# 生成函数

2021-07-26 | 2022-10-14 | OI & ACM | 28
18k | 16 分钟

## 简介

感觉是一个很有未来的东西

## 普通生成函数

### 定义

序列 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 的普通生成函数，又称 $OGF$，定义为形式幂级数 $F(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$

通过将 $a_{n+1}\cdots$ 等设置为 $0$，将其变成一个有限数列

注意到我们一直将生成函数称为形式幂级数，即我们只考虑它的形式

### 封闭形式与展开形式

对于生成函数 $F(x)=1+x+x^2+\cdots$，容易得到 $xF(x)+1=F(x)$，所以 $F(x)=\frac{1}{1-x}$

而 $F(x)=\frac{1}{1-x}$ 就是 $F(x)=1+x+x^2+\cdots$ 的封闭形式，反过来 $F(x)=1+x+x^2+\cdots$ 是展开形式

### 几个重要的封闭形式与展开形式

$1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$

$1+x^k+x^{2k},\cdots=\frac{1}{1-x^k}$

$1+ax+a^2x^2+\cdots=\frac{1}{1-ax}$

$x^k+x^{k+1}+\cdots=\frac{x^k}{1-x}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}x^n=\frac{1}{(1-x)^k}$

$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n}{i}=(1+x)^n$

### 组合意义

普通生成函数解决的是若干种物品的组合问题

### 微积分

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

$\int(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{n-1}}{n}x^n+C$

## 指数生成函数

### 定义

序列 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 的指数生成函数，又称 $EGF$，定义为形式幂级数 $F(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_i}{i!}x^i$

### 几个重要的封闭形式和展开形式

$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x$

$1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^{-x}$

$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=\ln(\frac{1}{1-x})$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x$

$\sum_{n=0}^{\backslash\mathrm{infin}}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cos x$

### 组合意义

指数生成函数解决的是若干种物品的排列问题

### 微积分

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!})=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}\frac{x^n}{n!}$

$\int(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!})=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\frac{x^n}{n!}+C$

注意到指数生成函数的求导和积分相当于是左移和右移，而乘 $x$ 和除 $x$ 则是类似普通生成函数积分和求导一样的东西

## 概率生成函数

### 定义

若 $X$ 为某个离散型随机变量，那么 $X$ 的概率生成函数为

$$F(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\Pr(X=i)x^i$$

### 特殊取值

- $F(1)=1$
- $E(X)=F'(X)$
- $E^2(X)=F''(X)+F'(X)$
- $V(X)=F''(X)+F'(X)-F'(X)^2$

## 指数公式定理（指数生成函数exp的组合意义）

如果存在两个 $EGF$，$F(x)$ 与 $G(x)$，满足 $e^{F(x)}=G(x)$，$F(x)$ 是 $f$ 的 $EGF$，那么 $G(x)$ 是

$$g_n = \sum_{\pi=\{S_1,S_2,\cdots,S_k\}} \prod_{i=1}^{k} f_{|S_i|}$$

的 $EGF$，其中 $\pi$ 是 $[n]$ 的划分

来源：https://www.luogu.com.cn/blog/220037/exp-formula#

上面那个解释不是太好理解，我们思考下面这个解释

把 $n$ 个有标号的球放到任意多个无标号盒子中，并且一个放了 $i$ 个球的盒子有 $a_i$ 种染色方案，那么放 $n$ 个球并染色的方案就是 $[x^n]exp(A(x))$

我们来看一个最经典的式子，贝尔数 $B(x) = exp(e^x - 1)$，贝尔数的定义：将 $n$ 个有标号的小球放到任意多个无标号盒子中的方案数，注意到将大于等于 $1$ 个球放到一个盒子中的方案都是 $1$，所以 $A(x) = e^x - 1$，那么 $B(x) = exp(A(x))$

1. 令 $F(x)$ 为带标号简单无向连通图的指数生成函数，$G(x)$ 为带标号无向图的指数生成函数

   我们有 $e^{F(x)} = G(x)$，$g_n = 2^{\binom{n}{2}}$

## Euler变换

将 $exp$ 的组合意义中的有标号元素换成无标号元素就得到了 $Euler$ 变换，$euler(F(x)) = \prod_n \frac{1}{(1-x^n)^{f_n}}$

## 生成函数对序列高阶差分和高阶前缀和的优化

首先我们考察前缀和，令 $A_0(x)$ 为原序列 $a_i$ 的生成函数，那么一阶前缀和 $A_1(x) = \sum_{n=0} \sum_{i=0}^{n} a_i x^n = \sum_{n=0} x^n \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$，其中 $b_n = 1$，能够发现这是一个卷积的形式，那么 $A_1(x) = A_0(x)B(x)$，能够发现 $B(x)$ 就是 $\frac{1}{1-x}$

差分和前缀和类似，能够得到一阶差分就是乘上 $1 - x$

综上，$A_k(x) = (1-x)^{-k}A(x)$，$k > 0$ 为 $k$ 阶前缀和，$k < 0$ 为 $k$ 阶差分

当我们需要求 $k$ 阶前缀和或者 $k$ 阶差分时，直接使用 $(1-x)^{-k}$ 的展开式即可

# 常见数列的生成函数推导

## 斐波那契数

众所周知，斐波那契数列的递推是 $f_0=0,f_1=1,f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$，那么我们容易得到 $f_n$ 的生成函数 $F(x)$ 的递推式为 $F(x)=x+xF(x)+x^2F(x)$，即 $F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$，通过这个东西可以退出斐波那契数的通项公式为 $f_n=\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$

