欧拉回路

2020-12-13 | 2022-02-26 | OI & ACM | 2
1.5k | 1 分钟

简介

定义

欧拉通路：通过图中每条边且只通过一次，并且经过每一顶点的通路

欧拉回路：通过图中每条边且只通过一次，并且经过每一顶点的回路

有向图的基图：忽略所有边的方向，得到的无向图称为该有向图的基图

一条回路也可视为一条通路

定理及推论

无向图定理

无向图 G 存在欧拉通路的充要条件：

G 是连通图，并且 G 仅有两个奇度节点或者无奇度节点

推论：

1. 当 G 有且仅有 2 个奇度节点的时候，G 的欧拉通路必以这两个节点为端点
2. 当 G 是无奇度节点连通图时，G 必有欧拉回路

有向图定理

有向图 D 存在欧拉通路的充要条件是：

D 的基图连通，并且所有顶点的出入度相等；

或者除两个顶点外，其余顶点的入度和出度相等，而这两个顶点中，一个顶点的出度与入度之差为 1，另一个顶点的出度与入度之差为 1

推论：

1. D 中只有两点的出入度不同且一个点的出度与入度的差为 1，另一点的入度与出度的差为 1，D 有欧拉通路且以这两点为顶点
2. 当所有点的出入度都相等时，D 中一定存在欧拉回路

求解欧拉回路

$Hierholzer$ 算法

需要注意的是这个算法当且仅当存在欧拉回路才是正确的，所以要提前判是否存在欧拉回路

```
void dfs(int u) {
    for (int &i = head[u]; ~i; i = e[i].next) {
        int v = e[i].to; bool &ext = e[i].ext, &Ext = e[i ^ 1].ext;
        if (ext) continue; ext = Ext = 1; dfs(v); // 在这里记录边
    }
    // 在这里记录点
}
```

拓展

应用

给边定向

1. 简要题意：给定一个 n 个点 m 条边的无向图，现在需要给每条边定向，使得尽量多的点满足入度等于出度

   $n \le 200$

简要题解：容易发现答案最大为度数为偶数的点的个数，我们首先猜测能否构造出这样的解

考虑欧拉回路，注意到有度数为奇数的点，所以我们不能直接跑欧拉回路，但同时我们注意到度数为奇数的点的个数一定有偶数个，所以我们新建一个点，将其与所有度数为奇数的点相连，然后我们跑欧拉回路就行了

CF 723E One-Way Reform

2. 简要题意：给定 n 个数列，第 i 个数列的长度为 m_i，现在要求将这 $\sum_{i=1}^{n} m_i$ 个数划分进两个可重集合中，要求这两个可重集合完全相同，每个数只能进一个集合，同时必须保证每个数列都有恰好一半的数进入 A 集合，另一半进入 B 集合

   $n \leq 10^5, \sum_{i=1}^{n} m_i \leq 2 \times 10^5$

   简要题解：我们考虑将数字和数组都看成点，如果一个 x 在 i 数列中出现了 k，那么就连 k 条 x 到 i 的双向边，然后我们跑欧拉回路，我们将入边和出边看成左右集合，因为每个点的入度都等于出度，所以两个条件都能得到满足

   CF 1634E Fair Share

3. 简要题意：现在有 n 个点 (x_i, y_i)，要求将每个点染成红色或者蓝色，且横坐标相同的点中蓝色和红色点的数量相差不超过 1，纵坐标同理

   $n \leq 2 \times 10^5$

   简要题解：我们考虑将横坐标和纵坐标看成图中的点，如果有一个点 (x, y)，我们就连一条 x 到 y 的无向边

   现在我们需要染色，这相当于给无向边定向，且定向之后需要保证每个点的入度和出度的差的绝对值不超过 1，如果要求入度等于出度的话，我们容易想到欧拉回路，但现在是要求入度和出度的绝对值不超过 1

   我们考虑将其转化为入度等于出度的情况，注意到图中度数为奇数的点一定有偶数个，那么我们新建一个点，将所有奇数点连向这个点，然后再跑欧拉回路就行了

   CF 547D Mike and Fish

------------- 本文结束 感谢阅读 -------------

Tech # 欧拉回路

Luogu P3243 [HNOI2015]菜肴制作

Luogu P2764 最小路径覆盖问题