Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Оптимальное управление»

Задание 2

Студент 315 группы
М. Г. Зинченко

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., ассистент П.А. Точилин

Москва, 2019

1 Постановка задачи

Рассмотрим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_2 \\ \dot{x}_2 = u_1 + u_2 x_2 \end{cases}, t \in [0, T], \qquad (1)$$

где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, u = (u_1, u_2)' \in \mathbb{R}^2$. На возможные значения управляющих параметров u_1, u_2 наложены следующие ограничения:

1. либо $u_1 \geq 0, u_2 \in [-k, k], k > 0$,

2. либо $u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \in [-k, k], k > 0$.

Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(0) : x_1(0) \in [-M, M], x_2(0) = 0$. Необходимо за счет выбора программного управления u и начальной позиции перевести систему из заданной начальной позиции в такую позицию в момент времени T, в которой $x_1(T) = L > M, |x_2(T)| \leq \varepsilon$. На множестве всех реализаций программных управлений, переводящих материальную точку в указанное множество, необходимо решить задачу оптимизации:

$$J = \int\limits_0^T u_1^2(t)dt \to \min_{u(\cdot)} \qquad (2)$$

1. Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам T, k, M, L, ε определяет, разрешима ли задача оптимаьного управления (при одном из указанных двух ограничений на управления). Если задача разрешима, то программа должна построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Кроме того, программа должна определить количество переключений найденного оптимального управления, а также моменты переключений.

2. В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решениия задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями). Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны. В отчете должны быть приведены примеры оптимаьных траекторий для всех возможных качественно разных режимов.

2 Теоретическая часть

2.1 Формулировка используемых теорем

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathcal{H}(x, \psi, u) = \sum_{i=0}^{2} \langle \psi_i, f_i \rangle, \tag{3}$$

где f_0 — подинтегральное выражение из (2), $f_i, i = 1, 2$ — правые части соответствующих уравнений системы (1). В нашем случае функция Гамильтона-Понтрягина имеет вид:

$$\mathcal{H} = \psi_0 u_1^2 + \psi_1(x_2 + u_2) + \psi_2(u_1 + u_2 x_2). \tag{4}$$

Далее сформулируем принцип максимума Понтрягина:

Теорема 1 *Пусть $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ — оптимальная пара при $t \in [t_0^*, t_1^*]$. Тогда существует $\widetilde{\psi}^* : [t_0^*, t_1^*] \to \mathbb{R}^{n+1}$ — решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$, $\widetilde{\psi}^*(t) = (\psi_0^*(t), ..., \psi_n^*(t))$:*

1. *$\widetilde{\psi}^*(\cdot) \neq 0$ — условие невырожденности,*
2. *$\mathcal{H}(x^*(t), \widetilde{\psi}^*(t), u^*(t)) = \sup_{v \in \mathcal{P}} H(x^*(t), \widetilde{\psi}^*(t), v) = M(x, \widetilde{\psi})$ — условие максимума,*
3. *$\psi_0^* = \mathbf{const} \leq 0$, $M(\widetilde{\psi}^*(t), x^*(t)) = 0$,*
4. *$\widetilde{\psi}^*(t_0)) \perp \mathcal{T}_{x^*(t_0)} \mathcal{X}^0, \widetilde{\psi}^*(t_1) \perp \mathcal{T}_{x^*(t_1)} \mathcal{X}^1$ — условия трансверсальности на концах.*

Также для решения дифференциальных уравнений первого порядка введем формулу Коши:

Теорема 2 *Рассмотрим задачу Коши для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с непостоянными коэффициентами:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{5}$$

где $a(t), b(t)$ непрерывные на $[t_0, t_1]$ функции. Тогда в любой момент времени $t \in [t_0, t_1]$ решение системы представимо в виде:

$$x(t) = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\right) x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} a(s)ds\right) b(\tau)d\tau \tag{6}$$

3 Решение задачи

Выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина для нашей системы:

$$\mathcal{H} = \psi_0 u_1^2 + \psi_1(x_2 + u_2) + \psi_2(u_1 + u_2 x_2).$$

Сопряженная система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - \psi_2 u_2. \end{cases} \tag{7}$$

4 Анормальный случай

Рассмотрим анормальмальный случай при $\psi_0 = 0$. Тогда при $\psi_2 \neq 0$ получим, что $u_1^* = \infty$ и соответственно $J = \infty$.
При $\psi_2 = 0$ получим $u_1 = 0$. Тогда

$$u_2^* = \begin{cases} -k, & \psi_1 < 0, \\ [-k, k], & \psi_1 = 0, \\ k, & \psi_1 > 0. \end{cases}$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 + u_2, \\ \dot{x_2} = u_2 x_2, \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

В таком случае управление u_2 будет определяться знаком ψ_1^0, а x_2 будет равно нулю. Заметим, что для того чтобы добраться в точку $x_1(T) = L$ в таком случае нужно будет взять $u_2 = k$

5 Первая задача ($u_1 \geq 0$)

Найдем управления из условия максимума. В силу положительной однородности по сопряженным переменным будем считать $\psi_0 = -1$.

