Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Стохастический анализ»

Студент 415 группы
М. Г. Зинченко

Руководитель практикума
С.Н. Смирнов

Москва, 2019

1 Задание 1

1.1 Постановка задания

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p. На основе генератора схемы Бернулли построить датчик для биномиального распределения.

2. Реализовать генератор геометрического распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.

3. Рассмотреть игру в орлянку – бесконечную последовательность независимых испытаний с бросанием правильной монеты. Выигрыш S_n определяется как сумма по всем n испытаниям значений 1 и -1 в зависимости от выпавшей стороны. Проиллюстрировать (в виде ломаной) поведение нормированной суммы $Y(i) = S_i/\sqrt{n}$, как функцию от номера испытания $i = 1 \ldots n$ для одной отдельно взятой траектории. Дать теоретическую оценку для $Y(n)$ при $n \to \infty$.

1.2 Теория

Определение 1 *Схемой Бернулли называется последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода — «успех» и «неудача», при этом успех в каждом испытании происходит с одной и той же вероятностью p, а неудача — с вероятностью $q = 1 - p$.*

Определение 2 *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — конечная последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение Бернулли с параметром p. Тогда случайная величина*

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Это записывается в виде:

$$Y \sim \mathrm{Bin}(n, p).$$

Определение 3 *Геометрическим распределением называется распределение вероятностей случайной величины X равной номеру первого «успеха» в серии испытаний Бернулли и принимающей значения $n = 1, 2, 3, \ldots$.*

Теорема 1 ***(ЦПТ)*** *Пусть $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ есть бесконечная последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание μ и дисперсию σ^2. Пусть также*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Тогда

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1)$$

по распределению при $n \to \infty$, где $N(0,1)$ — нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением, равным единице.

1.3 Решение

1. Для моделирования схемы Бернулли с параметром p будем использовать датчик равномерного распределения (функция `rand` в Matlab). Таким образом, получив случайную величину $X \sim U[0,1]$, выполним преобразование:

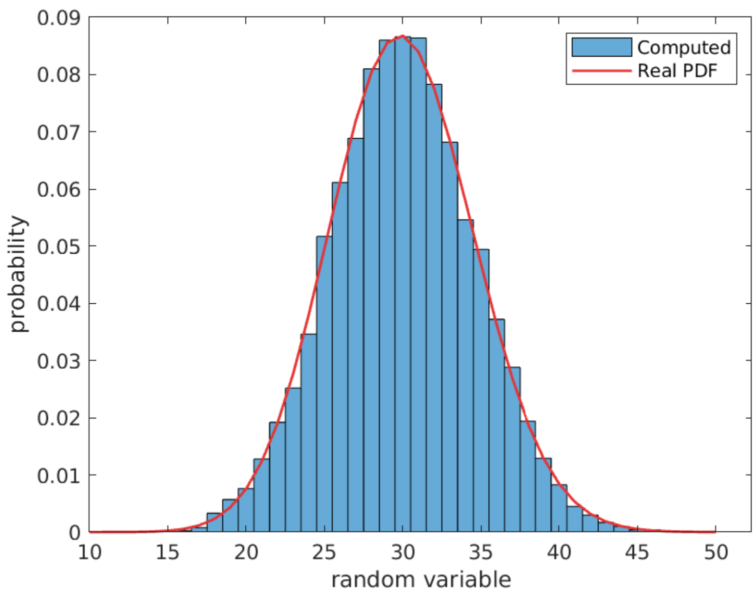
$$Y = \begin{cases} 1, & X < p \\ 0, & X \geq p \end{cases}$$

Случайная величина Y будет иметь распределение Бернулли с параметром p. Так, смоделировав n случайных величин с распределением Бернулли и взяв их сумму, получим

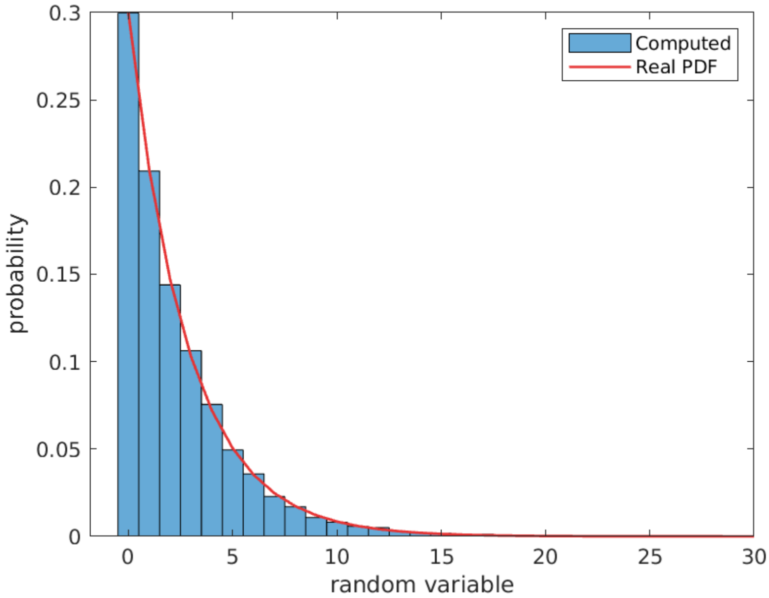
$$Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$Z \sim \mathrm{Bin}(n,p).$$

На следующем графике представлена гистограмма, полученная путем такого моделирования с параметрами $n = 100,\ p = 0.3$.



2. Для моделирования случайной величины с геометрическим распределением будем генерировать Y из схемы Бернулли. Если $Y = 0$, генерируем еще раз, иначе подсчитываем на какой итерации сгенерировалась 1. Это и будет случайная величина с геометрическим распределением.
На следующем графике представлена гистограмма, полученная путем такого моделирования с параметром $p = 0.3$



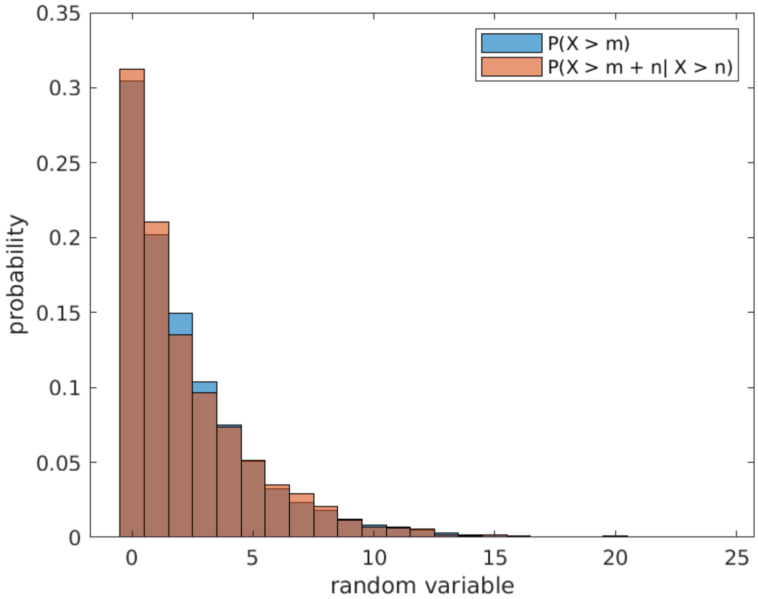
Свойство отсутствия памяти записывается следующим выражением:

$$P(X > m + n | X > n) = P(X > m).$$

Докажем его для геометрического распределения.

$$P(X > m + n | X > n) = \frac{(1 - p)^{m+n}}{(1 - p)^n} = (1 - p)^m = P(X > m).$$

Данное свойство продемонстрированно на следующем графике.



3.

$$X = \begin{cases} 1, & p = 0.5 \\ -1, & p = 0.5 \end{cases}$$

Посчитаем математическое ожидание X.

$$\mathbb{E}X = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot (-1) = 0$$

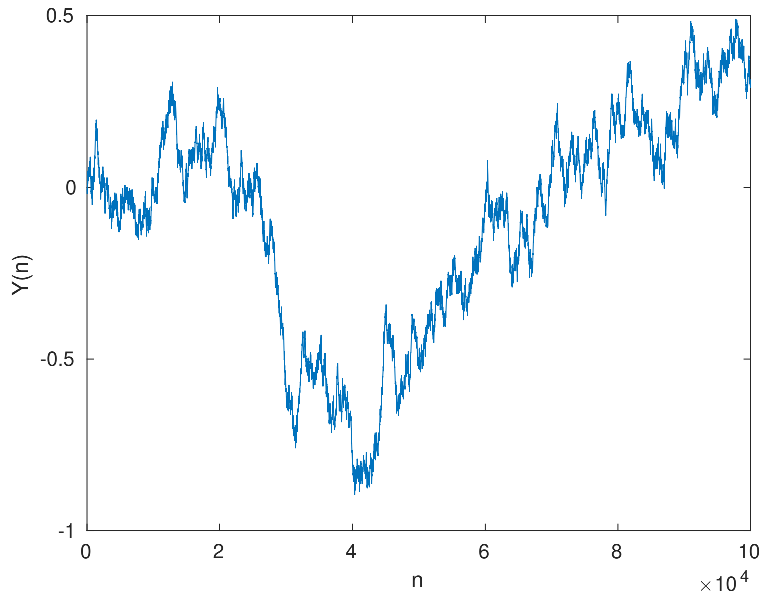
Посчитаем дисперсию.

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1 = 1.$$

В силу ЦПТ,

$$Y(n) = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \to N(0,1), \quad n \to \infty.$$

На следующем графике изображено поведение $Y(n)$.



2 Задание 2

2.1 Постановка задания

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лестницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.

2. Для канторовых случайных величин проверить свойство симметричности относительно $\frac{1}{2}$ (X и $1 - X$ распределены одинаково) и самоподобия относительно деления на 3 (условное распределеление Y при условии $Y \in [0, 1/3]$ совпадает с распределением $\frac{Y}{3}$) с помощью критерия Смирнова.