## 卡特兰数

众所周知，卡特兰数的递推是 $f_0=1,f_n=\sum_{i=0}^{n-1}f_if_{n-1-i}$，那么我们容易得到 $f_n$ 的生成函数 $F(x)$ 的递推式为 $F(x)=1+xF(x)^2$，即 $F(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

# 一类通过生成函数求线性递推式的方法

这里我们只考虑求 $F(x)=\sqrt{G(x)}$ 的公式，令 $H(x)=\frac{1}{\sqrt{G(x)}}$

$$F'(x)=\frac{G'(x)}{2\sqrt{G(x)}}=\frac{G'(x)}{2}H(x)$$

$$H'(x)=-\frac{G'(x)}{2G(x)}H(x)$$

则有 $G'(x)H(x)=-2H'(x)G(x)$

另外我们有 $2F'(x)=G'(x)H(x)$

# 例题

1. 简要题意：给定 $n$ 和 $[1,n]$ 中生成每个数的概率 $p_i$，现在开始随机生成 $[1,n]$ 的数，若生成的数不是已经生成的数的最大值，那么停止生成，最终得分是生成的数的个数的平方，求期望得分

   $n\le 100$

   简要题解：我们考虑概率生成函数 $F(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\Pr(X\ge i)x^i$，随机变量 $X$ 表示生成的数的个数

那么我们发现 $F(x)=\prod_{i=1} \frac{1}{1-p_ix}$，原因的话，我们考虑枚举所有生成了 $k$ 个数的情况，因为这 $k$ 个数的生成只有一种顺序，所以可以看成集合

考虑将我们要求的东西转换成与 $F(x)$ 有关的式子：

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \Pr(X=i)x^i &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2(\Pr(X\ge i)-\Pr(X\ge i+1))x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \Pr(X\ge i)x^i - \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \Pr(X\ge i+1)x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)\Pr(X\ge i)x^i \\ &= 2F'(x)+F(x)\end{aligned}$$

那么答案就是 $2F'(1)+F(1)$，容易得到 $F'(x)=F(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{1-p_ix}$，时间复杂度 $O(n)$

2021牛客多校4 B Sample Game

2. 简要题意：给定 $n,k,D$，对于一个长度为 $n$ 的序列 $a_i$，我们定义它的价值为 $\frac{D!}{\prod_{i=1}^{n}(a_i+k)!}$，求对于所有满足 $\sum_{i=1}^{n}a_i=D, a_i\ge 0$ 的序列 $a_i$ 的价值和

   $n,k\le 50, D\le 10^8$

   简要题解：我们考虑转换一下原式，得到 $\frac{(D+nk)!}{\prod_{i=1}^{n}(a_i+k)!}\times\frac{D!}{(D+nk)!}$，其中 $\sum_{i=1}^{n}a_i=D, 0\le a_i\le D$

   容易得到这个式子的前半部分等价于 $EGF$，$x^{D+nk}^n$

   它的组合意义很明显，有 $n$ 种物品，每种物品有 $D+k$ 个，且至少选 $k$ 个，一共选 $D+nk$ 个物品做排列的方案数

   然后对于这个东西，我们直接暴力二项式展开算系数即可，时间复杂度 $O(D+n^2k)$

   2021牛客多校4 G Product

3. 简要题意：你现在有一个整数 $x$，题目给出它属于 $[0,n]$ 中某个数的概率，现在要进行 $m$ 次随机，每次随机将等概率的将 $x$ 变成 $[0,x]$ 中的任意一个整数，求 $m$ 次操作后，整数

$x=k$，其中 $k\in[0,n]$ 的概率

$n\le 10^5, m\le 10^{18}$

简要题解：我们令 $f_{k,i}$ 表示进行了 $k$ 次随机之后为 $i$ 的概率，容易得到 $f_{k,i}=\sum_{j=i}^n \frac{f_{k-1,j}}{j+1}$，发现这个东西是一个线性变换，尝试用生成函数搞一下，我们将其写成生成成函数的形式，得到 $F_k(x)=\sum_{i=0}^n f_{k,i}x^i$，然后尝试化简一下

$$\begin{aligned}
F_k(x)&=\sum_{i=0}^n f_{k,i}x^i\\
&=\sum_{i=0}^n x^i\sum_{j=i}^n\frac{f_{k-1,j}}{j+1}\\
&=\sum_{j=0}^n\frac{f_{k-1,j}}{j+1}\sum_{i=0}^j x^i\\
&=\sum_{j=0}^n\frac{f_{k-1,j}}{j+1}\frac{x^{j+1}-1}{x-1}\\
&=\frac{1}{x-1}\sum_{j=0}^n f_{k-1,j}\frac{x^{j+1}-1}{j+1}\\
&=\frac{1}{x-1}\sum_{i=0}^n f_{k-1,i}\int_1^x t^i\mathrm{dt}\\
&=\frac{1}{x-1}\int_1^x(\sum_{i=0} f_{k-1,i}t^i)\mathrm{dt}\\
&=\frac{1}{x-1}\int_1^x F_{k-1}(t)\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

