Дисциплина «Искусственный интеллект»
Рабочая тетрадь № 4

Регрессия – это зависимость среднего значения какой-либо величины от некоторой другой величины или от нескольких других величин. В отличие от чисто функциональной зависимости $y = f(x)$, когда каждому значению независимой переменной x соответствует одно определённое значение зависимой переменной y, при регрессионной связи одному и тому же значению независимой переменной (фактору) x могут соответствовать в зависимости от конкретного случая различные значения зависимой переменной (отклика) y.

Изучение регрессии основано на том, что случайные величины X и Y связаны между собой вероятностной зависимостью: при каждом конкретном значении $X = x$ величина Y является случайной величиной с вполне определённым распределением вероятностей. Зависимость зависимой переменной – отклика от одной независимой переменной – фактора или нескольких факторов называется уравнением регрессии. По количеству факторов выделяют парную (однофакторную) и множественную (многофакторную) регрессию. Для парной будем рассматривать следующие методы регрессии: линейную, показательную, экспоненциальную, гиперболическую и параболическую.

Регрессионный анализ – это раздел математической статистики, изучающий регрессионную зависимость между случайными величинами по статистическим данным. Цель регрессионного анализа состоит в определении общего вида уравнения регрессии, вычислении оценок неизвестных параметров, входящих в уравнение регрессии проверке статистических гипотез о регрессионной связи.

Таким образом, регрессионный анализ – набор статистических методов исследования влияния одной или нескольких независимых переменных $X_1, ..., X_n$ на зависимую переменную Y. Независимые переменные иначе называют регрессорами или предикторами, а зависимые переменные – критериальными переменными.

1.1. Теоретический материал – Линейные регрессионные модели

Линейная регрессия

Линейная регрессия (Linear regression) – модель зависимости переменной x от одной или нескольких других переменных (факторов, регрессоров, независимых переменных) с линейной функцией зависимости. Линейная регрессия относится к задаче определения «линии наилучшего соответствия» через набор точек данных и стала простым предшественником нелинейных методов, которые используют для обучения нейронных сетей.

Цель линейной регрессии — поиск линии, которая наилучшим образом соответствует этим точкам. Напомним, что общее уравнение для прямой есть $f(x) = b + m \cdot x$, где m – наклон линии, а b – его сдвиг.

Функция потерь — метод наименьших квадратов

Функция потерь – это мера количества ошибок, которые наша линейная регрессия делает на наборе данных. Хотя есть разные функции потерь, все они вычисляют расстояние между предсказанным значением y(x) и его фактическим значением.

Одна очень распространенная функция потерь называется средней квадратичной ошибкой MSE. Чтобы вычислить MSE, мы просто берем все значения ошибок, считаем их квадраты длин и усредняем.

Задача экстраполяции

Допустим у нас есть много экспериментальных точек. Необходимо через них провести кривую, которая как можно ближе проходила к этим точкам. При этом необходимо минимизировать среднюю квадратичную ошибку (MSE).

Для решения данной задачи в Python есть множество библиотек. Самыми распространенными выступают:

numpy - numpy.linalg.lstsq

scipy - scipy.linalg (содержит все функции из numpy.linalg плюс часть новых функций, которых нет в numpy.linalg).

1.1.1 Пример

Задача:

Проведем прямую $y = mx + b$ через экспериментальные точки.

Решение:

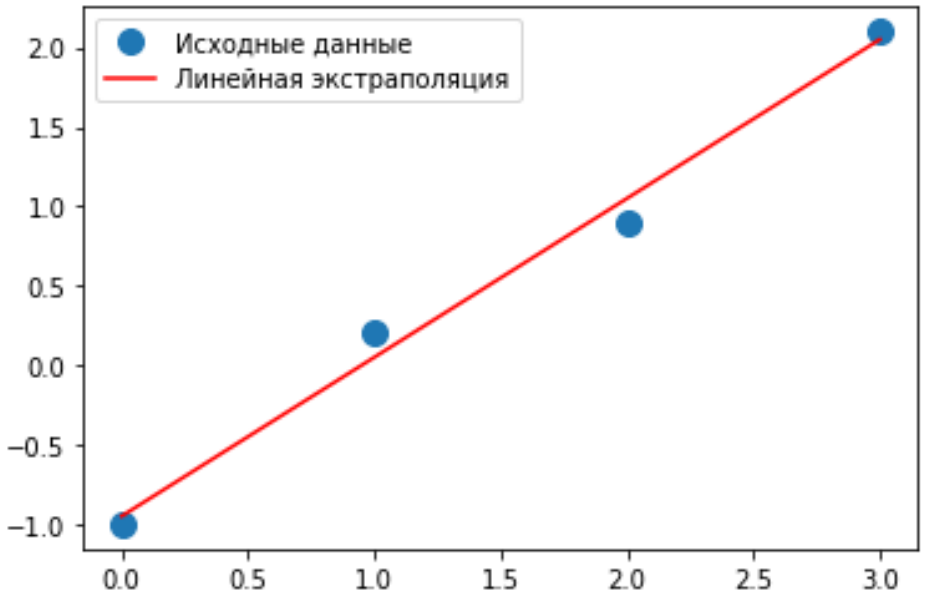
```
import numpy as np
x = np.array([0, 1, 2, 3])
y = np.array([-1, 0.2, 0.9, 2.1])

#Перепишем линейное уравнение y = mx + c как y = Ap, где A = [[ x 1 ]] и p = [[m], [c]]
#Построим A по x :

A = np.vstack([x, np.ones(len(x))]).T
A
```

```
#Используем метод lstsq для решения его относительно вектора p.
m, c = np.linalg.lstsq(A, y, rcond = None)[0]
print(m, c)
```

```
#Построим график полученной прямой и укажем на нем точки.
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x, y, 'o', label='Исходные данные', markersize=10)
plt.plot(x, m*x + c, 'r', label='Линейная экстраполяция')
plt.legend()
plt.show()
```

Ответ:

```
array([[0., 1.],
       [1., 1.],
       [2., 1.],
       [3., 1.]])

0.9999999999999997 -0.9499999999999992
```



1.1.2 Пример

Задача:

Пусть x, y – вектора длиной $n > 3$ (точек > 3). Задача заключается в построении экстраполяционного полинома второго порядка (параболы). Таким образом, необходимо найти такие коэффициенты полинома a, b, c по методу наименьших квадратов. Данные могут быть получены в результате измерений. Покажем пример генерации данных случайным образом и загрузки их из файла.

