Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Оптимальное управление»

Студент 315 группы
М. Г. Зинченко

Руководитель практикума
П. А. Точилин

Москва, 2019

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + 2x^3 \cos(\dot{x}) + \sin(2x) + \dot{x} = u,$$

где $x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$. На возможные значения управляющего параметра u наложено ограничение: $u \in [-\alpha, \alpha]$. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ (множество пар $(x(t), \dot{x}(t))$) в классе программных управлений в заданный момент времени $t \geqslant t_0$.

1. Необходимо написать в среде MatLab функцию `reachset`(alpha, t), которая по заданным параметрам $\alpha > 0, t \geqslant t_0$ рассчитывает приближенно множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0)$. На выходе функции — два массива X, Y с упорядоченными координатами точек многоугольника, образующего границу искомого множества. Точки в этих массивах должны быть упорядочены так, чтобы результаты работы функции без дополнительной обработки можно было подавать на вход функциям визуализации(например, `plot`). Предусмотреть такой режим работы функции, при котором она возвращает также координаты линий переключения оптимального управления (с возможностью их визуализации).

2. Необходимо реализовать функцию `reachsetdyn`(alpha, t_1, t_2, N, filename), которая, используя функцию `reachset(alpha, t)`, строит множества достижимости для моментов времени $\tau_i = t_1 + \dfrac{(t_2 - t_1)i}{N}, i = 0, 1, \ldots, N$. Здесь $t_2 \geqslant t_1 \geqslant t_0$, N — натуральное число. Для каждого момента времени τ_i функция должна отобразить многоугольник, аппроксимирующий границу множества достижимости. Результат работы функции должен быть сохранен в виде видео-файла `filename.avi`. Необходимо также предусмотреть вариант работы функции (при отсутствии параметра `filename`) без сохранения в файл, с выводом непосредственно на экран. Как частный случай, функция должна иметь возможность строить границу множества достижимости в один фиксированный момент времени (при $t_2 = t_1$).

3. В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе построения множества достижимости программой, привести примеры построенных множеств достижимости (с иллюстрациями), исследовать зависимость множеств достижимости от величины параметра α. Все вспомогательные утверждения(за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны.

2 Теоретические выкладки

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= & x_2, \\ \dot{x_2} &= & -f\,(x_1, x_2) + u, \end{cases} \tag{1}$$

где $u \in [-\alpha, \alpha]$.

Определение 1. *Множеством достижимости в момент $t \geqslant 0$ назовём множество*

$$X[t] := X(t, t_0, x_0) =$$

$$= \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists u(\cdot) : |u(\tau)| \leqslant \alpha \,\dot{\forall} \tau \in [0,t] : (x_1,x_2) = (x_1(t,t_0,x_0), x_2(t,t_0,x_0)) \Big|_{u(\cdot)} \right\}.$$

Сформулируем *принцип максимума для задачи достижимости.*

Теорема 1. *Пусть* $(x^*(\cdot),u^*(\cdot))$ *— пара такая, что* $x^*(t_1^*) \in \partial\mathcal{X}[t_1^*]$. *Тогда существует функция* $\psi^*(\cdot) : [0,t_1^*] \to \mathbb{R}^2$ *такая, что*

1. $\psi^* \not\equiv 0$ *(из этого следует, что* $\psi^*(t) \neq 0$ *для всех* $t \in [0,t_1^*]$*) — условие нетривиальности.*
2. $\dot{\psi}^*(t) = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\Big|_{\substack{\psi=\psi^*(t)\\ x=x^*(t)\\ u=u^*(t)}}$ *— сопряжённая система.*
3. $u^*(t) \in \operatorname*{Argmax}\limits_{u\in[\alpha,\alpha]} \mathcal{H}(\psi^*(t),x^*(t),u)$ *для почти всех* $t \in [0,t_1^*]$ *— условие максимума.*
4. $\mathcal{M}(\psi^*(t),x^*(t)) \equiv \mathrm{const} \geqslant 0,$

где $\mathcal{M}(\psi,x) = \sup\limits_{u\in[-\alpha,\alpha]} \mathcal{H}(\psi,x,u).$

Сформулируем еще одну теорему *(о том, как соотносятся нули* x_2 *и* ψ_2 *).*

Теорема 2. *Пусть* $\tau_1 < \tau_2$ *и*

1. $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$ *и* $x_2(\tau_1) = 0 \Rightarrow x_2(\tau_2) = 0$*:*
2. $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$ *и* $x_2(\tau_1) \neq 0 \Rightarrow x_2(\tau_2) \neq 0$*, но* $\exists t' \in (\tau_1,\tau_2) : x_2(t') = 0$*;*
3. $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$*,* $x_2(t) \neq 0$ *при* $t \in (\tau_1,\tau_2)$ *и* $\psi_2(\tau_1) = 0 \Rightarrow \psi_2(\tau_2) = 0$*;*
4. $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$*,* $x_2(t) \neq 0$ *при* $t \in (\tau_1,\tau_2)$ *и* $\psi_2(\tau_1) \neq 0 \Rightarrow \psi_2(\tau_2) \neq 0$*, но* $\exists t'' \in (\tau_1,\tau_2) : \psi_2(t'') = 0$.

