



Lezione di Astronomia II – 6

Maurizio Tomasi (maurizio.tomasi@unimi.it)

12 Aprile 2024



Collasso di Jeans

Queste sono le equazioni usate da Jeans:

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{c. della massa})$$

$$\dot{\vec{v}} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \phi \quad (\text{legge «di Newton»})$$

$$p = \rho c_s^2 \quad (\text{v. del suono})$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (\text{gravitazione}).$$

Le incognite ρ , \vec{v} , p e ϕ sono funzione del punto \vec{r} e del tempo t . Per un gas ideale

monoatomico vale che $c_s = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{m}}$, con $\gamma = \frac{5}{3}$.



Derivazione di Jeans

- Il sistema di equazioni è molto complesso da risolvere se non si adotta qualche semplificazione.
- Linearizziamo il sistema, sostituendo

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t),$$

$$p(\vec{r}, t) = p_0 + p_1(\vec{r}, t),$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0 + \vec{v}_1(\vec{r}, t) = 0 + \vec{v}_1(\vec{r}, t),$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 + \phi_1(\vec{r}, t).$$

I termini ρ_0, p_0, \vec{v}_0 e ϕ_0 sono costanti, e vale che $\rho_0 \gg \rho_1, p_0 \gg p_1$, etc.



Derivazione di Jeans

- Supponiamo che una porzione di plasma abbia questa densità:



- Stiamo imponendo che le variazioni di densità ρ_1 siano piccole rispetto alla densità media ρ_0 .



Derivazione di Jeans

Ignorando i termini di ordine superiore al primo, abbiamo che ad es. il termine
 $-\vec{\nabla} p / \rho$ diventa

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p &= -\frac{\vec{\nabla} p_1}{\rho_0 + \rho_1} \approx -\frac{\vec{\nabla} p_1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) = \\ &= -\frac{\vec{\nabla} p_1}{\rho_0} + \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \vec{\nabla} p_1 \approx -\frac{\vec{\nabla} p_1}{\rho_0}. \end{aligned}$$

I restanti termini sono più semplici.



Derivazione di Jeans

- Applicando una divergenza alla c.d. «legge di Newton» e sostituendo, otteniamo

$$\ddot{\rho}_1 - c_s^2 \nabla^2 \rho_1 + 4\pi G \rho_1 \rho_0 = 0.$$

- L'equazione è complessa da risolvere, ma è lineare: se ρ_A e ρ_B sono due soluzioni, anche $\alpha\rho_A + \beta\rho_B$ è soluzione.



Derivazione di Jeans

Sfruttiamo la linearità dell'equazione per risolverla usando l'analisi di Fourier.
Scomponiamo quindi l'incognita in onde piane:

$$\rho_1(\vec{r}, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\vec{k} \int_{\mathbb{R}} d\omega \tilde{\rho}_1(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

La funzione $\tilde{\rho}_1(\vec{k}, \omega)$ è la trasformata di Fourier di $\rho_1(\vec{r}, t)$; quindi operazioni differenziali su ρ_1 diventano algebriche su $\tilde{\rho}_1$:

$$\nabla^2 \rho_1 \rightarrow k^2 \cdot \tilde{\rho}_1, \quad \partial_t \rho_1 \rightarrow \omega \cdot \tilde{\rho}_1.$$



Derivazione di Jeans

Ricordando che

$$\left\| \vec{k} \right\| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi\nu,$$

il valore di λ che compare nell'espressione di ρ_1 corrisponde di volta in volta a una diversa scala delle perturbazioni nell'immagine:





Derivazione di Jeans

Applicando quindi la trasformata di Fourier all'equazione di ρ_1 , otteniamo che

$$\omega^2 \cdot \tilde{\rho}_1 = (k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_0) \cdot \tilde{\rho}_1,$$

ossia

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_0,$$

che è detta **relazione di dispersione** e lega tra loro ω e k (ossia, λ e ν).



Derivazione di Jeans

Risolvendo, abbiamo che

$$\omega = \pm c_s \sqrt{k^2 - k_J^2},$$

con

$$k_J^2 \equiv \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2}.$$

(in assenza di gravità, $k_J = 0$ e $\omega = \pm c_s k$: la velocità del suono è sempre c_s).

Dallo studio di questa equazione si deduce come il sistema si evolve nel tempo.



Derivazione di Jeans

Se $k_J^2 < k^2$ allora l'onda di pressione si propaga nel mezzo (onda acustica) con una velocità di fase data da

$$v_f = \lambda \nu = \frac{\omega}{k} = c_s \sqrt{1 - \left(\frac{k_J}{k}\right)^2},$$

inferiore alla velocità del suono c_s perché $k_J \neq 0$ (è il termine dovuto alla gravità). La gravità quindi «rallenta» la propagazione dell'onda nel mezzo.



