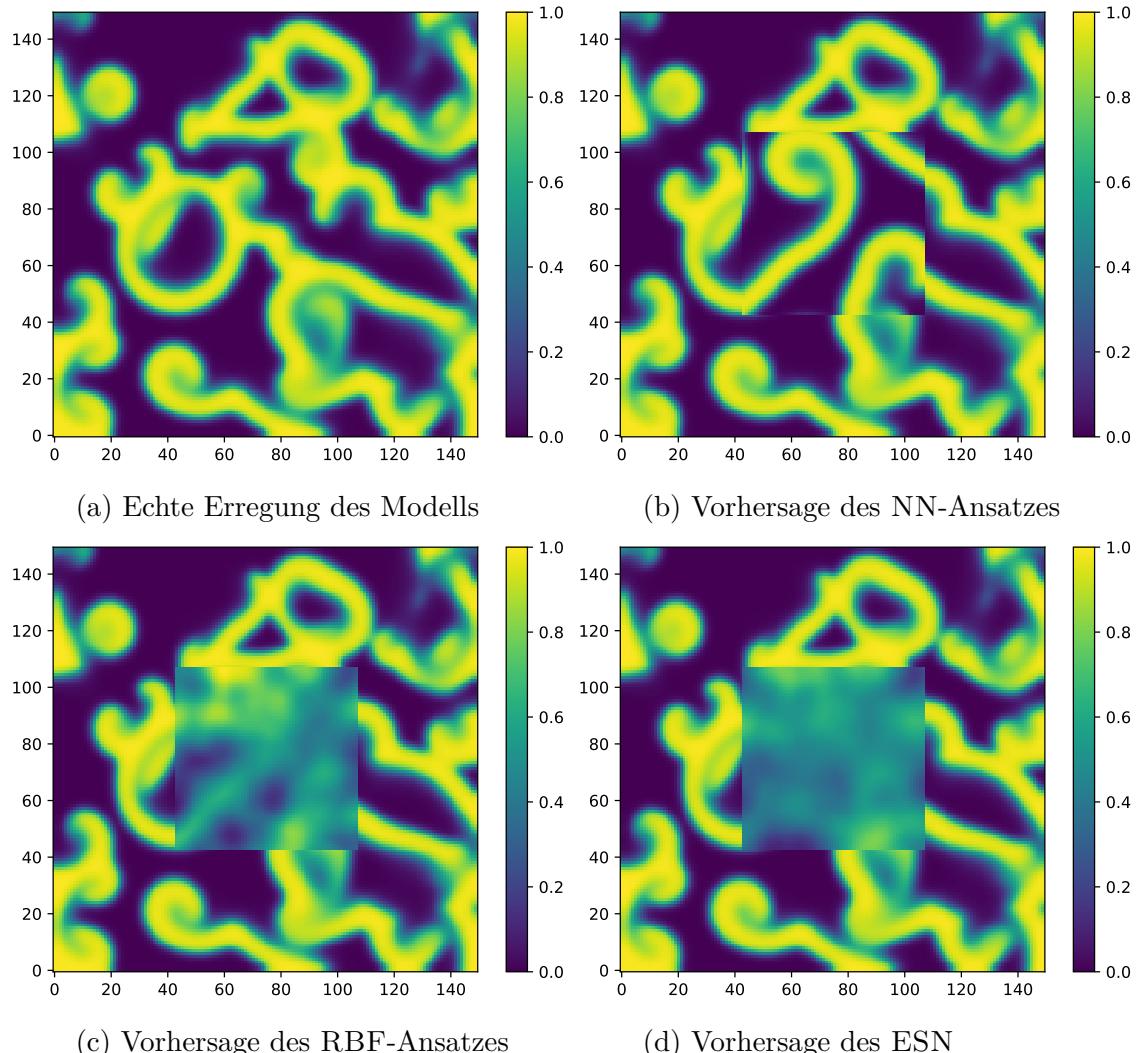


Abb. 3.13.: Graphische Darstellung der  $u$ -Variable des *Barkley*-Modells für den 1000. Zeitschritt des Evaluationsdatensatzes für  $a = 64$ . Oben links ist das tatsächliche Feld des Modells zu sehen. Danach folgenden im Uhrzeigersinn die Vorhersagen des NN-Ansatzes, des RBF-Ansatzes und des ESN.

## 4. Fazit

In dieser Arbeit ist die Anwendung von *Echo State Networks* für die Vorhersage von raumzeitlichen Dynamiken erregbarer Systeme untersucht worden. Dies ist anhand des *Barkley*-, des *Mitchell-Schaeffer*- und des *Bueno-Orovio-Cherry-Fenton*-Modells durchgeführt worden. Für die Vorhersage der raumzeitlichen Dynamiken ist ein sogenannter *Messsondenansatz* entwickelt und verwendet worden, bei dem nur lokal benachbarte Informationen für die Vorhersage genutzt werden.

Um die experimentellen Ergebnisse des ESNs einordnen zu können, sind sie mit den Ergebnissen eines *Nächsten-Nachbar*-Ansatzes und *radialer Basisfunktionen* verglichen worden. Dabei sind verschiedene Anwendungsarten betrachtet worden, welche für die wissenschaftliche Untersuchung von Herzen relevant sind: Zuerst ist eine nicht gemessene aus einer gemessenen Systemvariable (Kreuzvorhersage) bestimmt worden. Darauffolgend ist die elektrische Erregung auf der Herzoberfläche anhand des Fernfelds einer Elektrodenmessung rekonstruiert worden. Abschließend ist versucht worden, die elektrische Erregung für unbekannte Regionen aus der Kenntnis weniger Randwerte vorzunehmen.

Insgesamt ist deutlich geworden, dass durch die Verwendung der *Echo State Networks* in jedem Anwendungsbereich eine größere Genauigkeit erzielt werden konnte. Daraus folgt, dass die ESNs eine gut geeignete Methode zur Untersuchung und Vorhersage raumzeitlicher Dynamiken erregbarer Medien darstellen. Dieses Ergebnis stimmt mit den aktuellen wissenschaftlichen Erkenntnissen in diesem Bereich überein [14].

Im Detail konnte die Kreuzvorhersage zwischen den zwei Systemvariablen nahezu fehlerfrei gelöst werden. Dies ist neben dem *Barkley*- und dem *Mitchell-Schaeffer*-Modell auch für *BOCF*-Modell, welches über mehr Systemvariablen verfügt, gelungen. Es bietet sich in weiterführenden Arbeiten an, die Kreuzvorhersage für weitere

#### 4. Fazit

Systeme mit mehreren Variablen zu betrachten, um den Einfluss der Anzahl der Variablen auf die Genauigkeit der Vorhersage zu quantifizieren. Bei der Rekonstruktion der elektrischen Erregung konnte zudem die makroskopische Struktur der Dynamik rekonstruiert werden, aber nicht die Detailstruktur. Die Vorhersage des unbekannten Bereiches durch die Randwerte konnte nicht zufriedenstellend gelöst werden. Bereits für geringe Größen des vorherzusagenden Bereichs stieg der Fehler sowohl bei dem ESN als auch bei den Referenzmethoden sehr stark an. Dies kann ein Hinweis auf eine generelle physikalische Beschränktheit solcher Voraussagen sein. Es empfiehlt sich auch dieses Phänomen weiter zu untersuchen.

Es hat sich zudem herausgestellt, dass die Gewichtsmatrix  $\mathbf{W}_{\text{out}}$  für verschiedene Bildpunkte eine große Ähnlichkeit aufzeigt. Somit bietet es sich an dieses Verhalten weiter zu betrachten und zu analysieren. Durch die Verwendung einer einzigen Auslesematrix lässt sich die Geschwindigkeit des ESN stark erhöhen. Zusätzlich wäre auch ein Einsatz anderer Methoden aus dem Bereich des *Machine Learnings* als Ersatz für die Auslesematrix, wie beispielsweise FFNNs, denkbar.

