

# Modelisation Geometrique

## Mini-Projet: Rapport

El Mehdi Khadfy

Zineb Et-tarraf

---

### Introduction

Durant ce Tp, nous nous sommes intéressés à modéliser des courbes paramétriques interpolant les points  $P_k$ , et ce à l'aide des splines **Hermite cubique**, avec des tangentes estimées par **Cardinal splines** en premier temps, puis par deux autres estimations des tangentes (Hermite\_v1 et Hermite\_v2), ensuite nous avons passé à l'**interpolation Lagrange**, et finalement aux **splines cubique  $C^2$** , et tous cela avec des graphes de courbure indiquant la qualité des courbes.

Nous essaierons dans ce rapport de présenter, d'une manière plus ou moins brève nos différents choix d'estimations et les spécificités des multiples modélisations effectués.

### Premiere partie

Comme l'énoncé l'indique, nous avons commencé par les polynômes d'**interpolation Hermite** définit pour chaque deux points d'interpolation  $P_i, P_{i+1} \in \mathbb{R}^2$  et leurs tangentes  $m_i, m_{i+1} \in \mathbb{R}^2$  aux paramètres  $u_i, u_{i+1}$  par

$$P_{[u_i, u_{i+1}]}(u) = P_i H_0(t) + P_{i+1} H_1(t) + (u_{i+1} - u_i) m_i H_2(t) + (u_{i+1} - u_i) m_{i+1} H_3(t) \quad u \in [u_i, u_{i+1}]$$

pour  $t = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \in [0, 1], i = 0, \dots, N - 1$ .

---

### Démonstration

0. on a

$$\begin{aligned} P_{[u_i, u_{i+1}]}(u_i) &= P_i H_0(0) + P_{i+1} H_1(0) + (u_{i+1} - u_i) m_i H_2(0) + (u_{i+1} - u_i) m_{i+1} H_3(0) \\ &= P_i \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} P_{[u_i, u_{i+1}]}(u_{i+1}) &= P_i H_0(1) + P_{i+1} H_1(1) + (u_{i+1} - u_i) m_i H_2(1) + (u_{i+1} - u_i) m_{i+1} H_3(1) \\ &= P_{i+1} \end{aligned}$$

et on a

$$H'_0(0) = 0, \quad H'_1(0) = 0, \quad H'_2(0) = 1, \quad H'_3(0) = 0$$

donc

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{du} P_{[u_i, u_{i+1}]}(u) \right|_{u_i} &= \frac{dt}{du} \frac{d}{dt} P_{[u_i, u_{i+1}]}(u) \Big|_{u_i} \\
&= \frac{1}{u_{i+1} - u_i} \frac{d}{dt} P_{[u_i, u_{i+1}]}(u) \Big|_{u_i} \\
&= \frac{1}{u_{i+1} - u_i} (P_i H'_0(0) + P_{i+1} H'_1(0) + (u_{i+1} - u_i) m_i H'_2(0) + (u_{i+1} - u_i) m_{i+1} H'_3(0)) \\
&= m_i
\end{aligned}$$

et puisque

$$H'_0(1) = 0, \quad H'_1(1) = 0, \quad H'_2(1) = 0, \quad H'_3(1) = 1$$

alors de même

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{du} P_{[u_i, u_{i+1}]}(u) \right|_{u_{i+1}} &= \frac{1}{u_{i+1} - u_i} (P_i H'_0(1) + P_{i+1} H'_1(1) + (u_{i+1} - u_i) m_i H'_2(1) + (u_{i+1} - u_i) m_{i+1} H'_3(1)) \\
&= m_{i+1}
\end{aligned}$$


---

Puis nous avons écrit la spline Hermite sous forme Bézier avec une paramétrisation équidistante:  $u_k = k$  pour  $k = 0, \dots, N$ .

$$P|_{[u_k, u_{k+1}]}(u) = x_k(t) = \sum_{i=0}^3 b_{3k+i} B_i^3(t), \quad u \in [u_k, u_{k+1}]$$

pour  $t = \frac{u - u_k}{u_{k+1} - u_k} \in [0, 1]$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ .

**1.** on a

$$P'(u) = 3((b_{3k+1} - b_{3k})B_0^2(t) + (b_{3k+2} - b_{3k+1})B_1^2(t) + (b_{3k+3} - b_{3k+2})B_2^2(t))$$

Donc on aura

$$P_{[u_k, u_{k+1}]}(u_k) = b_{3k} = P_k$$

de même

$$P_{[u_k, u_{k+1}]}(u_{k+1}) = b_{3k+3} = P_{k+1}$$

et on a

$$\begin{aligned}
P'[u_k, u_{k+1}](u_k) &= 3(b_{3k+1} - b_{3k}) = m_k \\
&\Leftrightarrow b_{3k+1} = P_k + \frac{1}{3}m_k
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
P'[u_k, u_{k+1}](u_{k+1}) &= 3(b_{3k+3} - b_{3k+2}) = m_{k+1} \\
&\Leftrightarrow b_{3k+2} = P_{k+1} + \frac{1}{3}m_{k+1}
\end{aligned}$$

**2.** La figure ci-dessus représente un dessin pour deux polygones de contrôle consécutifs,  $x_k$  et  $x_{k+1}$  avec les points de contrôles associés

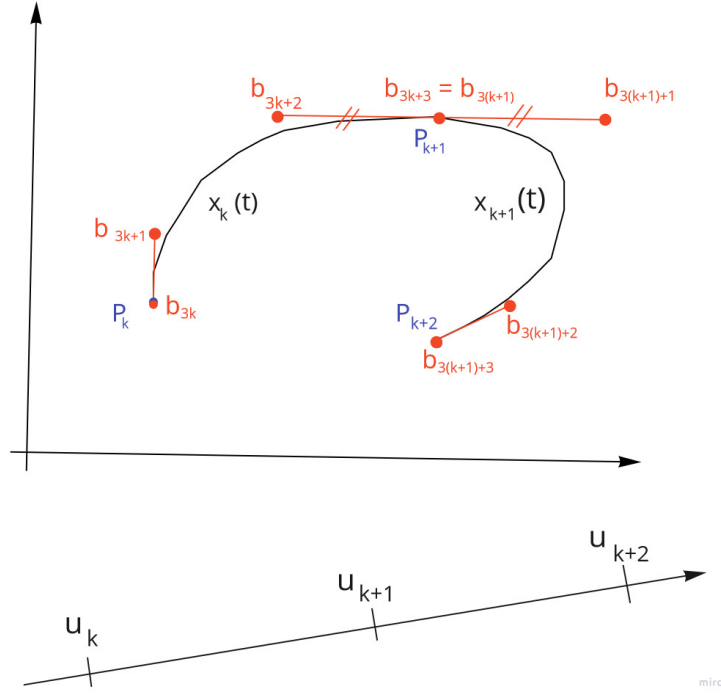


Figure 1: Deux Polygones de contrôle consécutifs

En premier temps, nous avons utilisé l'estimation de **Cardinal splines** pour les tangentes  $m_k$  donné par la formule

$$m_k = (1 - c) \frac{P_{k+1} - P_{k-1}}{u_{k+1} - u_{k-1}} = (1 - c) \frac{P_{k+1} - P_{k-1}}{2}, \quad k = 1, \dots, N - 1, \quad c \in [0, 1]$$

**3.** Comme la formule ne s'applique pas aux extrémités, nous avons choisit l'estimation de la dérivée à droite pour la première tangente et celle de gauche pour la dernière, puisque c'est deux estimations sont de même ordre et qui nécessite qu'un seul points supplémentaire pour estimer la dérivée, ce qui donne

$$m_0 = (1 - c) (P_1 - P_0)$$

$$m_N = (1 - c) (P_N - P_{N-1})$$

4. Le code s'exécute par la fonction **MAIN.m**, une fois le programme est exécuté une fenêtre s'ouvre permettant d'entrer les points à interpolés ou de supprimer un point de la courbe.