现在似乎有点眉目了，但是这个 $\frac{1}{x-1}$ 和这个从 1 积到 $x$ 的积分不是很好应对，我们令 $G_k(x)=F_k(x+1)$，然后在带进这个式子里去，

$G_k(x)=\frac{1}{x}\int_1^{x+1}F_{k-1}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{x}}\int_0^{\mathrm{x}}\mathrm{F_{k-1}(t+1)dt}$，我们注意到 $G_{k-1}(x)=F_{k-1}(x+1)$，那么我们就能得到 $G_k(x)=\frac{1}{x}\int_0^x G_{k-1}(x)\mathrm{d}t=\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}}\frac{1}{\mathrm{i+1}}\mathrm{g_{k-1,i}x^i}$，也就是说 $g_{k,i}=\frac{1}{(i+1)^k}g_{0,i}$，然后我们只需要求一下 $F_0(x)$ 到 $G_0(x)$ 的转换和 $G_m(x)$ 到 $F_m(x)$ 的转换，推一下能发现都是一个差卷积的形式，时间复杂度 $O(n\log n)$

VK Cup 2018 - Round 1 E Perpetual Subtraction

4. 简要题意：现在有 $n$ 种物品，每种物品都有无限多个，第 $i$ 个物品的体积为 $v_i$，求恰好装满 $k,k\in[1,m]$ 的背包的方案数

   $n,m\le 10^5$

   简要题解：容易得到生成函数 $F(x)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{1-x^{v_i}}$，我们尝试用 $\exp$ 和 $\ln$ 来操作一下，$F(x)=exp(\ln F(x))=exp(\sum_{i=1}^n\ln\frac{1}{1-x^{v_i}})$，我们知道 $\ln(\frac{1}{1-x})=\sum_{i\ge1}\frac{x^i}{i}$，那么 $\sum_{i=1}^n\ln\frac{1}{1-x^{v_i}}$，我们是可以在 $O(n\log n)$ 的时间内完成预处理的，这样再做一个 $exp$ 就结束了，时间复杂度 $O(n\log n)$

   Luogu P4389 付公主的背包

5. 简要题意：令 $f_n$ 为斐波那契数第 $n$ 项，求 $\sum\prod_{i=1}^m f_{a_i}$，$m>0,a_1,a_2,\cdots,a_m>0,\sum_{i=1}^m a_i=n$

   $n\le 10^{100000}$

   简要题解：令 $F(x)$ 为斐波那契数的生成函数，那么容易得到答案的生成函数就是 $\sum_{i=0}^{\infty}F(x)^i-[n=0]=\frac{1}{1-F(x)}-[n=0]$

   我们考虑 $G(x)=\frac{1}{1-F(x)}$ 这个生成函数，我们知道 $F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$，那么 $G(x)=\frac{1-x-x^2}{1-2x-x^2}$，我们尝试求出它的递推式

   我们知道分母的递推式就是 $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$，我们将这个递推式乘上 $1-x-x^2$，那么变成 $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=a_{n-1}\to a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$，解特征方程能得到 $x_1=1-\sqrt{2},x_2=1+\sqrt{2}$，我们知道 $a_0=0,a_1=1$，能够得到 $a_n=\frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$

我们知道 2 在 $1e9+7$ 下有二次剩余 59713600，那么我们直接做快速幂即可，注意指数要对 $\varphi(1e9+7)$ 取模

Luogu P4451 [国家集训队]整数的lqp拆分

6. 简要题意：给定一个含有 $n$ 个相异正整数的序列 $c_i$，现在要求用这些数构造一个带点权的有根无标号二叉树（形态不同，二叉树不同），一棵二叉树的权值为所有点的权值的和，现在给定 $m$，求权值为 $m$ 的二叉树的个数

   $n,m \le 10^5$

   简要题解：我们考虑 $dp$，令 $f_k$ 表示权值为 $k$ 的二叉树的个数，$f_k=\sum_{c\in S}\sum_{i=0}^{k-c} f_i f_{k-c-i}$，其中 $f_0=1$，那么容易得到生成函数为 $F(x)=C(x)F(x)^2+1$，解得 $F(x)=\frac{1-\sqrt{1-4C(x)}}{2C(x)}$，我们上下同乘 $1+\sqrt{1-4C(x)}$，得到 $\frac{2}{1+\sqrt{1-4C(x)}}$，那么现在我们只需要多项式开根和多项式求逆即可，时间复杂度 $O(n\log n)$

CF 438E The Child and Binary Tree

7. 简要题意：现在有 $n$ 个骨牌，每个骨牌有左右两边，每边只能是黑色和白色且不能交换，现在给定 $n$ 个骨牌，有些骨牌的的某一些边已经固定了颜色，剩下的位置需要你来染色，现在一种合法的染色方案为将 $n$ 个骨牌染好色之后，存在一个圆排列满足，任亮两个相邻骨牌的相邻的两个边的颜色不同，即第 $i$ 个骨牌的右边和第 $i+1$ 个骨牌的左边的颜色不同，求有多少种染色方案