3. Вычислить значение математического ожидания и дисперсии для данного распределения. Сравнить теоретические значения с эмпирическими для разного объёма выборок. Проиллюстрировать сходимость.

2.2 Теория

Определение 4 *Распределение называется сингулярным, если оно сосредоточено на континуальном множестве с нулевой мерой Лебега.*

Теорема 2 ***Критерий Колмогорова*** *предназначен для проверки гипотезы H_0 о принадлежности выборки некоторому закону распределения.*
Статистика Колмогорова имеет вид

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|.$$

Здесь $F(x)$ — это предполагаемая функция распределения, а $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, определяется равенством

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{X_i \leq x}. \tag{1}$$

Здесь X_i — элемент проверяемой выборки объема n, I — функция-индикатор.
Гипотеза H_0 отвергается в случае, если $\sqrt{n}D_n > K_\alpha$ и принимается иначе. K_α определяется равенством

$$P(K \leq K_\alpha) = 1 - \alpha.$$

K имеет распределение Колмогорова:

$$P(K < x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}e^{-2k^2x^2}.$$

Теорема 3 ***Критерий Смирнова*** *используется для проверки гипотезы о принадлежности двух независимых выборок одному закону распределения.*
Статистика Смирнова имеет вид

$$D_{n,m} = \sup_x |F_{1,n}(x) - F_{2,m}(x)|,$$

где $F_{1,n}$ и $F_{2,m}$ — эмпирические функции распределения, определяемые из (1), первой и второй выборок соответственно. Для достаточно больших n, m нуль гипотеза отвергается при уровне значимости α, если

$$D_{n,m} > c(\alpha)\sqrt{\frac{n+m}{nm}}.$$

$c(\alpha)$ определяется равенством:

$$c(\alpha) = \sqrt{-\frac{1}{2}\log(\alpha)}.$$

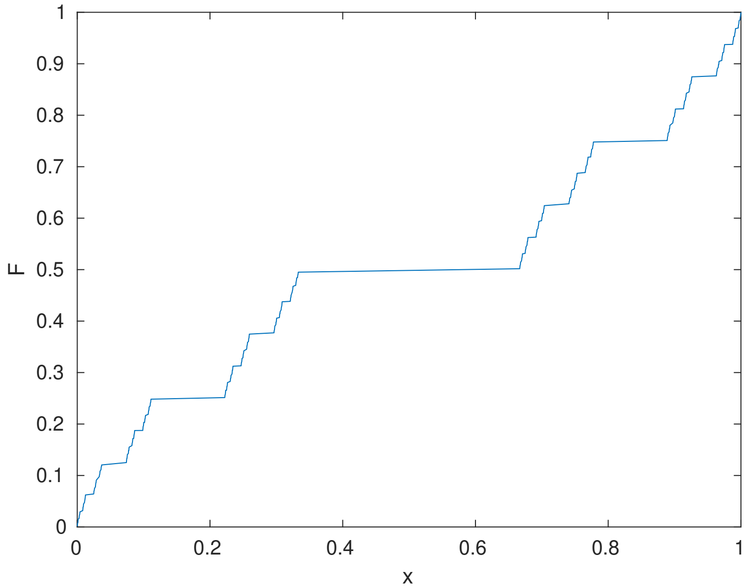
2.3 Решение

1. Чтобы смоделировать случайную величину с сингулярным распределением, будем генерировать последовательность $X_k \sim 2 \cdot Bern(p = 0.5)$. Полученная последовательность из нулей и двоек будет представлять собой троичную запись числа из канторова множества. Тогда, выполнив перевод в десятичную систему $Y = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{X_k}{3^k}$, получим величину Y, имеющую в качестве функции распределения канторову лестницу. Длина генерируемой последовательности $\{X_k\}_{k=1}^{n}$ будет определяться необходимой точностью моделирования ε. Она будет равна мере отрезка на n-ой итерации построения канторова множества, т.е.

$$\varepsilon = 3^{-n};$$

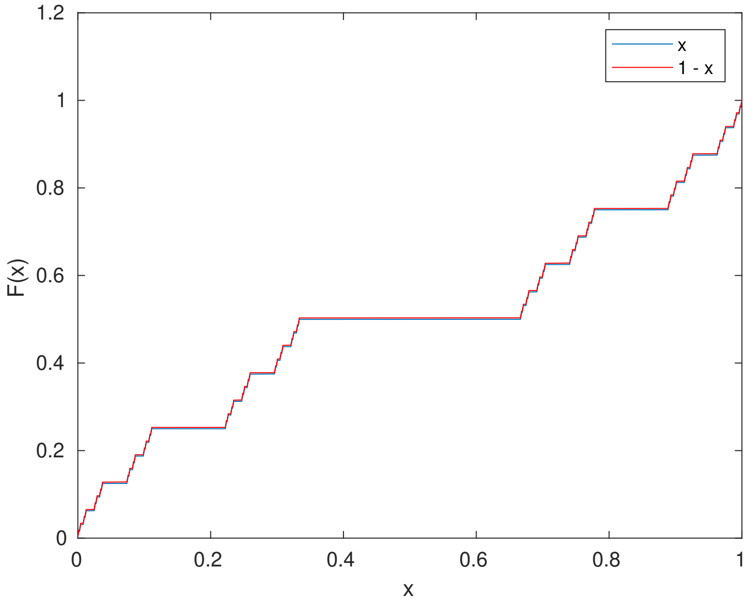
$$n = \log_{\frac{1}{3}} \varepsilon = -\frac{\log \varepsilon}{\log 3}.$$

Пример моделирования канторовой лестницы.

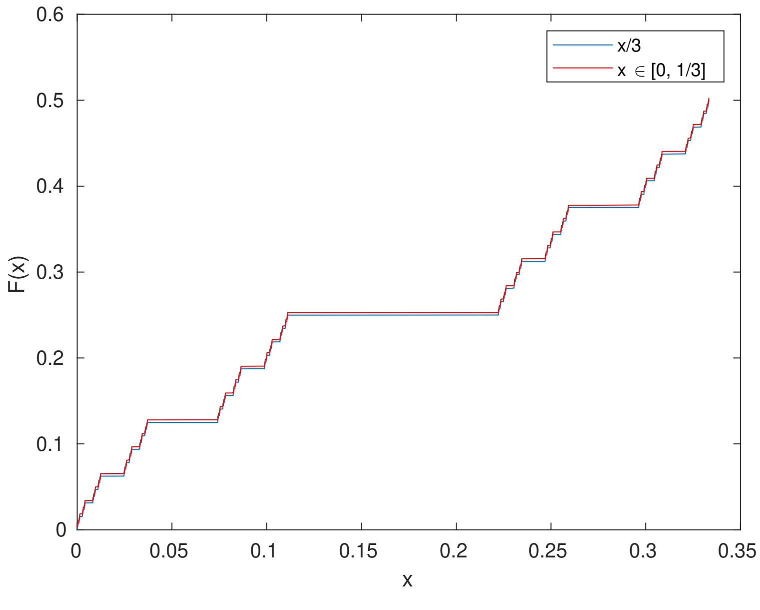


В соответствии с критерием Колмогорова при уровне значимости $\alpha = 0.05$ гипотеза H_0 о том, что сгенерированная выборка имеет в качестве функции распределения канторову лестницу была принята в 96 испытаниях из 100.

2. На следующем графике проиллюстрированно свойство симметрии сингулярных случайных величин относительно $\frac{1}{2}$

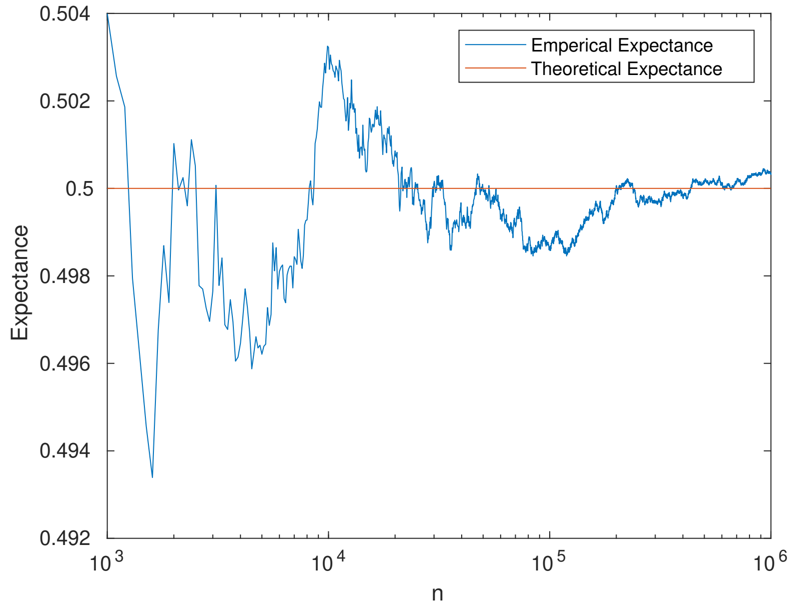


На следующем графике проиллюстрированно свойство самоподобия сингулярных случайных величин относительно деления на 3.

