Численные методы построения вогнутой оболочки функций

студент 4 курса М. Г. Зинченко
научный руководитель — доцент С. Н. Смирнов

Кафедра системного анализа

10 июня 2020 г.

Постановка задачи

Целью работы будет рассмотреть различные алгоритмы построения вогнутых оболочек функций, выделить их ключевые особенности и сравнить их в решении задачи суперхеджирования.

1. Алгоритм Грэхема
2. Алгоритм Джарвиса
3. Алгоритм быстрой оболочки
4. Преобразование Лежандра - Фенхеля

Обзор существующих результатов

- Сравнительно мало работ посвящено построению вогнутой оболочки **функции** (обычно рассматриваются множества).
- В данной работе исследуется использование алгоритмов построения вогнутой оболочки функции в задаче суперхеджирования для гарантированного детерминистского подхода из статей [1], [2].

Уравнения Беллмана-Айзекса (см. [1]):

$$V_N^*(\overline{x}_N) = g_N(\overline{x}_N)$$

$$V_{t-1}^* = g_{t-1}(\overline{x}_{t-1}) \vee \inf_{h \in D_t(\overline{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\overline{x}_{t-1})} \left[V_t^*(\overline{x}_{t-1}, y + x_{t-1}) - hy\right],$$

$$t = N, \ldots, 1.$$

$\overline{x}_{t-1}$ — предыстория цен базовых активов. V_t — стоимость в момент t портфеля, который формирует продавец опциона. V_t^* — точная нижняя грань стоимости V_t портфеля в момент времени t, гарантирующего исполнение текущих и будущих обязательств, касающихся потенциальных выплат при исполнении опциона, для стратегий суперхеджирования. $g_t(\cdot)$ — функция выплат по опциону. $K_t(\cdot)$ — ограничения на приращения цен. $D_t(\cdot)$ — торговые ограничения.

Как и в статье [2] будем рассматривать класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ — смешанное расширение класса чистых стратегий. Обозначим:

$$\rho_t(\overline{x}_{t-1}) = \inf_{h \in D_t(\overline{x}_{t-1})} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\overline{x}_{t-1})} \int [V_t^*(\overline{x}_{t-1}, y + x_{t-1}) - hy],$$

$$\rho'_t(\overline{x}_{t-1}) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\overline{x}_{t-1})} \inf_{h \in D_t(\overline{x}_{t-1})} \int [V_t^*(\overline{x}_{t-1}, y + x_{t-1}) - hy].$$

Величина $\rho_t(\overline{x}_{t-1})$ входит в уравнения Беллмана-Айзекса для смешанных стратегий, которые можно записать в сокращенном виде (см. [2]):

$$V_N^*(\overline{x}_N) = g_N(\overline{x}_N),$$

$$V_{t-1}^*(\overline{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\overline{x}_{t-1}) \vee \rho_t(\overline{x}_{t-1}), \quad t = 1, \dots, N.$$

Обозначим:

$$f(y) = V_t^*(x_0, \dots, x_{t-1}, y + x_{t-1}).$$

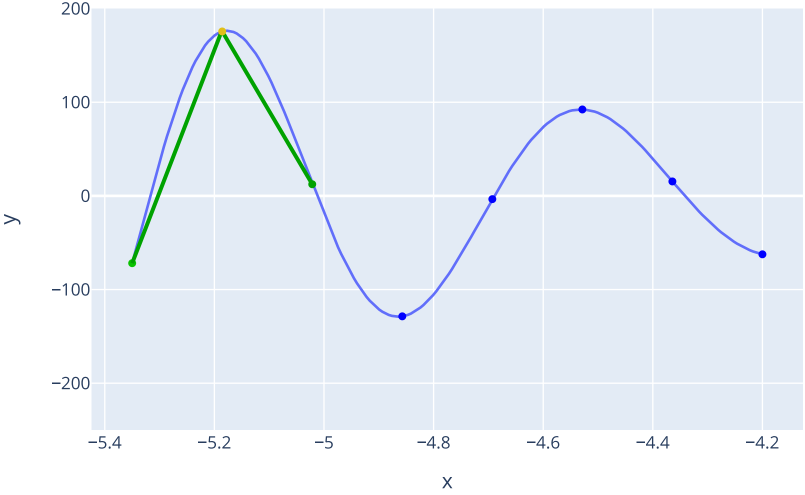
Согласно [2], [3], при условии $\rho_t(\overline{x}_{t-1}) = \rho_t'(\overline{x}_{t-1})$, а также при условии отсутствия арбитражных возможностей и торговых ограничений, верно:

$$\rho_t(\overline{x}_{t-1}) = \hat{f}_t(0),$$

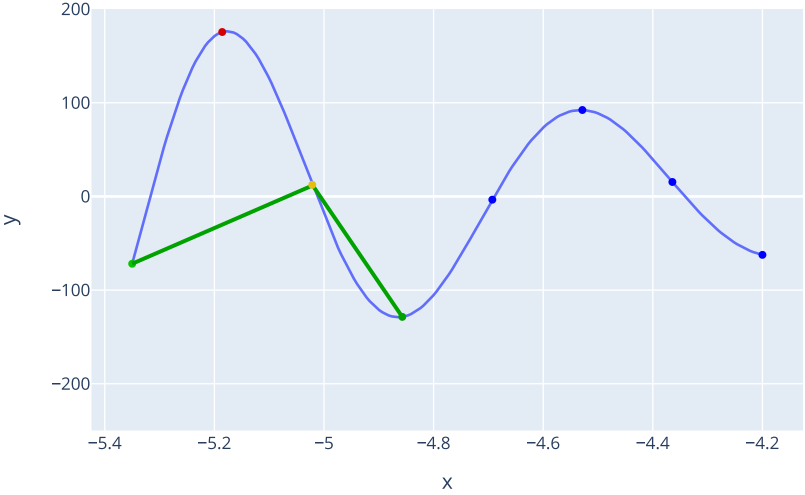
где $\hat{f}_t$ — вогнутая оболочка функции f на множестве возможных значений цены актива в момент времени t.

Алгоритм Грэхема - 1

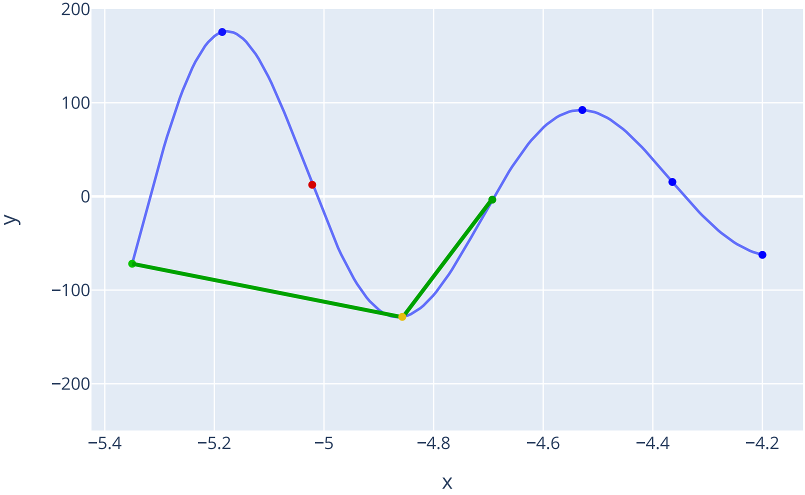
Graham, R.L. (1972) [4].