Derivazione di Jeans

Se $k_J^2 > k^2$ allora ω è immaginario, e $\rho_1(\vec{r}, t) = A_g e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ diverge come e^{t/τ_J} (collasso), con

$$\tau_J = \frac{1}{k_J c_s} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho_0}} = \frac{2.3 \times 10^4 \text{ yr}}{\sqrt{n_H / 10^6 \text{ cm}^{-3}}},$$

se $k \ll k_J$; risultato simile al tempo di *free-fall*:

$$\tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G \rho_0}} = \frac{4.4 \times 10^4 \text{ yr}}{\sqrt{n_H / 10^6 \text{ cm}^{-3}}}.$$



Derivazione di Jeans

Siccome il collasso avviene se $k_J^2 > k^2$, ossia

$$\frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2} > \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2,$$

otteniamo allora l'espressione di R_J :

$$\lambda > c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}} \equiv R_J.$$

Per un gas monoatomico si ha $R_J = \sqrt{\frac{5\pi k_B T}{3Gm\rho_0}}$.



Massa di Jeans

Dalla densità ρ_0 e dal raggio di Jeans R_J possiamo stimare la massa minima per provocare un collasso gravitazionale con

$$M_J = \frac{4}{3}\pi R_J^3 \rho_0 = \frac{4\pi}{3\sqrt{\rho_0}} \left(\frac{5\pi k_B T}{3Gm} \right)^{\frac{3}{2}} \propto \sqrt{\frac{T^3}{\rho_0}}$$

(«massa di Jeans»).



Massa di Jeans

Numericamente vale che

$$M_J \approx 0.32 M_{\odot} \left(\frac{T}{10 \text{ K}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_H}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_0}{10^6 \text{ cm}^3} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

con μ peso molecolare medio.

I valori di n e di T nell'equazione sono abbastanza in linea con quelli delle nubi nel ISM: ciò è rassicurante!



Jeans' swindle

- Abbiamo accennato a un problema fisico nei calcoli di Jeans. Il punto è che è irrealistico supporre che

$$\nabla \phi_0 = 0$$

perché allora

$$\nabla^2 \phi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi G \rho_0 = 0.$$

- Senza l'assunzione $\nabla \phi = 0$, i calcoli si complicano, ma il risultato non cambia qualitativamente.
- La soluzione corretta dipende però dal dettaglio della geometria della nube.



Meccanismi di collasso delle nubi



Massa di Jeans

- Quando nubi molto massive iniziano a collassare, i parametri fisici cambiano e anche M_J .
- In certi casi può avvenire che alcune regioni della nube perdano stabilità ed inizino a loro volta a collassare. Si ha una **frammentazione** della nube, con formazione di più stelle.
- Questo è il probabile meccanismo di formazione degli ammassi aperti.



Rotazione della nube

- In generale, la nube in collasso sarà dotata anche di momento angolare, che noi abbiamo trascurato.
- Se il momento angolare si conserva durante la contrazione, allora:

$$\frac{2}{5}MR^2\omega = \frac{2}{5}MR_0^2\omega_0,$$

(il momento d'inerzia è $I = \frac{2}{5}MR^2$ per una sfera piena) da cui

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2.$$



Rotazione della nube

- All'equatore l'accelerazione è

$$a(R) = G \frac{M(R)}{R^2} - \omega^2 R = G \frac{M(R)}{R^2} - \omega_0^2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^4 R.$$

- La rotazione fermerà il collasso quando $a(R) = 0$, ossia

$$GM(R) = (\omega_0 R_0)^2 \frac{R_0^2}{R},$$

il che avviene quando $\frac{R}{R_0} = \frac{(\omega_0 R_0)^2 R_0}{GM(R)}$.



Rotazione della nube

- Per valori tipici di $\omega_0 R_0 = 1 \text{ km/s} = 10^5 \text{ cm/s}$ e di M_J e R_J vale che

$$\frac{R}{R_0} \approx 0.6.$$

- Quindi quando il raggio si è ridotto della metà, la rotazione frena il collasso nella direzione \perp all'asse di rotazione.
- Nella direzione parallela all'asse, il collasso può proseguire indisturbato. La nube si appiattisce e forma un disco, dove molta della massa non raggiunge il centro e non forma la stella.



Dove nascono le stelle?

- Stimiamo il raggio di Jeans ($R_J \propto \sqrt{T/\rho}$) in due casi distinti:
 1. Nube molecolare H_2 : $T \sim 10 \text{ K}$, $n \sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$.
 2. Nube di HI: $T \sim 100 \text{ K}$, $n \sim 1 \text{ cm}^{-3}$.
- Si ha che

$$\frac{R_{J, \text{HI}}}{R_{J, \text{H}_2}} \sim 2 \sqrt{\frac{100 \text{ K}}{10 \text{ K}} \frac{10^3 \text{ cm}^{-3}}{1 \text{ cm}^{-3}}} = 200.$$

- È quindi più facile formare stelle in **nubi molecolari**.