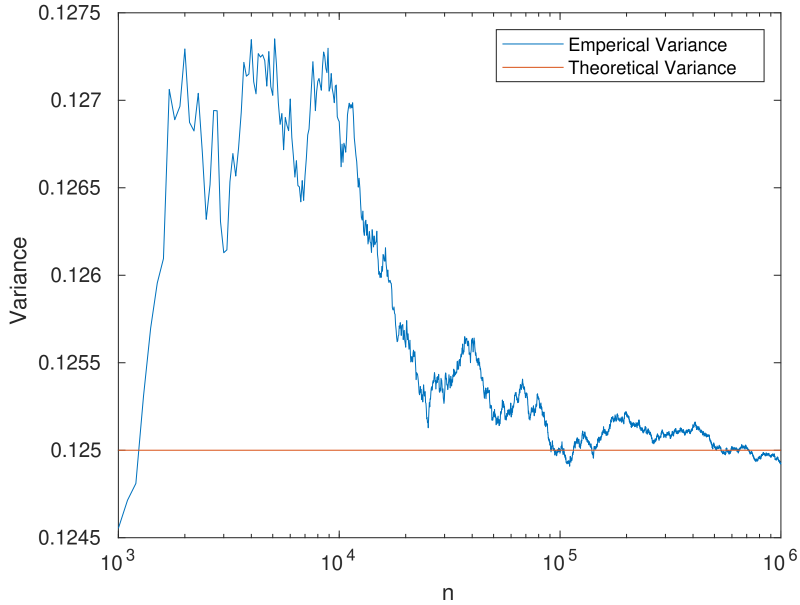


При проверке данных свойств с помощью критерия Смирнова было произведено 100 независимых испытаний при уровне значимости $\alpha = 0.05$, в результате чего гипотеза о справедливости свойства симметрии была принята в 83 случаях, а гипотеза о справедливости свойства самоподобия — в 96.

3. На следующем графике проиллюстрированна сходимость эмпирического математического ожидания к теоретическому при стремлении размера выборки $n \to \infty$.



На следующем графике проиллюстрированна сходимость эмпирической дисперсии к теоретической при стремлении размера выборки $n \to \infty$.



3 Задание 3

3.1 Постановка задания

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Поверить для данного распределения свойство отсутствия памяти. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимо экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ соответсвенно. Найти распределение случайной величины $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

2. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.

3. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. С помощью критерия хи-квадрат Пирсона, убедиться, что получен датчик распределения Пуассона.

4. Построить датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты. Проверить при помощи t-критерия Стьюдента равенство математических ожиданий, а при помощи критерия Фишера равенство дисперсий.

3.2 Теория

Определение 5 *Случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, если ее функция распределения имеет вид:*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Теорема 4 *Пусть функция $F(x)$ непрерывна и монотонно возрастает на $\mathbb{R}$, причем*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

случайная величина $Y \sim U[0,1]$, тогда случайная величина $X = F^{-1}(Y)$ имеет функцию распределения $F_X(x) = F(x)$.

Свойство 1 *Если $Z \sim Exp(\lambda)$, то*

$$P(Z > t + s | Z > t) = P(Z > s)$$

для любых неотрицательных t и s.

Доказательство.

$$P(Z > t + s | Z > t) = \frac{P(Z > t + s, Z > t)}{P(Z > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(Z > s)$$

$\blacksquare$

Свойство 2 *Пусть* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *— н.о.р.с.в.* $X_k \sim \mathrm{Exp}(\lambda_k)$.
Тогда $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim \mathrm{Exp}(S_n),\ S_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k$.

Доказательство.

$$P(\min(X_1, \ldots, X_n) > x) = P(X_1 > x, \ldots, X_n > x) = \prod_{k=1}^n P(X_k > x) =$$
$$= \prod_{k=1}^n e^{-\lambda_k x} = e^{-x\sum_{k=1}^n \lambda_k}.$$

■

Определение 6 *Случайная величина* X *имеет распределение Пуассона с параметром* $\lambda > 0$, *если*

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k \in \mathbb{N} \cup 0.$$

Теорема 5 *Пусть* $X_1, X_2, \dots \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ *— н.о.р.с.в. Тогда случайная величина*

$$Y = \max\left\{n : \sum_{k=1}^n X_k < 1\right\}$$

имеет распределение Пуассона с параметром λ.

Теорема 6 *Пусть случайная величина* $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$. *Пусть* $np = \lambda = \mathrm{const}$. *Тогда*

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Теорема 7 *Независимые одинаково распределенные стандартные нормальные случайные величины* $X, Y \sim N(0, 1)$ *можно представить в виде*

$$X = \sqrt{w}\cos(\varphi), \quad Y = \sqrt{w}\sin(\varphi),$$

где $w \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right),\ \varphi \sim U[0, 2\pi]$.

Доказательство.
Достаточно доказать, что совместное распределение X и Y совпадает с совместным распределением $\sqrt{w}\cos(\varphi)$ и $\sqrt{w}\sin(\varphi)$.

$$P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right\} dx_1 dx_2 = \{\text{Переход в полярные координаты}\} =$$
$$= \iint\limits_{\substack{r\cos(\varphi)<x \\ r\sin(\varphi)<y}} \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\varphi = \{w = r^2\} = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\substack{\sqrt{w}\cos(\varphi)<x \\ \sqrt{w}\sin(\varphi)<y}} \frac{1}{2} e^{-\frac{w}{2}} dw d\varphi$$

■

Теорема 8 (t-критерий Стьюдента) *Статистика одновыборочного критерия Стьюдента имеет следующий вид*
$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}.$$
Здесь $\overline{x}$ — выборочное среднее.
s — среднеквадратичное отклонение.
μ — предполагаемое среднее.
n — размер выборки.
Гипотеза о равенстве выборочного среднего значению μ принимается, если t-статистика не превышает по абсолютному значению квантиль $t(1-\alpha/2, n-1)$.

Теорема 9 (Критерий Фишера) *Критерий Фишера используется для проверки равенства дисперсий двух выборок. Статистика Фишера имеет вид*

$$F = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}.$$

Здесь $\hat{\sigma}_X^2, \hat{\sigma}_Y^2$ — выборочные дисперсии выборок X и Y соответственно.
Гипотеза о равенстве дисперсий принимается, если эта статистика F удовлетворяет неравенству

$$f(\alpha/2, n-1, m-1) < F < f(1-\alpha/2, n-1, m-1),$$

где $f(\alpha, n-1, m-1)$ — квантиль распределения Фишера.

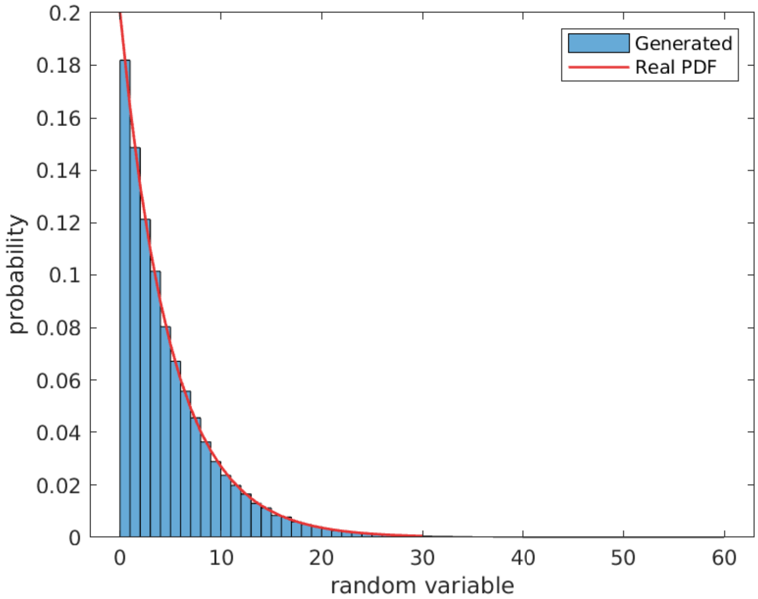
3.3 Решение

1. Согласно Теореме 4, моделировать датчик экспоненциального распределения можно при помощи датчика равномерного распределения, если знать функцию обратную к функции экспоненциального распределения. Найдем эту функцию.

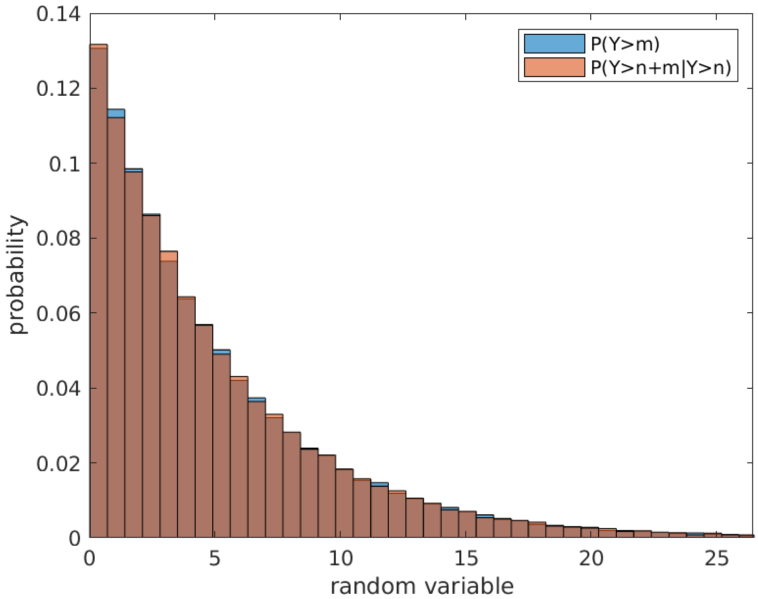
$$F(x) = 1 - e^{\lambda x};$$

$$F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-x).$$

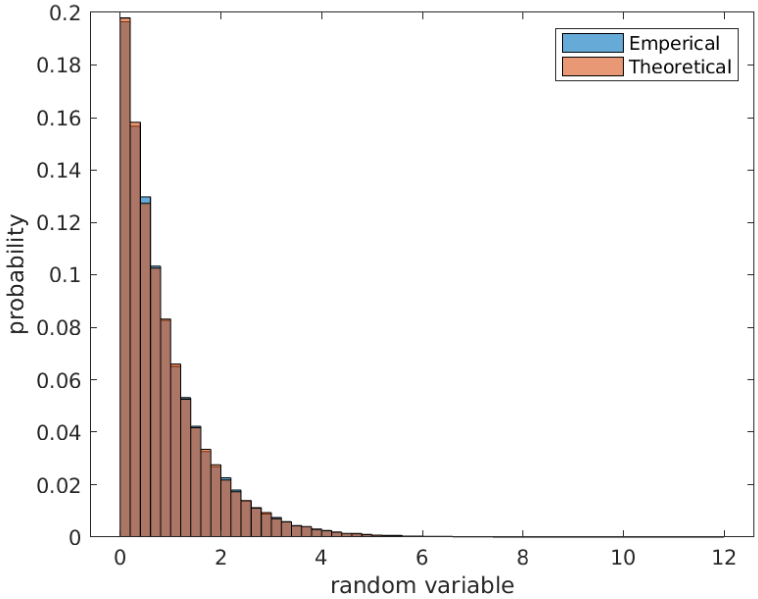
На следующем графике проиллюстрированна работа такого датчика.