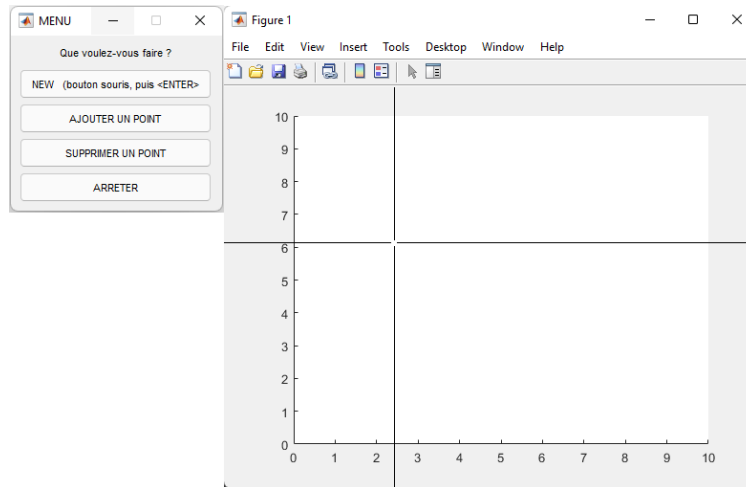


Figure 2: Premier menu

Ensuite une autre fenêtre va vous permettre de choisir la méthode par laquelle vous voulez faire l'interpolation avec le choix d'afficher sa courbe de courbure ou non.

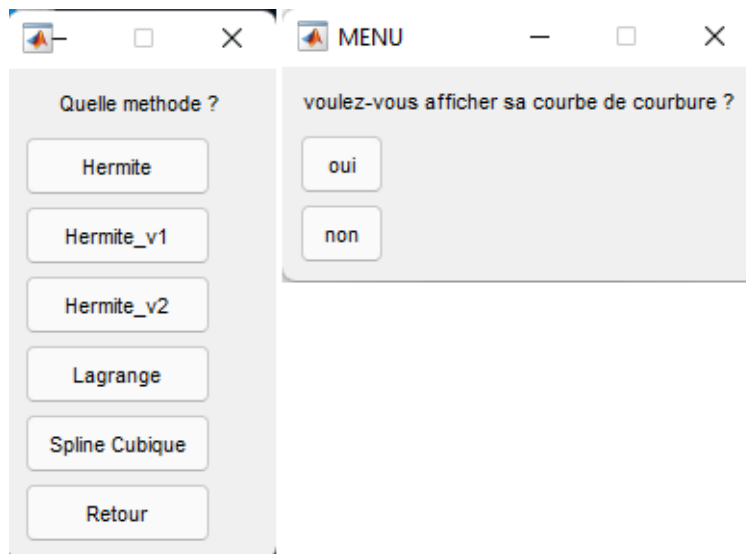


Figure 3: Deuxieme menu

**4.1** La variation du paramètre de tension  $c$  affecte les deux points de contrôles  $b_{3k+1}$  et  $b_{3k+2}$ , pour  $c = 0$  on retrouve les courbes splines **Catmull-Rom** et pour une valeur proche de 1 les tangentes  $m_k$  s'approchent de la valeur nulle, et donc les points de contrôles deviennent  $b_{3k+1} = b_{3k}$  et  $b_{3k+2} = b_{3k+3}$ , alors en augmentant la valeur de  $c$ , la courbe d'interpolation s'approche à son polygone de contrôle.

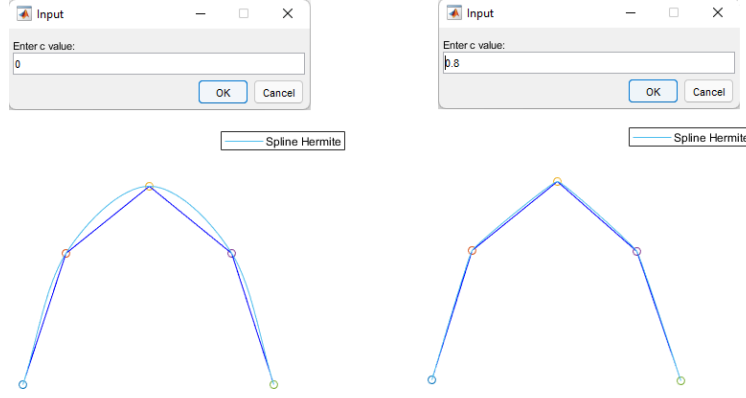


Figure 4: Hermite pour  $c=0$  et  $c=0.8$

**4.2** La courbe obtenue est d'une bonne qualité d'interpolation, vu qu'elle préserve la forme décrite par les points à interpoler, de plus elle n'a pas d'ondulation non-désirées, sauf quelque inflexion dans le début et la fin de la courbe qui revient au choix des tangentes aux extrémités, ainsi que par sa définition tous les points de la courbe admettent bien des dérivées.