   $n \le 10^5$

   简要题解：容易得到一个合法方案一定有 $00$ 和 $11$ 的数量相同，但如果 $00$ 和 $11$ 都只出现一次，会有一些不合法方案，这个单独处理即可，所以接下来的讨论我们不考虑这种情况

   我们令 $a$ 表示 $00$ 的个数，$b$ 表示 $11$ 的个数，$c$ 表示 $0?$ 加上 $?0$ 个数，$d$ 表示 $1?$ 加上 $?1$ 的个数，$e$ 表示 $??$ 个数

   令 $f_i$ 表示 $00$ 的个数减掉 $11$ 的个数为 $i$ 的染色方案数

   容易得到一个 $c$ 会让 $f_i'=f_i+f_{i-1}$，一个 $d$ 会让 $f_i'=f_i+f_{i+1}$，一个 $e$ 会让 $f_i'=f_{i-1}+2f_i+f_{i+1}$，这个东西是线性变换，我们考虑多项式，第一个相当于乘上

$f_i' = f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1}$，这个东西是线性变换，我们考虑多项式，第一个相当于乘上 $(1+x)^c$，第二个相当于乘上 $(1+\frac{1}{x})^d$，第三个相当于乘上 $(2+x+\frac{1}{x})$，除了第三个，前面两个的式子我们都可以手推出来，第三个我们只能做多项式快速幂了

时间复杂度为 $O(n\log n)$，但常数巨大

CF 1608D Dominoes(多项式)

8. 简要题意：求 $n$ 个点的无标号无根树数量，答案对 $998244353$ 取模

   $n \le 2 \times 10^5$

   简要题解：首先我们考虑无标号有根树计数，令 $F(x)$ 为无标号有根树的生成函数

   我们枚举根节点，容易得到 $F(x) = x \times Euler(F(x)) = x \times exp(\sum_{n=1} \frac{F(x^n)}{n})$

   我们考虑求 $F(x)$，容易想到使用牛顿迭代，我们令 $H(F_k(x)) = F_k(x) - x \times exp(\sum_{n=1} \frac{F_k(x^n)}{n}) \equiv 0 (\bmod x^{2^k})$，注意到 $exp$ 里的求和 有一个 $F_k(x^n)$，因为 $F_k(x)$ 的前 $2^{k-1}$ 项一定与 $F_{k-1}(x)$ 相同，所以当 $n \ge 2$ 时，$\frac{F_k(x^n)}{n}$ 只与 $F_{k-1}(x)$ 有关，换句话说这个东西是常数，那么我们现在能够得到 $H(F_k(x)) = F_k(x) - x \times exp(\sum_{n=2} \frac{F_k(x^n)}{n}) \times expF_k(x), H'(F_k(x)) = 1 - x \times$ ，根据牛顿迭代的公式，我们能够得到 $F_k(x) = F_{k-1}(x) - \frac{F_k(x) - x \times exp(\sum_{n=2} \frac{F_k(x^n)}{n}) \times expF_k(x)}{1 - x \times exp(\sum_{n=2} \frac{F_k(x^n)}{n}) \times expF_k(x)}$

   时间复杂度为 $O(n\log n)$，常数较大

   然后我们考虑无标号无根树计数，相对于无标号有根树计数，我们只需要在根为重心的时候统计一次即可，如果 $n$ 是奇数，那么树的重心有且仅有一个，我们枚举根的一个大于 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 的子树的大小即可，不合法的答案为 $\sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n-1} f_i f_{n-i}$，如果 $n$ 是偶数，那么有可能存在有两个重心的情况，如果将两个重心中间的边断开，形成两棵树，这两棵树如果完全相同，则这些方案我们只会统计一次，不会算重，否则我们恰好算了两次，那么我们把多算的减掉即可，即减掉 $\binom{f_{\frac{n}{2}}}{2}$ 次

   Luogu P5900 无标号无根树计数

9. 简要题意：假设现在有一个集合 $S$，$S$ 中只含若干个 $[1,n]$ 的正整数，我们令 $f(k)$ 为把

$k$ 表示成 $S$ 中的元素的和的方案数，每个数都能用无限次，每种方案都是无序的，现在给定 $f(1)$ 到 $f(n)$ 这 $n$ 个模 $p$ 的值，求构造一个字典序最小的集合 $S$，保证 $p$ 是素数，但不一定是 $998244353$

$n \leq 2^{18}$

简要题解：我们不妨令 $f(x)$ 的生成函数为 $F(x)$，根据一些经典结论容易得到 $F(x)=\prod_{a_i\in S}\frac{1}{1-x^{a_i}}=\exp(\sum_{a_i\in S}\ln\frac{1}{1-x^{a_i}})=\exp(\sum_{a_i\in S}\sum_{n=1}\frac{x^{na_i}}{n})$

两边取一下 $\ln$，能够得到 $\ln F(x)=\sum_{a_i\in S}\sum_{n=1}\frac{x^{na_i}}{n}$，我们令 $G(x)$ 表示 $S$ 的生成函数，含义为如果 $S$ 有 $a_i$ 这个元素，那么 $x^{a_i}$ 的系数为 $1$，否则为 $0$，那么能够得到 $f(k)=\frac{1}{k}\sum_{d|k}\frac{d}{k}g(d)$，容易发现这是一个莫比乌斯反演的形式，那么答案一定是唯一的