## **5. Danksagungen**

Zuerst möchte ich Herrn Professor Ulrich Parlitz für die ausführliche Betreuung und Unterstützung beim Schreiben dieser Bachelorarbeit danken. Ein weiterer Dank gilt Herrn Professor Florentin Wörgötter für seine Funktion als Zweitgutachter danken. Außerdem bedanke ich bei Thomas Lilienkamp für seine Ratschläge bei technischen Problemen und den hilfreichen Ideenaustauschen. Zudem bedanke ich mich bei Felix Zimmermann, Pauline Gärtner, Philip Dietrich und Timo Mutas für das Korrekturlesen dieser Arbeit.



# **Anhang**



# A. Tabellen

|               |             |             |            |              |             |                  |               |              |               |
|---------------|-------------|-------------|------------|--------------|-------------|------------------|---------------|--------------|---------------|
| $u_o$         | $u_u$       | $\theta_v$  | $\theta_w$ | $\theta_v^-$ | $\theta_o$  | $\tau_{v1}^-$    | $\tau_{v2}^-$ | $\tau_v^+$   | $\tau_{w1}^-$ |
| 0             | 1.58        | 0.3         | 0.015      | 0.015        | 0.006       | 60               | 1150          | 1.4506       | 70            |
| $\tau_{w2}^-$ | $k_w^-$     | $u_w^-$     | $\tau_w^+$ | $\tau_{fi}$  | $\tau_{o1}$ | $\tau_{o2}$      | $\tau_{so1}$  | $\tau_{so2}$ | $k_{so}$      |
| 20            | 65          | 0.03        | 280        | 0.11         | 6           | 6                | 43            | 0.2          | 2             |
| $u_{so}$      | $\tau_{s1}$ | $\tau_{s2}$ | $k_s$      | $u_s$        | $\tau_{si}$ | $\tau_{w\infty}$ | $w_\infty^*$  |              |               |
| 0.65          | 2.7342      | 3           | 2.0994     | 0.9087       | 2.8723      | 0.07             | 0.94          |              |               |

Tab. A.1.: Auflistung der verwendeten Konstanten des *TNPP*-Satzes für das *Bueno-Orovio-Cherry-Fenton-Modell*.

| Barkley              |                    |                    |                    |                    |                    |                    |                    |
|----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $a$                  | 4                  | 8                  | 16                 | 32                 | 64                 | 128                | 148                |
| $b$                  | 2                  | 2                  | 2                  | 2                  | 1                  | 2                  | 1                  |
| $N$                  | 400                | 400                | 400                | 200                | 400                | 200                | 50                 |
| $\rho( \mathbf{W} )$ | 0.5                | 0.1                | 1.1                | 1.5                | 1.1                | 1.1                | 1.5                |
| $\alpha$             | 0.95               | 0.95               | 0.20               | 0.05               | 0.05               | 0.20               | 0.05               |
| $\epsilon$           | 0.2                | 0.2                | 0.1                | 0.1                | 0.2                | 0.2                | 0.2                |
| $\nu_{max}$          | $1 \times 10^{-4}$ | $1 \times 10^{-4}$ | $1 \times 10^{-5}$ | $1 \times 10^{-4}$ | $1 \times 10^{-5}$ | $1 \times 10^{-4}$ | $1 \times 10^{-5}$ |
| $\lambda$            | $5 \times 10^{-4}$ | $5 \times 10^{-4}$ | 5                  | $5 \times 10^2$    | $5 \times 10^4$    | $5 \times 10^3$    | 5                  |
| $\eta$               | 20                 | 5                  | 5                  | 100                | 100                | 20                 | 10                 |
| Laufzeit [s]         | 5                  | 15                 | 60                 | 170                | 1922               | 3320               | 2970               |
| MSE                  | <b>0.00005</b>     | <b>0.00111</b>     | <b>0.01447</b>     | <b>0.09301</b>     | <b>0.13093</b>     | <b>0.15106</b>     | <b>0.18380</b>     |
| NRMSE                | <b>0.0121</b>      | <b>0.0801</b>      | <b>0.3386</b>      | <b>0.7398</b>      | <b>0.9438</b>      | <b>1.0098</b>      | <b>1.1049</b>      |

Tab. A.2.: Vollständige Auflistung der gefundenen Hyperparameter der ESNs für das *Barkley*-Modell für verschiedene Größen  $a$  des vorherzusagenden Bereichs, welche zu den geringsten Fehlern führen. Zudem sind die benötigte Laufzeit und die erreichten Fehler angeführt. Die Größe  $b$  ist ebenfalls optimiert worden.

## A. Tabellen

|                      | Mitchell-Schaeffer |                    |                    |                    |                    |                    |                    |  |
|----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--|
| $a$                  | 4                  | 8                  | 16                 | 32                 | 64                 | 128                | 148                |  |
| $b$                  | 1                  | 3                  | 2                  | 2                  | 1                  | 2                  | 1                  |  |
| $N$                  | 400                | 200                | 50                 | 50                 | 50                 | 200                | 50                 |  |
| $\rho( \mathbf{W} )$ | 1.5                | 0.1                | 1.5                | 1.1                | 3.0                | 1.1                | 1.5                |  |
| $\alpha$             | 0.95               | 0.95               | 0.50               | 0.20               | 0.50               | 0.20               | 0.70               |  |
| $\epsilon$           | 0.1                | 0.2                | 0.1                | 0.1                | 0.1                | 0.2                | 0.2                |  |
| $\nu_{max}$          | $1 \times 10^{-4}$ | $1 \times 10^{-4}$ | $1 \times 10^{-4}$ | $1 \times 10^{-4}$ | $1 \times 10^{-5}$ | $1 \times 10^{-4}$ | $1 \times 10^{-5}$ |  |
| $\lambda$            | 5                  | $5 \times 10^{-1}$ | 5                  | $5 \times 10^3$    | $5 \times 10^3$    | $5 \times 10^4$    | $5 \times 10^4$    |  |
| $\eta$               | 20                 | 50                 | 15                 | 5                  | 100                | 10                 | 15                 |  |
| Laufzeit [s]         | 3                  | 9                  | 27                 | 121                | 548                | 3322               | 3021               |  |
| MSE                  | <b>0.00023</b>     | <b>0.00177</b>     | <b>0.02969</b>     | <b>0.05061</b>     | <b>0.06330</b>     | <b>0.06842</b>     | <b>0.06761</b>     |  |
| NRMSE                | <b>0.0661</b>      | <b>0.1704</b>      | <b>0.6703</b>      | <b>0.8861</b>      | <b>0.9775</b>      | <b>1.0166</b>      | <b>1.0049</b>      |  |

Tab. A.3.: Vollständige Auflistung der gefundenen Hyperparameter der ESNs für das *Mitchell-Schaeffer*-Modell für verschiedene Größen  $a$  des vorherzusagenden Bereichs, welche zu den geringsten Fehlern führen. Zudem sind die benötigte Laufzeit und die erreichten Fehler angeführt. Die Größe  $b$  ist ebenfalls optimiert worden.

