矩阵树定理

2022-04-30 | 2022-10-05 | OI & ACM | 31
3.9k | 4 分钟

简介

大概就是用来求 $\sum_{T\in Tree}\prod_{e\in T} w_e$ 的值

需要注意矩阵树定理是默认不存在自环的，但实际是否存在自环不会影响基尔霍夫矩阵的构造

构造

基尔霍夫矩阵：

无向图

$$L_{i,j}=\begin{cases}-\sum_{(i,j,w)\in E} w, & i\neq j\\ \sum_k\sum_{(i,k,w)\in E} w, & i=j\end{cases}\tag{1}$$

有向图，对于外向树和内向树 $i\neq j$ 时都相同，$i=j$ 时，内向树我们只考虑 i 连出去的边（出度），反之外向树我们只考虑连向 i 的边（入度），下面以外向树为例

$$L_{i,j}=\begin{cases}-\sum_{(i,j,w)\in E} w, & i\neq j\\ \sum_k\sum_{(k,i,w)\in E} w, & i=j\end{cases}\tag{1}$$

我们删掉第 k 行第 k 列后求矩阵行列式得到的即为以 k 为根的 $\sum_{T\in Tree}\prod_{e\in T} w_e$，虽然无向图中这并没有区别

技巧

求 $\sum_{T\in Tree}\sum_{e\in T} w_e$

我们把每条边的贡献写成 $w_e x + 1$，将其看成多项式，最后答案就是行列式的一次项的系数，所以乘法变成了模 x^2 的多项式乘法

```cpp
struct node {
    int x, y;

    node (int x = 0, int y = 0) : x(x), y(y) {}

    friend node operator + (const node &u, const node &v) {
        return node(add(u.x, v.x), add(u.y, v.y));
    }
    friend node operator - (const node &u, const node &v) {
        return node(add(u.x, p - v.x), add(u.y, p - v.y));
    }
    friend node operator * (const node &u, const node &v) {
        return node(add(mul(u.x, v.y), mul(u.y, v.x)), mul(u.y, v.y));
    }
    friend node operator / (const node &u, const node &v) {
        ll inv = pow_mod(v.y, p - 2);
        return node(add(mul(u.x, v.y), p - mul(u.y, v.x)) * inv % p * inv % p,
                    mul(u.y, inv));
    }
};

node g[maxn][maxn];
int Gauss(int n) {
    node res(0, 1);
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        int pos = -1;
        for (int j = i; j <= n; ++j) if (g[j][i].y) pos = j;
        if (pos == -1) return 0; swap(g[i], g[pos]);
        if (pos != i) res = res * node(0, p - 1);
        res = res * g[i][i]; node inv = node(0, 1) / g[i][i];
        for (int j = i + 1; j <= n; ++j) {
            node div = g[j][i] * inv;
            for (int k = n; k >= i; --k) g[j][k] = g[j][k] - div * g[i][k];
        }
    } return res.x;
}
```

例题

1. 简要题意：给定一个完全图，每条边的权值表示这条边存在的概率，求存在的边恰好构成一棵生成树的概率

   $n \le 50$

   简要题解：首先容易得到答案为 $\sum_{T\in Tree}(\prod_{w\in T} p_e \prod_{w\notin T}(1-p_e)) = \prod 1-p_e \sum_{T\in Tree} \sum_{e\in T} \frac{p_e}{1-p_e}$

   后面那个东西用矩阵树定理来求就行了，需要注意如果 $|1-p_e| < \epsilon$，为了精度，我们需要将 p_e 减掉 ϵ

   Luogu P3317 [SDOI2014]重建

2. 简要题意：现在有 n 个城市，有 $n-1$ 个公司来修路，每个公司可以修某些路，现在要求恰好修 $n-1$ 条路使这 n 个城市连通并且每个公司恰好其中一条路的方案数

   $n \le 17$

   简要题解：我们考虑枚举这次负责修路的公司 S，然后用矩阵树定理算出总的方案数 f_S，令 g_S 表示 S 中的每个公司都至少修了一条路的方案数，容易得到 $f_S = \sum_{T\subseteq S} g_T$，根据子集反演，可以得到 $g_S = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}$