$$u_1^* = \begin{cases} \dfrac{\psi_2}{2}, & \psi_2 > 0, \\ 0, & \psi_2 \leq 0, \end{cases}$$

$$u_2^* = \begin{cases} -k, & \psi_1 + \psi_2 x_2 < 0, \\ [-k, k], & \psi_1 + \psi_2 x_2 = 0, \\ k, & \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0. \end{cases}$$

Далее будем рассматривать все случаи, когда управления могут принимать те или иные значения. Как видно из приведенных выражений, учитывая $x_2(0) = 0$, управления в начальный момент времени задаются параметрами $\psi_1(0) = \psi_1^0, \psi_2(0) = \psi_2^0$. Также из сопряженной системы можно сделать вывод, что $\psi_1(t) \equiv \psi_1^0 \equiv const$, так как производная $\dot{\psi_1} = 0$.

5.1 Особый режим

Особым режимом в этой системе называется такое ее состояние, при котором $\psi_1 + \psi_2 x_2 \equiv 0$. Продифференцируем это выражение. Получим

$$\psi_2 u_2 = -\psi_2 x_2^2.$$

Возможны два варианта.

1. $\psi_2 = 0$. В таком случае выйдет, что и $\psi_1 = 0$. Тогда система не сдвинется с места, поэтому такой вариант нас не интересует.

2. $u_1 = -x_2^2$. Тогда, в силу ограничения на первое управление, получим $u_1 = x_2 = \psi_1 = 0$.

Таким образом, особый режим возможен лишь в случае, если $\psi_1 = u_1 = x_2 = 0$.

5.2 Случай $\psi_1^0 > 0, \psi_2^0 > 0$

В этом случае имеем $u_1(0) = \dfrac{\psi_2}{2}, u_1(0) = k$. Пока $\psi_2 > 0$ для $\dot{x_2}$ справедливо $\dot{x_2} > 0$. Тогда x_2 будет возрастать. В то же время $\dot{\psi_2} < 0$ и ψ_2 будет убывать. Чтобы было выполнено $\psi_1 + \psi_2 x_2 = 0$ нужно, чтобы как минимум ψ_2 и x_2 были разных знаков. В силу вышесказанного получается, что возможен лишь случай, когда $\psi_2 < 0, x_2 > 0$. Но прежде чем ψ_2 станет меньше нуля оно должно пройти через $\psi_2 = 0$, что является условием переключения для первого управления. Поэтому переключение по первому управлению должно произойти раньше чем переключение по второму управлению.
Пусть это переключение произошло в момент времени τ_1. То есть $\psi_2(\tau_1) = 0$. Выпишем систему для ψ_2

$$\begin{cases} \dot{\psi_2} = -\psi_1 - k\psi_2 \\ \psi_2(\tau_1) = 0 \end{cases}$$

Это стандартный вид задачи Коши. Из этой системы однозначно определяется ψ_2. Таким образом, можно перепараметризовать систему при помощи момента переключения τ_1, который в отличие от ψ_2^0 ограничен отрезком [0, T]. Применим формулу Коши для ψ_2, получим:

$$psi_2 = \frac{\psi_1}{k}(e^{k(\tau_1 - t)} - 1). \tag{8}$$

Для x_2 получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \dfrac{\psi_2}{2} + kx_2 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Теперь применим формулу Коши для x_2. Получим следующее:

$$x_2(t) = \frac{\psi_1}{4k^2}(2 - 2e^{k\tau_1} - e^{k(\tau_1 - t)} + e^{k(t+\tau_1)}).$$

В момент времени τ_1 для x_2 справедливо:

$$x_2(\tau_1) = \frac{\psi_1}{4k^2}(e^{k\tau_1} - 1)^2.$$

После переключения система примет следующий вид ($t > \tau_1$):

$$\begin{cases} \dot{x_2} = kx_2 \\ \dot{\psi_2} = -\psi_1 - k\psi_2 \\ x_2(\tau_1) = \dfrac{\psi_1}{4k^2}(e^{k\tau_1} - 1)^2 \\ \psi_2(\tau_1) = 0 \end{cases}$$

Из формулы (8) делаем вывод, что переключение по первому управлению боьше не произойдет, так как эта функция принимает значение 0 только в одной точке (τ_1). Тогда переключение возможно лишь по второму управлению. Пусть оно происходит в момент времени τ_2. То есть

$$\psi_1 + \psi_2(\tau_2)x_2(\tau_2) = 0.$$

Выразим отсюда ψ_1

$$\psi_1 = -\psi_2(\tau_2)x_2(\tau_2).$$

Этим выражением осуществим перепараметризацию. Найдем значения ψ_2 и x_2 в точке τ_2.

$$\psi_2(\tau_2) = \frac{\psi_1}{k}(e^{k(\tau_1 - \tau_2)} - 1)$$

$$x_2(\tau_2) = \frac{\psi_1}{4k^2}e^{k(\tau_2 - \tau_1)}(e^{k\tau_1} - 1)^2$$

Найдем ψ_1.