## B. Abbildungen

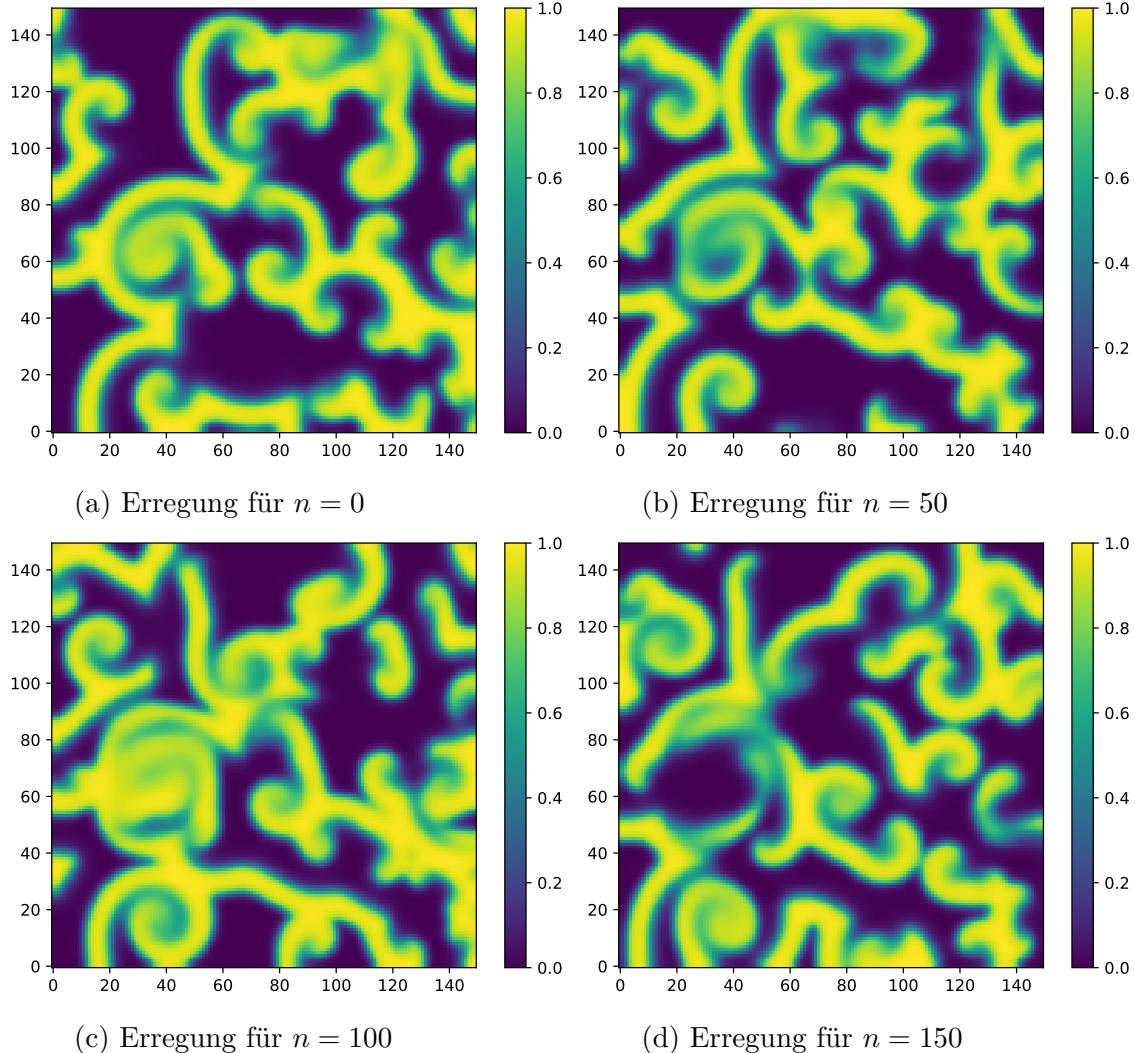


Abb. B.1.: Graphische Darstellung der zeitlichen Entwicklung der  $u$ -Variable des *Barkley*-Modells. In Leserichtung sind die Felder der  $u$ -Variable für die Zeitpunkte  $t = 0, 50, 100, 150$  des Evaluationsdatensatzes dargestellt.

## B. Abbildungen

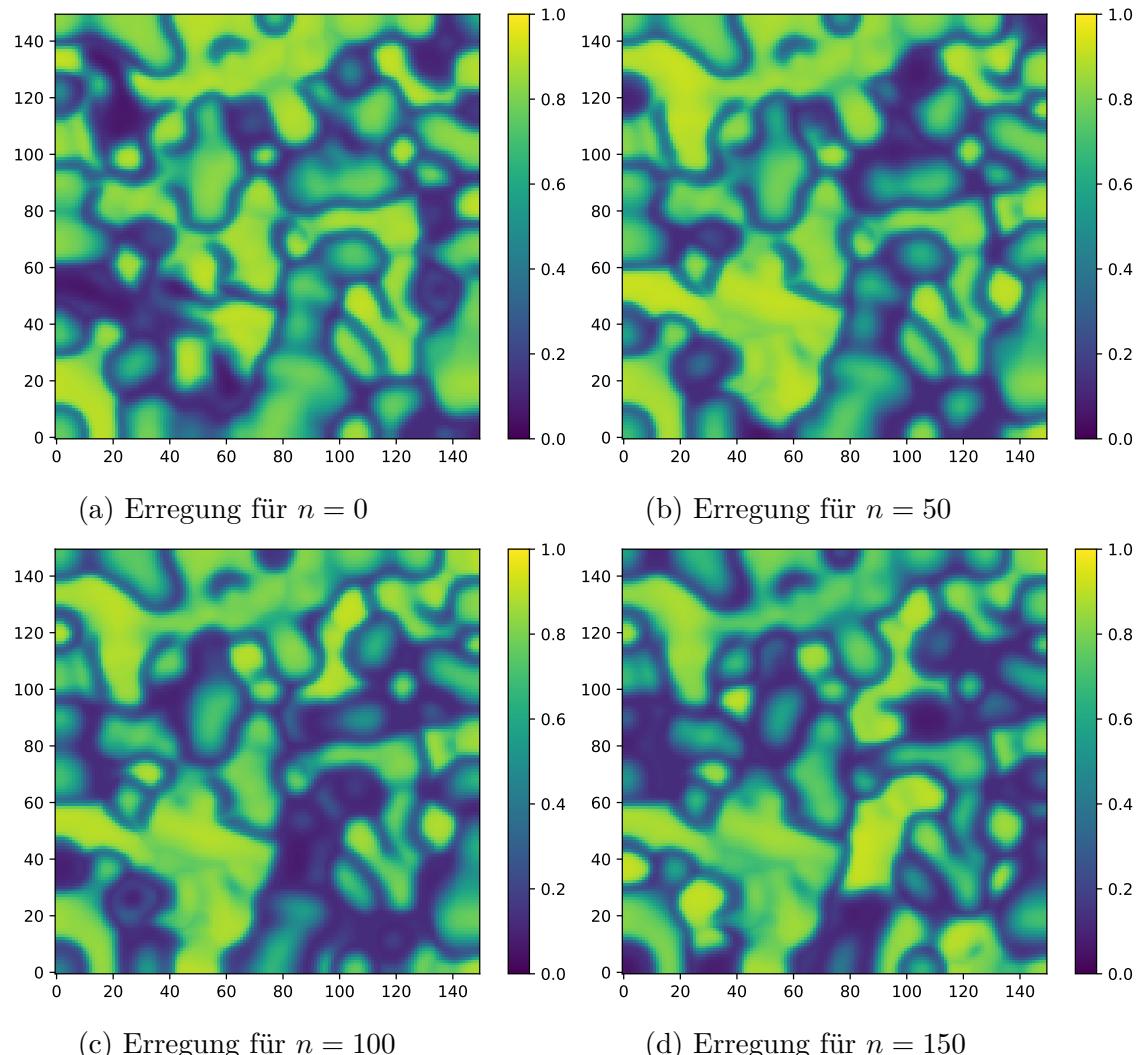


Abb. B.2.: Graphische Darstellung der zeitlichen Entwicklung der  $v$ -Variable des *Mitchell-Schaeffer*-Modells. In Leserichtung sind die Felder der  $v$ -Variable für die Zeitpunkte  $n = 0, 50, 100, 150$  des Evaluationsdatensatzes dargestellt.