Решение:

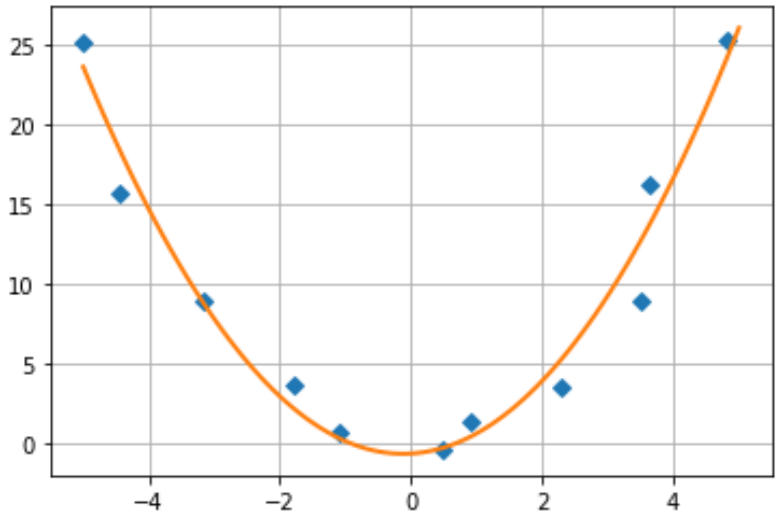
```
from numpy import *
from numpy.random import *
#генерируем случайные x и y
delta = 1.0
x = linspace(-5,5,11)
y = x**2+delta*(rand(11)-0.5)
x += delta*(rand(11)-0.5)

#записывае данные в файл
x.tofile('x_data.txt', '\n')
y.tofile('y_data.txt', '\n')
```

```
# читаем данные из файлов
x = fromfile('x_data.txt', float, sep='\n')
y = fromfile('y_data.txt', float, sep='\n')

print(x)
print(y)
```

```
# Нахождение коэффициентов функции вида y = ax^2 + bx + c методом наименьших квадратов
# задаем вектор m = [x**2, x, E]
m = vstack((x**2, x, ones(11))).T
# находим коэффициенты при составляющих вектора m
s = np.linalg.lstsq(m, y, rcond = None)[0]

# на отрезке [-5,5]
x_prec = linspace(-5, 5, 101)
# рисуем точки
plt.plot(x, y, 'D')
# рисуем кривую вида y = ax^2 + bx + c, подставляя из решения коэффициенты s[0], s[1], s[2]
plt.plot(x_prec, s[0] * x_prec**2 + s[1] * x_prec+s[2],'-', lw=2)
plt.grid()
plt.savefig('парабола.png')
```

Ответ:

```
[-4.99577792 -4.44215993 -3.15708626 -1.77015317 -1.08716865  0.47132831
  0.91164179  2.2814585   3.48827537  3.63282469  4.80224134]
[25.11596914 15.67153307  9.00040293  3.63993116  0.66347717 -0.40407158
  1.43208821  3.56403033  8.98149277 16.20154474 25.29853472]
```



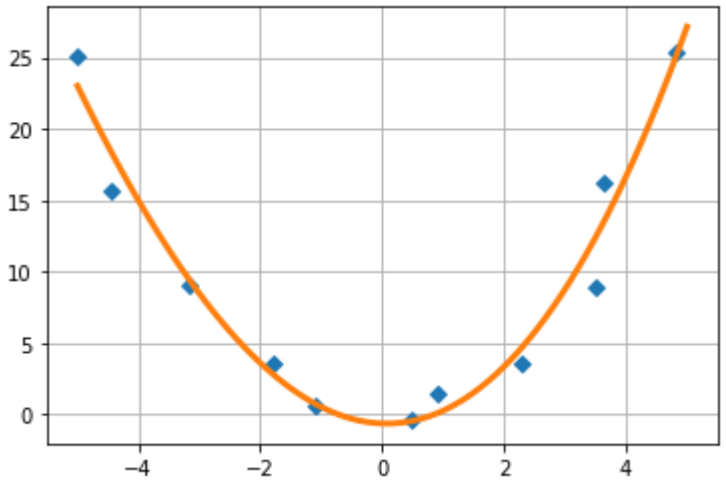
1.1.3 Пример

Задача:

По данным предыдущего примера постройте экстраполяционного полинома третьего порядка

Решение:

```
#Решение
# Нахождение коэффициентов функции вида y = ax^3 + bx^2 + cx + d методом наименьших квадратов
# задаем вектор m = [x**3, x, E]
m = vstack((x**3, x**2, x, ones(11))).T
# находим коэффициенты при составляющих вектора m
s = np.linalg.lstsq(m, y, rcond = None)[0]

# на отрезке [-5,5]
x_prec = linspace(-5, 5, 101)
# рисуем точки
plt.plot(x, y, 'D')
# рисуем кривую вида y = ax^3 + bx^2 + cx + d, подставляя из решения коэффициенты s[0], s[1], s[2], s[3]
plt.plot(x_prec, s[0] * x_prec**3 + s[1] * x_prec**2 + s[2]*x_prec + s[3],'-', lw = 3)
plt.grid()
plt.savefig('полином 3-й степени.png')
```



Задание:

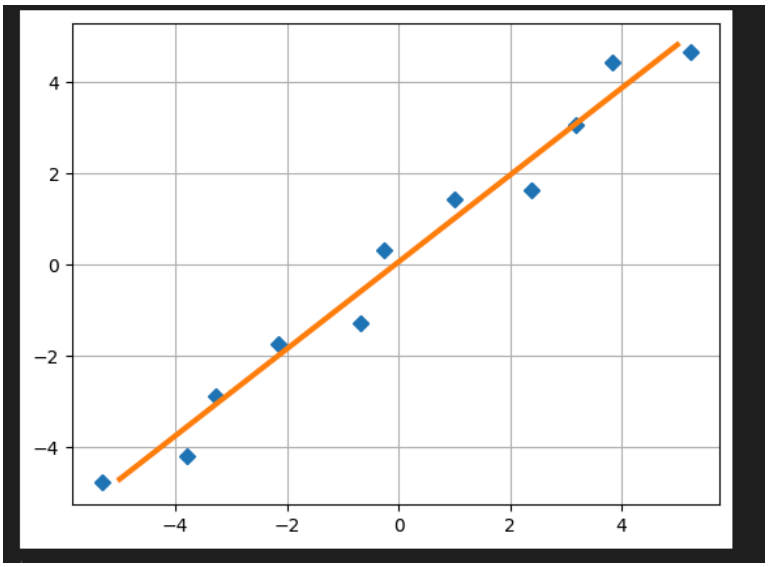
Представьте собственные данные и постройте экстраполяцию полиномами первой, второй и третьей степени.

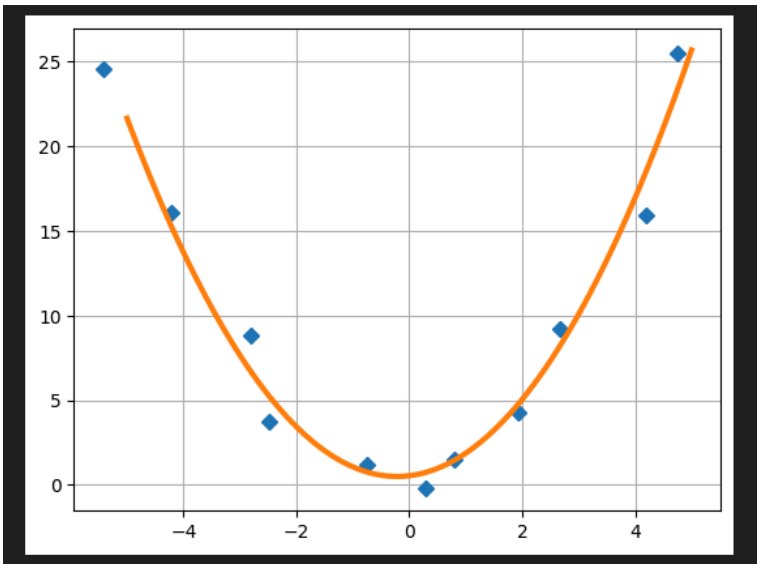
Решение:

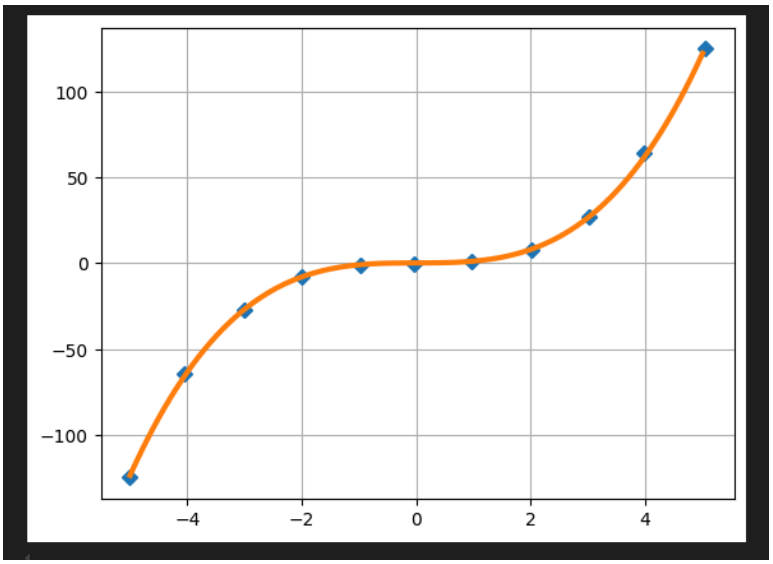
```
delta = 1.0
x = linspace(-5,5,11)
y = x+delta*(rand(11)-0.5)
x += delta*(rand(11)-0.5)
m = vstack((x, ones(11))).T
s = np.linalg.lstsq(m, y, rcond = None)[0]
x_prec = linspace(-5,5,101)
plt.plot(x,y,'D')
plt.plot(x_prec, s[0] * x_prec + s[1],'-', lw = 3)
plt.grid()

delta = 1.0
x = linspace(-5,5,11)
y = x**2+delta*(rand(11)-0.5)
x += delta*(rand(11)-0.5)
m = vstack((x**2, x, ones(11))).T
s = np.linalg.lstsq(m, y, rcond = None)[0]
x_prec = linspace(-5,5,101)
plt.plot(x,y,'D')
```

```
plt.plot(x_prec, s[0] * x_prec**2 + s[1] * x_prec + s[2],'-', lw = 3)
plt.grid()

delta = 1.0
x = linspace(-5,5,11)
y = x**3+delta*(rand(11)-0.5)
x += delta*(rand(11)-0.5)
m = vstack((x**3, x**2, x, ones(11))).T
s = np.linalg.lstsq(m, y, rcond = None)[0]
x_prec = linspace(-5,5,101)
plt.plot(x,y,'D')
plt.plot(x_prec, s[0] * x_prec**3 + s[1] * x_prec**2 + s[2] * x_prec +
s[3],'-', lw = 3)
plt.grid()
```

Ответ:







1.1.4 Пример

Задача:

Необходимо проверить гипотезу, что наши точечно заданная функция ложится на кривую вида $f(x, b) = b_0 + b_1 exp(- b2x^2)$

Решение:

```
#Добавим шума в данные, сделанные по функции f(x,b) с коэффициентами b = (0.25, 0.75, 0.5)
beta = (0.25, 0.75, 0.5)
def f(x, b0, b1, b2):
    return b0 + b1 * np.exp(-b2 * x**2)
# зададим массив точек xi
xdata = np.linspace(0, 5, 50)
# создаем теоретически правильные значения точек yi (без шума)
y = f(xdata, *beta)
# зашумляем эти данные
ydata = y + 0.05 * np.random.randn(len(xdata))
```

```
#Используем функцию для получения решения в виде коэффициентов функции f(x) для указанных xdata и ydata
from scipy.optimize import curve_fit
beta_opt, beta_cov = sp.optimize.curve_fit(f, xdata, ydata)
beta_opt
```

```
#Вычислим линейное отклонение
lin_dev =  sum(beta_cov[0])
print(lin_dev)

#Вычислим квадратичное отклонение
residuals = ydata - f(xdata,*beta_opt)
fres = sum(residuals**2)
print(fres)
```

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(xdata, ydata)
ax.plot(xdata, y, 'r', lw=2)
ax.plot(xdata, f(xdata, *beta_opt), 'b', lw=2)
ax.set_xlim(0, 5)
ax.set_xlabel(r"$x$", fontsize=18)
ax.set_ylabel(r"$f(x, \beta)$", fontsize=18)
plt.show()
```

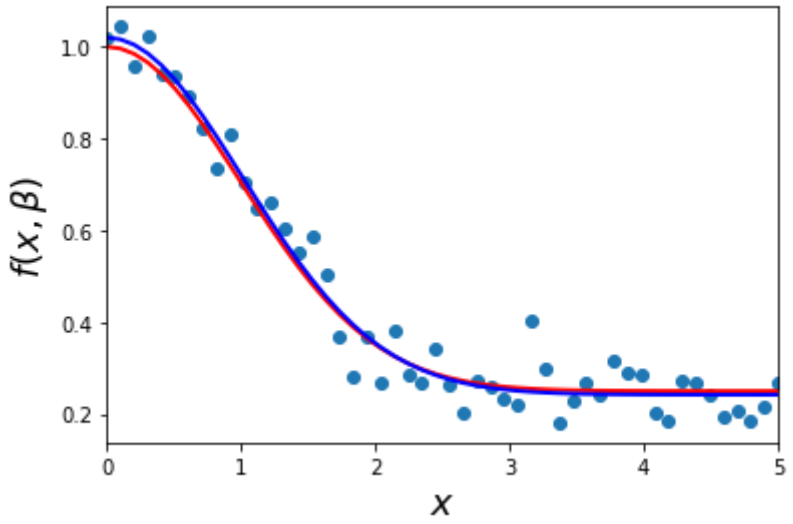
Ответ:

```
1 print(xdata)
2 print(ydata)
```

```
[0.         0.10204082 0.20408163 0.30612245 0.40816327 0.51020408
 0.6122449  0.71428571 0.81632653 0.91836735 1.02040816 1.12244898
 1.2244898  1.32653061 1.42857143 1.53061224 1.63265306 1.73469388
 1.83673469 1.93877551 2.04081633 2.14285714 2.24489796 2.34693878
 2.44897959 2.55102041 2.65306122 2.75510204 2.85714286 2.95918367
 3.06122449 3.16326531 3.26530612 3.36734694 3.46938776 3.57142857
 3.67346939 3.7755102  3.87755102 3.97959184 4.08163265 4.18367347
 4.28571429 4.3877551  4.48979592 4.59183673 4.69387755 4.79591837
 4.89795918 5.        ]
[1.02013061 1.04394371 0.95910052 1.02169956 0.94111595 0.93730036
 0.8941692  0.82340213 0.73662031 0.8086418  0.70497408 0.64762403
 0.65935003 0.60213437 0.55198268 0.58635877 0.5022659  0.36689217
 0.28090361 0.36900254 0.26854042 0.38123007 0.28585788 0.26701123
 0.3422575  0.2621963  0.20459754 0.27149212 0.26126002 0.23467558
 0.22200705 0.40164427 0.29756679 0.18118458 0.22893984 0.26909672
 0.24158176 0.31684959 0.28967886 0.28422005 0.20195685 0.18455193
 0.2705341  0.26923502 0.24060048 0.19498218 0.20867135 0.18307445
 0.21437791 0.26797385]
```

```
array([0.24205693, 0.7779374 , 0.48380063])
```

```
0.00021723653500787735
0.11710657492544654
```



1.1.5 Пример

Задача:

Необходимо проверить гипотезу, что наши точечно заданная функция ложится на кривые вида:

1) $f(x,b) = b_0 + b_1 x$

2) $f(x,b) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

3) $f(x,b) = b_0 + b_1 ln(x)$

4) $f(x,b) = b_0 \, x^{b_1}$

Решение:

```
#решение
#1
#Добавим шума в данные, сделанные по функции f(x,b) с коэффициентами b = (0.25, 0.75)
beta = (0.25, 0.75)
def f(x, b0, b1):
    return b0 + b1 * x
# зададим массив точек xi
xdata = np.linspace(0, 5, 50)
# создаем теоретически правильные значения точек yi (без шума)
y = f(xdata, *beta)
# зашумляем эти данные
ydata = y + 0.05 * np.random.randn(len(xdata))
beta_opt, beta_cov = sp.optimize.curve_fit(f, xdata, ydata)
print(beta_opt)
#Вычислим линейное отклонение
lin_dev =  sum(beta_cov[0])
print(lin_dev)

#Вычислим квадратичное отклонение
residuals = ydata - f(xdata,*beta_opt)
fres = sum(residuals**2)
print(fres)
```

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(xdata, ydata)
ax.plot(xdata, y, 'r', lw=2)
ax.plot(xdata, f(xdata, *beta_opt), 'b', lw=2)
ax.set_xlim(0, 5)
ax.set_xlabel(r"$x$", fontsize=18)
ax.set_ylabel(r"$f(x, \beta)$", fontsize=18)
plt.show()
```

```
#решение
#2
#Добавим шума в данные, сделанные по функции f(x,b) с коэффициентами b = (0.25, 0.75, 0.5)
beta = (0.25, 0.75, 0.5)
def f(x, b0, b1, b2):
    return b0 + b1 * x + b2 * x * x
# зададим массив точек xi
xdata = np.linspace(0, 5, 50)
# создаем теоретически правильные значения точек yi (без шума)
y = f(xdata, *beta)
# зашумляем эти данные
ydata = y + 0.05 * np.random.randn(len(xdata))
beta_opt, beta_cov = sp.optimize.curve_fit(f, xdata, ydata)
print(beta_opt)
#Вычислим линейное отклонение
lin_dev =  sum(beta_cov[0])
print(lin_dev)

#Вычислим квадратичное отклонение
residuals = ydata - f(xdata,*beta_opt)
fres = sum(residuals**2)
print(fres)
```

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(xdata, ydata)
ax.plot(xdata, y, 'r', lw=2)
ax.plot(xdata, f(xdata, *beta_opt), 'b', lw=2)
ax.set_xlim(0, 5)
ax.set_xlabel(r"$x$", fontsize=18)
ax.set_ylabel(r"$f(x, \beta)$", fontsize=18)
plt.show()
```

```
#решение
#3
#Добавим шума в данные, сделанные по функции f(x,b) с коэффициентами b = (1, 2)
beta = (1, 2)
def f(x, b0, b1):
    return b0 + b1 * np.log(x)
# зададим массив точек xi
xdata = np.linspace(1, 5, 50)
# создаем теоретически правильные значения точек yi (без шума)
y = f(xdata, *beta)
# зашумляем эти данные
ydata = y + 0.05 * np.random.randn(len(xdata))
beta_opt, beta_cov = sp.optimize.curve_fit(f, xdata, ydata)
print(beta_opt)
#Вычислим линейное отклонение
lin_dev =  sum(beta_cov[0])
print(lin_dev)

#Вычислим квадратичное отклонение
residuals = ydata - f(xdata,*beta_opt)
fres = sum(residuals**2)
print(fres)
```

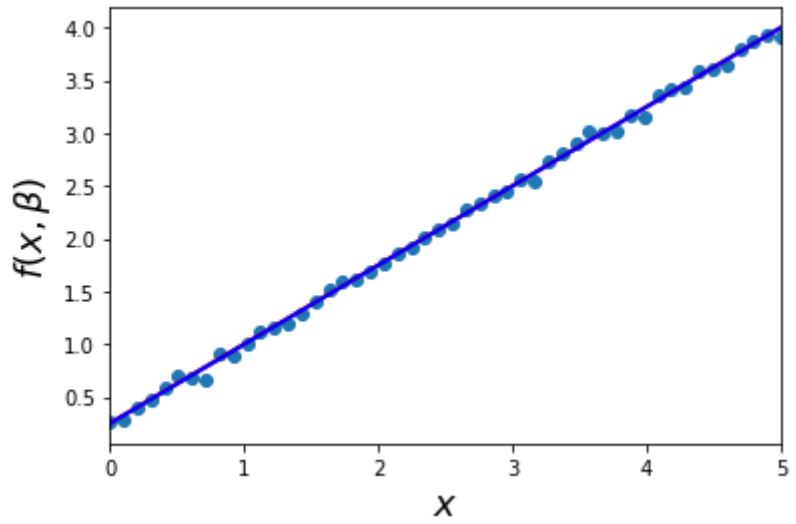
```
fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(xdata, ydata)
ax.plot(xdata, y, 'r', lw=2)
ax.plot(xdata, f(xdata, *beta_opt), 'b', lw=2)
ax.set_xlim(0, 5)
ax.set_xlabel(r"$x$", fontsize=18)
ax.set_ylabel(r"$f(x, \beta)$", fontsize=18)
plt.show()
```

```
#решение
#4
#Добавим шума в данные, сделанные по функции f(x,b) с коэффициентами b = (1, 2)
beta = (1, 2)
def f(x, b0, b1):
    return b0 * x ** b1
# зададим массив точек xi
xdata = np.linspace(1, 5, 50)
# создаем теоретически правильные значения точек yi (без шума)
y = f(xdata, *beta)
# зашумляем эти данные
ydata = y + 0.05 * np.random.randn(len(xdata))
beta_opt, beta_cov = sp.optimize.curve_fit(f, xdata, ydata)
print(beta_opt)
#Вычислим линейное отклонение
lin_dev =  sum(beta_cov[0])
print(lin_dev)