$$\psi_1 = -\psi_2(\tau_2)x_2(\tau_2)$$

$$\psi_1 = \frac{4k^3}{(e^{k(\tau_2 - \tau_1)} - 1)(e^{k\tau_1} - 1)^2}$$

Теперь все выражения в системе будут зависеть только от τ_1 и τ_2.
Новая система ($t > \tau_2$) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = -kx_2 \\ \dot{\psi_2} = -\psi_1 + k\psi_2 \\ x_2(\tau_1) = \dfrac{\psi_1}{4k^2}(e^{k\tau_1} - 1)^2 \\ \psi_2(\tau_1) = 0 \end{cases}$$

Найдем производную $(\psi_1 + \dot{}\psi_2 x_2)$

$$dot\psi_1 + \psi_2 x_2) = -\psi_1 x_2 \tag{9}$$

Поскольку $\psi_1 > 0$ выражение (9) будет отрицательным до тех пор, пока $x_2 > 0$. Найдем x_2 по формуле Коши из системы:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = -kx_2 \\ x_2(\tau_2) = \dfrac{\psi_1}{4k^2}e^{k(\tau_2 - \tau_1)}(e^{k\tau_1} - 1)^2. \end{cases}$$

Тогда получим:

$$x_2 = \frac{\psi_1}{4k^2}e^{k(2\tau_2 - \tau_1 - t)}(e^{k\tau_1} - 1)^2.$$

Отсюда видно, что $x_2 > 0$. Тогда получим, что выражение (9) отрицательно, кроме того, $\psi_1 + \psi_2 x_2 = 0$ в точке τ_2, из чего следует, что при $t > \tau_2$ выражение $\psi_1 + \psi_2 x_2$ будет отрицательным. Поэтому переключений по второму управлению больше не будет. Теперь найдем ψ_2 из следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{\psi_2} = -\psi_1 + k\psi_2 \\ \psi_2(\tau_2) = \dfrac{\psi_1}{k}(e^{k(\tau_1 - \tau_2)} - 1) \end{cases}$$

Заметим, что в этой системе $\dot{\psi_2} < 0$ и $\psi_2(\tau_2) < 0$. Следовательно при $t > \tau_2$ верно $\psi_2 < 0$. Это значит, что переключений по первому управлению больше не будет.

5.3 Случай $\psi_1^0 > 0, \psi_2^0 \leq 0$

При таких условиях справедливо: $u_1(0) = 0, u_2(0) = k$.
Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = kx_2 \\ x_2(0) = 0 \\ \dot{\psi_2} = -\psi_1 - k\psi_2 \end{cases}$$

В такой системе x_2 будет оставаться 0. Поэтому переключения по второму управлению произойти не может. Предположим тогда, что в момент τ_1 произошло переключение по первому управлению. Получим систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi_2} = -\psi_1 - k\psi_2 \\ \psi_2(\tau_1) = 0. \end{cases}$$

Вычислим ψ_2 по формуле Коши:

$$\psi_2 = \frac{\psi_1}{k}(e^{k(\tau_1 - t)} - 1)$$

Вычислим значение этой функции в нуле:

$$\psi_2(0) = \frac{\psi_1}{k}(e^{k\tau_1} - 1) > 0$$

Но в рассматриваемом случае $\psi_2^0 \leq 0$. Приходим к противоречию. Следовательно в этом случае по первому управлению тоже нет переключений.

5.4 Случай $\psi_1^0 < 0, \psi_2^0 > 0$

При таких условиях справедливо: $u_1(0) = \dfrac{\psi_2}{2}, u_2(0) = -k$

Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \dfrac{\psi_2}{2} - kx_2 \\ \dot{\psi_2} = -\psi_1 + k\psi_2 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Из формулы Коши следует, что $\psi_2 > 0$ в этой системе, тогда и $x_2 > 0$. Следовательно по первому управлению переключения произойти не может. Пусть тогда в момент времени τ_1 происходит переключение по второму управлению. То есть

$$\psi_1 + \psi_2(\tau_1)x_2(\tau_1) = 0.$$

Рассмотрим производную $(\psi_1 + \dot{\psi_2 x_2}) = \dfrac{\psi_2^2}{2} - \psi_1 x_2 > 0$. Следовательно $\psi_1 + \psi_2 x_2$ будет только возрастать, поэтому второго переключения по u_2 не произойдет. Новая система $(t > \tau_1)$ примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \dfrac{\psi_2}{2} + kx_2 \\ \dot{\psi_2} = -\psi_1 - k\psi_2 \end{cases}$$

Поскольку в этом случае всего одно переключение, то мы можем перепараметризовать систему только по моменту этого переключения. В таком случае для решения используем условия трансверсальности на правом конце:

$$\left[\begin{array}{l} x_2(T) \in (-\varepsilon, \varepsilon), \psi_2(T) = 0 \\ x_2(T) = \pm\varepsilon, \psi_2(T) \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Так как мы уже доказали, что $\psi_2 > 0, x_2 > 0$, то первый вариант и случай, когда $x_2 = -\varepsilon$ из второго варианта не подходят. Тогда получается, что условие трансверсальности сводится к тому, что $x_2(T) = \varepsilon$. Добавим к нашей системе следующее условие, следующее из непрерывности x_2:

$$x_2^{left}(\tau_1) = x_2^{right}(\tau_1).$$

Здесь x_2^{left} — это x_2 из системы, где $t < \tau_1$, а x_2^{right} — из системы, где $t > \tau_1$. Теперь у нас достаточно уравнений для решения системы. Для вычислений будем использовать формулу Коши для интегрирования, а также функцию `fsolve` из Matlab для решения нелинейных уравнений.