Доказательство. Функция Гамильтона-Понтрягина $\mathcal{H}(\psi,x,u)$ и функция $\mathcal{M}(\psi,x)$ системы (1) принимают следующий вид:

$$\mathcal{H} = \psi_1 x_2 + \psi_2(-f(x_1,x_2) + u),$$

$$\mathcal{M}(\psi,x) = \psi_1 x_2 - \psi_2 f(x_1,x_2) + \alpha|\psi_2|.$$

1. $\mathcal{M}\Big|_{t=\tau_1} = 0,$
   $\mathcal{M}\Big|_{t=\tau_2} = \psi_1(\tau_2)\, x_2(\tau_2) = 0.$
   Следовательно, $x_2(\tau_2) = 0$.
2. $\mathcal{M}\Big|_{t=\tau_1} = \psi_1(\tau_1)\, x_2(\tau_1) \neq 0,$
   $\mathcal{M}\Big|_{t=\tau_2} = \psi_1(\tau_2)\, x_2(\tau_2) \neq 0.$
   Пусть τ_1 и τ_2 — последовательные нули ψ_2. Тогда $\psi_1(\tau_1)\,\psi_1(\tau_2) < 0$, $\dot{\psi}_2(\tau_1)\,\dot{\psi}_2(\tau_2) < 0$. Тогда $x_2(\tau_1)\, x_2(\tau_2) < 0$, а значит, в какой-то точке на отрезке (τ_1,τ_2) x_2 обнулится.

Для доказательства пунктов 3) и 4) введем функцию $y(t) = \psi_1(t)x_2(t)+\psi_2(t)\frac{dx_2(t)}{dt}$. Рассмотрим $\frac{dy(t)}{dt}$ между переключениями.

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{df}{dx_1}\psi_2 x_2+\psi_1(-f+u)+(-\psi_1+\frac{df}{dx_2}\psi_2)(-f+u)+\psi_2(-\frac{df}{dx_1}x_2-\frac{df}{dx_2}(-f+u)) = 0.$$

Пусть τ — момент переключения. Рассмотрим $y(\tau-0)$ и $y(\tau+0)$.

$$y(\tau-0) = \psi_1(\tau)x_2(\tau)+0\frac{dx_2}{dt}(\tau-0)y(\tau+0) = \psi_1(\tau)x_2(\tau)+0\frac{dx_2}{dt}(\tau+0) = y(\tau-0).$$

Таким образом, $y \equiv \text{const}$.

3. $y(\tau_1) = \psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) = 0$,
   $y(\tau_2) = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2) + \psi_2(\tau_2)\frac{dx_2}{dt}(\tau_2) = 0$.
   Так как $x_2(\tau_2) = 0$, а $\frac{dx_2}{dt}(\tau_2) \neq 0$ получаем $\psi_2(\tau_2) = 0$.

4. $(x_2(t))^2 + (\frac{dx_2(t)}{dt})^2 \neq 0, t \in [\tau_1, \tau_2]$
   $y(\tau_1) = \psi_2(\tau_1)\frac{dx_2(\tau_1)}{dt}$,
   $y(\tau_2) = \psi_2(\tau_2)\frac{dx_2(\tau_2)}{dt}$.
   Из того, что $y(\tau_1) = y(\tau_2)$ и $\frac{dx_2(\tau_1)}{dt}\frac{dx_2(\tau_2)}{dt} < 0$ получаем, что $\psi_2(\tau_1)\psi_2(\tau_2) < 0$.

□

Утверждение 1. *В решении задачи (1) не может существовать особого режима на отрезке положительной длины.*

Доказательство. Из теоремы 1 для системы (1) получим:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\psi_2, \end{cases} \tag{2}$$

Для существования особого режима необходимо, чтобы на интервале положительной длины $\psi_2 = 0$, а также $\dot{\psi}_2 = 0$. Но тогда в силу (2) следует, что $\psi_1 = 0$. Это противоречит условию невырожденности. □

3 Решение

Перепишем исходное уравнение в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x_2} = -2x_1^3\cos(x_2) - \sin(2x_1) - x_2 + u, & x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Функция Гамильтона-Понтрягина для нее примет вид:

$$H = \psi_1 x_2 - 2\psi_2 x_1^3 \cos x_2 - \psi_2 \sin(2x_1) - \psi_2 x_2 + \psi_2 u.$$

