计量研究: 半凯利公式自适应调仓

研究员: 王子豪, Ph.D., zihao.wang@espritech.cn
研究员: 邢佳, MBA., jia.xing@espritech.cn

夫至樂者,先應之以人事,順之以天理,行之以五德,應之以自然。

重要: 请务必阅读报告后页的信息披露。

凯利公式背景

凯利公式是由克劳德·艾尔伍德·香农在贝尔实验室的同事物理学家约翰·拉里·凯利在 1956 年提出的。凯利的方法参考了香农关于长途电话线的嘈音的工作。凯利说明香农的信息论可应用于此: 赌徒不必要获得完全的资讯。香农的另一位同事 Edward O. Thorp 应用这条公式在廿一点和股票市场上。1738 年丹尼·伯努利曾提出等价的观点, 可是伯努利的文章直到 1954 年才首次译成英语。不过对于只投资一次的人来说, 应选择算术平均最高的投资组合。[1]

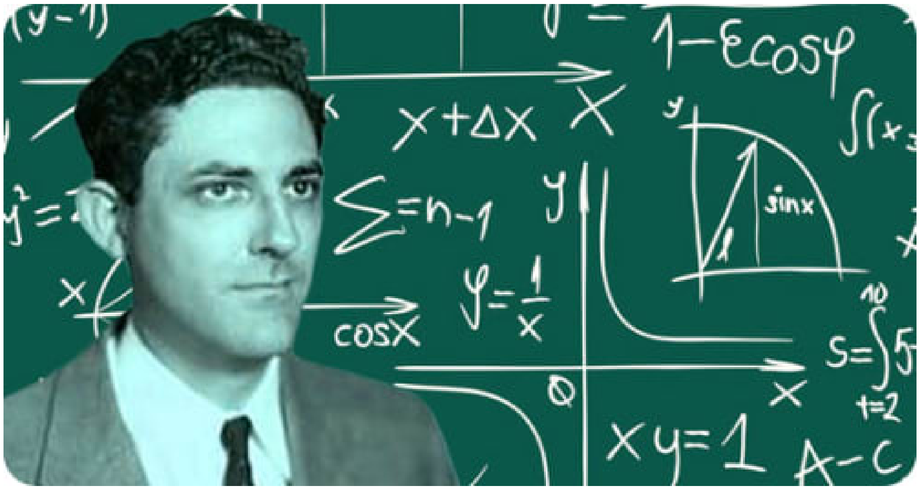

图 1: John Larry Kelly, Jr 博士, December 26th 1923 –March 18th 1965. [1]

标准凯利公式的导出

给定投资标的 T, 有如下符号记法: 标的几何收益增长率:T_G (几何平均[2]), 标的投资期数, 初始投资额:X_0, 第 N 期财富值:X_N. 那么我们有,

$$T_G = \lim_{N\to\infty}(\frac{1}{N})ln(\frac{X_N}{X_0}) \tag{1}$$

[1] https://wiki.mbalib.com/wiki/%E5%87%AF%E5%88%A9%E5%85%AC%E5%BC%8F

[2] https://zhuanlan.zhihu.com/p/52416437

下面我们考虑对标的 T 的投资活动。设每次投资投入 r 比例的资金额度。那么我们考虑 N 期投资且赢次为 $N_w : \{x = N, N_w + N_l = N, \}$ 时的总资产额度，

$$X_N = X_0(1-t)_w^N(1+t)_l^N \tag{2}$$

联立 Eq 1 和 Eq 2，取极限后有,

$$\begin{aligned} T_G &= \lim_{N\to\infty}(\frac{1}{N})ln(\frac{X_0(1-t)^{N_w}(1+t)^{N_l}}{X_0}) \\ &= \lim_{N\to\infty}(\frac{1}{N})ln((1+t)^{N_w}(1-t)^{N_l}) \\ &= \lim_{N\to\infty}(\frac{1}{N})(ln((1+t)^{N_w}) + ln((1-t)^{N_l})) \\ &= \lim_{N\to\infty}(\frac{1}{N})(N_w ln(1+t) + N_l ln((1-t)) \\ &= \lim_{N\to\infty}(\frac{N_w}{N}ln(1+t) + \frac{N-N_w}{N}ln(1-t)) \end{aligned} \tag{3}$$

令 $p = \frac{N_w}{N}$ 为胜率，那么 $q = 1-p$ 为损失概率。自然的我们的目的是计算投资比率 r 来使得几何平均增长率取极大值，据此我们优化，

$$\underset{r}{\text{argmax}} T_G(r) = \lim_{N\to\infty}(pln(1+t) + qln(1-t)) \tag{4}$$

对优化目标函数导数另导函数为零我们便得到凯利公式,

$$r_m = 2p-1; T_G(r)|_{max} = T_G(r = r_m)pln(p) + ln(q) + ln2 \tag{5}$$

即 T_G 于 $(r = r_m)$ 点取极值. 若交易盈亏比为固定值 b，即每单位亏损对应的收益，那么，

$$r_m = \frac{bp-1}{b}; \tag{6}$$

波动赔率与半凯利公式的导出

显然的在实际投资行为中交易盈亏比是一波动数值。我们假定其满足正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$。由前文 Eq 1 可以证明其单期对数收益率期望为 $\mu - 0.5\sigma^2$, 考虑带杠杆 L 那么期望扩大 L 倍即 $L\mu - 0.5(L\sigma)^2$

$$\underset{L}{\text{argmax}} T_G(r) = L\mu - 0.5(L\sigma)^2 \tag{7}$$

令一阶导函数为零，

$$0 = \mu - (L\sigma^2) - > L_m = \frac{\mu}{\sigma^2} \tag{8}$$

由于赔率所服从的正态分布参数估计不稳定，且不同期 N 之间的收益率也很难保证绝对独立，上式风险仍较大。合理的情况是合理控制 L 取 $L < L_m$, 这被称为半凯利公式。[3]

[3] https://www.zhihu.com/question/46730296/answer/421328345

总结

本为给定了凯利公式与半凯利公式的数学推导。在实际应用中凯利公式为参考公式，对凯利公式的投资实践活动中需要根据风险偏好进行调仓。另外策略的赔率也为重要的待估参数，这对算法的收益稳定性有较高的要求。

参考文献

[1] Kelly Criterion Explained,Northwest Engineering Solutions.
https://www.nwengineeringllc.com/article/kelly-criterion-explained.php

重要披露