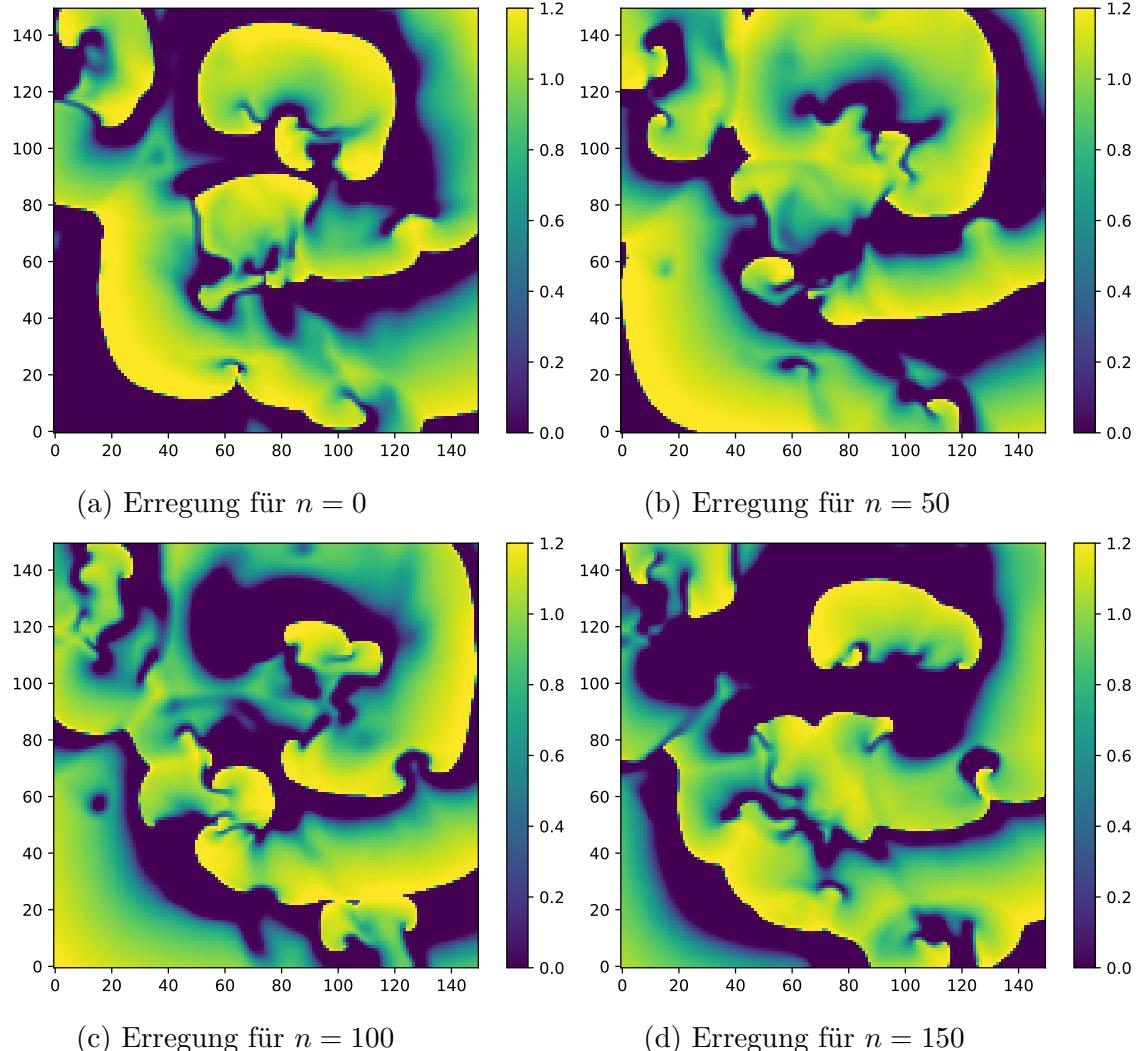


Abb. B.3.: Graphische Darstellung der zeitlichen Entwicklung der  $u$ -Variable des *Bueno-Orovio-Cherry-Fenton*-Modells. In Leserichtung sind die Felder der  $u$ -Variable für die Zeitpunkte  $n = 0, 50, 100, 150$  des Evaluationsdatensatzes dargestellt.

## B. Abbildungen

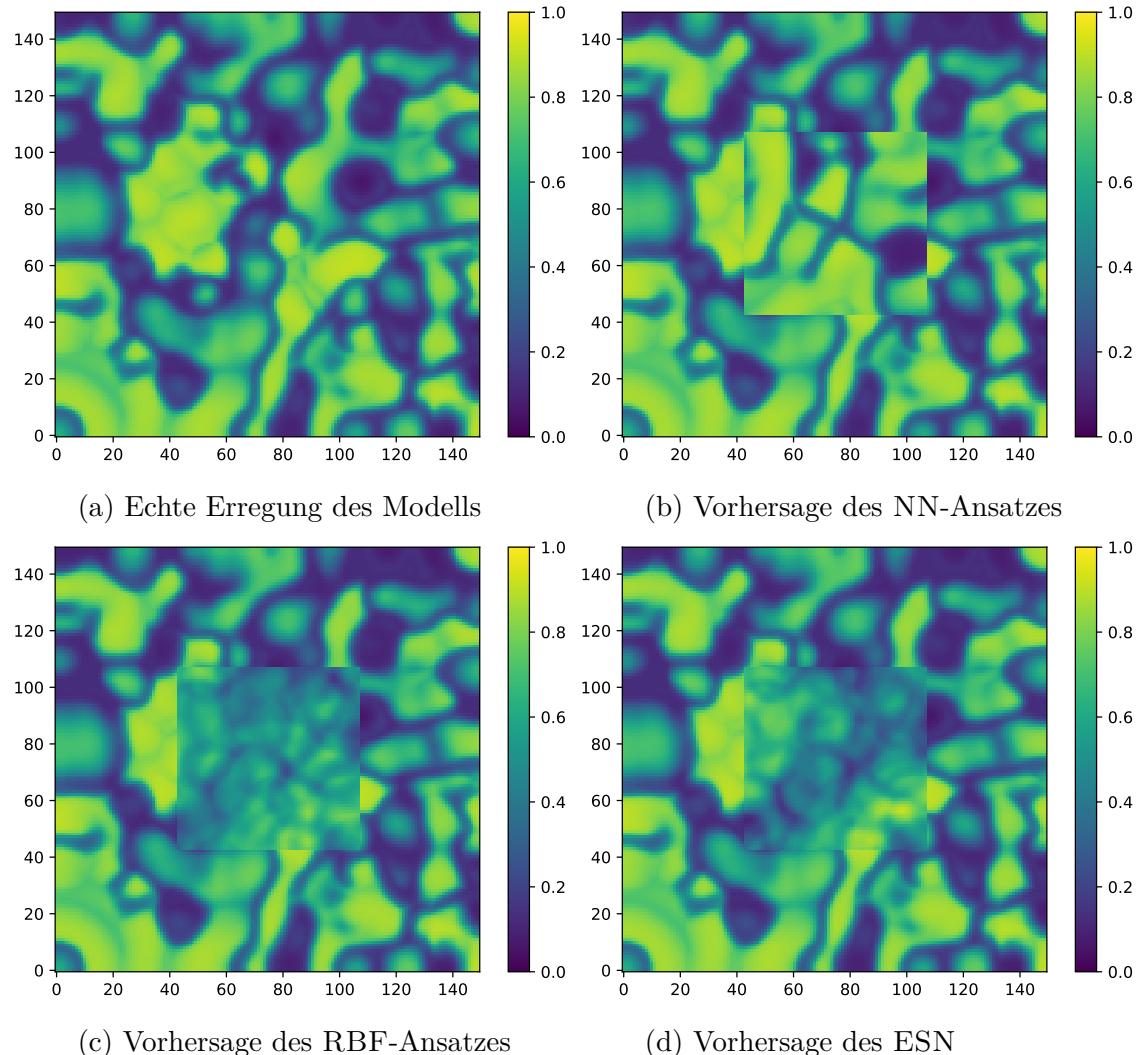
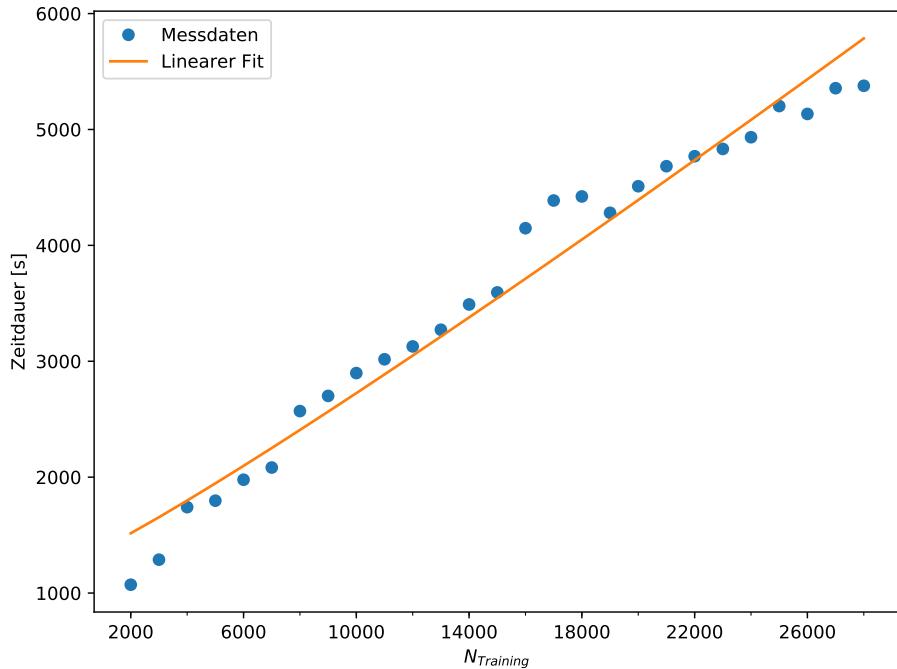
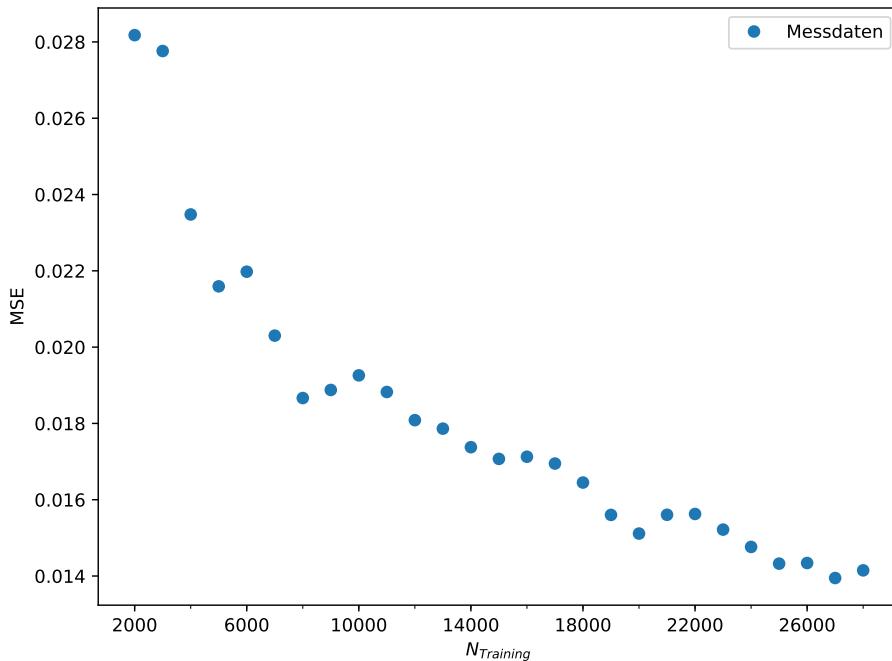