Теперь выпишем для нее сопряженную систему:

$$(CC) : \begin{cases} \dot{\psi_1} = -6\psi_2 x_1^2 \cos x_2 - 2\psi_2 \cos(2x_1), \\ \dot{\psi_2} = \psi_1 + 2\psi_2 x_1^3 \sin x_2 - \psi_2. \end{cases}$$

Управление примет вид:

$$u^* = \begin{cases} \alpha, & \psi_2 > 0, \\ [-\alpha, \alpha], & \psi_2 = 0, \\ -\alpha, & \psi_2 < 0. \end{cases}$$

В начальный момент времени верно $\psi_2 < 0$ либо $\psi_2 > 0$, то есть справедлива одна из систем S_+ или S_-:

$$S_+ : \begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = -2x_1^3 \cos(x_2) - \sin(2x_1) - x_2 + \alpha, \end{cases}$$

$$S_- : \begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = -2x_1^3 \cos(x_2) - \sin(2x_1) - x_2 - \alpha. \end{cases}$$

Переключения происходят при $\psi_2 = 0$.

Программа работает следующим образом:

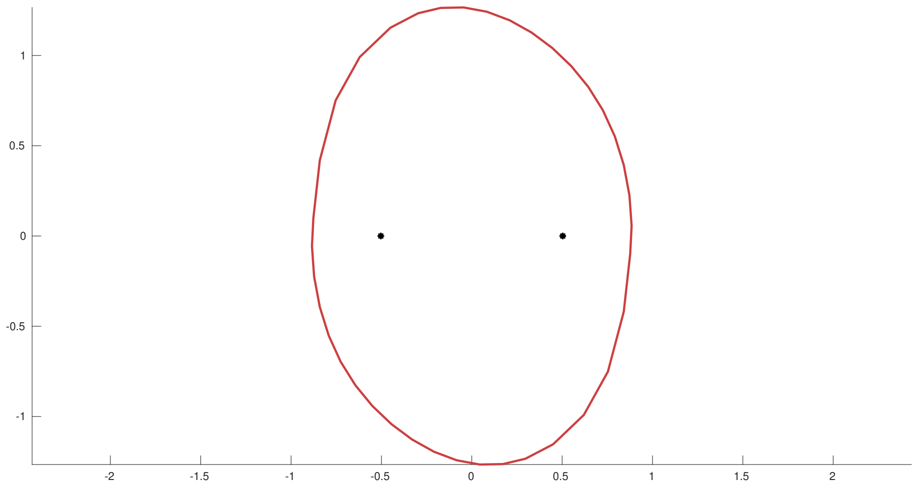
1. Решаем систему S_+ на отрезке $[t_0, t_1]$, где t_1 такое, что $x_2(t_1) = 0$.
2. Согласно теореме 2 в промежуток времени (t_0, t_1) должно произойти хотя бы одно переключение.
3. Перепараметризуем систему по моменту первого переключения. То есть зададим сетку по времени на интервале (t_0, t_1). Каждое значение t^1_{switch} на сетке — это возможный момент первого переключения, то есть $\psi_2(t^1_{switch}) = 0$.
4. Нормируем систему, взяв $\psi_1(t^1_{switch}) = 1$.
5. Решаем системы $S_-, (CC)$ с начальными условиями $\psi_1(t^1_{switch}) = 1, \psi_2(t^1_{switch}) = 0$. Значения $x_1(t^1_{switch})$, $x_2(t^1_{switch})$ находим из пункта 1.
6. Интегрируем эти системы до момента $t^2_{switch} > t^1_{switch}$, в который $\psi_2(t^2_{switch}) = 0$.
7. Интегрируем $S_+, (CC)$ до момента, когда ψ_2 снова станет 0. Начальные условия для уравнений берем из решения пункта 5.
8. Продолжаем выполнять эти действия в цикле.
9. Выходим из цикла, когда момент следующего переключения будет больше чем T.
10. Аналогичную процедуру проделываем для случая, когда в начальный момент времени $\psi_2 < 0$ и справедлива система S_-.
11. Точки $x_1(T), x_2(T)$ (концы траекторий) и будут образовывать границу множества достижимости.