#Вычислим квадратичное отклонение
residuals = ydata - f(xdata,*beta_opt)
fres = sum(residuals**2)
print(fres)
```

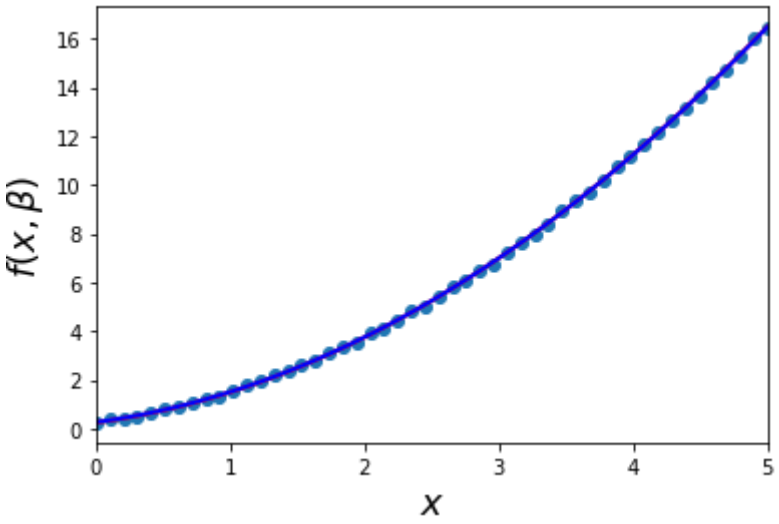
```
fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(xdata, ydata)
ax.plot(xdata, y, 'r', lw=2)
ax.plot(xdata, f(xdata, *beta_opt), 'b', lw=2)
ax.set_xlim(0, 5)
ax.set_xlabel(r"$x$", fontsize=18)
ax.set_ylabel(r"$f(x, \beta)$", fontsize=18)
plt.show()
```

Ответ:

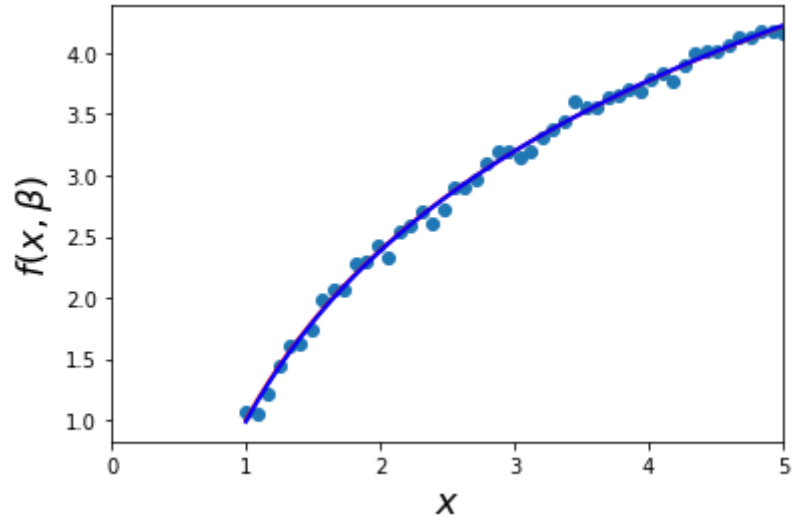
```
[0.24719661 0.75046356]
9.319340320372037e-05
0.08194592283464401
```



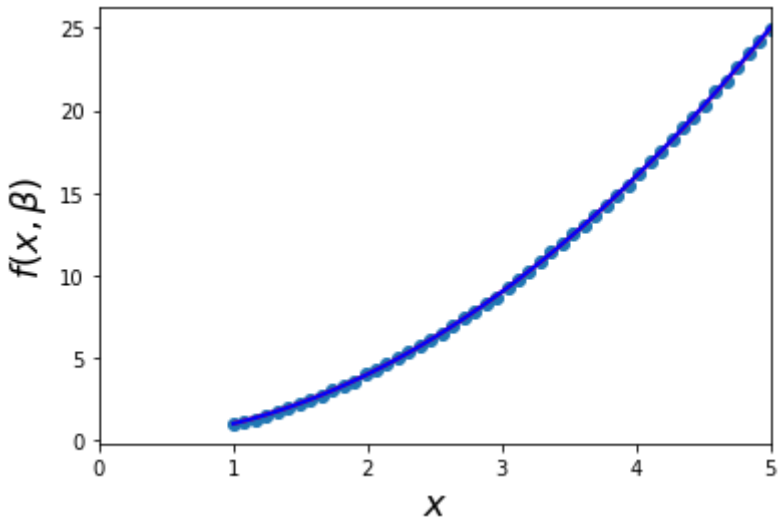

```
[0.26389699 0.74762826 0.49931689]
0.00012621944221425475
0.1052538008285279
```




```
[0.98825384 2.00983469]
6.805341787369078e-05
0.1573695319811517
```



```
[0.9981272  2.00189055]
3.575933636367733e-06
0.08574813591528214
```



Задание:

Подставьте собственные данные и поэкспериментируйте с представленными функциями. Проанализируйте динамику изменения данных.

Решение:

```
# Добавим шум к данным
beta = (0.25, 0.75)
def f(x, b0, b1):
    return b0 + b1 * x

xdata = np.linspace(0, 5, 50)
y = f(xdata, *beta)
ydata = y + 0.05 * np.random.randn(len(xdata))

from scipy.optimize import curve_fit
beta_opt, beta_cov = curve_fit(f, xdata, ydata)
print(beta_opt)

lin_dev = sum(beta_cov[0])
print("lin_dev: ", lin_dev)

residuals = ydata - f(xdata, *beta_opt)
fres = sum(residuals**2)
print("fres: ", fres)

fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(xdata, ydata, label='Data')
ax.plot(xdata, y, 'r', lw=2)
ax.plot(xdata, f(xdata, *beta_opt), 'b', lw=2)
```

```
ax.set_xlim(0, 5)
ax.set_xlabel(r"$x$", fontsize=18)
ax.set_ylabel(r"$f(x, \beta)$", fontsize=18)
plt.show()
```

```
# Добавим шум к данным
beta = (0.25, 0.75, 0.5)
def f(x, b0, b1, b2):
    return b0 + b1 *x + b2 * x**2

xdata = np.linspace(0, 5, 50)
y = f(xdata, *beta)
ydata = y + 0.05 * np.random.randn(len(xdata))

from scipy.optimize import curve_fit
beta_opt, beta_cov = curve_fit(f, xdata, ydata)
print(beta_opt)

lin_dev = sum(beta_cov[0])
print(lin_dev)

residuals = ydata - f(xdata, *beta_opt)
fres = sum(residuals**2)
print(fres)

fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(xdata, ydata, label='Data')
ax.plot(xdata, y, 'r', lw=2)
ax.plot(xdata, f(xdata, *beta_opt), 'b', lw=2)
ax.set_xlim(0, 5)
ax.set_xlabel(r"$x$", fontsize=18)
ax.set_ylabel(r"$f(x, \beta)$", fontsize=18)
plt.show()
```

```
# Добавим шум к данным
beta = (0.25, 0.75)
def f(x, b0, b1):
    return b0 + b1 * np.log(x)

xdata = np.linspace(1, 5, 50)
y = f(xdata, *beta)
ydata = y + 0.05 * np.random.randn(len(xdata))
```

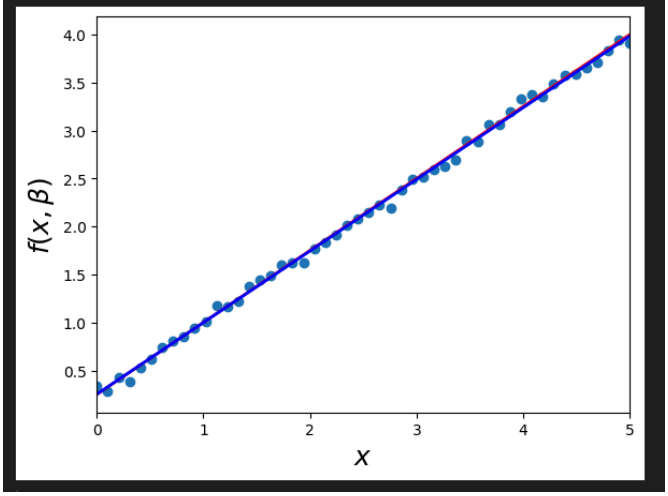
```
from scipy.optimize import curve_fit
beta_opt, beta_cov = curve_fit(f, xdata, ydata)
print(beta_opt)

lin_dev = sum(beta_cov[0])
print(lin_dev)

residuals = ydata - f(xdata, *beta_opt)
fres = sum(residuals**2)
print(fres)

fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(xdata, ydata, label='Data')
ax.plot(xdata, y, 'r', lw=2)
ax.plot(xdata, f(xdata, *beta_opt), 'b', lw=2)
ax.set_xlim(0, 5)
ax.set_xlabel(r"$x$", fontsize=18)
ax.set_ylabel(r"$f(x, \beta)$", fontsize=18)
plt.show()
```