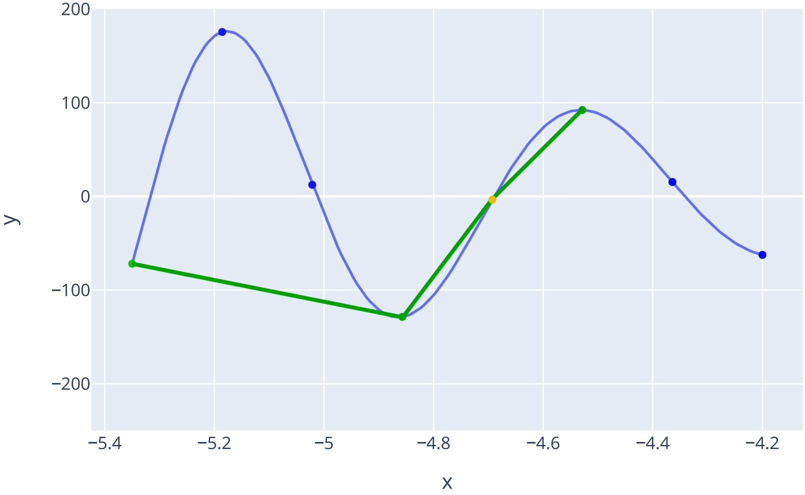
Алгоритм Грэхема - 2



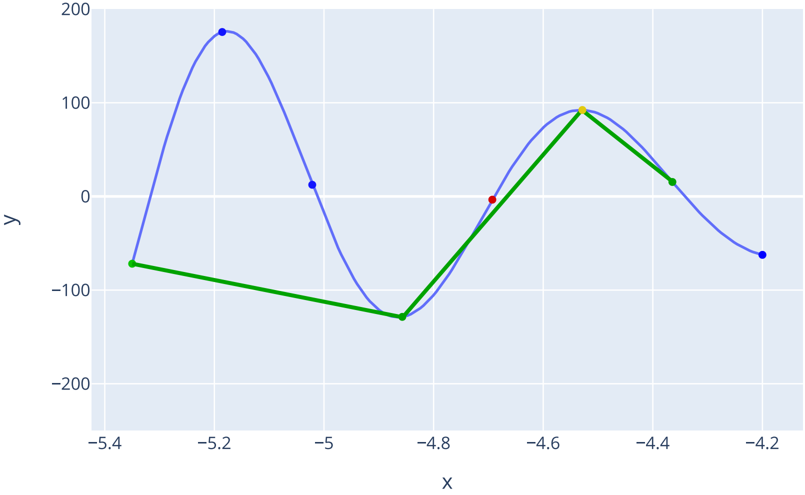
Алгоритм Грэхема - 3



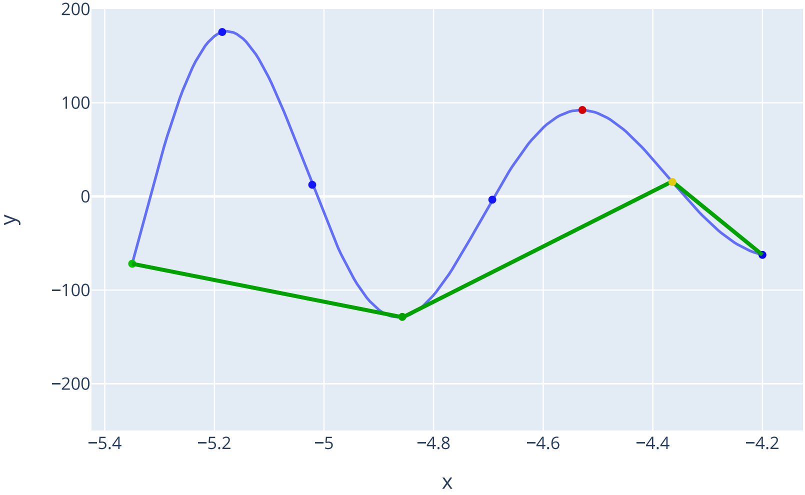
Алгоритм Грэхема - 4



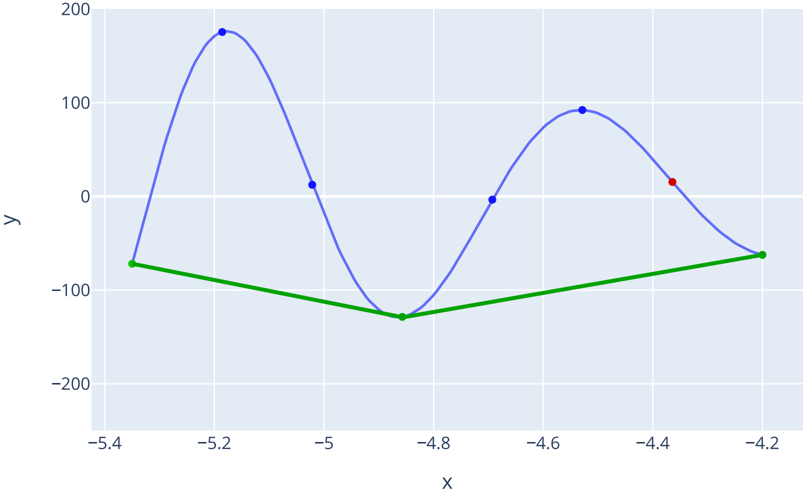
Алгоритм Грэхема - 5



Алгоритм Грэхема - 6



Алгоритм Грэхема - 7



Алгоритм Грэхема

Сложность: $O(n)$.