4 Стационарные точки

Неподвижными точками называются такие точки (x_1, x_2), что

$$\begin{cases} \dot{x_1} & = & 0, \\ \dot{x_2} & = & 0. \end{cases}$$

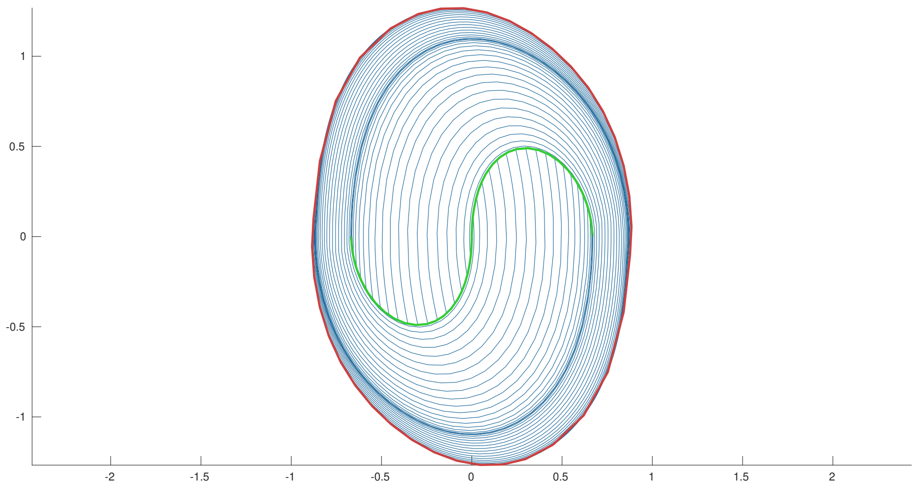
Чтобы их найти используем функцию `vpasolve`. На следующем графике эти точки выделены черным цветом:



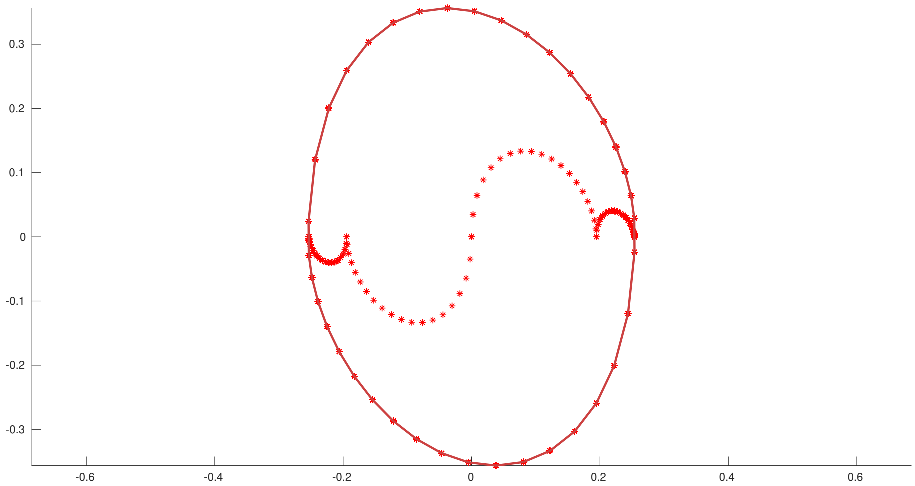
Красным цветом обозначена граница множества достижимости.

5 Примеры

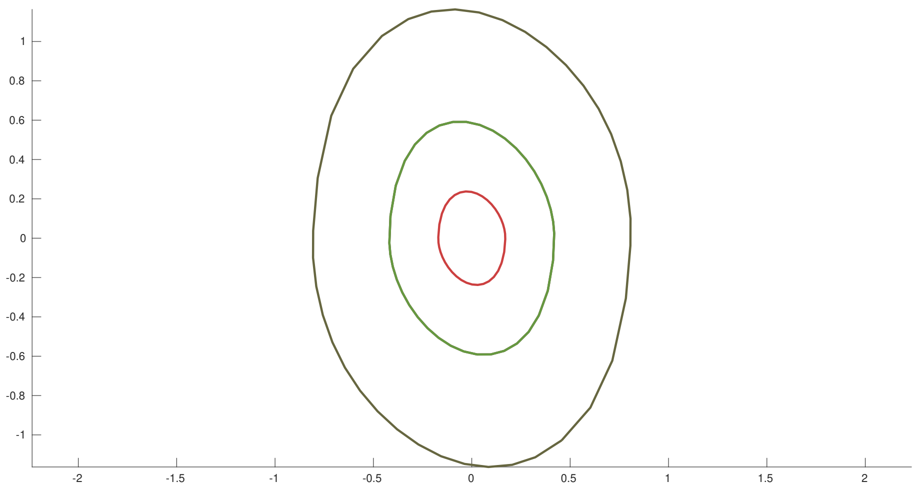
В следующих примерах красным цветом обозначена граница множества достижимости, синим цветом обозначены траектории системы. Рассмотрим пример работы программы с параметрами alpha = 1.1, T = 5:



На следующем графике красными точками обозначены переключения системы. Параметры alpha = 0.3, T = 5.



На этом графике приведены границы трех множеств достижимости для T = 5.
Для красной кривой alpha = 0.2.
Для зеленой кривой alpha = 0.5.
Для серой кривой alpha = 1.



Список литературы

[1] Рублев И. В. Лекции по курсу Оптимальное управление. 2019