

# Théorie des jeux et Finance

Projet en Intelligence artificielle.

Zineb AKRATE  
Emma SCOGNAMIGLIO

ECE Paris  
ING 4

SOMMAIRE.

PARTIE 1:.....3

    Définition de la théorie des jeux.....3

    Types de jeux :.....

        Jeux simples en forme normale ou extensifs.....3

        Jeux à somme nulle et jeux à somme non nulle..... .4

PARTIE 2:..... 4

    Topologie des jeux élémentaires..... 4

    La gouvernance démocratique..... 5

    Portefeuille en ligne efficace avec une régression logarithmique...5

PARTIE 3..... 6

    Les marchés de prédiction au travers de l'apprentissage sans regret...6

    Market making et relation avec l'apprentissage en ligne.....7

PARTIE 4.....7

    L'application de la théorie des jeux en Finance.....7

SOURCES.....9

## PARTIE 1:

### 1- Définition de la théorie des jeux:

La théorie des jeux se propose d'étudier des situations (appelées « jeux ») où des individus (les « joueurs ») prennent des décisions, chacun étant conscient que le résultat de son propre choix (ses « gains ») dépend de celui des autres. C'est pourquoi on dit parfois de la théorie des jeux qu'elle est une « théorie de la décision en interaction ». Les décisions ayant pour but un gain maximum – elles relèvent d'un comportement rationnel –, elles peuvent se prêter au traitement mathématique – calcul d'extremums, approche probabiliste. La théorie des jeux s'intéresse à des modèles d'un type particulier, les « jeux », qui sont constitués de trois éléments : les joueurs, leurs ensembles de stratégies (un par joueur) et les règles du jeu (qui portent notamment sur les gains et l'information de chacun). Il existe une ambiguïté sur les interprétations possibles de la théorie des jeux et notamment sur le fait que la théorie des jeux soit une théorie normative ou une théorie descriptive

### 2-Types de jeux:

#### a)Jeux simples en forme normale ou extensifs:

##### -Jeux simples en forme normale:

Un jeu sous forme normale (ou jeu sous forme stratégique) est défini par :

- l'ensemble des joueurs ;
- l'ensemble des stratégies possibles pour chacun des joueurs ;
- les préférences de chacun des joueurs sur l'ensemble des combinaisons stratégiques possibles.

L'ensemble des joueurs doit être fini. L'ensemble des stratégies de chacun des joueurs peut être fini, par exemple dans le dilemme du prisonnier chaque joueur décide de coopérer ou non, ou infini, par exemple dans le duopole de Cournot, chaque joueur décide de la quantité de bien qu'il veut produire et peut choisir n'importe quelle valeur dans l'ensemble des réels positifs. Les préférences peuvent aussi être représentées par une fonction d'utilité ou une fonction de gain.

Quand on représente un jeu sous forme normale, on fait l'hypothèse implicite que chaque joueur choisit sa stratégie sans avoir connaissance des choix des autres joueurs.

##### -Jeux extensifs:

Dans tous les jeux, les décisions peuvent être représentées par un arbre, dont

chaque nœud est associé au joueur qui décide. Chaque option constitue une branche. Les gains de tous les joueurs sont associés aux terminaisons ou feuilles de l'arbre. Une forme extensive de jeu est un arbre de décision décrivant les actions possibles des joueurs à chaque étape du jeu, la séquence de tours de jeu des joueurs, ainsi que l'information dont ils disposent à chaque étape pour prendre leur décision. Cette information est représentée sous forme d'ensembles d'information qui forment une partition des nœuds de l'arbre, chaque classe de la partition contenant les nœuds non distinguables par le joueur à une étape du jeu.

b) Jeux à somme nulle et jeux à somme non nulle

On appelle jeu à somme nulle ou jeu strictement compétitif, les jeux à deux joueurs dans lesquels l'intérêt de l'un des deux joueurs est strictement opposé à l'intérêt de l'autre joueur. Si les préférences des joueurs sont représentées par une fonction de gain ou une fonction d'utilité, alors la somme des deux fonctions est toujours égale à 0. La théorie des jeux à somme nulle a été essentiellement développée par Morgenstern et von Neumann 1944.