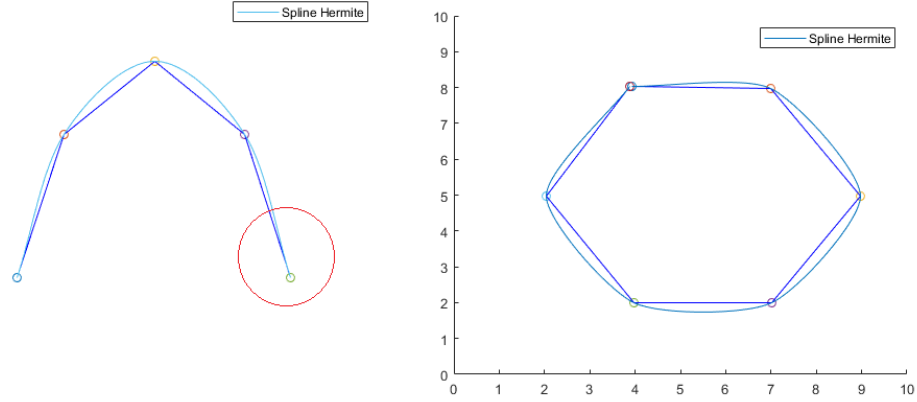


Figure 5: interpolation Hermite-Bézier

**4.3** Etant donné la valeur de  $c$  dans la formule d'estimation des tangentes  $m_k$  change la forme de la spline, alors le choix des tangentes  $m_k$  est déterminant pour la forme de la courbe.

### Hermite\_v1

On a choisit dans cette version du code une estimation qui généralise la formule de cardinal spline.

$$m_k = \frac{P_{k+1} - P_{k-1}}{\alpha}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad c \in [0, 1]$$

et

$$m_0 = \frac{P_1 - P_0}{\alpha} \quad m_N = \frac{P_N - P_{N-1}}{\alpha}$$

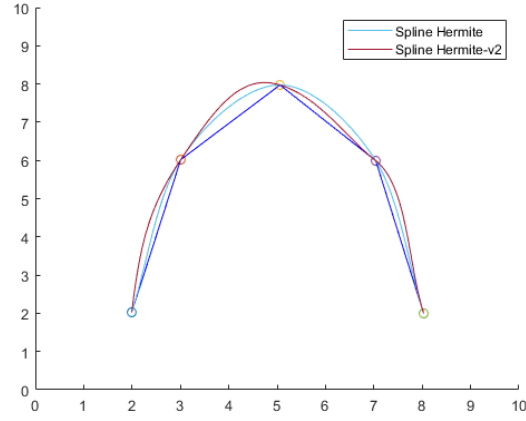


Figure 6: Hermite-v1

### Hermite\_v2

Par contre dans cette version on a choisit une estimation plus précise en terme d'ordre que celle de **Catmull-Rom**

$$m_k = \frac{-3P_k + 4P_{k+1} - P_{k+2}}{u_{k+2} - u_k}, \quad k = 0, \dots, N-2$$

et puisque cette formule ne s'applique pas sur les deux dernières tangentes nous avons choisit une approximation centré pour l'avant dernière tangente

$$m_{N-1} = \frac{P_N - P_{N-2}}{u_N - u_{N-2}}$$

et pour la dernière tangente nous avons choisit une approximation à gauche

$$m_N = \frac{P_N - P_{N-1}}{u_N - u_{N-1}}$$

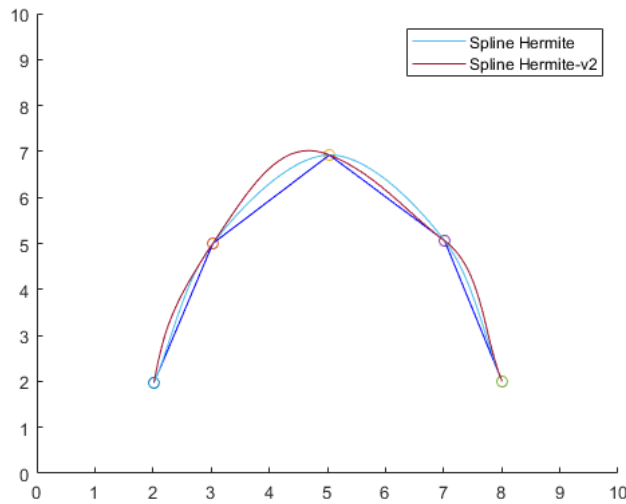


Figure 7: Hermite-v2

5.