5.5 Случай $\psi_1^0 < 0, \psi_2^0 \leq 0$

При таких условиях справедливо: $u_1(0) = 0, u_2(0) = -k$.
Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = -kx_2 \\ \dot{\psi_2} = -\psi_1 + k\psi_2 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

В этой системе x_2 будет оставаться 0, пока не пройзойдет переключения по u_1. Пусть переключение произошло в момент времени τ_1. То есть $\psi_2(\tau_1) = 0$. Новая система $(t > \tau_1)$ примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \dfrac{\psi_2}{2} - kx_2 \\ \dot{\psi_2} = -\psi_1 + k\psi_2 \\ x_2(\tau_1) = 0 \\ \psi_2(\tau_1) = 0. \end{cases}$$

По формуле Коши найдем ψ_2.

$$\psi_2 = \frac{\psi_1}{k}(1 - e^{k(t-\tau_1)})$$

Теперь найдем x_2.

$$x_2 = \frac{\psi_1}{4k^2}(2 - 2\cosh(k(\tau_1 - t)))$$

Пусть теперь в момент времени τ_2 происходит переключение по u_2. Тогда $\psi_1 = -\psi_2(\tau_2)x_2(\tau_2)$.

Выразим отсюда ψ_1:

$$\psi_1 = \frac{-4k^3}{(2 - 2\cosh(k(\tau_1 - \tau_2)))(1 - e^{k(\tau_2-\tau_1)})}.$$

Таким образом мы перепараметризовали систему через τ_1 и τ_2. Новая система $(t > \tau_2)$ примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \dfrac{\psi_2}{2} + kx_2 \\ \dot{\psi_2} = -\psi_1 - k\psi_2 \end{cases}$$

$(\psi_1 + \dot{\psi_2}x_2) = \dfrac{\psi_2^2}{2} - \psi_1 x_2 > 0$. Это значит, что $\psi_1 + \psi_2 x_2$ возрастает, из чего следует, что $\psi_1 + \psi_2 x_2 > 0$ при $t > \tau_2$. Поэтому переключений по u_2 больше не будет.

5.6 Случай $\psi_1^0 = 0, \psi_2^0 < 0$

При таких условиях справедливо: $u_1(0) = 0$.
Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = u_2 x_2 \\ \dot{\psi_2} = -u_2 \psi_2 \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Тогда $x_2 \equiv 0$. Из формулы Коши следует, что знак ψ_2 определяется знаком ψ_2^0. Поскольку $\psi_2 < 0$, то переключений по u_1 не произойдет. Из приведенных выше условий видно, что система может лишь находиться в особом режиме от начала и до конца (см. п. 5.1).
Выпишем условия трансверсальности:

$$\left[\begin{array}{l} x_2(T) \in (-\varepsilon, \varepsilon), \psi_2(T) = 0 \\ x_2(T) = \pm\varepsilon, \psi_2(T) \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Мы доказали, что $\psi_2 < 0$, поэтому первый вариант не подходит. Также мы показали, что $x_2 \equiv 0$, поэтому второе условие тоже не выполнено. Это значит, что условия трансверсальности не выполнены, поэтому этот случай не удовлетворяет принципу максимума.

5.7 Случай $\psi_1^0 = 0, \psi_2^0 > 0$

При таких условиях справедливо: $u_1(0) = 0$.
Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \dfrac{\psi_2}{2} + u_2 x_2 \\ \dot{\psi_2} = -u_2 \psi_2 \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Из формулы Коши следует, что знак ψ_2 задается знаком ψ_2^0, поэтому $\psi_2 > 0$. Следовательно по u_1 переключений не будет. В силу того, что $\psi_2 > 0$ верно $x_2(t) > 0, t > 0$.
Рассмотрим производную $(\dot{\psi_2 x_2})$.

$$(\dot{\psi_2 x_2}) = \frac{\psi_2^2}{2} > 0$$

Следовательно $\psi_2 x_2$ возрастает. Это значит, что при $t > 0$ управление $u_2(t) = k$. Кроме того, это значит, что переключений по u_2 не будет. Добавим к нашей системе условие трансверсальности. Учитывая, что $x_2(t) > 0, t > 0$ получим:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \dfrac{\psi_2}{2} + k x_2 \\ \dot{\psi_2} = -k \psi_2 \\ x_2(0) = 0. \\ x_2(T) = \varepsilon \end{cases}$$

6 Вторая задача ($u_1 \in \mathbb{R}$)