唯一的难点在于任意模数多项式求逆，用三模NTT写确实慢，时间复杂度 $O(n\log n)$

P3784 [SDOI2017] 遗忘的集合

10. 简要题意：现在有两个序列 $a$ 和 $b$，长度分别为 $n$ 和 $m$，现在随机从 $a$ 中选一个数 $x$，然后再随机从 $b$ 中选一个数
$y$，求对于 $k\in[1,t]$，$(x+y)^k$ 的期望是多少，答案对 $998244353$ 取模

$a,b,t\leq 10^5$

简要题解：我们将 $(x+y)^k$ 拆开，然后得到 $ans_k=\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a_x^i b_y^{k-i}$，稍微交换一下求和顺序，$ans_k=\sum_{i=0}^{n}\binom{k}{i}(\sum_{i=1}^{n}a_x^i)(\sum_{j=1}^{m}b_y^{k-i})$，我们令 $A_k$ 表示 $\sum_{i=1}^{n}a_i^k$，如果我们能预处理 $A_0$ 到 $A_1$，那么 $ans$ 我们可以直接卷积

我们现在考虑如何求 $A_k$，我们令 $A_k$ 的生成函数为 $F(x)$，容易得到 $F(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-a_ix}$，发现对于分数的求和并没有什么特别好的做法，一个比较简单的做法是类似于分治+NTT的做法，我们直接维护分子和分母这两个多项式，然后左右两边乘的时候暴力通分即可

我们接下来考虑一个比较神奇的做法，我们考虑将这个 $\sum$ 变成 $\prod$，实现这个的最好做法是 $\ln$，但原始并没有 $\ln$，所以我们造一个 $\ln$，我们知道 $\ln'(1-a_ix)=\frac{-a_i}{1-a_ix}$，我们令 $G(x)=\sum_{i=1}^{n}\ln'(1-a_ix)$，那么我们有 $F(x)=-xG(x)+n$

而 $G(x)=\sum_{i=1}^{n}\ln'(1-a_ix)=\ln'(\prod_{i=1}^{n}1-a_ix)$，这个直接分治+NTT加多项式 $\ln$ 即可

时间复杂度 $O(n\log^2 n)$

Luogu P4705 玩游戏

11. 简要题意：给定一个长度为 $n$ 的序列 $a_i$，现在需要计算对于所有满足条件的序列 $b_i$ $\prod_{i=1}^{n}\binom{b_i}{a_i}$ 的累加和，序列 $b_i$ 满足的条件为序列 $b$ 只包含自然数且长度为 $n$，序列 $b_i$ 中所有数的和小于等于 $m$

    $n\le 5000,a_i\le 2000,m\le 10^9$

    简要题解：考虑生成函数，我们令 $F_k(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i}{a_k}x^k$，容易得到答案就是 $\sum_{k=0}^{m}[x^k]\prod_{i=1}^{n}F_i(x)$，注意到 $F_i(x)$ 的形式还可以继续化简，根据 $\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+k-1}{k-1}x^i$，我们可以得到 $F_k(x)=\frac{x^{a_k}}{(1-x)^{a_k+1}}$

    那么 $ans=\sum_{k=0}^{m}[x^k]\frac{x^{\sum_{i=1}^{n}a_i}}{(1-x)^{n+\sum_{i=1}^{n}a_i}}$，我们令 $t=\sum_{i=1}^{n}a_i$，那么 $ans=\binom{m+n}{n+t}$

    文远知行杯广东工业大学第十六届程序设计竞赛 J 一道计数题

12. 简要题意：给定 $m$ 个字符串 $S_i$，字符集为 $[1,n]$，现在要求对于每个字符串 $S_i$ 进行如下操作：从空串 $T$ 开始，每次随机生成一个 $[1,n]$ 内的整数，添加到 $T$ 的末尾，直到 $S$ 作为 $T$ 的子串出现过，求 $T$ 的期望长度

    $|S_i|,n\le 10^5,m\le 50$

    简要题解：我们令 $f_i$ 表示 $T$ 的长度为 $i$ 的概率，$g_i$ 表示 $T$ 的长度大于 $i$ 的概率，分别令 $F(x)$ 和 $G(x)$ 为 $f_i$ 和 $g_i$ 的生成函数

    容易得到 $F(x)+G(x)=1+xG(x)$ 这个等式，可以理解其为没有停止时，我们再加入一个字符，有停止和继续两种情况，加一是处理边界情况

    同时，我们可以得到另一个等式 $G(x)(\frac{1}{n}x)^m=F(x)\sum_{i=1}^{n}a_i(\frac{1}{n}x)^{m-i}$，这里我们令 $m$ 表示字符串 $S$ 的长度 $a_i$ 表示 $S[1..i]$ 是否为 $S$ 的 $border$，这个等式可能理解起来有

一点难度，我们可以理解其为没有停止的串加入 $S$ 之后一定会停止，但注意到可能会在完整添加 $S$ 之前停止，这种情况只有在 $S[1..i]$ 是 $S$ 的 $border$ 的情况下，我们添加了 $S[1..i]$ 就已经停止了