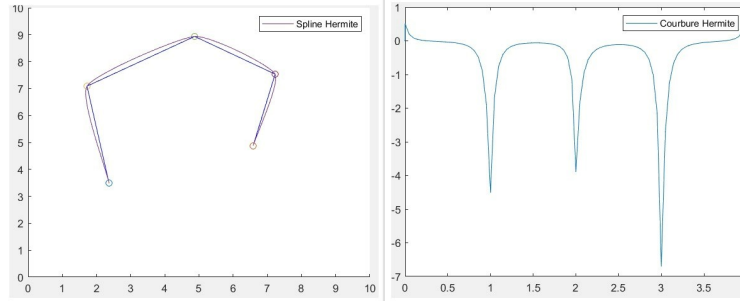


Figure 8: courbure d'interpolation d'Hermite avec  $c=0.5$

**5.1** On observe que seuls les points d'interpolation forment des points critiques dans la courbe de courbure. Donc le plot de la courbure montre la qualité du raccordement aux points d'interpolation entre les courbes de Spline .

Et tant que la courbure aux points à interpolés est proche de zéro en valeurs absolue tant que la qualité de la courbe est élevée c'est à dire que le raccordement entre les courbes de spline est bien de  $C^1$ .

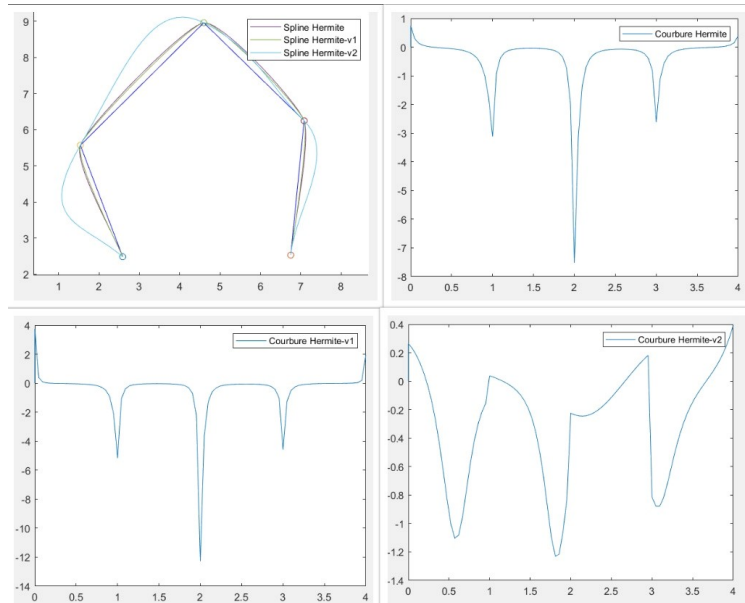


Figure 9: les trois versions d'Hermite pur  $c=0.5$  et  $\alpha=4$

**5.2** On remarque que les courbes de courbure de la méthode Cardinal Spline et de la méthode d'Hermite-v1 sont presque identiques et ceci même en changeant plusieurs fois les paramètres  $c$  et  $\alpha$  .Ce qui implique que la qualité des deux courbes est la même pour les deux méthodes .

Contrairement à la méthodes d'Hermite-v2 où on constate que la courbure aux points d'interpolation est beaucoup plus grande par rapport aux deux autres méthodes donc la qualité de cette méthode est moins élevée que les autres .

**Discutons un cas particulier des deux premières méthodes où  $c=1$  et  $\alpha=100000$  (une très grande valeur )** Dans ce cas les tangentes aux points d'interpolation sont nulles .