Les échecs, le tarot ou le poker sont des jeux à somme nulle car les gains de l'un sont très exactement les pertes de l'autre. Le jeu pierre-feuille-ciseaux est un autre exemple de jeu à somme nulle. Le dilemme du prisonnier n'est pas un jeu à somme nulle (dans certains cas, les deux joueurs peuvent perdre).

Partie 2 :

La topologie des jeux élémentaires

Il s'agit du jeu pour lequel les gains pour jouer une stratégie particulière ne dépendent que des autres stratégies employées, et non de qui les joue.

En résumé si l'on peut changer l'identité des joueurs sans changer le gain des stratégies, alors un jeu est élémentaire.

En effet, pour qu'un jeu 2x2 soit élémentaire il faut que sa matrice de gain ressemble à cette matrice(\*). Il existe très peu de jeu possédant ce type de matrice. En 1951, Nash montre que tout les jeux élémentaires possède un équilibre appelé équilibre de Nash.

Équilibre de Nash : définition de la solution d'un jeu non coopératif impliquant deux joueurs ou plus. (1)

	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>E</i>	a, a	avant JC
<i>F</i>	c, b	d, d

(\*)

Gouvernance démocratique peut résoudre des problèmes

Pour respecter la démocratie le vote est la meilleure solution. C’est l’alternative qui a le plus de vote qui remporte.

Pour expliquer ce processus prenons un exemple. Considérons la rénovation d’un parc financé par deux parties. On peut présenter le résultat dans une matrice identique à la précédente.

Partie 1 / Partie 2	Contribution	Pas de Contribution
Contribution	Rénovation total	Rénovation partielle
Pas de contribution	Rénovation partielle	Pas de rénovation

Les deux parties auraient à gagner en contribuant toute les deux (solution coopérative). En revanche leur choix le plus avantageux serait celui de ne pas contribuer mais d’avoir tout de même une partie du parc rénové (un seul des deux parties contribue). Le pire choix serait qu’aucun des parties ne contribuent c’est l’équilibre de Nash.(1)

b)Portefeuille en ligne efficace avec une régression logarithmique

L’avènement des minimiseurs de regrets accompagnant les avancées en machine learning s’est suivi d’applications directes dans la finance et en voici une application en gestion de portefeuille.Le problème de la gestion de portefeuille en ligne est étudié, vieux de plusieurs décennies, et voici le premier algorithme à regret logarithmique qui n'est pas basé sur l'algorithme Universal Portfolio de Cover et qui admet une mise en œuvre beaucoup plus rapide. Plus précisément, l'algorithme Universal Portfolio a un regret optimal  $O(N \ln T)$  pour  $N$  instruments financiers sur  $T$  tours, mais il nécessite un échantillonnage log-concave et a un temps d'exécution polynomial important.Ce nouveau algorithme, quant à lui, garantit un regret légèrement plus élevé mais toujours logarithmique de  $O(N^2(\ln T)^4)$ , et est basé sur le cadre bien étudié de la descente en miroir en ligne avec un nouveau régularisateur qui peut être mis en œuvre via des méthodes d'optimisation standard en temps  $O(TN^{2.5})$  par tour. Le regret de tous les autres travaux existants est soit polynomial en  $T$ , soit doté d'un facteur potentiellement non limité tel que l'inverse du plus petit prix relatif.