我们考虑利用这两个式子来得到我们所需要的答案，即 $F'(1)$

我们对第一个式子求导并带入 $x=1$，可以得到 $F'(1)=G(1)$，在第二个式子里带入 $x=1$ 并化简可以得到 $G(1)=\sum_{i=1}^{m} a_i n^i$，时间复杂度 $O(n)$

Luogu P4548 [CTSC2006]歌唱王国

13. 简要题意：给定 $n$，求 $n$ 个点有标号简单无向连通图的数量

 $n \le 1.3\times 10^5$

 简要题解：我们令 $g_n$ 表示 $n$ 个点的简单无向图的数量，$f_n$ 表示 $n$ 个点简单无向连通图的数量，则 $g_n=2^{\binom{n}{2}}$，我们枚举 $1$ 号点所在的位置，可以得到 $g_n=\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}f_i g_{n-i}$

 ，这个式子把 $f_n$ 提到左边就可以直接分治 $NTT$，时间复杂度 $O(n\log^2 n)$，我们考虑继续化简

$$g_n=\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}f_i g_{n-i}$$
$$\frac{g_n}{(n-1)!}=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{(i-1)!}\frac{g_{n-i}}{(n-i)!}$$

 我们令 $H(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{g_i}{(i-1)!},F(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{(i-1)!},G(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{g_i}{i!}$，那么 $F(x)=H(x)G^{-1}(x)$，我们只需要一个多形式求逆，时间复杂度 $O(n\log n)$

 另外我们考虑生成函数，我们令 $F(x)$ 表示简单无向连通图的指数生成函数，$G(x)$ 表示简单无向图的指数生成函数，根据指数公式定理，我们可以得到 $e^{F(x)}=G(x)$，那么 $F(x)=\ln G(x)$

 Luogu P4841 [集训队作业2013]城市规划

14. 简要题意：现在有一个 $n$ 个点的无向图，每条边存在的概率都为 $p$，求图的连通块的期望个数

$n \le 5 \times 10^5$

简要题解：我们令 $f_n$ 表示 $n$ 个点联通的概率，$g_n$ 表示 $n$ 个点不连通的概率，那么我们知道最后的答案就是 $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}f_i(1-p)^{i(n-i)}$，我们首先考虑如何求 $f_n$

对于一个不连通的图，我们枚举 1 号点所在连通块的大小，可以得到 $g_n=\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}f_i(1-p)^{i(n-i)}$，我们知道 $g_n=1-f_n$，那么这个东西很像是一个分治 $NTT$ 的式子，但 $(1-p)^{i(n-i)}$ 无法拆开，我们考虑其组合意义，容易得到 $i(n-i)=\binom{n}{2}-\binom{i}{2}-\binom{n-i}{2}$，那么就可以拆成 $\frac{(1-p)^{\binom{n}{2}}}{(1-p)^{\binom{i}{2}}(1-p)^{\binom{n-i}{2}}}$，这样我们就可以做分治 $NTT$ 了，时间复杂度 $O(n\log^2 n)$，我们考虑继续化简

$$g_n=\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}f_i(1-p)^{i(n-i)}$$
$$\frac{1-f_n}{(n-1)!(1-p)^{\binom{n}{2}}}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{f_i}{(i-1)!(1-p)^{\binom{i}{2}}}\frac{1}{(n-i)!(1-p)^{\binom{n-i}{2}}}$$

我们令 $F(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{(i-1)!(1-p)^{\binom{i}{2}}}x^i,G(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i-1)!(1-p)^{\binom{i}{2}}}x^i,H(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(1-p)}$，则可以得到 $\frac{G(x)}{H(x)+1}=F(x)$，需要注意 $H(x)=0$，那么这个式子可以用多项式求逆解决，时间复杂度 $O(n\log n)$

我们考虑指数公式定理，令 $g_n$ 表示 $n$ 个点无向图的概率，$f_n$ 表示 $n$ 个点联通的概率，显然有 $g_n=1$，同时我们令 $G(x)$ 和 $F(x)$ 分别为 $g_n$ 和 $f_n$ 的 $EGF$，那么我们应该有 $exp(F(x))=G(x)$，但实际上这并不成立，因为 $f_n$ 和 $f_m$ 合并贡献到 $g_{n+m}$ 时还需要乘上 $(1-p)^{nm}$ 这个系数，所以我们需要把 $\frac{1}{(1-p)^{\binom{n}{2}}}$ 的系数乘到 $f_n$ 和 $g_n$ 上，所以 $G(x)$ 和 $F(x)$ 应该为 $\frac{f_n}{(1-p)^{\binom{n}{2}}}$ 和 $\frac{g_n}{(1-p)^{\binom{n}{2}}}$ 的 $EGF$，那么我们只需要做一个 $\ln$ 即可，时间复杂度 $O(n\log n)$

2022杭电多校7 Connectivity of Erdős-Rényi Graph

15. 简要题意：给定 $n,m$，求有多少长度为 $m$ 的序列 $a_i$，满足 $a_i\in[1,n]$，且不存在一个长度为 $n$ 的子区间且这个子区间是一个 1 到 $n$ 的排列