```
# Добавим шум к данным
beta = (0.25, 0.75)
def f(x, b0, b1):
    return b0 * x**b1

xdata = np.linspace(1, 5, 50)
y = f(xdata, *beta)
ydata = y + 0.05 * np.random.randn(len(xdata))

from scipy.optimize import curve_fit
beta_opt, beta_cov = curve_fit(f, xdata, ydata)
print(beta_opt)

lin_dev = sum(beta_cov[0])
print(lin_dev)

residuals = ydata - f(xdata, *beta_opt)
fres = sum(residuals**2)
print(fres)

fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(xdata, ydata, label='Data')
ax.plot(xdata, y, 'r', lw=2)
ax.plot(xdata, f(xdata, *beta_opt), 'b', lw=2)
```

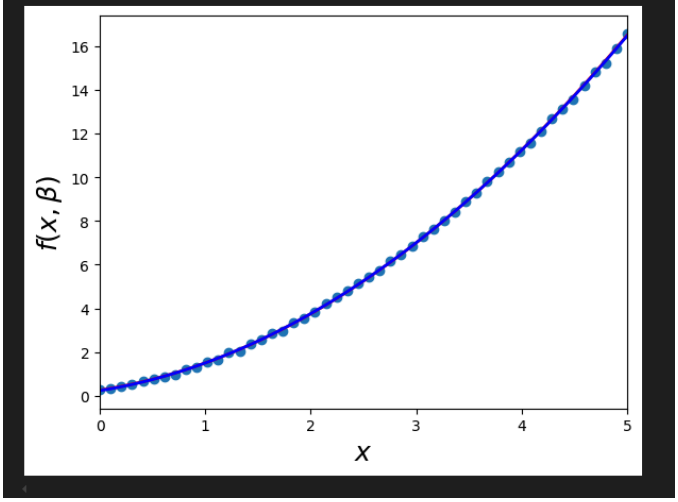
```
ax.set_xlim(0, 5)
ax.set_xlabel(r"$x$", fontsize=18)
ax.set_ylabel(r"$f(x, \beta)$", fontsize=18)
plt.show()
```

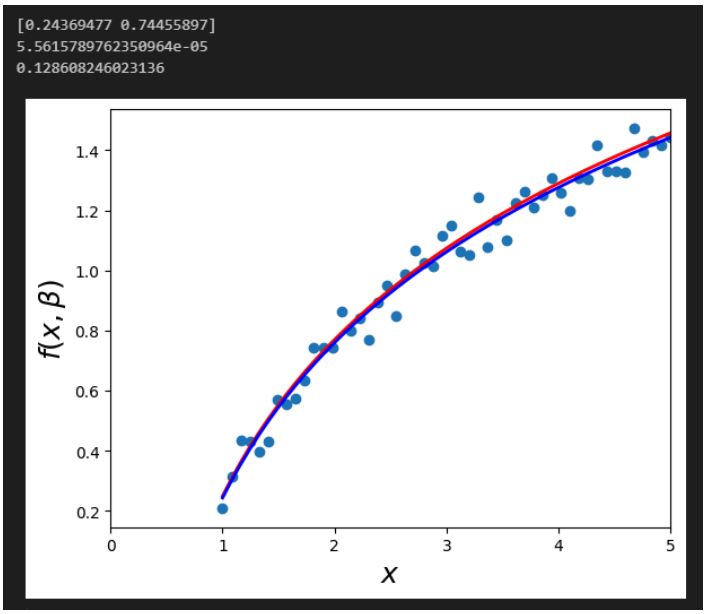
Ответ:

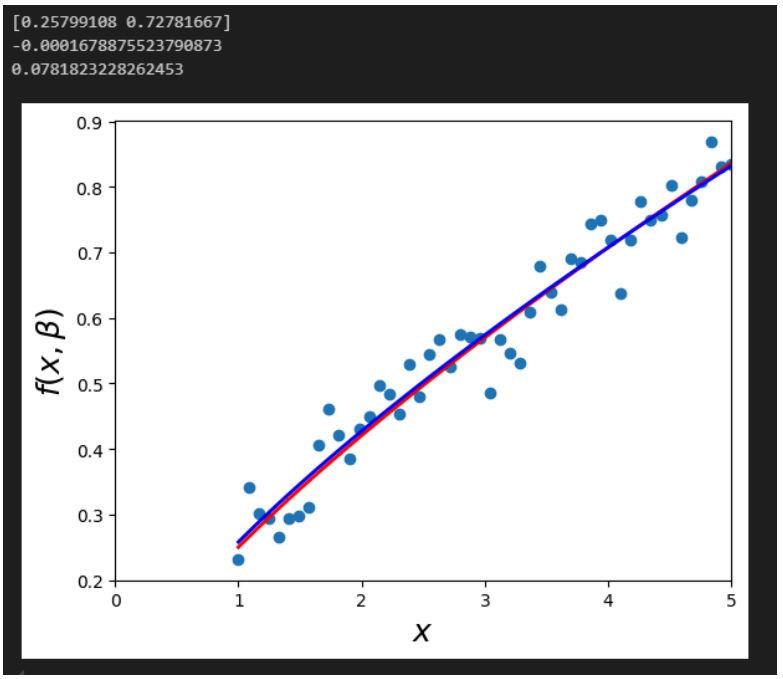
```
[0.25252794 0.74635668]
lin_dev:  0.00012871270924635713
fres:  0.11317841766680767
```




```
[0.23512622 0.76875684 0.49581889]
0.000155509396199872
0.1296785517751105
```







1.2. Теоретический материал – Задачи регрессии

Линейная регрессия - это широко используемый метод статистического анализа, который использует регрессионный анализ в математической статистике для определения количественной взаимосвязи между двумя или более переменными. Если регрессионный анализ включает две или более независимых переменных, а связь между зависимой и независимой переменными является линейной, тогда имееи дело с множественной линейной регрессией.

В этом разделе мы увидим, как библиотеку Scikit-Learn в Python для машинного обучения можно использовать для реализации функций регрессии.

Мы начнем с простой линейной регрессии с участием двух переменных, а затем перейдем к линейной регрессии с участием нескольких переменных.

1.2.1 Пример

Задача:

Построим простую линейную регрессию в Python с использованием библиотеки scikit-learn

Решение:

```
#Импортируем необходимые библиотеки
#используем pandas и numpy для обработки данных,
#matplotlib для визуализации и sklearn для обучения наборов данных и импорта моделей.
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from pandas import DataFrame,Series
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.linear_model import LinearRegression
```

```
#создадим набор данных для описания взаимосвязи между временем обучения студентов и успеваемостью
my_dict = {'Учебное время': [0.50,0.75,1.00,1.25,1.50,1.75,1.75,2.00,2.25,2.50,2.75,3.00,3.25,3.50,4.00,4.25,4.50,4.75,
                             5.00,5.50],
           'Оценка': [10,22,13,43,20,22,33,50,62,48,55,75,62,73,81,76,64,82,90,93]}

dataset = pd.DataFrame(my_dict)
dataset.head()
```

```
1 #Исследуем набор данных
2 print(dataset.shape)
3 dataset.describe()
```

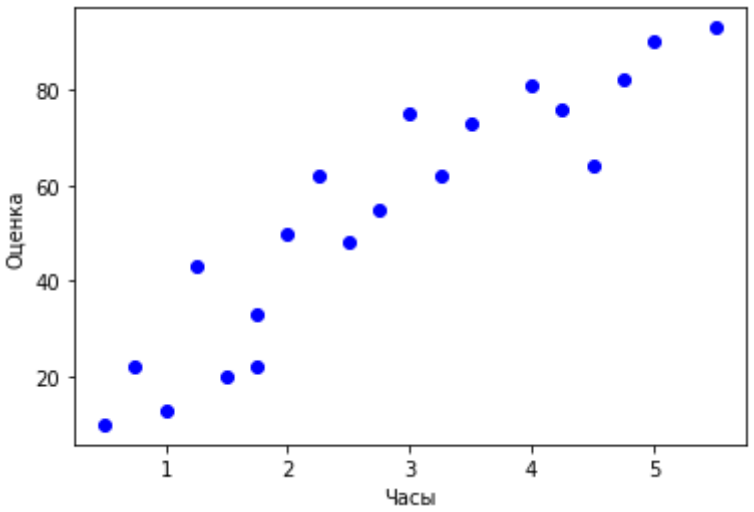
```
# Нарисуем точечную диаграмму
plt.scatter (dataset['Учебное время'], dataset['Оценка'], color = 'b', label = "данные экзамена")
plt.xlabel("Часы")
plt.ylabel("Оценка")
plt.show()
```

Ответ:

	Учебное время	Оценка
0	0.50	10
1	0.75	22
2	1.00	13
3	1.25	43
4	1.50	20