---

**Algorithm 2: ADA-BARRONS**

---

- 1 **Initialize:**  $\beta = \frac{1}{2}, \eta = \frac{1}{2048N(\ln T)^2}, \gamma = \frac{1}{25}$
- 2 Run BARRONS with parameter  $\beta$  and  $\eta$ , where after each round  $t$ , if the following holds:

$$\beta > \alpha_t(u_t),$$

with  $\alpha_t$  defined in Theorem 1 and

$$u_t = \operatorname{argmin}_{u \in \bar{\Delta}_N} \sum_{s=1}^t f_s(u) + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^N \ln \frac{1}{u_i},$$

then set  $\beta \leftarrow \frac{\beta}{2}$ , and rerun BARRONS from Line 2 with time index reset to 1.

---

## PARTIE 3:

### a) Les marchés de prédiction au travers de l'apprentissage sans regret

Un marché de prédiction est un marché financier conçu pour l'agrégation d'informations. Par exemple, dans un marché de prédiction basé sur la fonction de coût, l'organisateur (ou teneur de marché) négocie un ensemble de titres correspondant à chaque résultat potentiel d'un événement.

Au cours des dernières années, une variété de mécanismes de marchés de prédiction convaincants ont été proposés et étudiés, y compris les mécanismes de marché d'appel standard et les marchés parimutuels dynamiques de Pennock.

Ainsi, comment tout teneur de marché à pertes limitées peut être interprété comme un algorithme d'apprentissage à partir de conseils d'experts. L'idée principale est d'assimiler les transactions effectuées sur le marché aux pertes observées par l'algorithme d'apprentissage. Nous pouvons alors considérer que le teneur de marché apprend essentiellement une distribution de probabilité sur les résultats en traitant chaque transaction observée comme une instance d'apprentissage.

Plus formellement, considérons tout teneur de marché basé sur la fonction de coût avec des fonctions de prix instantanées  $p_i$  pour chaque sortie  $i$ . Nous convertissons un tel teneur de marché en un algorithme d'apprentissage à partir de conseils d'experts en fixant le poids de la sortie  $i$  au moment  $t$  à l'aide de

$$w_{i,t} = p_i(-Q_{L,t-1}),$$

En d'autres termes, le poids de l'expert  $i$  au moment  $t$  dans l'algorithme d'apprentissage est le prix instantané du titre  $i$  sur le marché lorsque  $-Q_{L,t-1}$  actions ont été achetées (ou  $Q_{L,t-1}$  actions ont été vendues) de chaque titre  $j$ .

## b)Market making et relation avec l'apprentissage en ligne

Les marchés de valeurs mobilières jouent un rôle fondamental dans l'économie et la finance. Un marché de titres offre un ensemble de titres contingents dont les gains dépendent de l'état futur du monde. Par exemple, un titre Arrow-Debreu qui sera payé dans le cas où un ouragan de catégorie 4 ou plus traverse la Floride en 2012. Un résident de Floride qui craint que sa maison ne soit endommagée pourrait acheter ce titre comme une forme d'assurance pour couvrir son risque. Le prix du marché du titre peut être considéré comme l'estimation collective par les opérateurs de la probabilité qu'un puissant ouragan se produise en Floride en 2012. Dans un marché de titres complet sans frais de transaction, un opérateur peut parier sur n'importe quelle combinaison de titres, ce qui lui permet de se couvrir contre tout risque éventuel. Il est généralement supposé que l'opérateur peut vendre à découvert un titre, en pariant contre le résultat donné.

La fonction de prix correspondante pour chaque titre est :

$$p_o(\mathbf{q}) = \frac{\partial C(\mathbf{q})}{\partial q_o} = \frac{e^{q_o/b}}{\sum_{o' \in \mathcal{O}} e^{q_{o'}/b}}.$$

## PARTIE 4:

### **L'application de la théorie des jeux en Finance:**

La théorie des jeux trouve des applications concrètes en économie. Elle offre une autre forme de modélisation des problèmes économiques. Par exemple, dans la théorie économique classique, un marché s'équilibre par les prix. La théorie des jeux permet d'expliquer l'équilibre entre l'offre et la demande autrement que par la variation du prix.