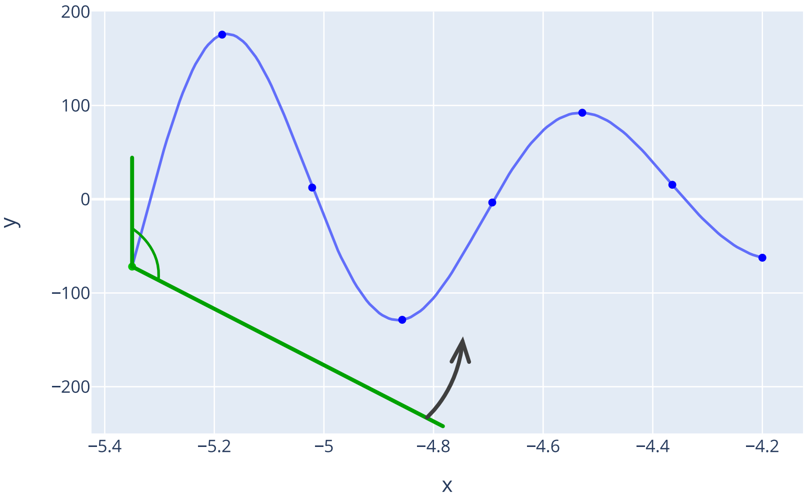
Преимущества:

- Линейная сложность

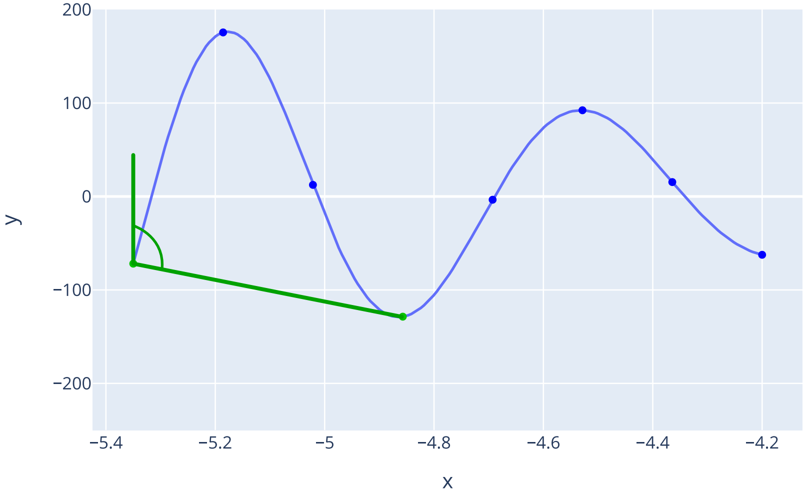
Недостатки:

- Сложная операция проверки вхождения точки в левый поворот

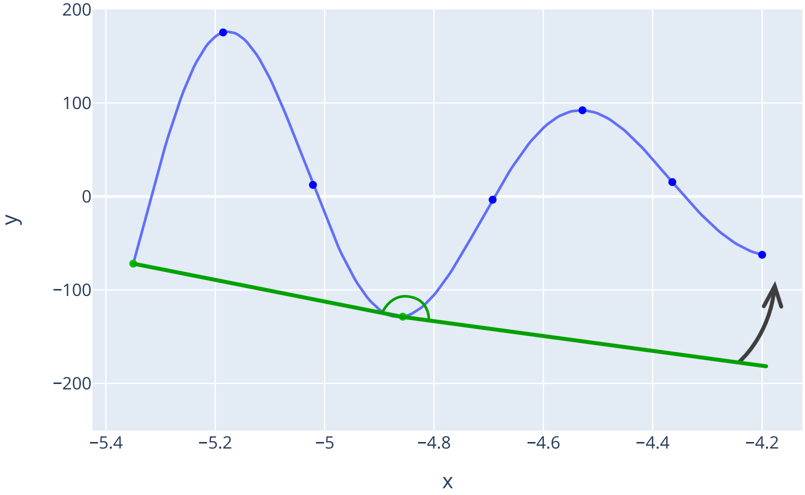
Jarvis, R. A. (1973) [5].