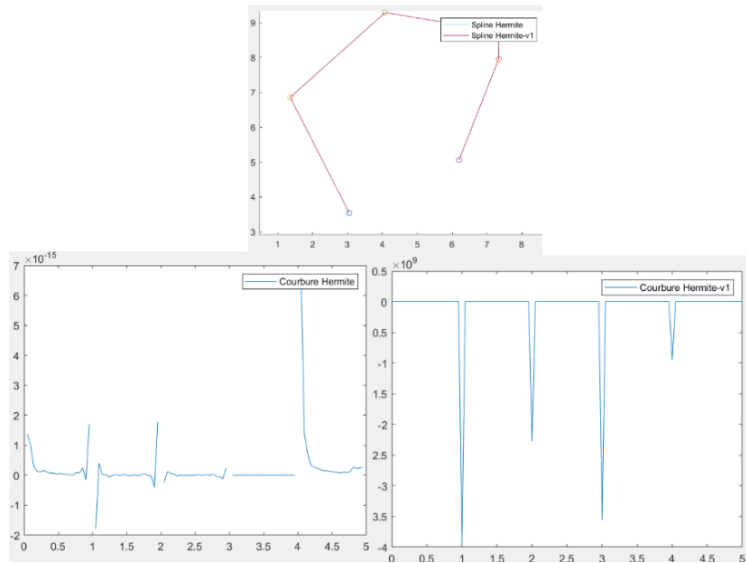


Figure 10: cas particulier  $c=1$  et  $\alpha=100000$

Dans ce cas particulier , Il s'avère que la deuxième méthode est plus pertinente vue qu'elle conserve la continuité de la courbure aux points d'interpolation contrairement à la première methode.

Ce qui montre que le choix de la méthode Hermite-v1 améliore bien la qualité de la Spline .

6. Nous avons choisit de dessiner un animal à l'aide de la méthode d'interpolation Cardinal Spline

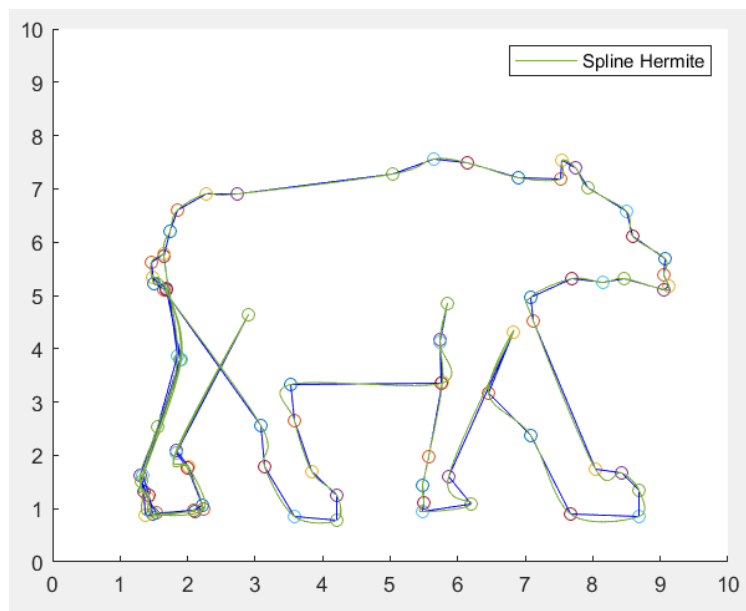


Figure 11: Dessin par interpolation Hermite



## Deuxieme partie

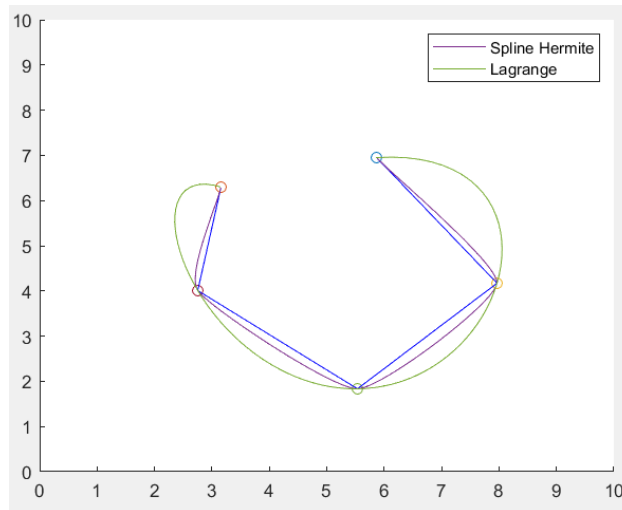


Figure 12: Lagrange et spline Hermite

7. On constate que la courbe d'Hermite suit étroitement son enveloppe de contrôle contrairement à la courbe de Lagrange . Ce qui se justifie bien théoriquement vu que l'interpolation d'Hermite de plus qu'elle interpole les positions elle interpole les dérivées aussi (osculateur) donc la courbe résultante est de classe  $C^1$  alors que celle résultante de l'interpolation de Lagrange est de classe  $C^0$ .