Formazione stellare

- Il collasso rilascia energia gravitazionale che può:
 1. aumentare l'energia interna, modificando la pressione;
 2. essere irradiata all'esterno se il tempo di raffreddamento è minore di τ_{ff} .
- Nel secondo caso la contrazione è isoterma. (Questa era l'ipotesi di Jeans, da cui nel caso di piccole oscillazioni deriva la relazione $p = \rho c_s^2$ che abbiamo usato la scorsa lezione).



Formazione stellare

- Ma all'aumento di ρ corrisponde un aumento dello spessore ottico della nube, e a un certo momento il collasso cessa di essere isothermico, diventando adiabatico:

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad T \propto \frac{1}{V^{\gamma-1}} \propto \rho^{\gamma-1}.$$

- Di conseguenza,

$$M_J \propto \sqrt{\frac{T^3}{\rho}} \propto \sqrt{\rho^{3\gamma-4}}.$$



Formazione stellare

$$M_J \propto \sqrt{\rho^{3\gamma-4}}.$$

- Se $\gamma > 4/3$ (es. gas ideale), M_J aumenta all'aumentare della densità, e quindi il collasso potrebbe interrompersi prima che si siano innescate le reazioni nucleari all'interno della stella.
- Quando ciò avviene, la massa di Jeans per una nube di 10^2 K è circa $0.2 M_{\odot}$: quindi il processo permette di formare **una serie di masse dell'ordine di quella solare**, ma non molto inferiori.