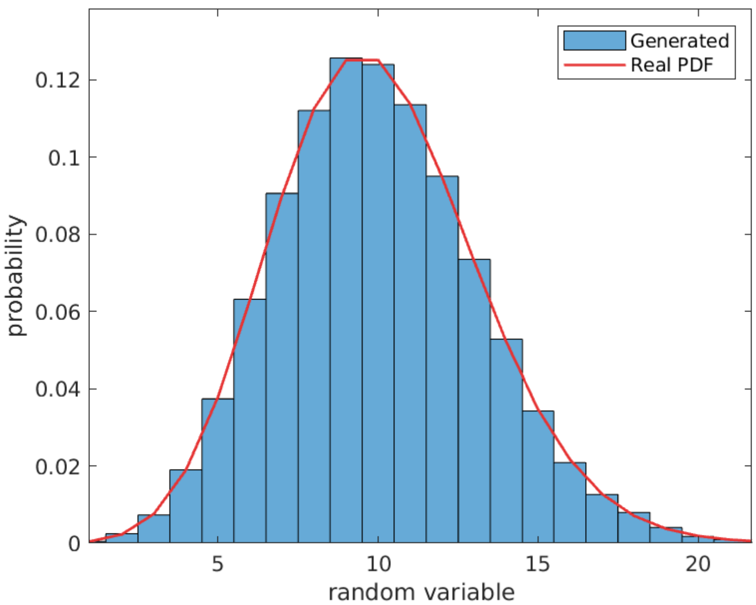
Теперь продемонстрируем свойство отсутствия памяти (Свойство 1).



Теперь продемонстрируем свойство 2.
Для этого возьмем $\lambda_1 = 0.2,\ \lambda_2 = 0.4,\ \lambda_3\ =\ 0.5.$

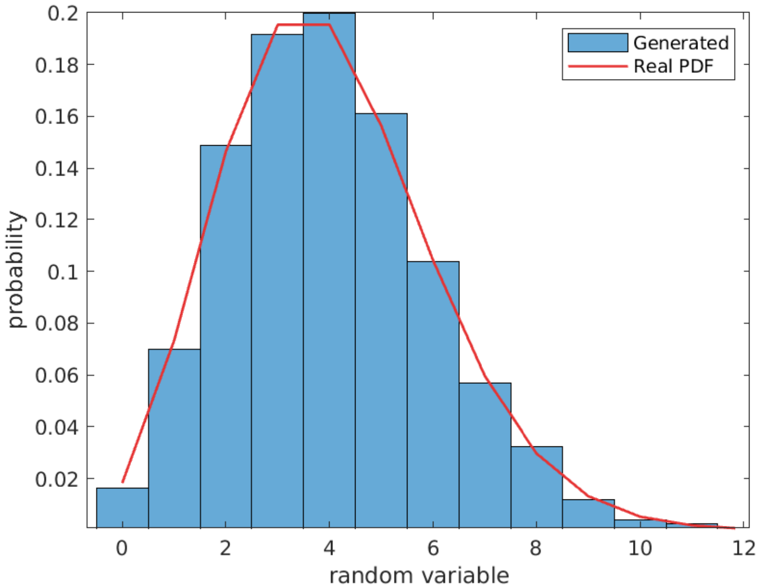


2. Согласно Теореме 5, для построения датчика пуассоновского распределения будем генерировать случайные величины с экспоненциальным распределением до тех пор, пока их сумма не превысит 1. Номер последней генерации, когда это неравенство еще выполнено и будет пуассоновской случайной величиной. На следующем графике продемонстрирована работа этого датчика.



3. Для построения датчика пуассоновского расредeления воспользуемся теоремой

6. Возьмем $p = \dfrac{\lambda}{n}$ и достаточно большое n. В нашем случае достаточно взять $n = 200$. На следующем графике продемонстрирована работа такого датчика для $\lambda = 4$, размер выборки $N = 10^4$.

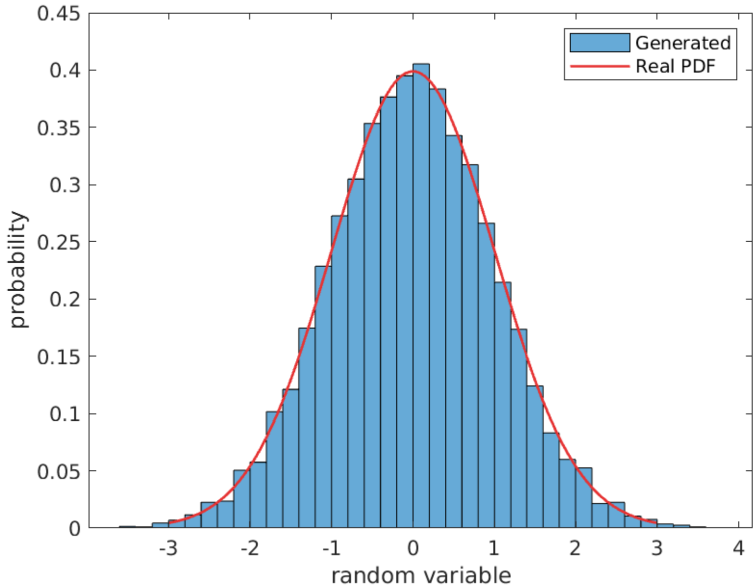


Теперь проверим гипотезу о равенстве эмпирического и теоретического распределений при помощи критерия хи-квадрат Пирсона.
Статистика этого критерия определяется соотношением

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\frac{n_i}{n} - p_i\right)^2}{p_i}.$$

Здесь n — размер выборки.
n_i — количество элементов выборки, принявших значение i.
p_i — вероятность $P(X = i) = p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$.
Гипотеза принимается на уровне значимости α, если вычисленное значение статистики не превосходит квантиль $\chi^2_{1-\alpha,r}$, где $r = k - 1$.
Тест был проведен 100 раз и в 89% случаев гипотеза была принята.

4. Для реализации датчика стандартного нормального распределения воспользуемся Теоремой 7.
Для этого сгенерируем случайную величину с экспоенциальным распределением $w \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$ и случайную величину с равномерным распределением $\varphi \sim U[0, 2\pi]$.
Тогда $\sqrt{w}\cos(\varphi)$ и $\sqrt{w}\sin(\varphi)$ будут иметь стандартное нормальное распределение.
На следующем графике продемонстрирована работа такого датчика.



При помощи критерия Стьюдента (Теорема 8) проверим равенство математических ожиданий.
Тест был проведен 100 раз при уровне значимости $\alpha = 0.05$ и размере выборки $N = 10^4$. Гипотеза о равенстве математических ожиданий была принята в 94% случаев.

При помощи критерия Фишера (Теорема 9) проверим равенство дисперсий.
Тест был проведен 100 раз при уровне значимости $\alpha = 0.05$ и размере выборки $N = 10^4$. Гипотеза о равенстве дисперсий была принята в 96 % случаев.

4 Задание 4

4.1 Постановка задания

1. Построить датчик распределения Коши.

2. На основе датчика распределения Коши с помощью метода фон Неймана построить датчик стандартного нормального распределения. При помощи функции normal probability plot убедиться в корректности построенного датчика и обосновать наблюдаемую зависимость.

3. Сравнить скорость моделирования стандартного нормального распределения в заданиях 3 и 4.

4.2 Теория

Определение 7 *Случайная величина X имеет распределение Коши с параметрами a и b, если ее функция распределения имеет вид*

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + \frac{1}{2}.$$

Определение 8 *Пусть меры μ и ν счетно-аддитивны и заданы на общей σ-алгебре Σ подмножеств из X. Тогда мера ν называется абсолютно непрерывной относительно меры μ, если*

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 \quad \forall A \in \Sigma.$$

Теорема 10 (Радона -Никодима) *Рассмотрим измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$. Пусть μ и ν — некоторые σ-конечные меры, определенные на σ-алгебре $\mathcal{F}$ подмножеств из Ω. Мера μ абсолютно непрерывна относительно меры ν тогда и только тогда, когда существует функция f такая, что*

$$\mu(A) = \int\limits_A f(w)\nu(dw), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

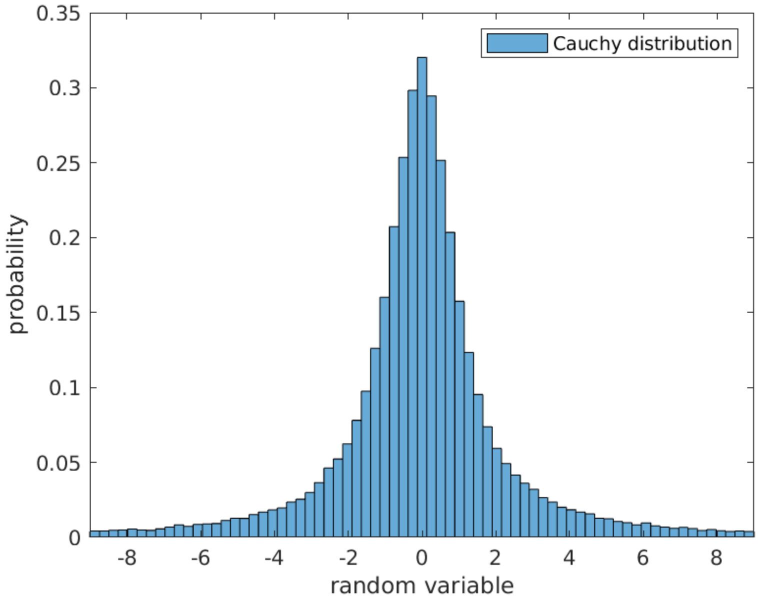
4.3 Решение

1. Для моделирования датчика распределения Коши воспользуемся Теоремой 4. Для этого необходимо найти обратную функцию.