Abb. B.4.: Graphische Darstellung der  $v$ -Variable des *Mitchell-Schaeffer*-Modells für den 1000. Zeitschritt des Evaluationsdatensatzes. Oben links ist das tatsächliche Feld des Modells zu sehen. Danach folgend in Leserichtung die Vorhersagen des NN-Ansatzes, des RBF-Ansatzes und des ESN.



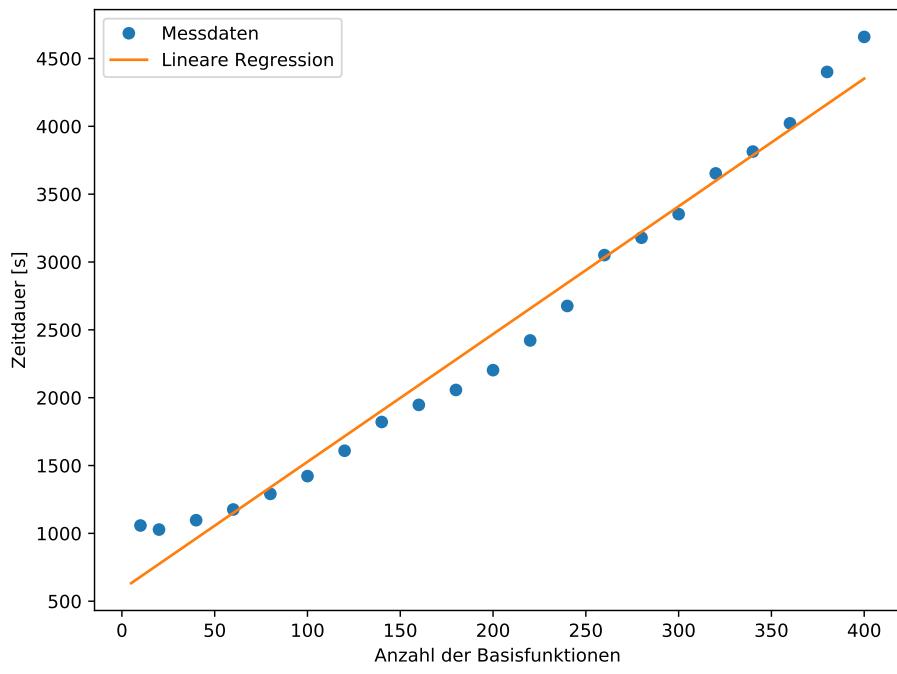
(a) Abhängigkeit der Laufzeit.



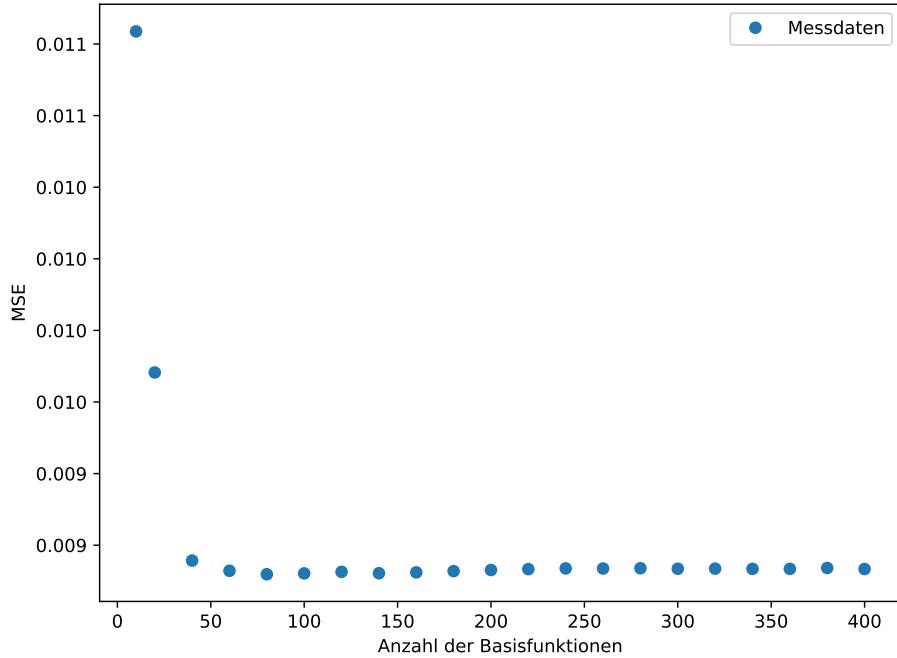
(b) Abhängigkeit des MSEs.