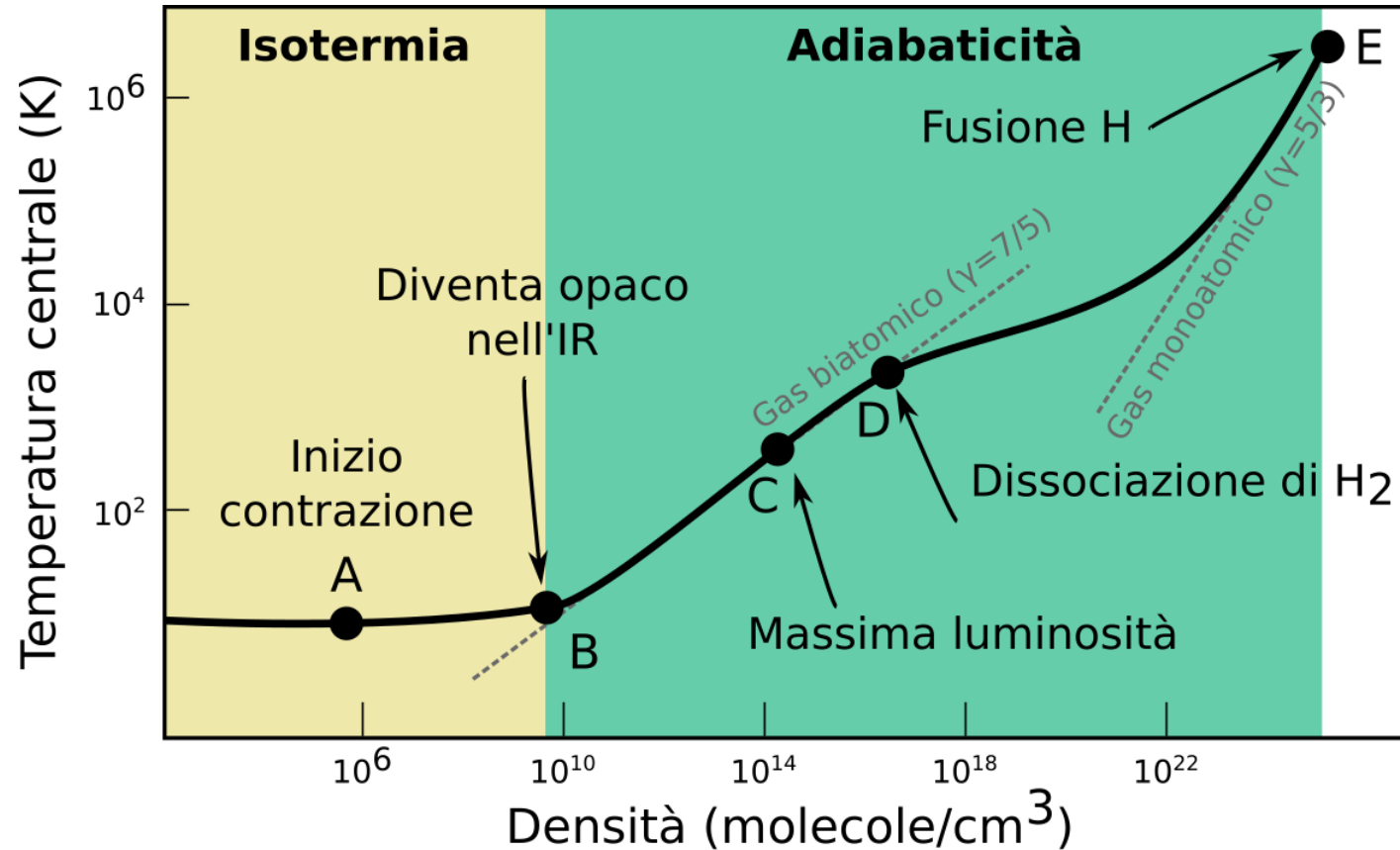


Fotoionizzazione

- Se nel regime adiabatico l'energia non viene rilasciata all'esterno della nube, dove va a finire?
- In parte è usata per aumentare la temperatura T , in parte per fotoionizzare le specie neutre (H, He, H₂).
- Questo determina il percorso della protostella sul diagramma HR.



Contrazione della nube



Modello numerico del collasso da una nube a una protostella $M \sim 1 M_{\odot}$.



Luoghi di formazione stellare

Come già anticipato in precedenza, per individuare regioni H_2 si può usare CO come tracciante:

1. Si stima la densità colonnare di CO dall'emissione delle righe rotazionali;
2. Si deriva la densità colonnare di H_2 tramite un «X-factor»; vedi Bolatto, Wolfire & Leroy, Annu. Rev. Astron. Astrophys. 2013. 51:207–68 per una review.



Mappa di CO (Planck 2013)

A&A 571, A13 (2014)
DOI: [10.1051/0004-6361/201321553](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321553)
© ESO 2014

Planck 2013 results

**Astronomy
&
Astrophysics**
Special feature

***Planck* 2013 results. XIII. Galactic CO emission**

Received 22 March 2013 / Accepted 21 March 2014

ABSTRACT

Rotational transition lines of CO play a major role in molecular radio astronomy as a mass tracer and in particular in the study of star formation and Galactic structure. Although a wealth of data exists for the Galactic plane and some well-known molecular clouds, there is no available high sensitivity all-sky survey of CO emission to date. Such all-sky surveys can be constructed using the *Planck* HFI data because the three lowest CO rotational transition lines at 115, 230 and 345 GHz significantly contribute to the signal of the 100, 217 and 353 GHz HFI channels, respectively. Two different component separation methods are used to extract the CO maps from *Planck* HFI data. The maps obtained are then compared to one another and to existing external CO surveys. From these quality checks the best CO maps, in terms of signal to noise ratio and/or residual contamination by other emission, are selected. Three different sets of velocity-integrated CO emission maps are produced with different trade-offs between signal-to-noise, angular resolution, and reliability. Maps for the CO $J = 1 \rightarrow 0$, $J = 2 \rightarrow 1$, and $J = 3 \rightarrow 2$ rotational transitions are presented and described in detail. They are shown to be fully compatible with previous surveys of parts of the Galactic plane as well as with undersampled surveys of the high latitude sky. The *Planck* HFI velocity-integrated CO maps for the $J = 1 \rightarrow 0$, $J = 2 \rightarrow 1$, and $J = 3 \rightarrow 2$ rotational transitions provide an unprecedented all-sky CO view of the Galaxy. These maps are also of great interest to monitor potential CO contamination of the *Planck* studies of the cosmological microwave background.

Key words. ISM: molecules



Mappa di CO (Planck 2013)