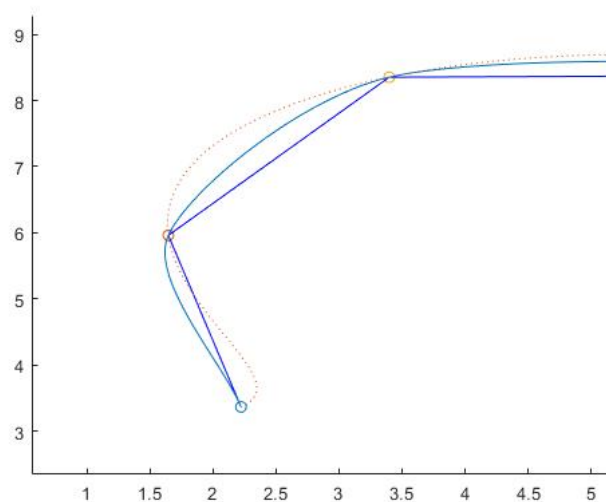


Figure 13: Oscillation dans Lagrange

On constate que dans des cas particuliers la courbe de Lagrange est affectée par le problème d'oscillation qui se réduit énormément dans l'interpolation d'Hermite .

## Bonus

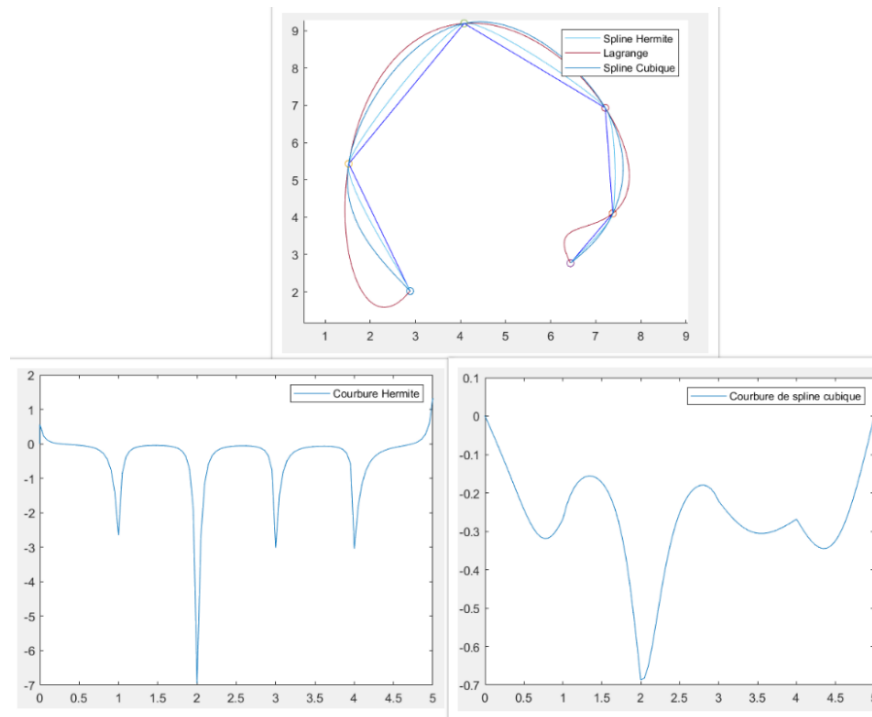


Figure 14: Spline Cubique C2

9. On a déjà conclut que la qualité de la méthode de Langange est moins élevée que celle de la méthode d'Hermite . En observant les deux courbures On trouve que la courbure aux points d'interpolation dans la méthode d'Hermite est beaucoup plus grande que dans la courbure de la Spline Cubique . Ce qui justifie que cette dernière est plus pertinente que celles d'Hermite qui sont à leurs tour plus pertinentes que celle de Lagrange .