Abb. B.5.: Darstellung der Abhängigkeit der benötigten Laufzeit (oben) und des MSE (unten) von der verwendeten Anzahl an Trainingsdaten  $N_{Training}$  für das *Mitchell-Schaeffer*-Modell bei der Verwendung einer *Nächsten-Nachbar*-Vorhersage.

## B. Abbildungen



(a) Abhängigkeit der Laufzeit von  $l$ .



(b) Abhängigkeit des  $MSE$ s von  $l$ .

Abb. B.6.: Darstellung der Abhängigkeit der benötigten Laufzeit (oben) und des  $MSE$ s (unten) von der Anzahl der Basisfunktionen  $l$  für das *Mitchell-Schaeffer*-Modell bei der Verwendung radialer Basisfunktionen.

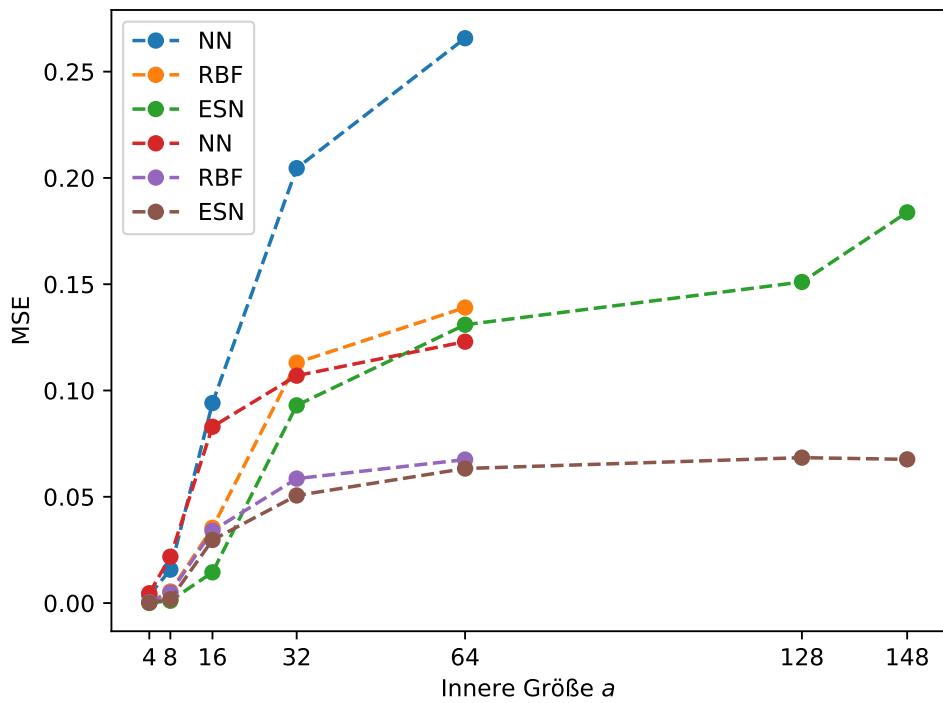


Abb. B.7.: Graphische Darstellung des Fehlerwertes MSE für die drei verschiedenen Ansätze in Abhängigkeit von der Größe  $a$  des vorherzusagenden Bereichs für das *Mitchell-Schaeffer*-Modell.



# C. Mathematische Ausführungen

## C.1. Beweisskizze: Stabilitätskriterium

Im Folgenden wird eine Beweisskizze für das Stabilitätskriterium

$$|1 - \alpha(1 - \sigma_{max}(\mathbf{W}))| < 1$$

nach [9] vorgeführt. Hierfür wird die Distanz der  $l^2$ -Norm  $\|\cdot\|$  zwischen den Zustandsfolgen  $(\vec{s}(n))_n$  und  $(\vec{s}'(n))_n$  für das Eingangssignal  $\vec{u}$  betrachtet. Es wird zudem die Zustandsgleichung 2.20 und die Abkürzung  $\vec{v} = [b_{in}; \vec{u}(n)]$  verwendet.

$$\begin{aligned}
& \| \vec{s}(n+1) - \vec{s}'(n+1) \| \\
&= \| (1 - \alpha) \cdot \vec{s}(n) + \alpha \cdot f_{in}(\mathbf{W}_{in} \vec{v} + \mathbf{W} \vec{s}(n)) - (1 - \alpha) \cdot \vec{s}'(n) - \alpha \cdot f_{in}(\mathbf{W}_{in} \vec{v} + \mathbf{W} \vec{s}'(n)) \| \\
&= \| (1 - \alpha) \cdot (\vec{s}(n) - \vec{s}'(n)) + \alpha \cdot f_{in}(\mathbf{W}_{in} \vec{v} + \mathbf{W} \vec{s}(n)) - \alpha \cdot f_{in}(\mathbf{W}_{in} \vec{v} + \mathbf{W} \vec{s}'(n)) \| \\
&\stackrel{(a)}{\leq} (1 - \alpha) \cdot \| \vec{s}(n) - \vec{s}'(n) \| + \alpha \cdot \| f_{in}(\mathbf{W}_{in} \vec{v} + \mathbf{W} \vec{s}(n)) - f_{in}(\mathbf{W}_{in} \vec{v} + \mathbf{W} \vec{s}'(n)) \| \\
&\stackrel{(b)}{\leq} (1 - \alpha) \cdot \| \vec{s}(n) - \vec{s}'(n) \| + \alpha \cdot \| \mathbf{W}_{in} \vec{v} + \mathbf{W} \vec{s}(n) - \mathbf{W}_{in} \vec{v} + \mathbf{W} \vec{s}'(n) \| \\
&= (1 - \alpha) \cdot \| \vec{s}(n) - \vec{s}'(n) \| + \alpha \cdot \| \mathbf{W}(\vec{s}(n) - \vec{s}'(n)) \| \\
&\stackrel{(c)}{\leq} (1 - \alpha) \cdot \| \vec{s}(n) - \vec{s}'(n) \| + \alpha \cdot \sigma_{max}(\mathbf{W}) \| \vec{s}(n) - \vec{s}'(n) \| \\
&= (1 - \alpha + \alpha \sigma_{max}(\mathbf{W})) \cdot \| \vec{s}(n) - \vec{s}'(n) \| \\
&= (1 - \alpha(1 + \sigma_{max}(\mathbf{W}))) \cdot \| \vec{s}(n) - \vec{s}'(n) \| \\
&:= \lambda \| \vec{s}(n) - \vec{s}'(n) \|
\end{aligned}$$

Dabei ist in Schritt (a) die Dreiecksungleichung verwendet worden. Da  $f_{in}$  eine sigmoid-förmige Funktion ist, gilt zudem  $f'_{in}(x) < 1, \forall x$ ; dies wird in Schritt (b)

### C. Mathematische Ausführungen

benutzt. Zudem wird in Schritt (c) die Beziehung

$$\|\mathbf{A}\vec{x}\| \leq \sigma_{\max}(\mathbf{A}) \|\vec{x}\|$$

zwischen dem maximalen Spurketalwert  $\sigma_{\max}$  der Matrix  $\mathbf{A}$  und der  $l^2$ -Norm ausgenutzt.

Gilt nun  $\lambda < 1$ , so nähern sich die beiden Zustandsfolgen immer weiter aneinander an, bis sie schließlich gegeneinander konvergieren. Das bedeutet, dass es eine Nullfolge  $(\delta(n))_n$  gibt, für die  $\|\vec{s}(n) - \vec{s}'(n)\| < \delta(n)$  gilt; somit liegt die *ESP* vor. Folglich nimmt der beliebig gewählte Anfangszustand des ESNs  $\vec{s}(0)$  (beziehungsweise  $\vec{s}'(0)$ ) nach einer ausreichenden Zeit keinen Einfluss mehr auf die Dynamik des Systems.