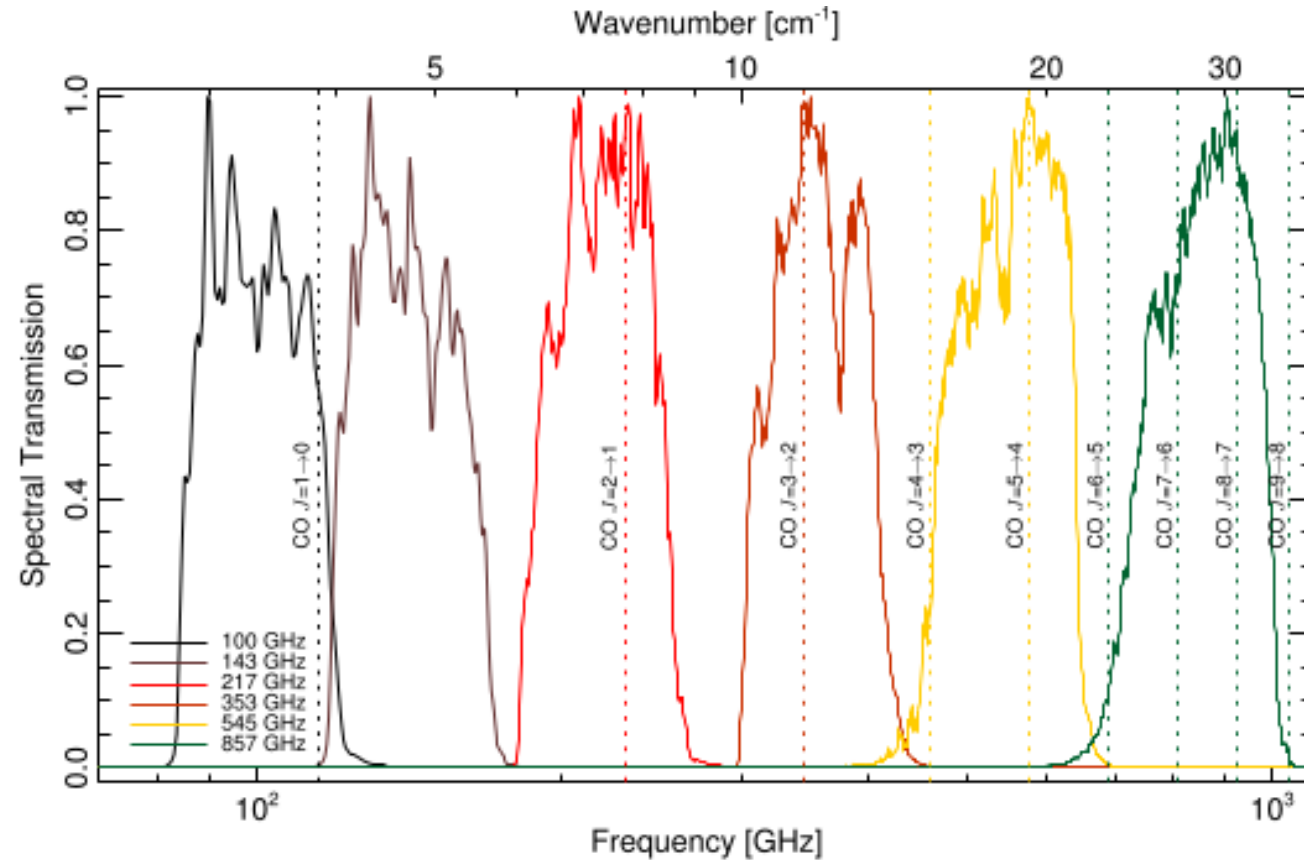
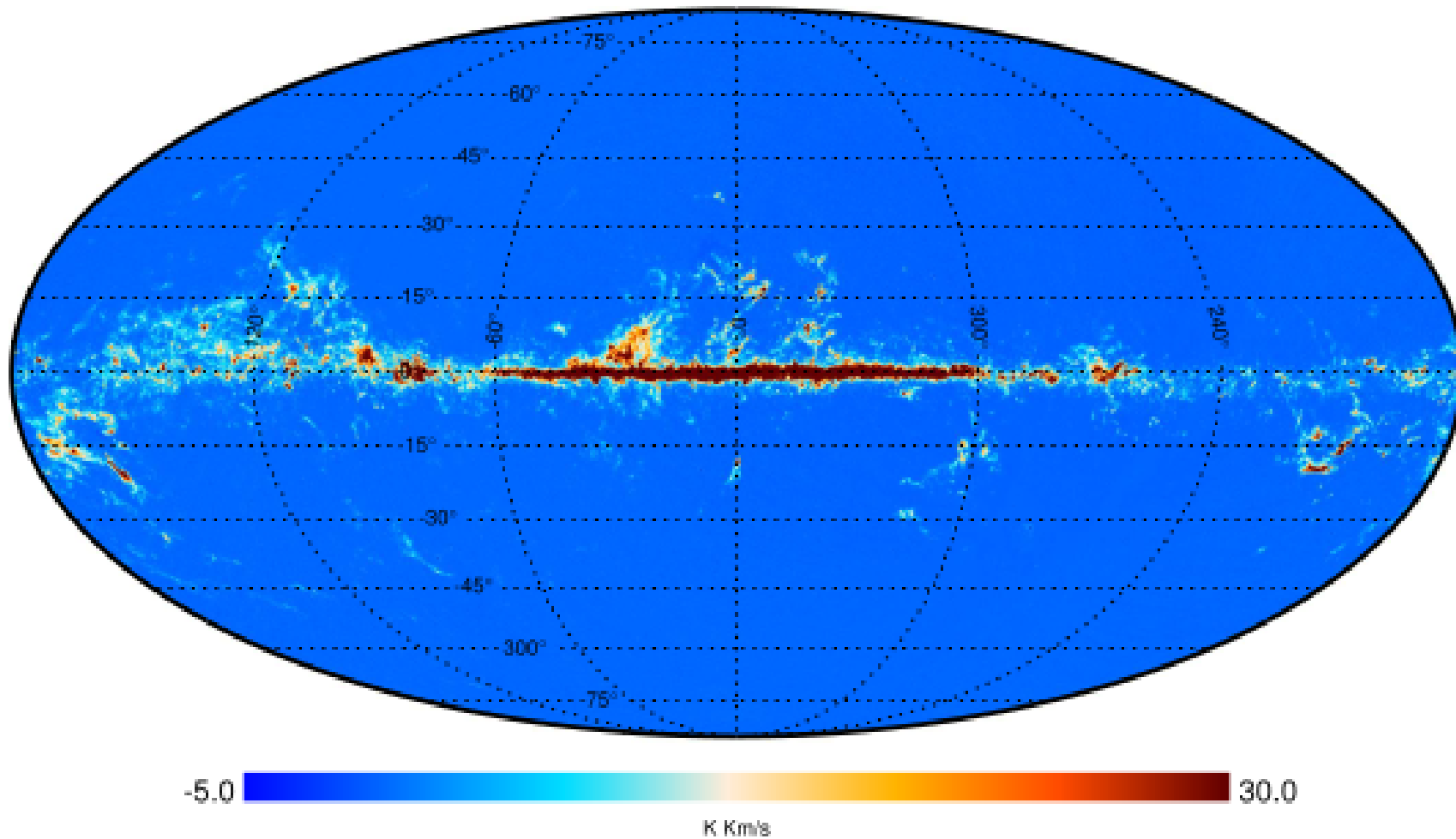


