

计量研究: 半凯利公式自适应调仓

研究员: 王子豪, Ph.D., zihao.wang@espritech.cn

研究员: 邢佳, MBA., jia.xing@espritech.cn

夫至樂者,先應之以人事,順之以天理,行之以五德,應之以自然。

重要: 请务必阅读报告后页的信息披露。

凯利公式背景

凯利公式是由克劳德·艾尔伍德·香农在贝尔实验室的同事物理学家约翰·拉里·凯利在 1956 年提出的。凯利的方法参考了香农关于长途电话线的嘈音的工作。凯利说明香农的信息论可应用于此: 赌徒不必要获得完全的资讯。香农的另一位同事 Edward O. Thorp 应用这条公式在廿一点和股票市场上。1738 年丹尼·伯努利曾提出等价的观点, 可是伯努利的文章直到 1954 年才首次译成英语。不过对于只投资一次的人来说, 应选择算术平均最高的投资组合。¹



图 1: John Larry Kelly, Jr 博士, December 26th 1923 – March 18th 1965. [1]

标准凯利公式的导出

给定投资标的 T , 有如下符号记法: 标的几何收益增长率: T_G (几何平均²), 标的投资期数, 初始投资额: X_0 , 第 N 期财富值: X_N . 那么我们有,

$$T_G = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \right) \ln \left(\frac{X_N}{X_0} \right) \quad (1)$$

¹<https://wiki.mbalib.com/wiki/%E5%87%AF%E5%88%A9%E5%85%AC%E5%BC%8F>

²<https://zhuanlan.zhihu.com/p/52416437>

下面我们考虑对标的 T 的投资活动。设每次投资投入 r 比例的资金额度。那么我们考虑 N 期投资且赢次为 $N_w : \{x = N, N_w + N_l = N, \}$ 时的总资产额度,

$$X_N = X_0(1-t)^N(1+t)^N \quad (2)$$

联立 Eq 1 和 Eq 2, 取极限后有,

$$\begin{aligned} T_G &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \right) \ln \left(\frac{X_0(1-t)^{N_w}(1+t)^{N_l}}{X_0} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \right) \ln((1+t)^{N_w}(1-t)^{N_l}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \right) (\ln((1+t)^{N_w}) + \ln((1-t)^{N_l})) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \right) (N_w \ln(1+t) + N_l \ln((1-t))) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N_w}{N} \ln(1+t) + \frac{N - N_w}{N} \ln(1-t) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

令 $p = \frac{N_w}{N}$ 为胜率, 那么 $q = 1 - p$ 为损失概率。自然的我们的目的是计算投资比率 r 来使得几何平均增长率取极大值, 据此我们优化,

$$\operatorname{argmax}_r T_G(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} (p \ln(1+t) + q \ln(1-t)) \quad (4)$$

对优化目标函数导数另导函数为零我们便得到凯利公式,

$$r_m = 2p - 1; T_G(r)|_{max} = T_G(r = r_m) p \ln(p) + \ln(q) + \ln 2 \quad (5)$$

即 T_G 于 $(r = r_m)$ 点取极值. 若交易盈亏比为固定值 b , 即每单位亏损对应的收益, 那么,

$$r_m = \frac{bp - 1}{b}; \quad (6)$$

波动赔率与半凯利公式的导出

显然的在实际投资行为中交易盈亏比是一波动数值。我们假定其满足正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。由前文 Eq 1 可以证明其单期对数收益率期望为 $\mu - 0.5\sigma^2$, 考虑带杠杆 L 那么期望扩大 L 倍即 $L\mu - 0.5(L\sigma)^2$

$$\operatorname{argmax}_L T_G(r) = L\mu - 0.5(L\sigma)^2 \quad (7)$$

令一阶导函数为零,

$$0 = \mu - (L\sigma^2) \rightarrow L_m = \frac{\mu}{\sigma^2} \quad (8)$$

由于赔率所服从的正态分布参数估计不稳定, 且不同期 N 之间的收益率也很难保证绝对独立, 上式风险仍较大。合理的情况是合理控制 L 取 $L < L_m$, 这被称为半凯利公式。³

³<https://www.zhihu.com/question/46730296/answer/421328345>

总结

本为给定了凯利公式与半凯利公式的数学推导。在实际应用中凯利公式为参考公式，对凯利公式的投资实践活动中需要根据风险偏好进行调仓。另外策略的赔率也为重要的待估参数，这对算法的收益稳定性有较高的要求。

参考文献

[1] Kelly Criterion Explained, Northwest Engineering Solutions.

<https://www.nwengineeringllc.com/article/kelly-criterion-explained.php>

重要披露

本报告，以及任何 **ESPRITech** 任何社交媒体资料或包含该报告链接的网页，以及链接到或包含在前述内容上的任何第三方内容（“链接内容”）统称为“内容”。内容仅供参考，并不构成任何证券或其他金融产品的投资建议或任何形式的要约或邀请。不能保证内容中表达或暗示的任何目的，假设，期望和/或目标已经实现或将要实现，也不保证内容中描述的策略和其他活动已经或将完全或将继续进行。与所描述的相同。过往表现不应视为未来表现的指标。**ESPRITech** 集团，其附属公司和成员，以及与上述行为有关联或代表上述行为的任何一方或个人，对于任何错误（由于疏忽或其他原因而导致的错误），在没有法律允许的最大范围内，概不负责。**ESPRITech** 成员不认可任何链接内容中讨论的任何信息或信念，也不对任何链接内容的准确性或充分性做任何陈述。所有商标，徽标，信息和照片均归 **ESPRITech** 或其关联公司所有或经许可使用。未经 **ESPRITech & Co., L.P.** 的事先书面同意，禁止复制或重新传输内容（链接内容除外）。