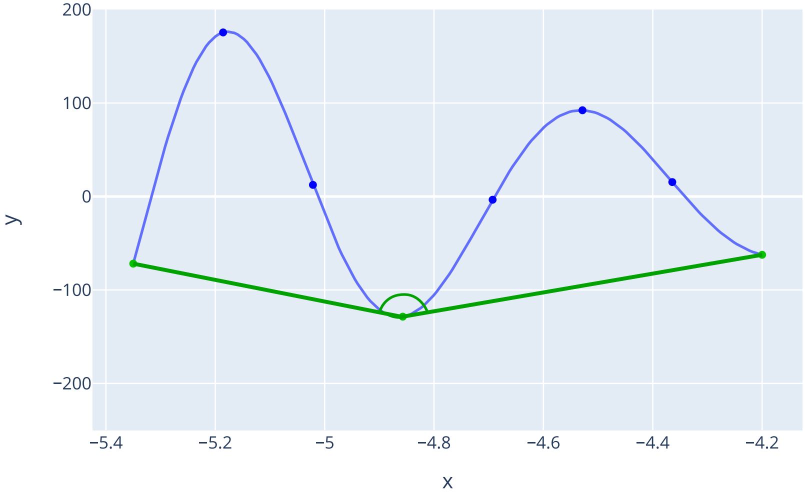
Алгоритм Джарвиса - 2



Алгоритм Джарвиса - 3



Алгоритм Джарвиса - 4



Алгоритм Джарвиса - 5

Сложность: $O(nh)$.
Преимущества:

- Операция вычисления углов довольно простая.
- При малом количестве крайних точек сложность почти линейная.

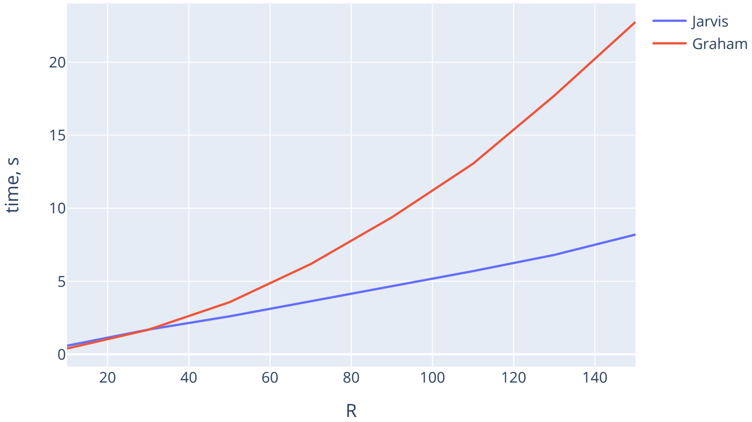
Недостатки:

- В худшем случае сложность квадратичная.

Ванильные опционы.