Fig. 1. The average spectral response for each of the HFI frequency bands. The vertical bars represent the CO rotational transitions.



Mappa di CO (Planck 2013)

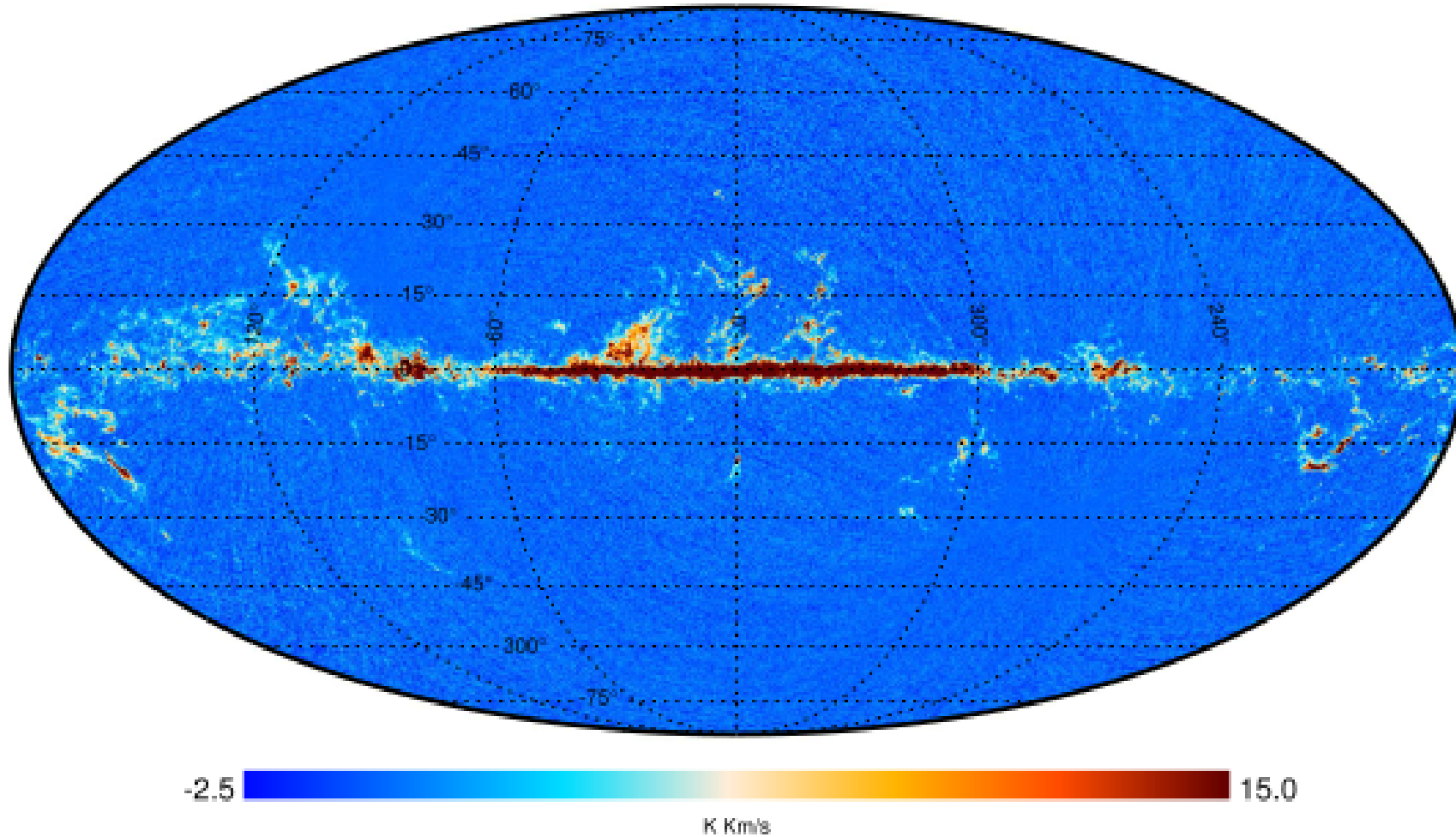
Type 3 J=1-0 CO map





Mappa di CO (Planck 2013)