Dès la publication des premiers articles Lasry et Lions ont proposé des applications au mécanisme de formation des prix sur un marché financier, ou encore à la modélisation de la dynamique de la volatilité d'un actif prenant en compte l'influence des stratégies de couverture de manière auto-cohérente. Dans ce dernier article, les auteurs proposent d'étendre le modèle standard de Black-Scholes<sup>9</sup>, au cas où la dynamique de l'actif sous-jacent est modifiée linéairement par le taux de trading/hedging. De plus la volatilité est supposée dépendre du pay-off d'une option fictive, dont le pay-off serait égal à la somme des pay-off des options présentes sur la marché. La stratégie de hedging optimale est ensuite déterminée selon une procédure d'optimisation stochastique classique, conduisant à une équation auto-cohérente pour la volatilité. Guéant, Fatone et Jaimungal, quant à eux, se sont préoccupés de problèmes de liquidation de portfolios (porte-feuille d'actifs financiers) et d'exécution optimale d'ordres de trading. Plus précisément, l'objectif est de déterminer la façon optimale pour un gros investisseur (banque, assurances, fonds de pension, . . .) d'exécuter une transaction sachant que celle-ci, par son volume, va avoir un impact sur les prix. De plus, le modèle prend en compte l'influence collective des petits porteurs, alors que par définition leur poids individuel est négligeable. Enfin

Lachapelle, Lehalle et coauteurs ont abordé la question de la modélisation d'un carnet d'ordre prenant en compte la diversité des profils des traders . Un carnet d'ordre sur un certain marché financier est l'ensemble de tous les ordres d'achat ou de vente pour un certain prix avec les quantités associées. Il peut être donc représenté par un axe des prix avec, à gauche, la liste des acheteurs, et à droite, la liste de vendeurs, le prix du marché étant situé entre les deux. Dans cet article, selon la longueur de la liste des acheteurs, un agent va décider d'acheter immédiatement et donc de faire diminuer la liste des vendeurs, ou de patienter et donc de rentrer dans la liste des acheteurs. Un processus similaire a lieu du côté des vendeurs et ainsi la taille des deux listes va évoluer de manière couplée. Dans une perspective plus orientée vers le risque, Carmona et co-auteurs , étudient le risque systémique dans un modèle où la réserve monétaire d'une banque suit un processus de diffusion dont la dérive dépend de l'emprunt/prêt par unité de temps auprès des autres banques et d'une banque centrale. Le taux d'emprunt/prêt d'une banque vis à vis de la banque centrale est contrôlé et est optimisé selon des critères qui rendent compte de sa volonté de ne pas faire défaut, de prêter quand les réserves atteignent un certain seuil, et du coût de transaction avec la banque centrale.



# SOURCES

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie\\_des\\_jeux#Interprétations](https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_des_jeux#Interprétations) ( Partie 1 types de jeux)  
<https://www.universalis.fr/encyclopedie/theorie-des-jeux/>( Partie 1: définition)  
<https://arxiv.org/pdf/1805.07430.pdf> Partie 2 : gestion de portefeuille  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric\\_game](https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_game) partie 2 topologie des jeux élémentaires  
[https://mpira.ub.uni-muenchen.de/12751/1/MPRA\\_paper\\_12751.pdf](https://mpira.ub.uni-muenchen.de/12751/1/MPRA_paper_12751.pdf) partie 2 gouvernance démocratique  
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.296.6481&rep=rep1&type=pdf> partie 3 apprentissage en ligne  
<https://arxiv.org/pdf/1003.0034.pdf> partie 3 : marché de prédiction sans regret  
[http://lptms.u-psud.fr/membres/ullmo/Articles/These\\_IgorSwiecicki\\_Diffusion.pdf](http://lptms.u-psud.fr/membres/ullmo/Articles/These_IgorSwiecicki_Diffusion.pdf) partie 4  
<https://www.lafinancepourtous.com/2012/10/22/prix-nobel-deconomie-la-theorie-des-jeux-recompensee/> partie 4