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$$

$$F_X^{-1}(y) = x_0 + \gamma\tan\left(\pi(y-1/2)\right).$$

   Таким образом, взяв $Y \sim U[0,1]$, получим случайную величину $X = F_X^{-1}(Y)$, имеющую распределение Коши.
   На следующем графике продемонстрирована работа такого датчика.



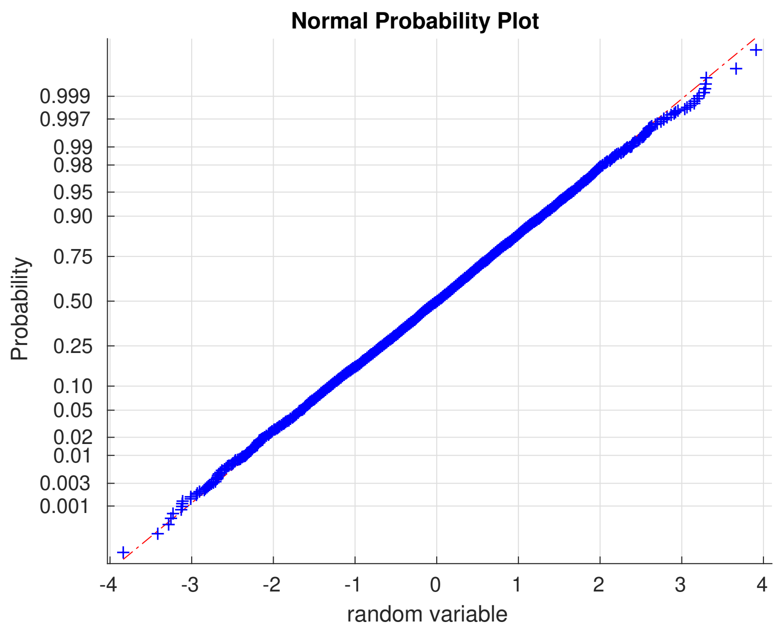
2. Пусть имеется некоторое вещественное вероятностное пространство $(E, \mathcal{E})$, на котором заданы абсолютно непрерывные распределения $\mathbb{P}_C$ и $\mathbb{P}_N$. Пусть выполнено условие
$$\exists k > 1 : \mathbb{P}_N(A) \leq k\mathbb{P}_C(A) \quad \forall A \in \mathcal{E}.$$
Из этого неравенства следует, что $\mathbb{P}_N$ абсолютно непрерывна относительно $\mathbb{P}_C$. Тогда по теореме Радона-Никодима существует производная Радона-Никодима
$$\frac{d\mathbb{P}_N}{d\mathbb{P}_C} \leq k.$$
Здесь $d\mathbb{P}_C$ и $d\mathbb{P}_N$ — плотности соответствующих распределений.
Метод элиминации фон Неймана заключается в следующем.
Пусть имеется датчик некоторого распределения $\mathbb{P}_C$. Тогда для моделирования случайной величины с распределением $\mathbb{P}_N$ необходимо выполнить следующие действия.

1) Получить значение случайной величины x, имеющей распределение $\mathbb{P}_C$.
2) Получить значение случайной величины $\gamma(x) \sim \mathrm{Bern}\left(\dfrac{d\mathbb{P}_N}{kd\mathbb{P}_C}\right)$.
3) В случае, если $\gamma(x) = 1$, x будет являться искомой случайной величиной, иначе, если $\gamma(x) = 0$, необходимо вернуться к пункту 1.

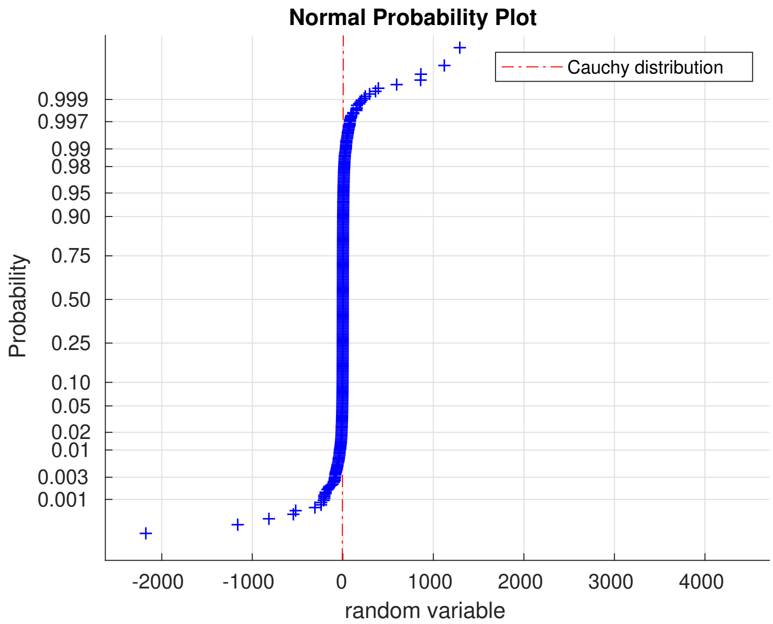
Обоснуем данный алгоритм.

Доказательство.
Пусть случайная величина ν имеет распределение Бернулли, такое что
$$P(\nu = 1, X = x) = \frac{\gamma(x)}{k}.$$
Тогда получим
$$P(X \in A|\nu = 1) = \frac{P(X \in A, \nu = 1)}{P(\nu = 1)} = \frac{\int_A P(\nu = 1, X = x) d\mathbb{P}_C(x)}{\int_E P(\nu = 1, X = x) d\mathbb{P}_C(x)} =$$
$$= \frac{\int_A \frac{1}{k} \frac{d\mathbb{P}_N}{d\mathbb{P}_C} d\mathbb{P}_C(x)}{\int_E \frac{1}{k} \frac{d\mathbb{P}_N}{d\mathbb{P}_C} d\mathbb{P}_C(x)} = \mathbb{P}_N(A).$$
■

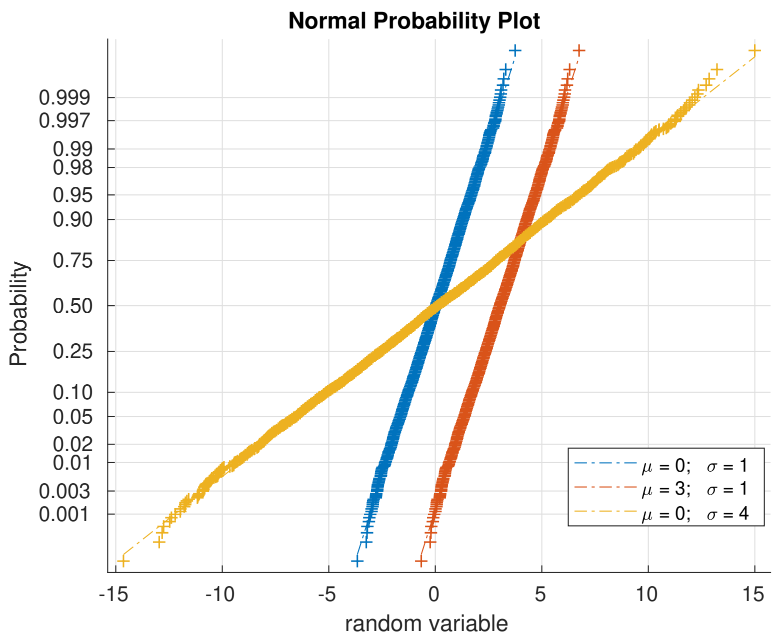
Имея датчик распределения Коши, зная его плотность
$$p_C(x) = \frac{1}{\pi\gamma \left(1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2\right)}$$
и плотность стандартного нормального распределения
$$p_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
смоделируем методом фон Неймана случайную величину со стандартным нормальным распределением. Для этого возьмем параметры $\gamma = 1$, $x_0 = 0$, $k = \sqrt{\frac{2\pi}{e}}$.
На следующем графике при помощи функции `normplot` продемонстрирована работа такого датчика.



Этот график имеет линейный вид. Это говорит о том, что полученная выборка имеет нормальное распределение. Взяв любое другое распределение, например, распределение Коши, линейной зависимости не будет.

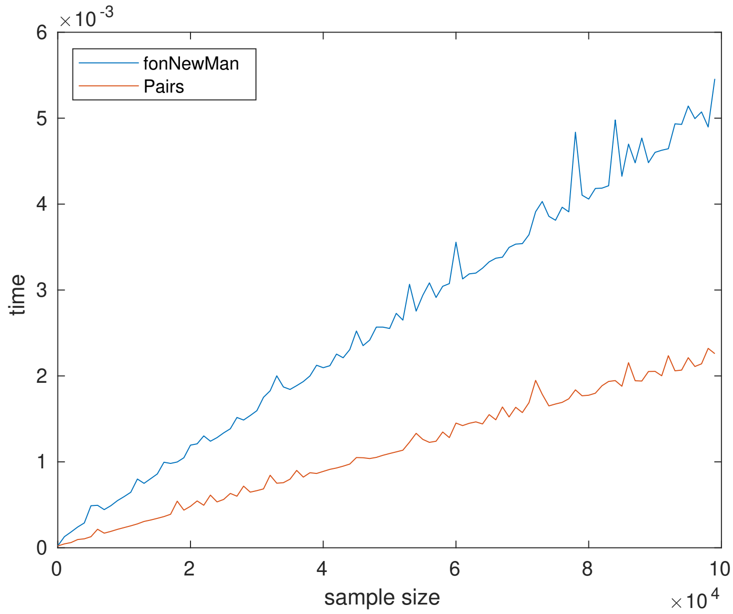


Также стоит отметить, что линейная зависимость будет сохраняться и при применении этой функции к выборке $Y = \mu + \sigma X$.



