burnside引理和polya定理

2021-07-20 | 2022-10-07 | OI & ACM | 17
3k | 3 分钟

简介

burnside引理

置换

有限集合到自身的双射成为置换，集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 上的置换可以表示为 $f=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{p_n}\end{pmatrix}$，$f(a_k)=a_{pk}$

两个置换的合成 $(g\circ f)(k)=g(f(k))$

简单来说，置换群就是群中的所有元素都是置换的群

着色

设 c 为 S 的一种着色，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的着色分别为 $c(a_1),c(a_2),\cdots,c(a_n)$

着色与置换的合成 $(f\times c)(a_{p_k})=c(a_k)$，$(f\times c)(a_k)=c(f^{-1}(a_k))$，容易得到 $(g\circ f)\times c=g\times(f\times c)$

置换与着色的关系

如果存在 $f\in G$，$f\times c_1=c_2$ 则称 c_1 与 c_2 等价

等价关系的性质：

1. 自反性：$\forall c\in C,c\sim c$

2. 对称性：$\forall c_1, c_2 \in C$，如果 $c_1 \sim c_2$，则 $c_2 \sim c_1$
3. 传递性：$\forall c_1, c_2, c_3 \in C$，如果 $c_1 \sim c_2$，$c_2 \sim c_3$，则 $c_1 \sim c_3$

定义：$G(c) = \{f | f \in G, f \times c = c\}$ 为使着色 c 保持不变的 G 中所有置换的集合

定义：$C(f) = \{c | c \in C, f \times c = c\}$ 为在 f 的作用下，保持不变的 C 中所有着色的集合

定理：对于每一种着色 c，$G(c)$ 是置换群，对于 G 中的置换 g 和 f，$g \times c = f \times c$ 当且仅当 $f^{-1} \circ g \in G(c)$

推论：设 c 为 C 中的一种着色，则与 c 等价的着色数为 $\frac{|G|}{|G(c)|}$

证明：

设 f 是 G 中的置换，则满足 $g \times c = f \times c$ 的 g 实际上是 $\{f \circ h | h \in G(c)\}$ 中元素，根据消去率，$f \circ h$ 两两不相同，所以 g 的个数为 $|G(c)|$。也就是说，对于每个置换 f，恰有 $|G(c)|$ 的置换作用在 c 上和 f 的效果相同，所以与 c 的等价的着色的个数为 $\frac{|G|}{|G(c)|}$

我们按照 c 的等价关系可以将 c 划分成若干个等价类

所以我们定义 $A(c)$ 表示 c 所在的等价类

burnside引理

令 L 为等价类的个数，则 $L = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} C(f)$

polya定理

当颜色数为 m 时，即每个对象可以染 m 种颜色中的任意一种，$C(f) = m^{d(f)}$，其中 $d(f)$ 为 f 的循环个数

几种特殊置换的循环个数

1. $p_i = i + k$，循环个数为 (n, k)

例题

1. 简要题意：给定 n 和 m，求有多少本质不同的序列 a_i，满足 $0 \le a_i < m$，且 a_i 可以重复循环左移任意次以及整体重复加任意次，对于 $k \in [1, n]$ 计算答案

   $n, m \le 10^5$

   简要题解：注意到本质不同等价于求有多少长度为 n，每一位的大小为 $[0, m-1]$ 且和模 m 为 0 的圆环，我们首先不考虑最后一个条件，那么这显然是一个 $burnside$ 定理的题目，我们有 n 个置换 f，第 k 个置换满足 $p_i = i + k$，且第 k 个置换有 (n, k) 个循环，每个循环的大小都是 $\frac{n}{(n,k)}$，同时数字大小为 $[0, m-1]$ 相当于有 m 种颜色，那么我们可以得到对于长度为 n 的环，答案为 $\sum_{i=1}^{n} m^{(n,i)}$

   我们现在考虑和模 m 为 0 这个条件，我们不妨设环大小为 d，环个数为 $\frac{n}{d}$，第 i 个环的颜色为 a_i，那么我们必须有 $d\sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} a_i \equiv 0 (\bmod m)$，这个东西等价于 $\sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} a_i \equiv 0 (\bmod \frac{m}{(m,d)})$，我们知道 a_i 在 $[0, m-1]$ 内均匀取值，那么 $\sum a_i \equiv k (\bmod m)$，其中 $k \in [0, m-1]$，的方案数是相同的，所以这个东西占总数的比列就是 $\frac{(m,d)}{m}$，那么原式就是 $\sum_{i=1}^{n} m^{(n,i)} \frac{(m, \frac{n}{(n,i)})}{m}$，这个东西我们化简一下可以得到 $\frac{1}{nm} \sum_{d|n} m^d \varphi(\frac{n}{d})(m, \frac{n}{d})$

   时间复杂度 $O(n \log n)$

   2022杭电多校6 K Find different

2. 简要题意：给定 n, m，求有多少本质不同的序列 a_i，每个位置可以填 $[1, m]$，现在还有 k 个序列变换的方法，第 i 个方法给定一个 b_i，保证所有 b_i 互不相同且 $b_i \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，第 i 种方法表示交换 $[1, b_i]$ 和 $[n - b_i + 1, n]$ 的元素，交换顺序为 i 和 $n - i + 1$ 交换，两个序列本质不同定义为不能通过使用若干次变换方法变得相同

   $n, m \le 10^9, k \le 10^5$

   简要题意：考虑 $burnside$，注意到有 2^k 个置换，另外我们注意到将 b_i 差分后不影响置换的个数，差分后我们发现不同的交换方法叠加到一起不会相互影响，那么我们直接维护 $m^{n - \sum t_i}, t_i$ 表示选择的 b_i

   CF 1065E Side Transmutations

3. 简要题意：求有多少个长度为 n 的循环同构的序列，每个位置最多只有三种颜色，红绿蓝，要求绿色不能出现超过 k 次，且相邻的位置颜色不能相同

$n, k \leq 10^6$

简要题解：首先我们知道答案就是这个式子 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{m(i,n)}{n}\rfloor} f((i,n),j)$ 其中 $f(n,m)$ 表示大小为 n 的环染色，其中绿色的个数为 m

首先我们考虑如何计算 $f(n,m)$

首先我们考虑绿色不放在 1 或 n 的位置，那么两个绿色之间有且仅有两种填法，那么答案就是 $2^m\binom{n-m}{m}$

然后我们考虑将绿色放在 1 或 n 的位置，容易知道这两种情况的方案数相同，下面仅考虑放在 1 的情况，容易得到答案是 $2^{m-1}\binom{n-m-1}{m-1}$，注意这个东西还要乘个 2

那么 $f(n,m) = 2^m(\binom{n-m}{m} + \binom{n-m-1}{m-1})$

我们考虑化简总的答案，容易得到 $\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(\frac{n}{d})\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{m(i,n)}{n}\rfloor} f(d,i)$

我们直接枚举约数然后 $O(n)$ 计算即可

2021杭电多校1 K Necklace of Beads

------------- 本文结束 感谢阅读 -------------

Tech # burnside引理和polya定理

2021牛客多校1 J Journey among Railway Stations

Luogu P4980 【模板】Pólya 定理