```
(20, 2)
```

	Учебное время	Оценка
count	20.000000	20.000000
mean	2.787500	53.700000
std	1.507165	26.435821
min	0.500000	10.000000
25%	1.687500	30.250000
50%	2.625000	58.500000
75%	4.062500	75.250000
max	5.500000	93.000000



После того как мы получили представление о данных, разделим информацию на «атрибуты» и «метки». Атрибуты – это независимые переменные, а метки – это зависимые переменные, значения которых должны быть предсказаны. В нашем наборе всего два столбца и необходимо предсказать оценку в зависимости от количества часов. Чтобы извлечь атрибуты и метки, выполните следующий скрипт:

Решение:

```
X = dataset.iloc[:, :-1].values
y = dataset.iloc[:, 1].values
print(X)
print(y)
```

```
# Теперь, когда у нас есть атрибуты и метки, необходимо разделить их на а обучающий и тестовый наборы.
# Приведенный фрагмент разделяет 80% данных на обучающий набор, а 20% данных – на набор тестов
X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(X, y, test_size = 0.2, random_state = 0)
```

```
# далее можно обучить алгоритм линейной регрессии
# необходимо импортировать класс LinearRegression, создать его экземпляр и вызвать метод fit()
regressor = LinearRegression()
regressor.fit(X_train, y_train)
```

```
#приведем получившиеся коэффициенты для линии регрессии
print(regressor.intercept_)
print(regressor.coef_)
```

Ответ:

```
[[0.5 ]
 [0.75]
 [1.  ]
 [1.25]
 [1.5 ]
 [1.75]
 [1.75]
 [2.  ]
 [2.25]
 [2.5 ]
 [2.75]
 [3.  ]
 [3.25]
 [3.5 ]
 [4.  ]
 [4.25]
 [4.5 ]
 [4.75]
 [5.  ]
 [5.5 ]]
[10 22 13 43 20 22 33 50 62 48 55 75 62 73 81 76 64 82 90 93]

LinearRegression()

5.475400029908791
[17.02706744]
```

Получившийся результат можно интерпретировать следующим образом: с каждым затраченным часом на обучение результат экзамена повышается приблизительно на 17 баллов. Далее можно построить прогнозы. Для этого мы будем использовать наши тестовые данные и посмотрим, насколько точно наш алгоритм предсказывает процентную оценку. Чтобы сделать прогноз на тестовых данных необходимо выполнить следующий код:

Решение:

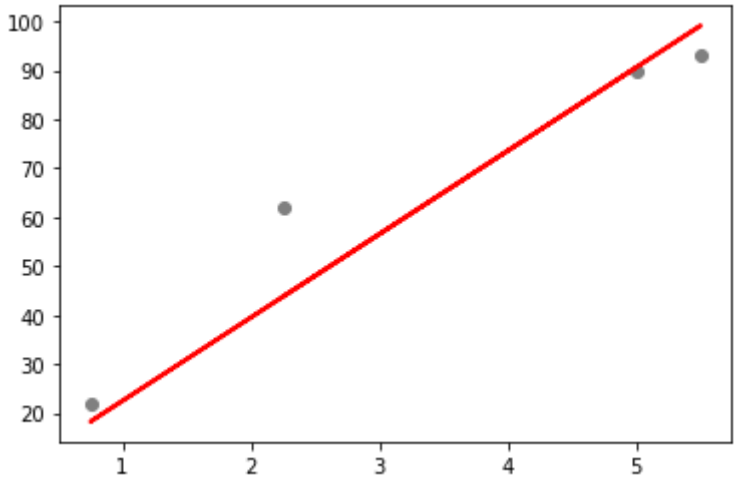
```
y_pred = regressor.predict(X_test)
# сравним фактические значения с прогнозируемыми
df = pd.DataFrame({'Actual': y_test, 'Predicted': y_pred})
df
```

```
# визуализируем результат сравнения в виде гистограммы
df.plot(kind='bar')
plt.grid(which='major', linestyle='-', linewidth='0.5', color='green')
plt.grid(which='minor', linestyle=':', linewidth='0.5', color='black')
plt.show()
```

```
#построим линию регрессии с тестовыми данными
plt.scatter(X_test, y_test,  color='gray')
plt.plot(X_test, y_pred, color='red', linewidth=2)
plt.show()
```

Ответ:

	Actual	Predicted
0	90	90.610737
1	22	18.245701
2	93	99.124271
3	62	43.786302



Задание:

Постройте модель линейной регрессии для произвольных данных из двух столбцов. Для примера можно взять точечную зависимость заработной платы от опыта работы:
(https://raw.githubusercontent.com/AnnaShestova/salary-years-simple-linear-regression/master/Salary_Data.csv).
Найдите коэффициенты линии регрессии. Постройте прогноз.

Решение:

Ответ:

1.3. Теоретический материал – Множественная регрессия

В предыдущем примере мы проиллюстрировали линейную регрессию с двумя переменными. Однако, почти все реальные задачи имеют больше параметров. Линейная регрессия с участием нескольких переменных называется «множественной линейной регрессией» или многомерной линейной регрессией. Шаги для выполнения множественной линейной регрессии аналогичны шагам для простой . Разница заключается в оценке. Вы можете использовать множественную регрессию, чтобы узнать, какой фактор оказывает наибольшее влияние на прогнозируемый результат или как различные переменные связаны друг с другом.

1.3.1 Пример

Задача:

Для решения задачи множественной регрессии можно задействовать уже известный метод numpy.linalg.lstsq.

Решение:

```
import numpy as np

y = [1,2,3,4,3,4,5,3,5,5,4,5,4,5,4,5,6,0,6,3,1,3,1]
X = [[0,2,4,1,5,4,5,9,9,9,3,7,8,8,6,6,5,5,5,6,6,5,5],
     [4,1,2,3,4,5,6,7,5,8,7,8,7,8,7,8,6,8,9,2,1,5,6],
     [4,1,2,5,6,7,8,9,7,8,7,8,7,4,3,1,2,3,4,1,3,9,7]]
X = np.transpose(X) # transpose so input vectors
X = np.c_[X, np.ones(X.shape[0])]  # add bias term
linreg = np.linalg.lstsq(X, y, rcond=None)[0]
print(linreg)
```

Ответ:

```
[ 0.1338682   0.26840334 -0.02874936  1.5122571 ]
```

Кроме этого можно использовать возможности библиотеки scikit-learn. Рассмотрим пример.

1.3.2 Пример

Задача:

Для данных из предыдущей задачи построить модель множественной линейной регрессии с использованием средств библиотеки scikit-learn.

Решение:

```python
#Импортируем необходимые библиотеки
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as seabornInstance
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from sklearn import metrics
```

```python
y = [1,2,3,4,3,4,5,3,5,5,4,5,4,5,4,5,6,0,6,3,1,3,1]
X = [[0,2,4,1,5,4,5,9,9,9,3,7,8,8,6,6,5,5,5,6,6,5,5],
     [4,1,2,3,4,5,6,7,5,8,7,8,7,8,7,8,6,8,9,2,1,5,6],
     [4,1,2,5,6,7,8,9,7,8,7,8,7,4,3,1,2,3,4,1,3,9,7]]

# формируем DataFrame из двух списков
new_y = np.array(y)
new_y = new_y.transpose()
df1 = pd.DataFrame(new_y)
new_X = np.array(X)
new_X = new_X.transpose()
df2 = pd.DataFrame(new_X)
df1 = df1.rename(columns = {0: 'y'}, inplace = False)
df2 = df2.rename(columns = {0: 'x1', 1: 'x2', 2: 'x3'}, inplace = False)

frames = [df1, df2]
dataset = pd.concat([df1, df2], axis=1, join="inner")
dataset.head()
```

```python
# изучим данные
print(dataset.shape)
dataset.describe()
```

```python
# разделим данные на метки и атрибуты
X = dataset[['x1', 'x2', 'x3']]
y = dataset['y']
```

```python
# разделим данные на обучающую и тестовую выборки
X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(X, y, test_size=0.2, random_state =
```

```python
#для обучения алгоритма мы выполняем тот же код, что и раньше, используя метод fit() класса LinearRegression
regressor = LinearRegression()
regressor.fit(X_train, y_train)
```

```python
#выведем коэффициенты модели
coeff_df = pd.DataFrame(regressor.coef_, X.columns, columns=['Coefficient'])
coeff_df
```

```python
#Чтобы сделать прогнозы на тестовых данных, выполните следующий код
y_pred = regressor.predict(X_test)
df = pd.DataFrame({'Actual': y_test, 'Predicted': y_pred})
df
```

```python
#Последний шаг - оценить производительность алгоритма. Мы сделаем это, найдя значения для MSE
print('Mean Squared Error:', metrics.mean_squared_error(y_test, y_pred))
```

Ответ:

	y	x1	x2	x3
0	1	0	4	4
1	2	2	1	1
2	3	4	2	2
3	4	1	3	5
4	3	5	4	6

```
(23, 4)
```

	y	x1	x2	x3
count	23.000000	23.000000	23.000000	23.000000
mean	3.565217	5.347826	5.521739	5.043478
std	1.674029	2.404706	2.428422	2.704849
min	0.000000	0.000000	1.000000	1.000000
25%	3.000000	4.500000	4.000000	3.000000
50%	4.000000	5.000000	6.000000	5.000000
75%	5.000000	6.500000	7.500000	7.000000
max	6.000000	9.000000	9.000000	9.000000

```
LinearRegression()
```

	Coefficient
x1	0.223219
x2	0.136709
x3	-0.063757

	Actual	Predicted
11	5	4.119478
10	4	3.153648
21	3	3.199155
14	4	4.078333
20	1	3.258079

```
Mean Squared Error: 1.327269924234307
```

Задание

Задача:

Постройте модель множественной линейной регрессии для произвольных данных из нескольких столбцов. Для примера можно взять потребления газа (в миллионах галлонов) в 48 штатах США или

набор данных о качестве красного вина (1) и (2) соответственно. Найдите коэффициенты множественной регрессии. Постройте прогноз.
1. https://raw.githubusercontent.com/likarajo/petrol_consumption/master/data/petrol_consumption.csv
2. https://raw.githubusercontent.com/aniruddhachoudhury/Red-Wine-Quality/master/winequality-red.csv

Решение:

Задание*

Задача: Экспериментально получены N − значений величины Y при различных значениях величины X. Определить коэффициенты полиномов первой и второй степени, аппроксимирующих результаты эксперимента, с применением метода наименьших квадратов. Вычислить СКО. Расчеты проводятся вручную с указанием формул, применяемых для определения коэффициентов и подробных расчетов (сдаются на листке преподавателю, письменный опрос). В тетрадке Jupyter Notebook решение реализуется методами на усмотрение студента.
Вариант выбирается по последней цифре номера студенческого билета.
Если номер заканчивается на 1, то вариант 1, на ноль – вариант 10.

Варианты заданий:

Вариант 1

x	y
0,0	3,0
0,2	6,0
0,4	3,0
0,6	6,0
0,8	4,0
1,0	3,0

Вариант 2

x	y
0,0	5,0
0,2	5,0
0,4	4,0
0,6	4,0
0,8	6,0
1,0	6,0

Вариант 3

x	y
3,0	2,0
3,2	3,0
3,4	3,0

Вариант 4

x	y
3,0	6,0
3,2	2,0
3,4	6,0

3,6	3,0
3,8	2,0
4,0	4,0

3,6	4,0
3,8	3,0
4,0	4,0

Вариант 5

x	y
5,0	2,0
5,2	4,0
5,4	4,0
5,6	3,0
5,8	3,0
6,0	3,0

Вариант 6

x	y
4,0	4,0
4,2	3,0
4,4	6,0
4,6	6,0
4,8	4,0
5,0	4,0

Вариант 7

x	y
1,0	2,0
1,2	6,0
1,4	4,0
1,6	4,0
1,8	2,0
2,0	5,0

Вариант 8

x	y
5,0	3,0
5,2	2,0
5,4	5,0
5,6	2,0
5,8	2,0
6,0	3,0

Вариант 9

x	y
2,0	4,0
2,2	2,0
2,4	4,0
2,6	2,0
2,8	5,0
3,0	2,0

Вариант 10

x	y
0,0	6,0
0,2	3,0
0,4	2,0
0,6	6,0
0,8	2,0
1,0	5,0

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt
```

```
from sklearn.metrics import root_mean_squared_error

X = np.array([0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0])

y = np.array([3.0, 6.0, 3.0, 6.0, 4.0, 3.0])

# Полином первой степени

coeffs_1 = np.polyfit(X, y, 1)

print("Коэффициенты полинома первой степени:", coeffs_1)


# Полином второй степени

coeffs_2 = np.polyfit(X, y, 2)

print("Коэффициенты полинома второй степени:", coeffs_2)

# Предсказания для полинома первой степени

Y_pred_1 = np.polyval(coeffs_1, X)


# Вычисление СКО для первой степени

rmse_1 = metrics.root_mean_squared_error(y, Y_pred_1)

print("СКО для полинома первой степени:", rmse_1)


# Предсказания для полинома второй степени

Y_pred_2 = np.polyval(coeffs_2, X)


# Вычисление СКО для второй степени

rmse_2 = metrics.root_mean_squared_error(y, Y_pred_2)

print("СКО для полинома второй степени:", rmse_2)

# Визуализация данных и аппроксимаций

plt.scatter(X, y, label='Данные', color='blue')


plt.plot(X, Y_pred_1, label='Полином 1-й степени', color='red')


plt.plot(X, Y_pred_2, label='Полином 2-й степени', color='green')
```

```
plt.xlabel('X')

plt.ylabel('y')

plt.title('Аппроксимация полиномами')

plt.legend()

plt.grid()

plt.show()
```

```
Коэффициенты полинома первой степени: [-0.42857143  4.38095238]
Коэффициенты полинома второй степени: [-7.14285714  6.71428571  3.42857143]
```

```
СКО для полинома первой степени: 1.3357121636516542
СКО для полинома второй степени: 1.1296860077873303
```