Как видно по графику параметр μ отвечает за сдвиг вдоль оси абсцисс, а параметр σ — за наклон кривой.

3. Теперь сравним скорость моделирования стандартного нормального распределения методом фон Неймана и при моделировании парами.
   На следующем графике продемонстрирована зависимость времени моделирования от размера выборки для обоих методов.



5 Задание 5

5.1 Постановка задания

1. Путь $X_i \backsim N(\mu, \sigma^2)$. Убедиться эмпирически в справедливости ЦПТ и ЗБЧ, т.е. исследовать поведение величины
$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right).$$

2. Считая μ, σ^2 неизвестными для пункта 1, построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии.

3. Путь $X_i \backsim K(a, b)$ имеет распределение Коши со сдвигом a и масштабом b. проверить эмпирически, как ведут себя суммы S_n/n. Результат объяснить, а так же найти закон распределения данных сумм.

5.2 Теория

Теорема 11 (ЗБЧ) *Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины и дисперсия каждой из них существует и ограничена сверху некоторой константой: $\forall i : 1 \le i \le n \ \exists \mathbb{V}ar X_i \le C$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{\mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_n}{n} \right| < \varepsilon \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Теорема 12 (ЦПТ) *Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — последовательность невырожденных н.о.р.с.в. с $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Тогда для любого $x \in R$*

$$P\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{V}ar S_n}} \le x \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dz.$$

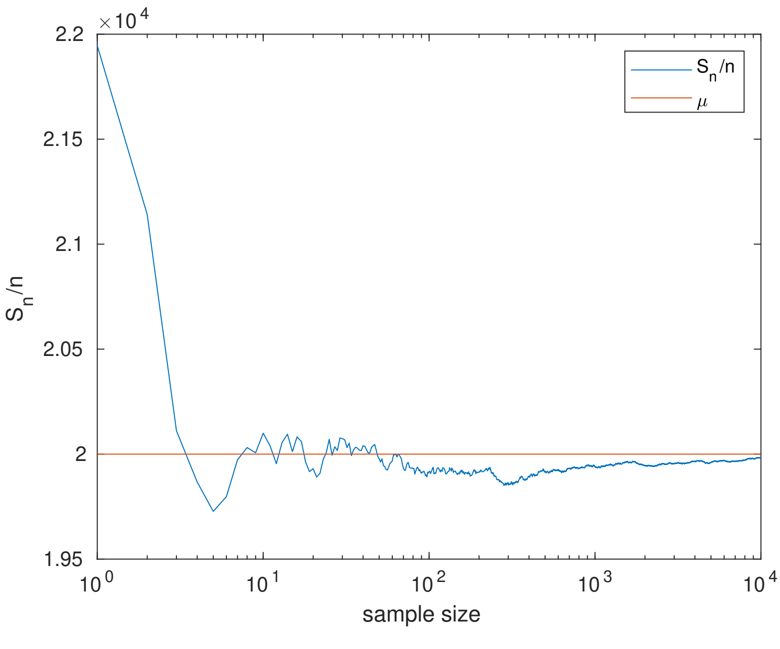
Определение 9 *Доверительным интервалом параметра θ распределения случайной величины X с уровнем доверия p, порождённым выборкой $(x_1, \dots, x_n)$, называется интервал с границами $l(x_1, \dots, x_n)$ и $r(x_1, \dots, x_n)$, которые являются реализациями таких случайных величин $L(X_1, \dots, X_n)$ и $R(X_1, \dots, X_n)$, что*

$$P(L \le \theta \le R) = p.$$

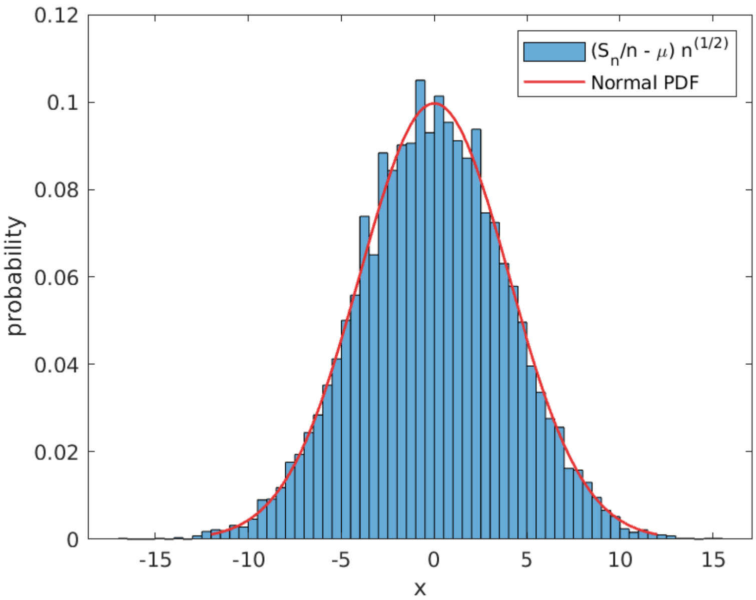
Граничные точки доверительного интервала l и r называются доверительными пределами.

5.3 Решение

1. На следующем графике продемонстрировано поведение $\frac{S_n}{n}$ при размере выборки $n = 10^4$ и среднем $\mu = 20000$. Оно соответствует закону больших чисел.



На следующем графике показано распределение $\sqrt{n}\left(\dfrac{S_n}{n}-\mu\right)$ при размере выборки $n = 1000$ в $N = 10^4$ испытаний со средним $\mu = 2$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma = 4$. Оно соответствует центральной предельной теореме.



2. Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ — независимая выборка из нормального распределения, где μ, σ^2 — неизвестные константы. Построим доверительный интервал для неизвестного среднего μ.

Утверждение 1 *Случайная величина*

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}},$$

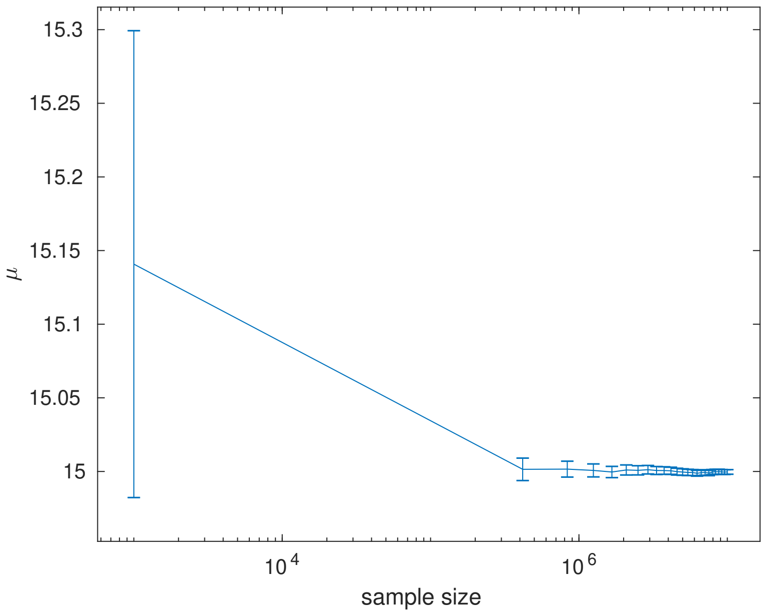
имеет распределение Стьюдента с $n-1$ *степенями свободы* $\mathrm{t}(n-1)$, *где* S — *несмещённое выборочное стандартное отклонение. Пусть* $t_{\alpha,n-1}$ — α*-квантили распределения Стьюдента. Тогда в силу симметрии последнего имеем:*

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \le T \le t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right) = 1 - \alpha.$$

После подстановки выражения для T *и несложных алгебраических преобразований получаем:*

$$P\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

На следующем графике продемонстрированы доверительные интервалы для среднего в зависимости от размера выборки.



Построим доверительный интервал для неизвестной дисперсии σ^2.

По теореме Фишера для нормальных выборок случайная величина

$$H = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$$

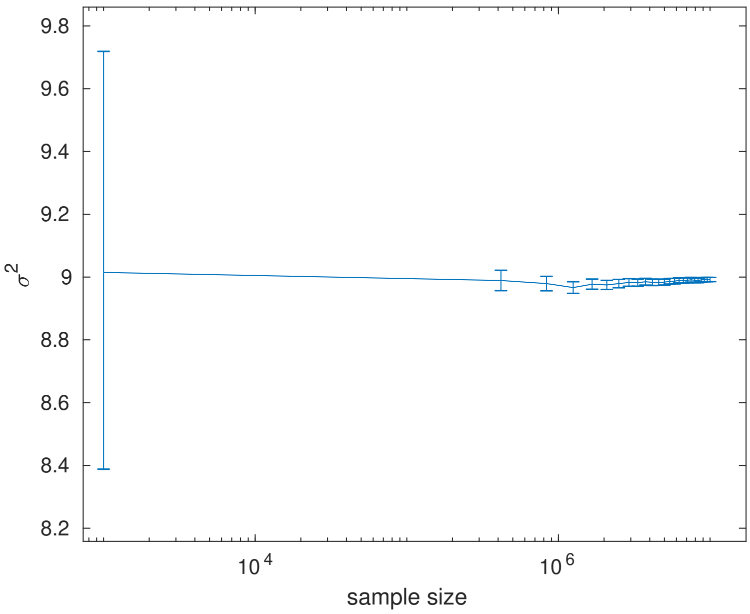
где S^2 — несмещённая выборочная дисперсия, имеет распределение $\chi^2(n-1)$. Тогда имеем:

$$P\left(\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2},n-1} \leqslant H \leqslant \chi^2_{\frac{1+\alpha}{2},n-1}\right) = \alpha.$$