Type 2 J=2-1 CO map



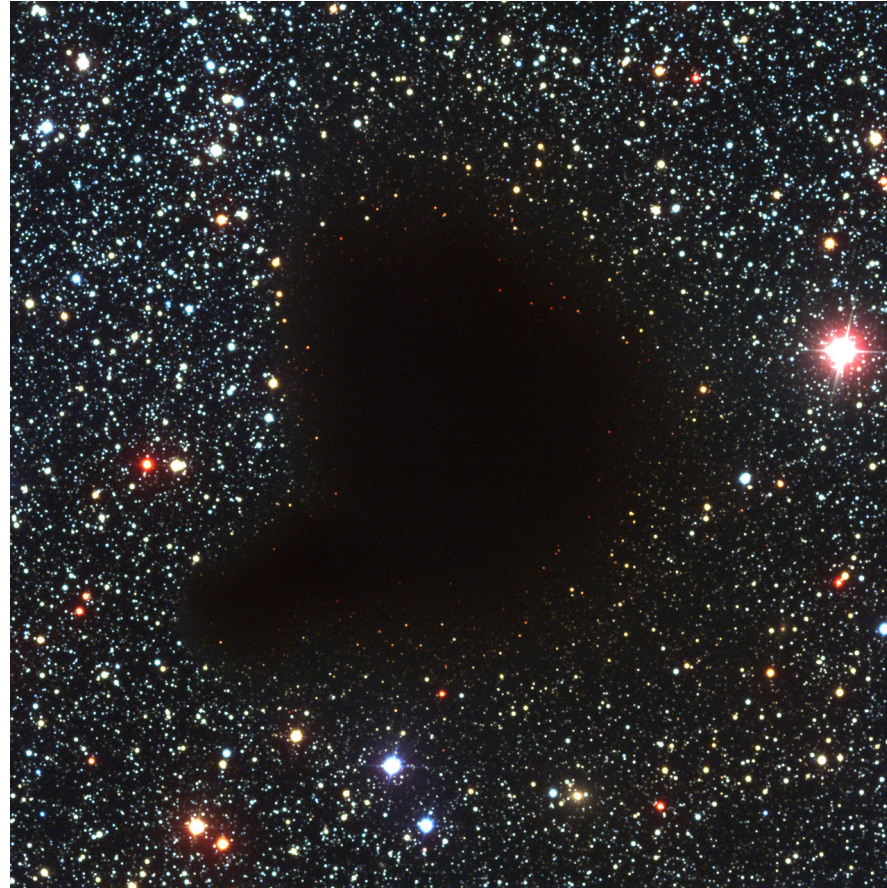


Cold cores

- Abbiamo visto che la temperatura della polvere è dell'ordine di 100 K se abbastanza vicina a una stella giovane.
- Nelle nubi di **gas** la schermatura delle regioni esterne può permettere l'esistenza di regioni interne più fredde. Si raggiungono temperature di ~ 10 K, con densità $n \sim 10^{4\div 5} \text{ cm}^{-3}$.
- Anche queste regioni sono probabilmente **luoghi di formazione stellare** (ricordare che $M_J \propto T^{3/2}$).



Cold cores



Al centro di Barnard 68 («Black cloud») c'è un cold core.



Regioni HII



Regioni HII

- Una stella massiccia emette nel visibile e nel UV.
- Siccome per ionizzare HI occorre $E = h\nu > 13.6 \text{ eV}$ ($\lambda < 91.2 \text{ nm}$), le stelle OB hanno la possibilità di ionizzare HI.
- Quando la maggior parte dell'idrogeno è ionizzato, si parla di **regioni HII**.



Raggio di Strömgren

- Le stelle OB riescono ad ionizzare HI solo in una regione di volume limitato. Stimiamo le dimensioni di questo volume.
- Il tasso di ionizzazione è

$$R_i = N_{\text{UV}},$$

con $[R_i] = \text{ionizzazioni/s}$ e

$$N_{\text{UV}} = \int_{13.6 \text{ eV}}^{\infty} N(\nu) d\nu$$

($N_{\text{UV}} = \text{fotoni/s}$, se efficienza è 100 %).