## C.2. Laufzeitanalyse

Im Folgenden wird die theoretische Laufzeitkomplexität  $T$  des Trainings und Voraussagevorgangs eines ESNs unter Veränderung von  $N$  betrachtet und hergeleitet. Zuerst werden die Abkürzungen

$$\beta = T - T_0 \quad \gamma = 1 + N_u + N$$

eingeführt. Die Matrixmultiplikation zweier Matrizen  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$  hat eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^3)$ . Wird die Matrixinversion durch das *Gauß'sche Eliminationsverfahren* durchgeführt, besitzt diese ebenfalls die Laufzeit  $\mathcal{O}(n^3)$ .

Die Komplexität der Zustandsgleichung 2.20 wird durch die Ausdrücke  $\mathbf{W}_{\text{in}}\vec{u} \in \mathcal{O}(N_u N)$  und  $\mathbf{W}\vec{x} \in \mathcal{O}(N^2)$  bestimmt. Somit ergibt sich eine Gesamtkomplexität  $\mathcal{O}(N_u \cdot N + N^2) = \mathcal{O}(N^2)$  für  $N_u < N$ .

Im Trainingsvorgang wird zunächst die Zustandsgleichung  $\beta$  Mal durchlaufen. Bei der Betrachtung der Lösungsgleichung 2.27 müssen die Laufzeiten von vier Teilaus-

drücken analysiert werden:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{XX}^T) &= \mathcal{O}(\gamma^2\beta) \\ T((\mathbf{XX}^T + \beta\mathbf{I})^{-1}) &= \mathcal{O}(\gamma^3) \\ T(\mathbf{Y}_{\text{target}}\mathbf{X}^T) &= \mathcal{O}(N_y\beta\gamma). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für das Bestimmen der Auslesematrix  $\mathbf{W}_{\text{out}}$  eine Laufzeit  $\mathcal{O}(\gamma^2\beta + \gamma^3 + \beta\gamma N_y) = \mathcal{O}(\gamma^3)$  für  $N_u < N$ . Insgesamt beträgt der Aufwand des Trainingsvorgangs somit inklusive der Berechnung der Zustandsgleichung zu  $\mathcal{O}(N^2 + N^3) = \mathcal{O}(N^3)$

Der Vorhersagevorgang besteht jeweils aus Berechnungen der Zustandsgleichung und der Berechnung der Ausgabe  $\vec{y} = \mathbf{W}_{\text{out}}\vec{x}$ . Hierbei ergibt sich analog die Laufzeitkomplexität zu  $\mathcal{O}(N^2)$ .

Die auftretenden Laufzeiten durch das Initialisieren der Matrizen im Speicher und das Berechnen des Spektralradius zur Reskalierung von  $\mathbf{W}$  sind bei dieser Betrachtung noch nicht berücksichtigt.



## D. Programmüberblick

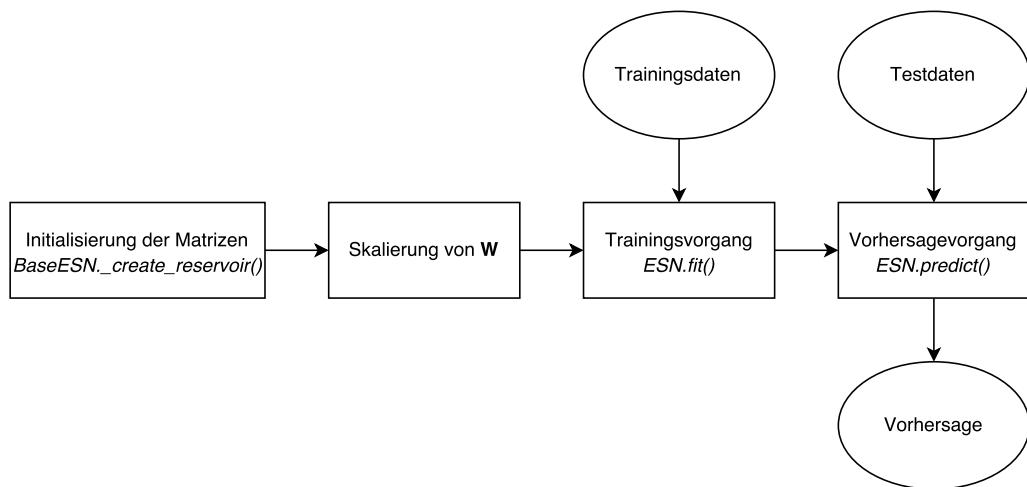


Abb. D.1.: Ablauf bei Verwendung eines ESNs. Die dabei relevanten Funktionen des Quellcodes sind kursiv geschrieben. In Leserichtung wird zuerst das ESN mit seinen Matrizen  $\mathbf{W}$  und  $\mathbf{W}_{in}$  generiert. Anschließend wird es trainiert (siehe Abbildung D.2), um danach eine Vorhersage durchzuführen.

## D. Programmüberblick

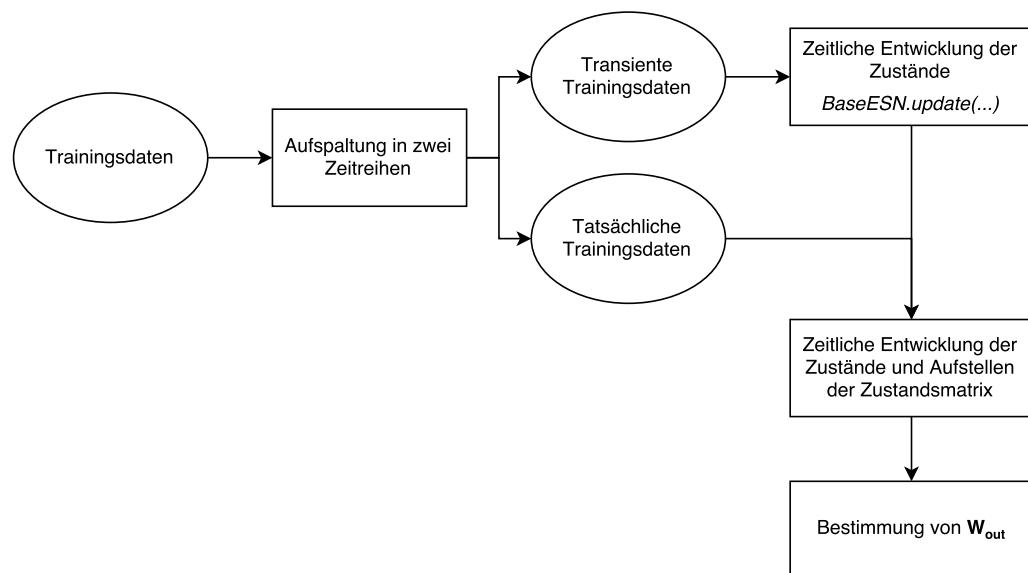


Abb. D.2.: Ablauf des Trainingsvorgangs des ESNs. Zuerst wird die Zeitreihe der Trainingsdaten in zwei Zeitreihen unterteilt. Der erste Teil der Zeitreihe wird benutzt, um das *transiente* Verhalten des Reservoirs abzuwarten, wohingegen der Rest benutzt wird, um die Auslesematrix  $\mathbf{W}_{out}$  zu bestimmen.