$n, m \le 2 \times 10^5$

简要题解：我们考虑计算出现 $[1, n]$ 的排列的方案数，对于每个出现过 $[1, n]$ 的序列 $a_i$，我们在 $[1, n]$ 第一次出现的位置来统计贡献，我们令 $f_k$ 表示区间 $[1, k-1]$ 没有出现 $[1, n]$ 的排列，且 $[k, k+n-1]$ 是一个 $[1, n]$ 的排列的方案数，容易得到 $f_k = n^{k-1}n! - \sum_{i=1}^{i+n-1<k} f_i n^{k-i-n} n! - \sum_{i+n-1 \ge k}^{k-1} f_i (k-i)!$，容易发现这个东西是符合分治 $NTT$ 的形式的，直接计算即可，时间复杂度 $O(n \log^2 n)$，另外这个式子也可以化简成求逆的式子

2022杭电多校8 M Shattrath City

16. 简要题意：求 $n$ 个点有标号有向无环图的个数，需要保证该有向图弱连通

    $n \le 10^5$

    简要题解：我们首先不考虑弱连通，令 $g_n$ 表示 $n$ 个点有标号有向无环图的个数，我们钦定入度为 $0$ 的点的个数为 $i$，那么我们有 $g_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} g_{n-i} 2^{i(n-i)}$，其中

    $(-1)^{i+1}$ 是容斥系数，因为我们是钦定了 $i$ 个点的入度为 $0$，$g_{n-i}$ 中也有入度为 $0$ 的点，这里显然是一个二项式反演

    有了这个式子之后我们可以直接分治 $NTT$，或者再推一下可以得到 $\frac{g_n}{2^{\binom{n}{2}} n!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{\binom{i}{2}} i!} \frac{g_{n-i}}{2^{\binom{n-i}{2}} (n-i)!}$，这显然是一个求逆的式子，我们令 $G(x)$ 表示不要求弱连通的 $EGF$，$F(x)$ 表示需要弱连通的$EGF$，我们显然有 $e^{F(x)} = G(x)$，那么只需要一个多项式 $ln$，时间复杂度 $O(n \log n)$

    Luogu P6295 有标号 DAG 计数

17. 简要题意：给定 $n$ 和 $q$，现在有 $q$ 次询问，每次询问给定 $x$ 求 $\sum_{i=1}^{n} \binom{3i}{x}$

    $n \le 10^6, q \le 2 \times 10^5, x \le 3n$

    简要题解：考虑生成函数知识，我们知道 $\binom{n}{i}=x^i^n，那么关于x的生成函数为F(x)=\sum_{i=1}^n(1+x)^{3i}，简单化简我们可以得到\frac{(1+x)^{3n+3}-(1+x)^3}{(1+x)^3-1}

    ，这个东西上面可以直接用组合数计算，下面这个除法我们暴力做多项式除法即可，时间复

O(n)$

CF 1548C The Three Little Pigs

18. 简要题意：给定一个 $n$ 个点的带权完全无向图，给定 $k$，求所有生成树的权值的 $k$ 次方之和

    $n,k\le 30$

    简要题解：我们知道 $(\sum_{i=1}^{n-1}w_i)^k=\sum_{i\in[1,n-1],a_i\ge 0,\sum_{a_i}=k}\binom{k}{a_1,\cdots,a_k}\prod_{i=1}^{n-1}w_i^{a_i}$，这是一个多项式卷积的形式，我们考虑将其看做生成函数，相当于 $ans=k![x^k]\prod_{i=1}^{n-1}e^{w_ix}$

    我们把每条边看做一个 $k$ 次的多项式，然后做矩阵树定理即可，因为 $k$ 很小，所以求逆和乘法直接 $O(k^2)$ 暴力即可

    时间复杂度 $O(n^3k^2)$

    Luogu P5296 [北京省选集训2019]生成树计数

19. 简要题意：给定 $n$ 和 $k$，定义一个合法序列为 $a_i\in[1,k],i\in[1,n]$，一个序列的值为 $\prod_{i=1}^n a_i$，求对于 $m\in[1,n]$，所有长度为 $m$ 的序列的价值和

    $n\le 5\times 10^5$

    简要题解：看到价值和计算是先乘后加，容易想到多项式，通过简单思考可以得到生成函数为 $\prod_{i=1}^k(1+ix)$，我们知道 $ln(1+kx)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}k^i}{i}x^i$，我们那么我们考虑将原式 $\ln$ 起来再做 $\exp$，下面我们化简一下 $\ln$ 之后的式子

$$
\begin{aligned}
\ln(\prod_{i=1}^{k}(1+ix)) &= \sum_{i=1}^{k}\ln(1+ix)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{k}j^i}{i}x^i
\end{aligned}
$$

    注意到复杂度瓶颈在于计算自然数幂和，即对于 $i\in[1,n]$，求 $F_i(k)$

    我们知道固定 $k$，对于单个 $i$，$F_i(k)$ 可以用第二类斯特林数或者插值一类的做法来做，对于 $i\in[1,n]$，我们考虑从多项式的角度入手，我们写出这东西的 $EGF$，然后考虑化简