В этом варианте управления примут следующий вид:

$$u_1^* = \frac{\psi_2}{2},$$

$$u_2^* = \begin{cases} -k, & \psi_1 + \psi_2 x_2 < 0, \\ [-k, k], & \psi_1 + \psi_2 x_2 = 0, \\ k, & \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0. \end{cases}$$

6.1 Особый режим

Особый режим возникает в случае, если

$$\psi_1 \equiv -\psi_2 x_2$$

Продифференцируем это выражение. Получим

$$\frac{\psi_2^2}{2} = -\psi_2 x_2^2;$$
$$\psi_2 = -2x_2^3;$$
$$\psi_1 = 2x_2^3 \equiv const;$$
$$0 = \frac{\psi_2}{2} + u_2 x_2;$$
$$u_2 = x_2.$$

Получили выражение для управления в особом режиме. Отметим также, что в случае, если система попала в особый режим, она не может выйти из него, поскольку ψ_2 и x_2 становятся константами.

6.2 Случай $\psi_1^0 > 0$

При таких условиях справедливо: $u_2(0) = k$. Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \dfrac{\psi_2}{2} + kx_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - k\psi_2 \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Пусть в момент τ_1 произошло переключение. То есть

$$\psi_1 = -\psi_2(\tau_1) x_2(\tau_1).$$

Учитывая условия трансверсальности, новая система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \dfrac{\psi_2}{2} - kx_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + k\psi_2 \\ x_2(T) = \pm\varepsilon. \end{cases}$$

Далее также, как и в случае из п. 5.4 используем уравнение

$$x_2^{left}(\tau_1) = x_2^{right}(\tau_1).$$

Решим его численно при помощи функции `fsolve`, таким образом проведем перепараметризацию и решим систему.
В этой системе также возможен особый режим (см п. 6.1). Тогда, учитывая условия трансверсальности, при $t > \tau_1$ система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = 0 \\ \dot{\psi}_2 = 0 \\ x_2(T) = \pm\varepsilon \\ \psi_2 = -2\varepsilon^2 \end{cases}$$

Поскольку в этом случае $\psi_1^0 > 0$, чтобы сохранить это условие необхоимо взять $x_2(T) = \varepsilon$. В получившейся системе начальных условий достаточно, чтобы избавиться от параметров. Таким образом, мы можем численно найти время переключения в особый режим из написанных выше уравнений и получить траекторию с особым режимом.

6.3 Случай $\psi_1^0 < 0$

При таких условиях справедливо: $u_2(0) = -k$.
Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \dfrac{\psi_2}{2} - kx_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + k\psi_2 \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Пусть в момент τ_1 происходит переключение. То есть $\psi_1 = -\psi_2(\tau_1)x_2(\tau_1)$. Новая система будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \dfrac{\psi_2}{2} + kx_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - k\psi_2 \end{cases}$$

Решаем его аналогично предыдущему пункту. Отметим, что в этой системе также возможен особый режим. Этот случай также рассматривается аналогично предыдущему пункту.

6.4 Случай $\psi_1^0 = 0$

В этом случае система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \dfrac{\psi_2}{2} + u_2 x_2 \\ \dot{\psi_2} = -u_2\psi_2 \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Особого режима здесь быть не может, так как тогда бы $x_2 = 0, \psi_2 = 0$. В таком случае система не сдвинется с места, поэтому нас это не интересует.

Рассмотрим производную $(\dot{\psi_2 x_2}) = \dfrac{\psi_2^2}{2} > 0$. Тогда получим, что $u_2(t) = -k, t > 0$ и далее переключений в системе не будет.

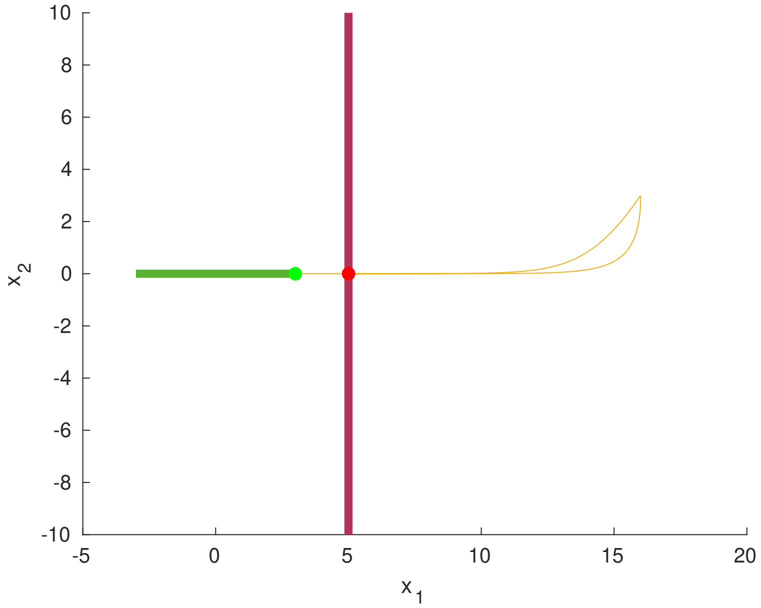
7 Алгоритм работы программы

1. Организовать перебор по моментам переключения $\tau_1, \tau_2 \in [0, T] (\tau_1 < \tau_2)$.
2. В случаях, когда переключение только одно воспользоваться условием трансверсальности на правом конце.
3. Для нахождения x_1 использовать условия трансверсальности на левом конце.
4. Решить получившиеся системы.
5. Отбросить траектории, которые не попадают в целевое множество.
6. Выбрать из оставшихся траекторий оптимальную, соответствующую минимальному значению функционала.