   因为恰好有 $n-1$ 个公司，所以答案就是 g_U，U 表示这 $n-1$ 个公司的集合，时间复杂度 $O(2^n n^3)$

   Luogu P4336 [SHOI2016]黑暗前的幻想乡

3. 简要题意：给定一个 n 个点 m 条边的无向图，定义一个生成树 T 的价值为 $\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i} \times (w_{e_1}, w_{e_2}, \cdots, w_{e_{n-1}})$，求所有生成树的价值之和

   $n \le 30, m \le \frac{n(n-1)}{2} w_i \le 152501$

   简要题解：首先考虑将 gcd 拆掉，然后对式子进行化简

$$
\begin{aligned}
ans &= \sum_{T\in Tree}\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i}\times(w_{e_1},w_{e_2},\cdots,w_{e_{n-1}}) \\
&= \sum_{T\in Tree}\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i}\sum_{d|(w_{e_1},w_{e_2},\cdots,w_{e_{n-1}})}\varphi(d) \\
&= \sum_{d}\varphi(d)\sum_{T\in Tree}\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i}[d|w_{e_i}]
\end{aligned}
$$

矩阵树定理将 $\prod$ 转换成 $\sum$ 是经典 $trick$，但现在的问题是如果枚举 d，那么时间复杂度 $O(n^3 w_i)$，无法通过此题

这个时候我们考虑只有枚举 d 之后边数大于等于 $n-1$ 才跑矩阵树定理，那么这样的时间复杂度为 $O(\frac{\sum_i \tau(i)}{n-1}n^3)$，但是注意到边只有 n^2 个，所以实际上的复杂度应该为 $O(\frac{n^2\times 144}{n-1}n^3)$，$144$ 是一条边的约数最大值，而且实际上也跑不满

Luogu P6624 [省选联考 2020 A 卷] 作业题

4. 简要题意：给定一个 n 个点无向树，求对于 $k\in[1,n-1]$，有多少棵这 n 个点的完全无向图的生成树与这棵树有恰好 k 条边重复

   $n\le 100$

   简要题解：我们考虑令树边的权值为 x，非树边的权值为 1，那么对这张图用矩阵树定理求求出的 $n-1$ 次多项式的系数就是我们要的答案，但我们显然不能直接暴力拿多项式来做矩阵树定理，我们考虑带 n 个值进去，然后再用拉格朗日插值插出我们要的多项式即可，时间复杂度 $O(n^4)$

   CF 917D Stranger Trees

5. 简要题意：给定一个 n 个点的带权完全无向图，给定 k，求所有生成树的权值的 k 次方之和

   $n,k\le 30$

   简要题解：我们知道 $(\sum_{i=1}^{n-1} w_i)^k=\sum_{i\in[1,n-1],a_i\ge 0,\sum a_i=k}\binom{k}{a_1,\cdots,a_k}\prod_{i=1}^{n-1} w_i^{a_i}$，这是一个多项式卷积的形式，我们考虑将其看做生成函数，相当于 $ans=k![x^k]\prod_{i=1}^{n-1} e^{w_i x}$

我们把每条边看做一个 k 次的多项式，然后做矩阵树定理即可，因为 k 很小，所以求逆和乘法直接 $O(k^2)$ 暴力即可

时间复杂度 $O(n^3k^2)$

Luogu P5296 [北京省选集训2019]生成树计数

6. 简要题意：给定一个 n 个点 m 条边的有向图，求以每个点为根的外向树的个数

   $n \leq 500$

   简要题解：我们令 A 表示该图的基尔霍夫矩阵，不妨设 $r(A)=n-1$，如果 $r(A) \neq n-1$，那么答案肯定都是 0

   为 $n-1$ 的 n 阶方阵 A 的伴随矩阵 $A^的秩为1，因为A的秩为n-1，所以一定存在不全为0的实数x_1,\cdots,x_n使得\sum_{i=1}^nx_ia_i=0，其中a_i表示A的第i行的行向量，同理可以得出关于列向量的y_i，可以证明A^的第i行和第j行的比例为\frac{x_i}{x_j}，列同理，那么有A_{a,b}=A_{i,j}\frac{x_ay_b}{x_iy_j}$

   对于一组 x,y，我们只需要高消一下即可，然后找一个不为 0 的 x_i 和 y_j 然后求出 $A_{i,j}$ 即可求出所有的 $A_{k,k}$

   时间复杂度 $O(n^3)$

   2022杭电多校10 J Tree

------------- 本文结束 感谢阅读 -------------

Tech # 矩阵树定理

< Luogu P3233 [HNOI2014]世界树 Luogu P3317 [SDOI2014]重建 >