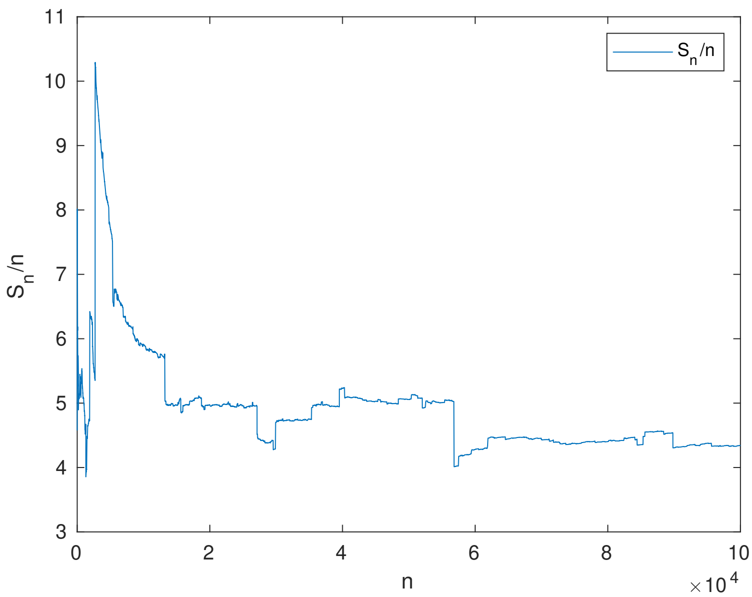
После подстановки выражения для H и несложных алгебраических преобразований получаем:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+\alpha}{2},n-1}} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2},n-1}}\right) = \alpha.$$

На следующем графике продемонстрированы доверительные интервалы для дисперсии в зависимости от размера выборки.



3. Проверим, выполняется ли закон больших чисел для распределения Коши $X \sim K(a, b)$.



Как видно по графику суммы $\frac{S_n}{n}$ ведут себя хаотично. Это связано с тем, что у распределения Коши нет математического ожидания.
Найдем распределение $\frac{S_n}{n}$ при помощи характеристических функций.

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \exp(iat - b|t|).$$

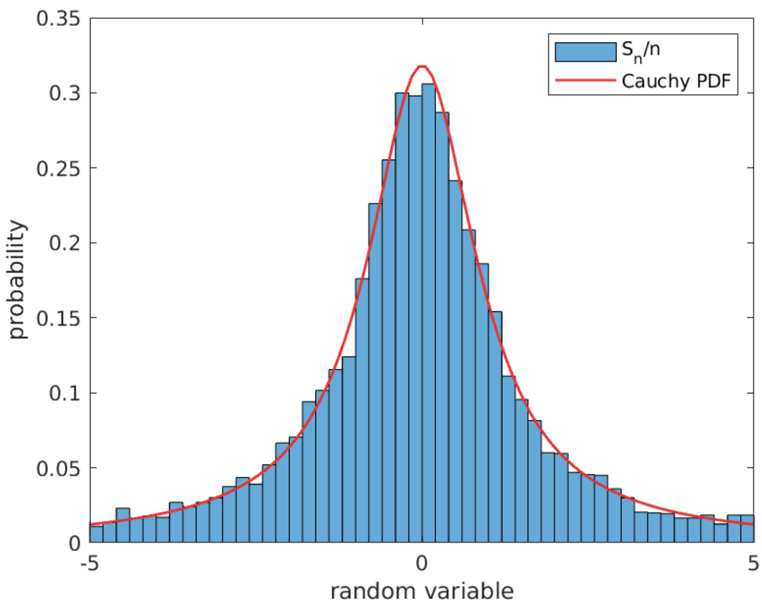
Согласно свойствам характеристических функций для независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n$ выполнено

$$\varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t).$$

Кроме того $\varphi_{aX+b} = e^{itb}\varphi_X(at)$.
Поэтому

$$\varphi_{S_n/n}(t) = \varphi_{S_n}(t/n) = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{iat}{n} - \frac{b|t|}{n}\right) = \exp(iat - b|t|).$$

Характеристическая функция сумм $\frac{S_n}{n}$ совпала с характеристической функцией исходного распределения Коши $K(a, b)$. Значит $\frac{S_n}{n} \sim K(a, b)$.



6 Задание 6

6.1 Постановка задания

1. Посчитать интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left(x_1^2+x_2^2+\dots+x_{10}^2+\frac{1}{2^7\cdot x_1^2\cdot x_2^2\cdot\dots\cdot x_{10}^2}\right)}}{x_1^2\cdot x_2^2\cdot\dots\cdot x_{10}^2} dx_1 dx_2 \dots dx_{10} = I$$

- методом Монте-Карло;
- методом квадратур, сводя задачу к вычислению собственного интеграла Римана.

2. Для каждого случая оценить точность вычислений.

6.2 Решение

1. Перепишем исходный интеграл в виде

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) g(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) dx_1 dx_2 \ldots dx_{10},$$

где

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = \pi^5 \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2^7 x_1^2 \ldots x_{10}^2}\right\}}{x_1^2 \ldots x_{10}^2}, \quad g(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = \frac{1}{\pi^5} e^{-(x_1^2 + \cdots + x_{10}^2)}.$$

Функция $g(x)$ является совместной плотностью набора независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение с параметрами 0 и $\frac{1}{2}$.
Таким образом, можно переписать интеграл в виде:

$$I = \mathbb{E}\left(f(x_1, \ldots, x_{10})\right), \quad x_i \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

В силу закона боьших чисел выборочное среднее будет стремиться к математическому ожиданию.

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_1^k, \ldots, x_{10}^k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(f(x_1^1, \ldots, x_{10}^1)), \quad x_i^k \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Оценим погрешность метода Монте-Карло при помощи центральной предельной теоремы:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - I\right| < \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n - In}{n}\right| < \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n - In}{\sigma\sqrt{n}}\right| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) =$$
$$= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon < \frac{S_n - In}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) =$$
$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) - 1.$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

Нужно подобрать ε так, чтобы было выполнено равенство

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) - 1 = \alpha.$$

Для этого нужно, чтобы

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) = \frac{\alpha+1}{2},$$

то есть $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon$ должно быть квантилем $k_{\frac{\alpha+1}{2}}$ нормального распределения. Взяв $k_{\frac{\alpha+1}{2}} = 3$, получим уровень доверия $\alpha = 0.99$. Тогда погрешность можно оценить значением

$$\varepsilon = \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Составим таблицу.

Номер испытания \ Объем выборки	10^4	10^5	10^7
1	147.04 ± 37.55	128.87 ± 11.00	124.96 ± 1.08
2	137.46 ± 35.64	125.45 ± 10.79	125.57 ± 1.08
3	110.48 ± 31.77	129.24 ± 11.04	124.46 ± 1.08
Время выполнения	0.0022	0.0225	2.6787

2. Для подсчета интеграла методом квадратур сделаем замену:

$$x_i = \tan\left(\frac{\pi}{2}t_i\right).$$

Исходный интеграл примет следующий вид:

$$I = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} \int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} \frac{\exp\left\{-\left(\sum_{k=1}^{10}\tan^2(\frac{\pi}{2}t_k) + \frac{1}{2^7 \cdot \prod_{k=1}^{10}\tan^2(\frac{\pi}{2}t_k)}\right)\right\}}{\prod_{k=1}^{10}\tan^2(\frac{\pi}{2}t_k) \cdot \prod_{k=1}^{10}\cos^2(\frac{\pi}{2}t_k)}\, dt_1 \dots dt_{10}.$$

Воспользуемся методом прямоугольников. Для этого равномерно разобьем отрезок $[-1, 1]$ на N частей и будем считать величину:

$$I_N = \frac{1}{N^{10}} \sum_{k_1=1}^{N} \cdots \sum_{k_{10}=1}^{N} f\left(\frac{2k_1}{N} - 1, \dots, \frac{2k_{10}}{N} - 1\right).$$

Погрешность метода прямоугольников на равномерной сетке будет составлять:

$$\varepsilon = \frac{\max|f''(\xi)|}{12}h^2.$$

$h = \frac{2}{N}$ — диаметр разбиения.
Составим таблицу значений интеграла, посчитанного методом квадратур.