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} j^i \frac{x^i}{i!} &= \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{n} \frac{(jx)^i}{i!} \\
&= \sum_{j=0}^{k} e^{jx} \\
&= \frac{e^{(k+1)x-1}}{e^x-1}
\end{aligned}
$$

这个东西的分母常数项为 0，看起来不能直接求逆，但同时分子的常数项也为 0，所以可以同除 $x$ 之后求逆

Luogu P5850 calc加强版

20. 简要题意：给定一个多重集 $S$，满足 $S$ 中的元素都在 $[0,n]$，且 $|S|=n$，求由 $S$ 组成的长度为 $n$ 的序列的价值和，一个序列的价值定义为它的所有区间的 $mex$ 的和

$n \le 10^5$

简要题解：令 $a_i$ 表示 $S$ 中 $i$ 的出现次数，我们首先考虑枚举区间的组成 $b_i$，满足 $\forall i \in [0,n], 0 \le b_i \le a_i$，对于 $mex$ 为 $k$ 的答案，我们考虑枚举 $i \in [0,k-1]$，在 $[0,i]$ 都出现至少一次的时候记一次答案，这样正好记 $k$ 次答案，形式化的写，答案即为

$$
\sum_{k\ge 0}\sum_{\forall i,[i\le k]\le b_i\le a_i} \binom{\sum_{i=0}^{n} b_i}{b_0,\cdots,b_n}\binom{n-\sum_{i=0}^{n} b_i}{a_0-b_0,\cdots,a_n-b_n}(n-\sum_{i=0}^{n} b_i+1)
$$

考虑枚举 $\sum_{i=0}^{n} b_i$ 统计答案，考虑生成函数 $f_k(x)=\sum_{i=0}^{a_k}\frac{x^i}{(a_k-i)!i!}$，令 $g_k(x)=f_k(x)-\frac{1}{a_k!}$ 表示至少是 1，那么答案为

$$
\sum_{s\ge 0} s!(n-s+1)![x^s]\sum_{k=0}^{n} g_0\cdots g_k f_{k+1}\cdots f_n
$$

我们考虑分治计算，维护区间 $f$ 的乘积、区间 $g$ 的乘积以及 $\sum_{i=l}^{r} g_l\cdots g_i f_{i+1}\cdots f_r$ 即可，时间复杂度 $O(n\log^2 n)$

2022牛客多校11 L Indjy and the mex

21. 简要题意：给定一棵大小为 $n$ 的有根树，求对于所有 $k\in[1,n]$，有多少大小为 $k$ 的集

合，满足集合内不存在任意两点使得一个点是另一个点的祖先

$n \le 2 \times 10^5$

简要题解：我们令 $f_u(x)$ 表示以 $u$ 为根的子树的生成函数，容易得到 $f_u(x) = 1 + x + \prod_v f_v(x)$，但是我们如果直接这样乘，复杂度显然是 $O(n^2 \log n)$，我们参考 $dsu$ 的优化方法，首先将整棵树轻重链剖分

我们令 $g_u(x)$ 表示 $\prod_{v \ne son_u} f_v(x)$，其中 $son_u$ 表示 $u$ 的重儿子，然后对于每条重链我们在链首单独求解，注意多个多项式乘的时候必须分治来乘，这样的时间复杂度为 $O(n \log^3 n)$，但实际运行时可以接收的

对于重链，我们不妨令其长度为 $k$，从链首到链尾的节点构成的序列为 $a_i$，那么我们有 $f_{a_1}(x) = \prod_{i=1}^{k} g_{a_i}(x) + \sum_{i=1}^{k} x \prod_{j=1}^{i-1} g_{a_j}(x)$，前面那个 $\prod$ 表示不选重链上的点，后面的 $\sum$ 枚举的选择重链上的哪个点，重链的计算也可以分治来求

ABC 269Ex Antichain

22. 简要题意：给定一个 $n$ 个点有点权的无根树，求所有大小为 $m$ 的点集的贡献和，要求点集内不存在任何两点相邻，一个点集的贡献是点集内所有点的点权积

$n \le 8 \times 10^4$

简要题解：我们令 $f_u(x)$ 表示选择 $u$ 的生成函数，$g_u(x)$ 表示不选 $u$ 的生成函数，容易得到转移 $f_u(x) = w_u x \prod_v g_v(x)$，$g_u(x) = \prod_v (f_v(x) + g_v(x))$

我们考虑轻重链剖分，轻儿子暴力合并，重链在链首合并，令 $G_u(x) = \prod_{v \ne son_u} g_v(x), F_u(x) = \prod_{v \ne son_u} (f_v(x) + g_v(x))$，其中 $son_u$ 表示 $u$ 的重儿子，为了方便表示对于重链，我们不妨令其长度为 $k$，从链首到链尾的节点构成的序列为 $a_i$，那么我们有 $f_{a_i}(x) = w_u x g_{a_{i+1}}(x) G_{a_i}(x), g_{a_i}(x) = F_{a_i}(x)(f_{a_{i+1}}(x) + g_{a_{i+1}}(x))$，我们可以把转移写成矩阵的形式，然后分治计算即可，时间复杂度 $O(n \log^3 n)$

loj 6289 花朵

------------- 本文结束 感谢阅读 -------------

# Tech # 生成函数

CF 955C Sad powers

2021牛客多校4 B Sample Game