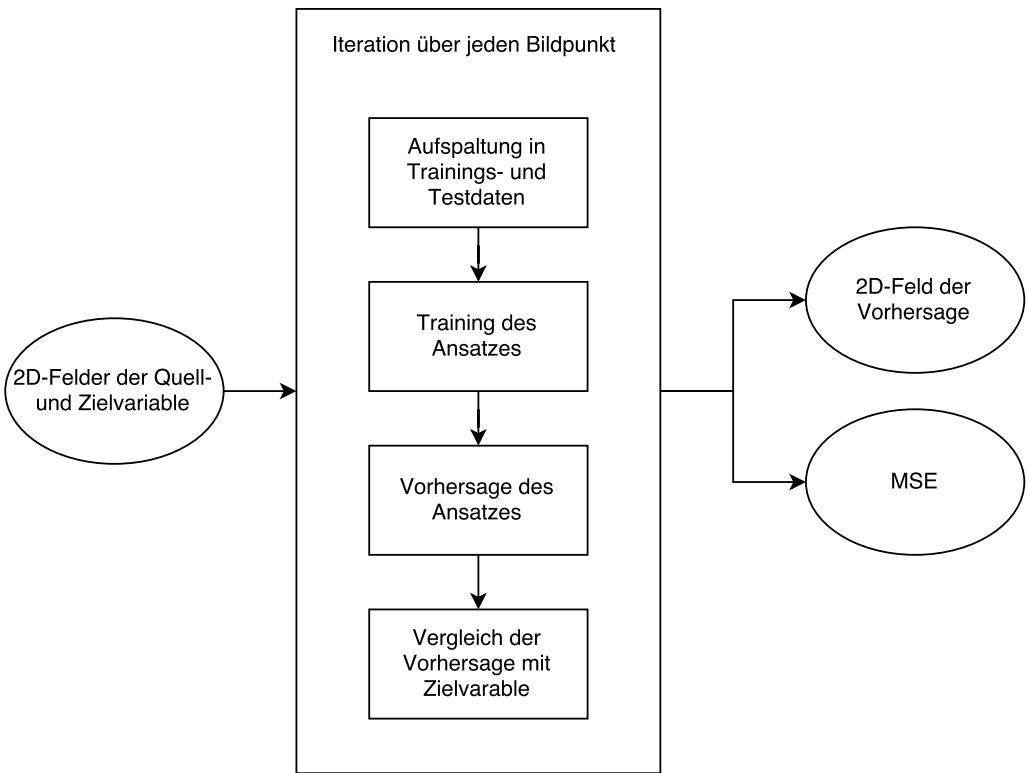


Abb. D.3.: Allgemeines Vorgehen zum Bestimmen der Vorhersage in einem zweidimensionalen System. Für jeden Bildpunkt wird eine einzelne Zeitreihe betrachtet, welche in Trainings- und Testdaten unterteilt wird. Mit den Trainingsdaten wird nun das ausgewählte Modell (NN-Ansatz, RBF-Ansatz oder ESN) trainiert. Anschließend liefert das Modell mit der Quellvariable der Testdaten eine Vorhersage, welche mit der Zielvariable verglichen wird. Daraus kann der *MSE* bestimmt werden. Durch das Durchführen dieser Prozedur für alle Bildpunkte ergibt sich schlussendlich eine Vorhersage des räumlich ausgedehnten Systems.



# Literaturverzeichnis

- [1] Minimal model for human ventricular action potentials in tissue. *Journal of Theoretical Biology*, 253(3):544–560, 2008. ISSN 00225193. doi: 10.1016/j.jtbi.2008.03.029.
- [2] D. Barkley. Barkley model. *Scholarpedia*, 3(11):1877, 2008. doi: 10.4249/scholarpedia.1877. revision #91029.
- [3] Ezio Bartocci, Pietro Lio, und Nicola Paoletti. *Computational Methods in Systems Biology: 14th International Conference, CMSB 2016, Cambridge, UK, September 21-23, 2016, Proceedings*, Band 9859. Springer, 2016.
- [4] Jon Louis Bentley. Multidimensional binary search trees used for associative searching. *Communications of the ACM*, 18(9):509–517, 1975.
- [5] Sebastian Berg, Stefan Luther, und Ulrich Parlitz. Synchronization based system identification of an extended excitable system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 21(3):033104, 2011.
- [6] Christopher M. Bishop. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer, Cambridge, 2006. ISBN 0-387-31073-8.
- [7] D.S. Broomhead und D Lowe. Multi-variable functional interpolation and adaptive networks. *Complex Systems*, 2:321–355.
- [8] Mark De Berg, Marc Van Kreveld, Mark Overmars, und Otfried Cheong Schwarzkopf. Computational geometry. In *Computational geometry*, Seiten 1–17. Springer, 2000.
- [9] H. Jäger. The “echo state“ approach to analysing and training recurrent neural networks - with an erratum note. *GMD Report*, 148, 2001/2010.
- [10] H. Jäger. A tutorial on training recurrent neural networks, covering bppt, rtrl, ekf and the “echo state network“ approach. *GMD Report*, 159:48 ff., 2002.

## Literaturverzeichnis

- [11] H. Jäger. Long short-term memory in echo state networks: Details of a simulation study. Technical report, Jacobs University Bremen - School of Engineering and Science, 2012.
- [12] H. Jäger, M. Lukoševičius, D. Popovici, und U. Siewert. Optimization and applications of echo state networks with leaky- integrator neurons. *Neural Networks*, 20:335–352, 2007.
- [13] Holger Kantz und Thomas Schreiber. *Nonlinear time series analysis*, Band 7. Cambridge university press, 2004.
- [14] Zhixin Lu, Jaideep Pathak, Brian Hunt, Michelle Girvan, Roger Brockett, und Edward Ott. Reservoir observers: Model-free inference of unmeasured variables in chaotic systems. *Chaos*, 27(4), 2017. ISSN 10541500. doi: 10.1063/1.4979665.
- [15] M. Lukoševičius und H. Jäger. Reservoir computing approaches to recurrent neural network training. *Computer Science Review*, 3(3):127–149, 2009.
- [16] Mantas Lukoševičius. A practical guide to applying echo state networks. In *Neural networks: tricks of the trade*, Seiten 659–686. Springer, 2012.
- [17] Qian-Li Ma und Wei-Biao Chen. Modular state space of echo state network. *Neurocomputing*, 122:406–417, 2013. ISSN 0925-2312. doi: 10.1016/j.neucom.2013.06.012. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925231213006206>.
- [18] Wolfgang Maass. Liquid State Machines: Motivation, Theory, and Applications. In *Computability in Context*, Seiten 275–296. Imperial College Press, 2011.
- [19] Colleen C Mitchell und David G Schaeffer. A two-current model for the dynamics of cardiac membrane. *Bulletin of mathematical biology*, 65(5):767–793, 2003.
- [20] R. Pascanu, T. Mikolov, und Y. Bengio. On the difficulty of training recurrent neural networks. *Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning*, 28, 2013.
- [21] scikit learn. Nearest neighbours, 2017. URL <http://scikit-learn.org/stable/modules/neighbors.html>.

- [22] Hugo Talbot, Stéphanie Marchesseau, Christian Duriez, Maxime Sermesant, Stéphane Cotin, und Hervé Delingette. Towards an interactive electromechanical model of the heart. *Interface focus*, 3(2):20120091, 2013.
- [23] I. Yildiz, H. Jäger, und S. Kiebel. Re-visiting the echo state property. *Neural Networks*, 35:1–9, 2012.

**Erklärung** nach §13(8) der Prüfungsordnung für den Bachelor-Studiengang Physik und den Master-Studiengang Physik an der Universität Göttingen:

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Abschlussarbeit selbständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, als solche kenntlich gemacht habe.

Darüberhinaus erkläre ich, dass diese Abschlussarbeit nicht, auch nicht auszugsweise, im Rahmen einer nichtbestandenen Prüfung an dieser oder einer anderen Hochschule eingereicht wurde.

Göttingen, den 19. Juli 2017

(Roland Simon Zimmermann)

# Notes

|  |    |
|--|----|
| ■ Add search path example to the graph? . . . . .                          | 11 |
| ■ Write something about runtime complexity? . . . . .                      | 21 |
| ■ Add subchapter? . . . . .  | 26 |
| ■ Add more information about the cluster . . . . .                         | 29 |
| ■ Add plot to show the development of the curves? . . . . .                | 30 |
| ■ Add more details? . . . . .  | 36 |
| ■ Write something about the vanishing first 9 entries? . . . . .           | 37 |
| ■ Add more details on: long time memory vs N dependency in theory. . . . . | 42 |
| ■ Add details? . . . . .   | 51 |
| ■ Make this more clear. . . . .  | 51 |
| ■ Add comparison images . . . . .  | 53 |