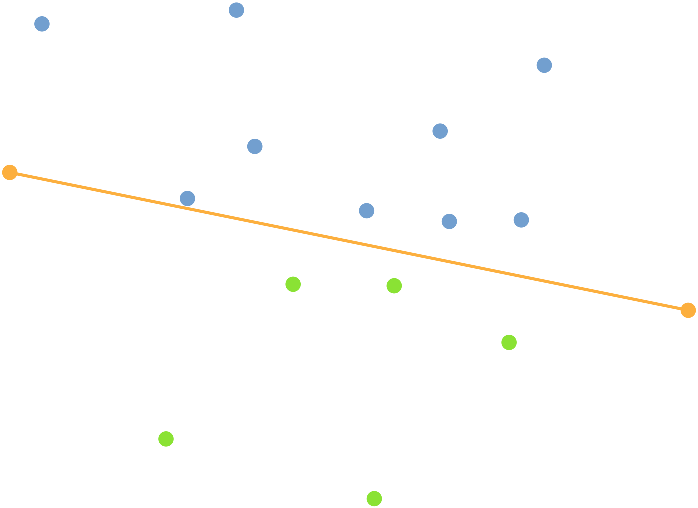
$$g_N(x) = \max\{(x - strike), 0\}$$

Сравнение скорости

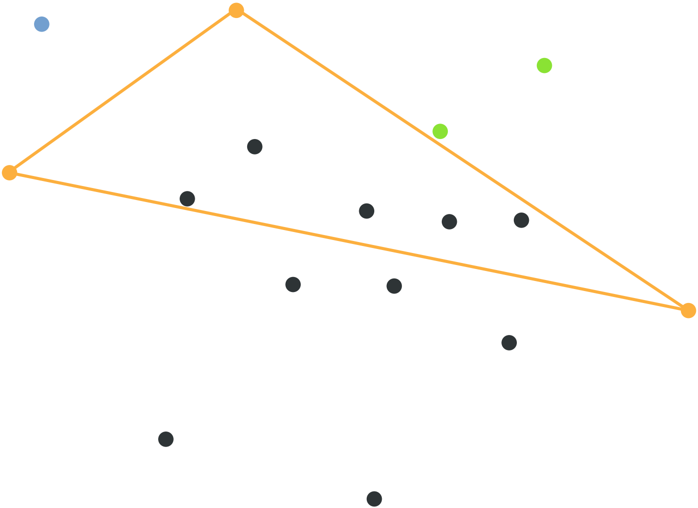


Алгоритм быстрой оболочки - 1

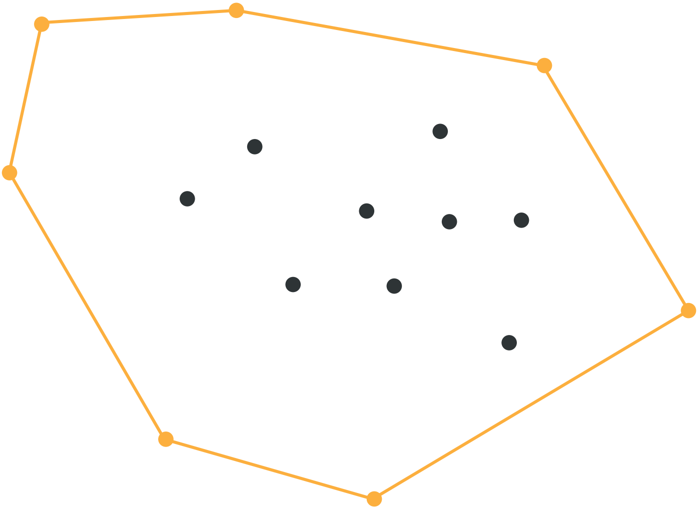
Barber, C. B., D.P. Dobkin, and H.T. Huhdanpaa (1996) [7].



Алгоритм быстрой оболочки - 2



Алгоритм быстрой оболочки - 3



Формула преобразования.

$$f^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\langle x, \xi \rangle - f(x) \right]$$

Основное свойство.

$$f^{**} = \mathrm{cl}(\mathrm{conv}\, f)$$

Обозначим за f^{*i} преобразование Лежандра-Фенхеля по i-ой координате. Свойство, позволяющее работать в $n-$мерном пространстве.

$$f^* = \left(- \left(\ldots \left(- \left(- f^{*1} \right)^{*2} \right)^{*3} \ldots \right)^{*(n-1)} \right)^{*n}$$

Выбор сетки для вычислений

В общем случае $\left(f^*_{\Omega_N}\right)^*_{S_N} \neq \left(f^*_{\Omega_N}\right)^* = \operatorname{conv} f_{\Omega_N}$

Теорема (из книги [6])

$$g_y := f_{\Omega_N}(\cdot, y),$$

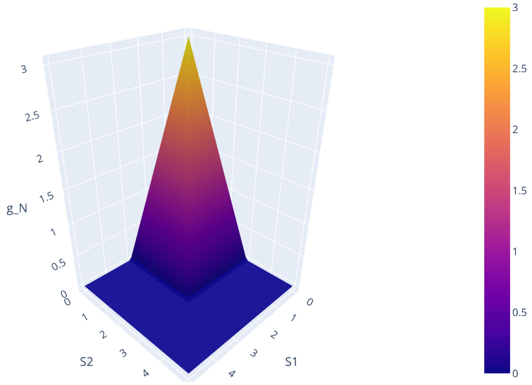
$$\xi_y^- := \max \partial \operatorname{conv} g_y(\min X_N), \quad \xi^- := \min_{y \in Y_N} \xi_y^-,$$