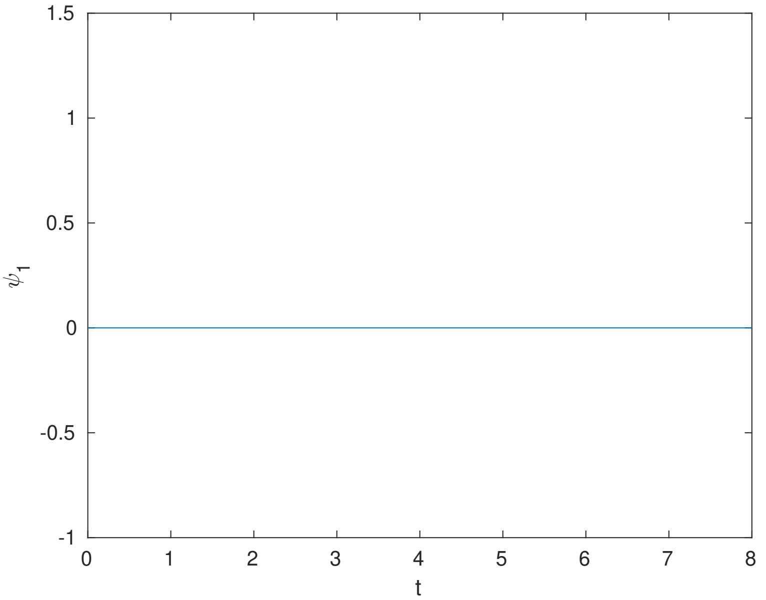
8 Примеры работы программы

8.1 Первая задача

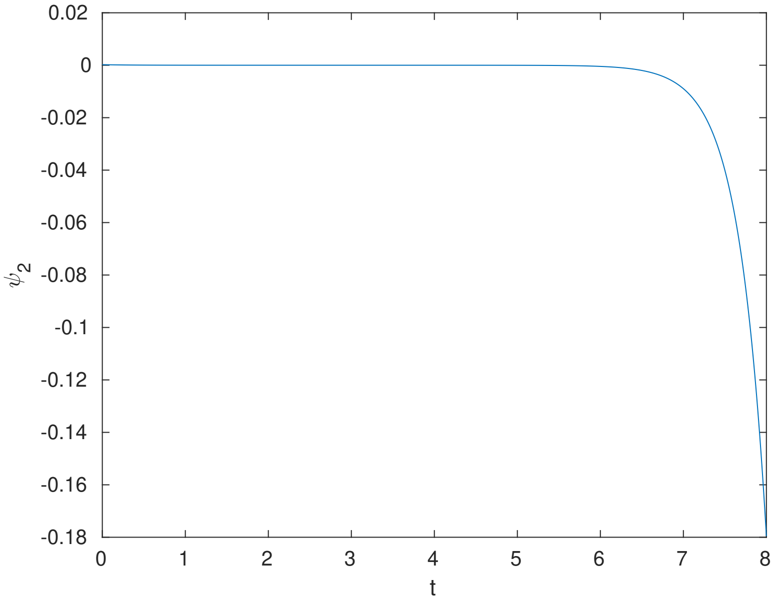
Начальные параметры:
T = 8;
k = 3;
M = 3;
L = 5;
ε = 10.
Значение полученного минимального функционала $J = 2.0e - 9$.
На данном рисунке зеленым обозначено начальное множество, а красным — целевое.