N	Значение интеграла	Время работы
4	134.00	0.9246
5	128.35	7.5021
6	121.58	47.6030

7 Задание 7

7.1 Решение

1. Для поиска минимума функции f будем n раз разыгрывать случайные величины x_1, x_2, считать для каждой пары (x_1, x_2) значение функции $f(x_1, x_2)$, а затем из этого множества значений выберем наименьшее.
Рассмотрим случайные величины x_1 и x_2, равномерно распределенные на единичном круге.

$$P((x_1,x_2)\in A) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{x_1^2+x_2^2\le 1} dx_1 dx_2 = \left\{ \begin{smallmatrix} x_1 = r\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\varphi \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 r dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \{r^2 = z\} = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi$$

Их совместное распределение совпадает с совместным распределением случайных величин $\varphi \sim U[0, 2\pi]$ и $z \sim U[0,1]$. Выразим x_1, x_2 через z, φ:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{z}\cos\varphi \\ x_2 = \sqrt{z}\sin\varphi \end{cases}.$$

Оценим погрешность данного метода.
Пусть (x^*, y^*) — точка минимума, а точка (x, y) — точка, полученная методом случайного поиска. Тогда:

$$|f(x^*,y^*) - f(x,y)| \le \max_{(x_1,x_2)\in A} |\nabla f| |(x^*,y^*) - (x,y)|.$$

Оценим сначала $\max_{(x_1,x_2)\in A} |\nabla f|$.

$$\max_{(x_1,x_2)\in A} |\nabla f| = \max_{(x_1,x_2)\in A} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| = \left|3x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) - x_1\cos\left(\frac{1}{x_1}\right) + 10x_2^4\cos\left(\frac{1}{x_2}\right)\right| \le$$

$$\le \left|3x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right)\right| + \left|x_1\cos\left(\frac{1}{x_1}\right)\right| + \left|10x_2^4\cos\left(\frac{1}{x_2}\right)\right| \le 14$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| = \left|10x_1\left(4x_2^3\cos\left(\frac{1}{x_2}\right) + x_2^2\sin\left(\frac{1}{x_2}\right)\right)\right| \le 50$$

Тогда $\quad |\nabla f| \le 52.$
Оценим $|(x^*, y^*) - (x, y)|$.
Найдем вероятность попадания точки (x, y) в ε-окрестность точки минимума.

$$P\left((x, y) \in B_\varepsilon(x^*, y^*)\right) = \frac{\pi\varepsilon^2}{\pi} = \varepsilon^2$$

Однако исходная функция является четной по y, поэтому, если (x^*, y^*) — точка минимума, то и $(x^*, -y^*)$ — тоже точка минимума. Следовательно в сучае, когда обе точки минимума лежат на границе вероятность будет ε^2, а в случае, когда они лежат внутри множества — $2\varepsilon^2$. Будем рассматривать худший вариант. Тогда вероятность того, что одна из n точек попадет в ε-окрестность будет составлять $p = n\varepsilon^2$. Получим

$$|(x^*, y^*) - (x, y)| \le \sqrt{\frac{p}{n}}.$$

Итоговая оценка погрешности метода случайного поиска будет составлять

$$|f(x^*, y^*) - f(x, y)| \le 52\sqrt{\frac{p}{n}}.$$

Составим таблицу результатов.

N	Минимальное значение	Время работы
10^5	-1.2832 ± 0.16	0.0563
10^6	-1.29 ± 0.05	0.2849
10^7	-1.2879 ± 0.02	3.1140

8 Задание 8

8.1 Решение

Составим разностную схему.

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0.$$

Выразим $u_{i,j}$:

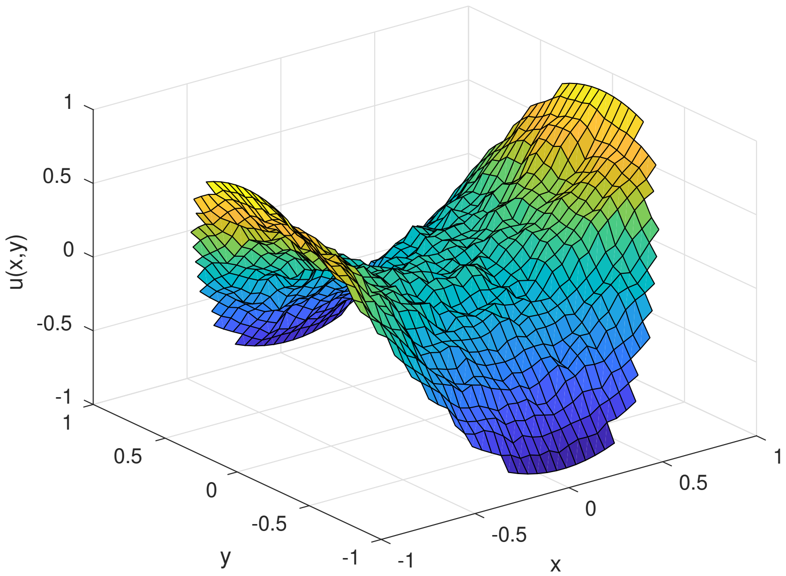
$$\begin{cases} u_{i,j} = \dfrac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}), & (i,j) \in D_h \\ u_{i,j} = f_{i,j}, & (i,j) \in \delta D_h. \end{cases}$$

Эта схема соответствует случайному блужданию, при котором во внутренних точках с равной вероятностью осуществляется переход в одну из соседних точек $(i+1, j), (i-$

$1, j), (i, j+1), (i, j-1)$ до тех пор, пока не будет достигнута одна из граничных точек. Тогда, чтобы решить систему, повторим эту процедуру n раз и посчитаем среднее значение функции в посещенных нами граничных точках.

$$u(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).$$

Более подробно о методе Монте-Карло можно найти в [2].
На следующем графике проиллюстрировано численное решение данной задачи методом Монте-Карло.



Найдем аналитическое решение этой задачи. Будем искать его методом неопределенных коэффициентов в виде:

$$u(x, y) = c_0 + a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + b_2 y^2.$$

Подставим в систему:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2a_2 + 2b_2 = 0, \\ u|_{x^2+y^2=1} = c_0 + a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + b_2 y^2 = x^2 - y^2. \end{cases}$$

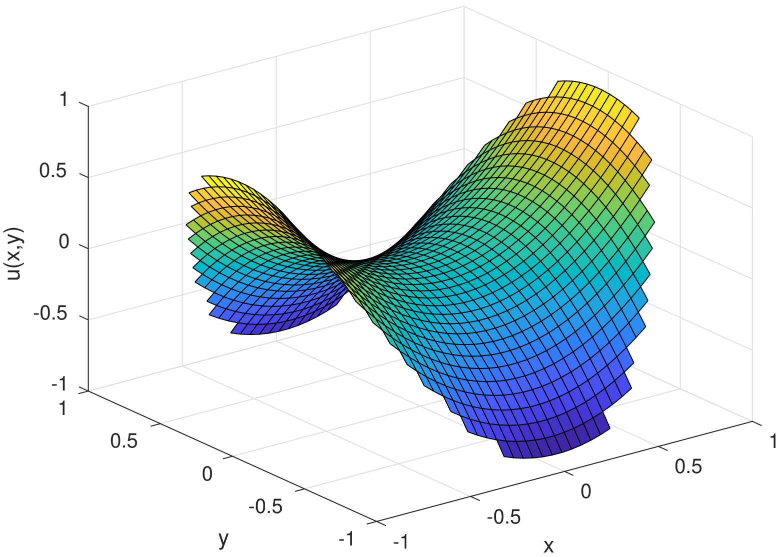
Получим:

$$c_0 = a_1 = b_1 = 0$$
$$a_2 = 1$$
$$b_2 = -1.$$

Тогда аналитическое решение задачи имеет вид:

$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

На следующем графике проиллюстрировано аналитическое решение данной задачи.



9 Задание 9

9.1 Теория

Определение 10 *Случайный процесс* $\{X_t\}_{t \in T}$, *где* $T \subset [0, +\infty)$ *называется процессом с независимыми приращениями, если для любых* $t_0, t_1, \ldots, t_n \in T$ *таких, что* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n$, *случайные величины* $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *независимы.*

Определение 11 *Случайный процесс* W_t *называется гауссовским, если* $\forall n \geq 2, \forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *случайные величины* $W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n}$ *имеют многомерное нормальное распределение.*

Определение 12 *Случайный процесс* W_t, *где* $t \geq 0$ *называется винеровским процессом, если*

1. $W_0 = 0$ *почти наверное.*

2. W_t — *процесс с независимыми приращениями.*

3. W_t — *гауссовский процесс.*

9.2 Решение

Найдем ковариационную функцию для винеровского процесса. Поскольку винеровский процесс — процесс с независимыми приращениями, то случайные величины $W_t - W_s$ и W_s независимы при $0 < s < t$. Тогда их ковариация равна нулю:

$$\operatorname{cov}(W_t - W_s, W_s) = 0. \tag{2}$$

В силу линейности ковариации

$$\operatorname{cov}(W_t - W_s, , W_s) = \operatorname{cov}(W_t, W_s) - \operatorname{cov}(W_s, W_s) = \operatorname{cov}(W_t, W_s) - \mathbb{V}ar(W_s) = \operatorname{cov}(W_t, W_s) - s.$$

Тогда, учитывая (2), получим

$$\operatorname{cov}(W_t, W_s) = s. \tag{3}$$

Аналогично, в случае, если $0 < t < s$ получим:

$$\operatorname{cov}(W_t, W_s) = t. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получим:

$$\operatorname{cov}(W_t, W_s) = \min(t, s). \tag{5}$$

Рассмотрим условную плотность.

$$p_{W_t}(x|W_{t_0} = x_0, W_{t_1} = x_1) = \frac{p_{W_{t_0}W_tW_{t_1}}(x_0, x, x_1)}{p_{W_{t_0}W_{t_1}}(x_0, x_1)}.$$

$$p_{W_{t_0}W_{t_1}}(x_0, x_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|R_1|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_0, x_1)R_1^{-1}(x_0, x_1)^T\right\};$$

$$p_{W_{t_0}W_tW_{t_1}}(x_0, x, x_1) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{|R_2|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_0, x, x_1)R_2^{-1}(x_0, x, x_1)^T\right\}.$$

Здесь R_1 и R_2 — ковариационные матрицы.

$$R_1 = \begin{bmatrix} t_0 & t_0 \\ t_0 & t_1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} t_0 & t_0 & t_0 \\ t_0 & t & t \\ t_0 & t & t_1 \end{bmatrix}$$

Определители этих матриц и обратные к ним матрицы найдем при помощи символьных вычислений Matlab. Рассмотрим точку $t = t_0 + \alpha(t_1 - t_0)$ из отрезка $[t_0, t_1]$. Тогда получим:

$$p_{W_t}(x|W_{t_0} = x_0, W_{t_1} = x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)(t_1 - t_0)}} \exp\left\{-\frac{(x - ((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1))^2}{2\alpha(1-\alpha)(t_1 - t_0)}\right\}.$$

Тогда для W_t справедливо:

$$W_t \sim N((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1), \alpha(1-\alpha)(t_1 - t_0)).$$

Список литературы

[1] С.Н. Смирнов *Лекции по стохастическому анализу, 2019.*

[2] Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. *Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация на ЦВМ.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 1961. - 228 с.