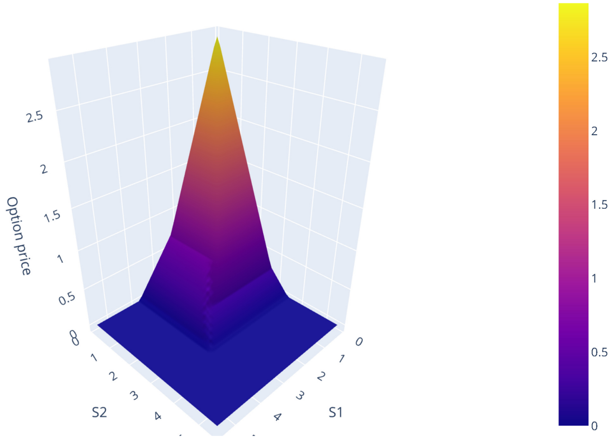
$$\xi_y^+ := \min \partial \operatorname{conv} g_y(\max X_N), \quad \xi^+ := \max_{y \in Y_N} \xi_y^+.$$

Тогда множество $[\xi^-, \xi^+]$ содержит оптимальную сетку.

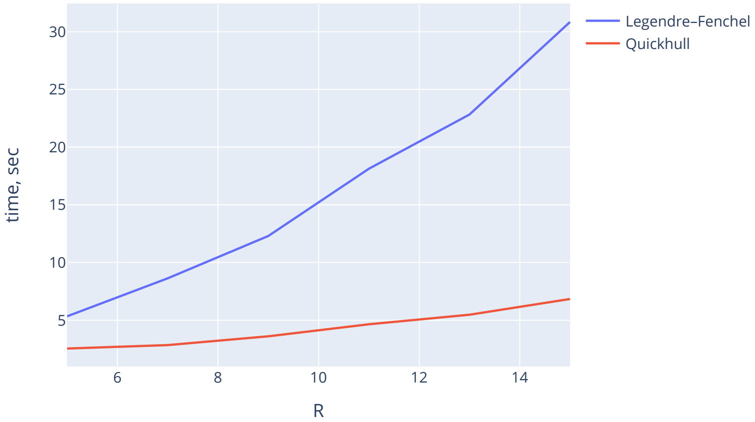
Put-on-max.

$$g_N(S_1, S_2) = \max\{strike - \max\{S_1, S_2\}, 0\}.$$




2.5
2
1.5
1
0.5
0
Option price
0
1
2
3
4
S2
0
1
2
3
4
S1
0
0.5
1
1.5
2
2.5

Сравнение скорости



Заключение

В ходе исследования выяснилось, что

- Для ванильных и бинарных опционов алгоритм Джарвиса работает быстрее алгоритма Грэхема в силу малого количества крайних точек для функиций выплат этих опционов.
- В трехмерном случае алгоритм быстрой оболочки (Quickhull) оказался быстрее.

Список литературы I

1. Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения и уравнения Беллмана – Айзекса // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2018. Том 10. №4. С. 59-99.
2. Смирнов С.Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: наиболее неблагоприятные сценарии поведения рынка и проблема моментов // Математическая Теория Игр и ее Приложения 2020 (в печати).
3. Smirnov S. N. A Guaranteed Deterministic Approach to Superhedging: A Game Equilibrium in the Case of No Trading Constraints // Journal of Mathematical Sciences 2020 (in print).

4. Graham, R.L. An Efficient Algorithm for Determining the Convex Hull of a Finite Planar Set // Information Processing Letters. 1972. Volume 1. №4. P. 132-133.
5. Jarvis, R. A. On the identification of the convex hull of a finite set of points in the plane // Information Processing Letters. 1973. Volume 2. №1. P. 18-21.
6. Lorenzo Contento. The Discrete Legendre-Fenchel Transform and its application to phase separation in electrolytes// Hyper Articles en Ligne. 2012. P. 12 - 39.
7. Barber, C. B., D.P. Dobkin, and H.T. Huhdanpaa. The Quickhull Algorithm for Convex Hulls // ACM Transactions on Mathematical Software. 1996. Volume 22. №4. P. 469 - 474.