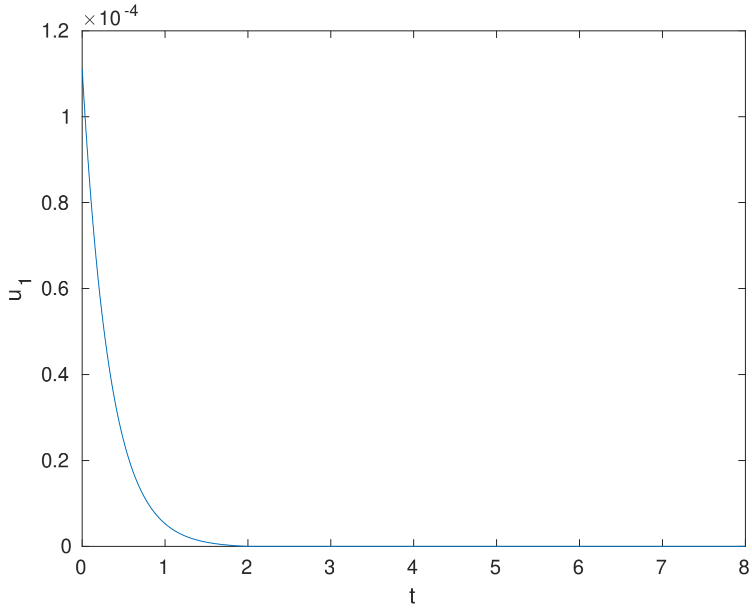


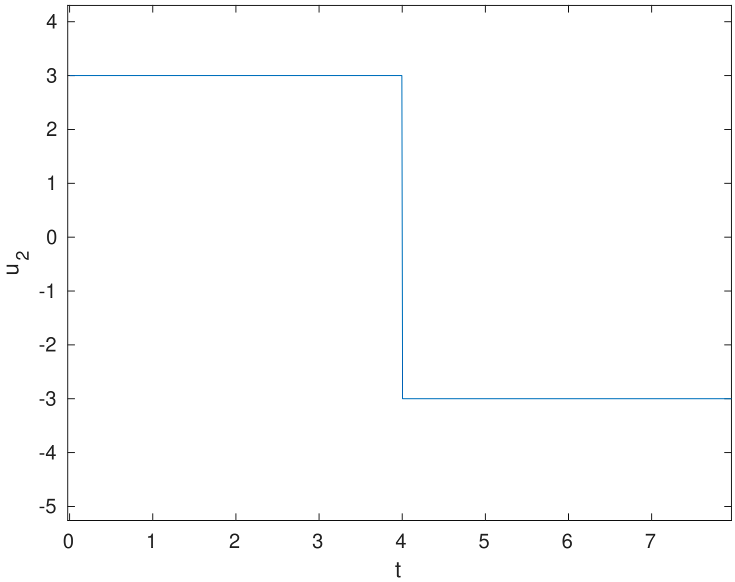
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-5
0
5
10
15
20
x 1
x 2



1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
t
ψ 1

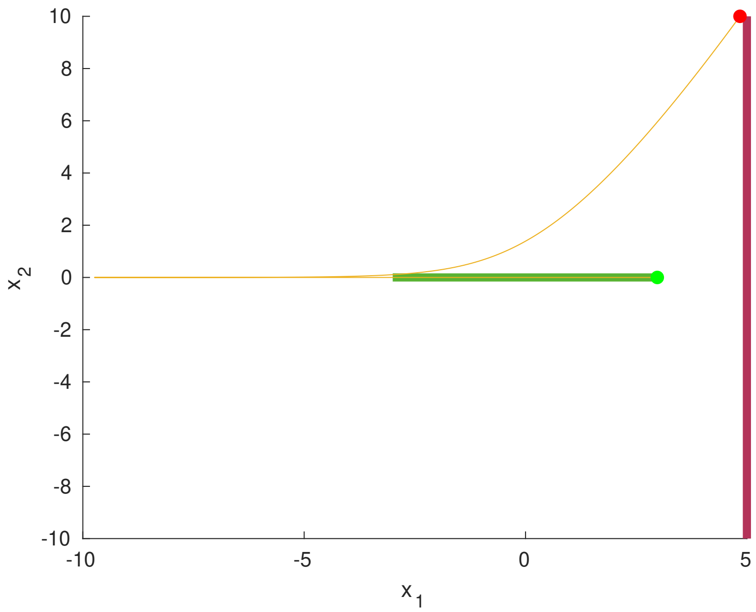

0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.1
-0.12
-0.14
-0.16
-0.18
ψ_2
0 1 2 3 4 5 6 7 8
t

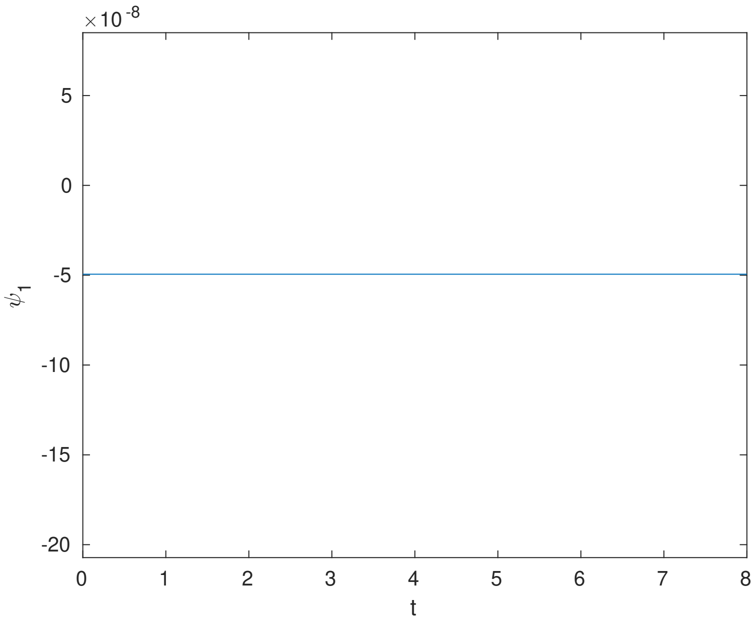

$\times 10^{-4}$
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
u_1
0 1 2 3 4 5 6 7 8
t

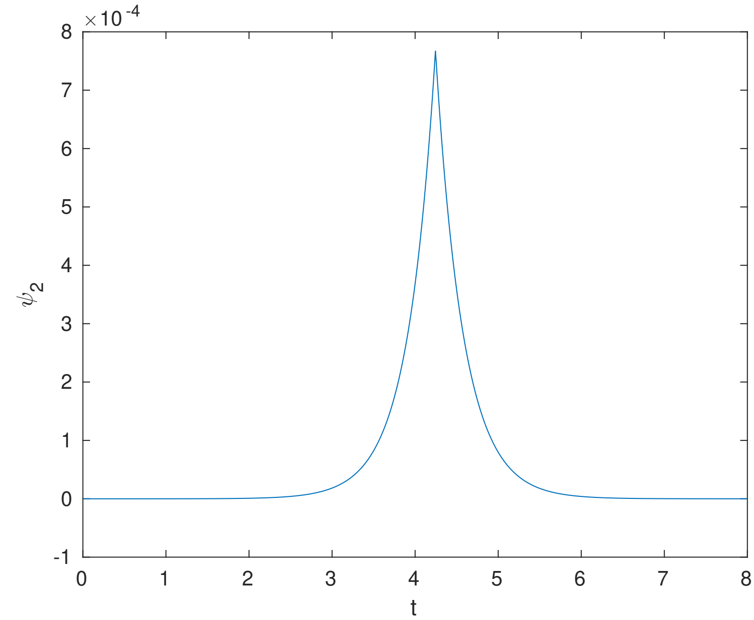


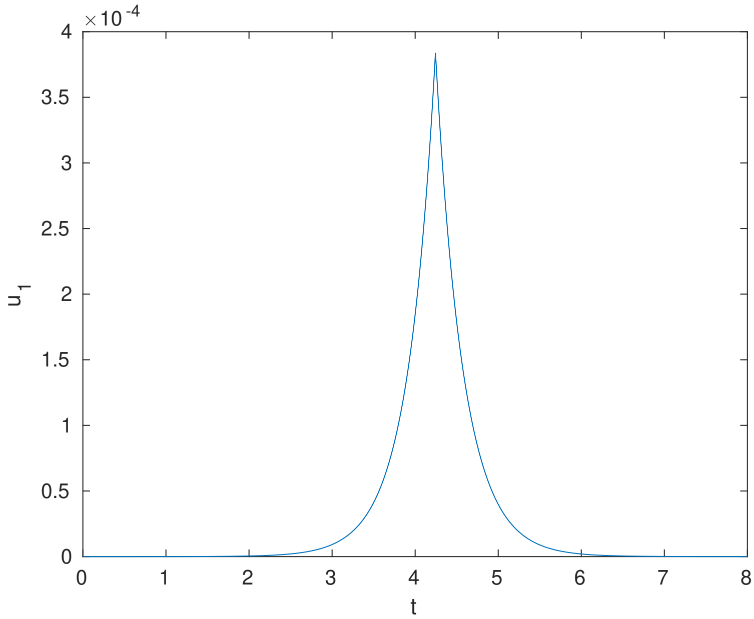
8.2 Вторая задача

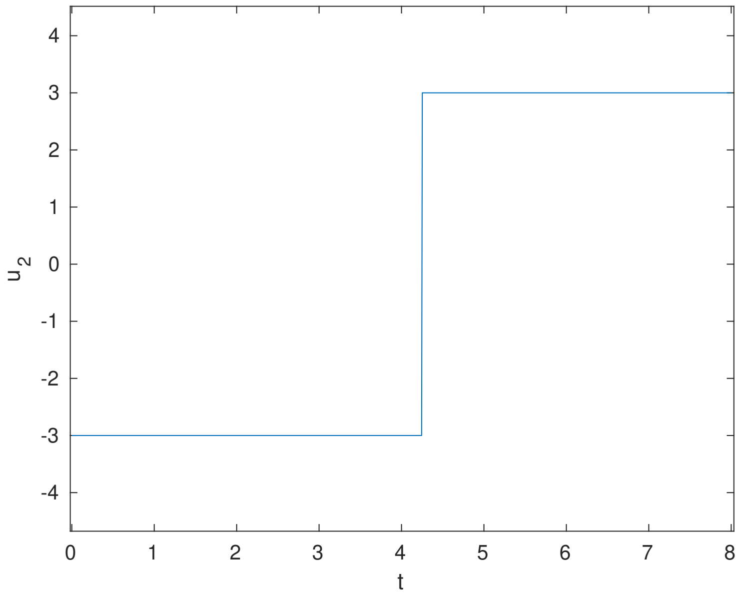
Начальные параметры:
T = 8;
k = 3;
M = 3;
L = 5;
ε = 10.
Значение полученного минимального функционала $J = 4.9e - 08$.
На данном рисунке зеленым обозначено начальное множество, а красным — целевое.


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
x 2
-10
-5
0
5
x 1


×10 -8
5
0
-5
-10
-15
-20
ψ 1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
t


×10^-4
ψ2
t


×10^-4
u1
t


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
u2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
t