Raggio di Strömgren

- L'efficienza è verosimilmente del 100 %, perché per la ionizzazione la sezione d'urto è

$$\sigma \sim 10^{-17} \text{ cm}^2.$$

- Per densità $n_H \sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$ si ha che il cammino libero medio di un fotone è

$$\lambda \sim \frac{1}{n_H \sigma} \sim 10^{14} \text{ cm} = 6 \text{ AU},$$

da confrontarsi con le dimensioni delle regioni HII (da 0.1 a 100 pc).



Raggio di Strömgren

- Il tasso di ricombinazione è

$$R_{\text{rec}} = \alpha(T) n_e n_p V = \alpha(T) n_p^2 \frac{4\pi}{3} r_S^3,$$

con r_S detto **raggio di Strömgren** e $\alpha(T)$ coefficiente.

- All'equilibrio $R_i = R_{\text{rec}}$, da cui

$$r_S = \left(\frac{3}{4\pi\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} N_{\text{UV}}^{\frac{1}{3}} n_p^{-\frac{2}{3}}.$$

Le regioni HII più dense sono più piccole (tipicamente, ~ 20 pc).



Raggio di Strömgren

Date le dimensioni R della nube, possono valere due casi:

1. Se $R > r_S$, la nube è *density bounded*: la nube HII transisce progressivamente nel mezzo HI che la circonda;
2. Se $R < r_S$, la nube è *ionization bounded*: tutta la nube è ionizzata.



Raggio di Strömgren

- La temperatura tipica delle regioni HII è $\sim 10^4$ K, contro i ~ 100 K dell'ambiente circostante. La densità invece non mostra discontinuità ($n \sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$).
- Nelle nubi sono presenti anche altri elementi, ciascuno con la propria energia di ionizzazione. Ad esempio:
 1. He: $E_i = 24.6 \text{ eV}$, quindi le regioni HeII sono meno estese di HII;
 2. C: $E_i = 11.3 \text{ eV}$, quindi qui vale il contrario.



Rilevare le regioni HII

- L'emissione di regioni HII è dovuta al brehmsstrahlung (diffusione free-free), con uno spettro

$$T_e \propto \nu^{-\alpha}, \quad \text{con } \alpha \approx 2.1.$$

- Si osserva che l'emissione è concentrata sul piano Galattico.



Rilevare le regioni HII

- Un modo per distinguere lo spettro free-free da altre emissioni (es. spinning dust) è quello di correlarlo con emissione $H\alpha$ ($n = 3 - 2$, serie di Balmer).
- $H\alpha$ viene emessa nelle regioni di ionizzazione: quando un HII (protone) cattura un e^- , durante la diseccitazione c'è una certa probabilità ($\sim 50\%$) che avvenga la transizione $n = 3 - 2$ ($H\alpha$). Quindi $H\alpha$ segnala la presenza di ionizzazione.



Rilevare le regioni HII

Mon. Not. R. Astron. Soc. **341**, 369–384 (2003)

Towards a free–free template for CMB foregrounds

C. Dickinson,[★] R. D. Davies and R. J. Davis

Jodrell Bank Observatory, Department of Physics & Astronomy, University of Manchester, Macclesfield, Cheshire SK11 9DL

Accepted 2003 January 16. Received 2002 October 24; in original form 2002 February 15

ABSTRACT

A full-sky template map of the Galactic free–free foreground emission component is increasingly important for high-sensitivity cosmic microwave background (CMB) experiments. We use the recently published H α data of both the northern and southern skies as the basis for such a template.

The first step is to correct the H α maps for dust absorption using the 100- μ m dust maps of Schlegel, Finkbeiner & Davis. We show that for a range of longitudes, the Galactic latitude distribution of absorption suggests that it is 33 per cent of the full extragalactic absorption. A reliable absorption-corrected H α map can be produced for ~ 95 per cent of the sky; the area for which a template cannot be recovered is the Galactic plane area $|b| < 5^\circ$, $l = 260^\circ$ – 0° – 160° and some isolated dense dust clouds at intermediate latitudes.

The second step is to convert the dust-corrected H α data into a predicted radio surface brightness. The free–free emission formula is revised to give an accurate expression (1 per cent) for the radio emission covering the frequency range 100 MHz–100 GHz and the electron temperature range 3000–20 000 K. The main uncertainty when applying this expression is the variation of electron temperature across the sky. The emission formula is verified in several extended H II regions using data in the range 408–2326 MHz.

A full-sky free–free template map is presented at 30 GHz; the scaling to other frequencies is given. The Haslam et al. all-sky 408-MHz map of the sky can be corrected for this free–free component, which amounts to a ≈ 6 per cent correction at intermediate and high latitudes, to provide a pure synchrotron all-sky template. The implications for CMB experiments are discussed.

Key words: radiation mechanisms: thermal – dust, extinction – H II regions – cosmic microwave background – radio continuum: ISM.



Rilevare le regioni HII

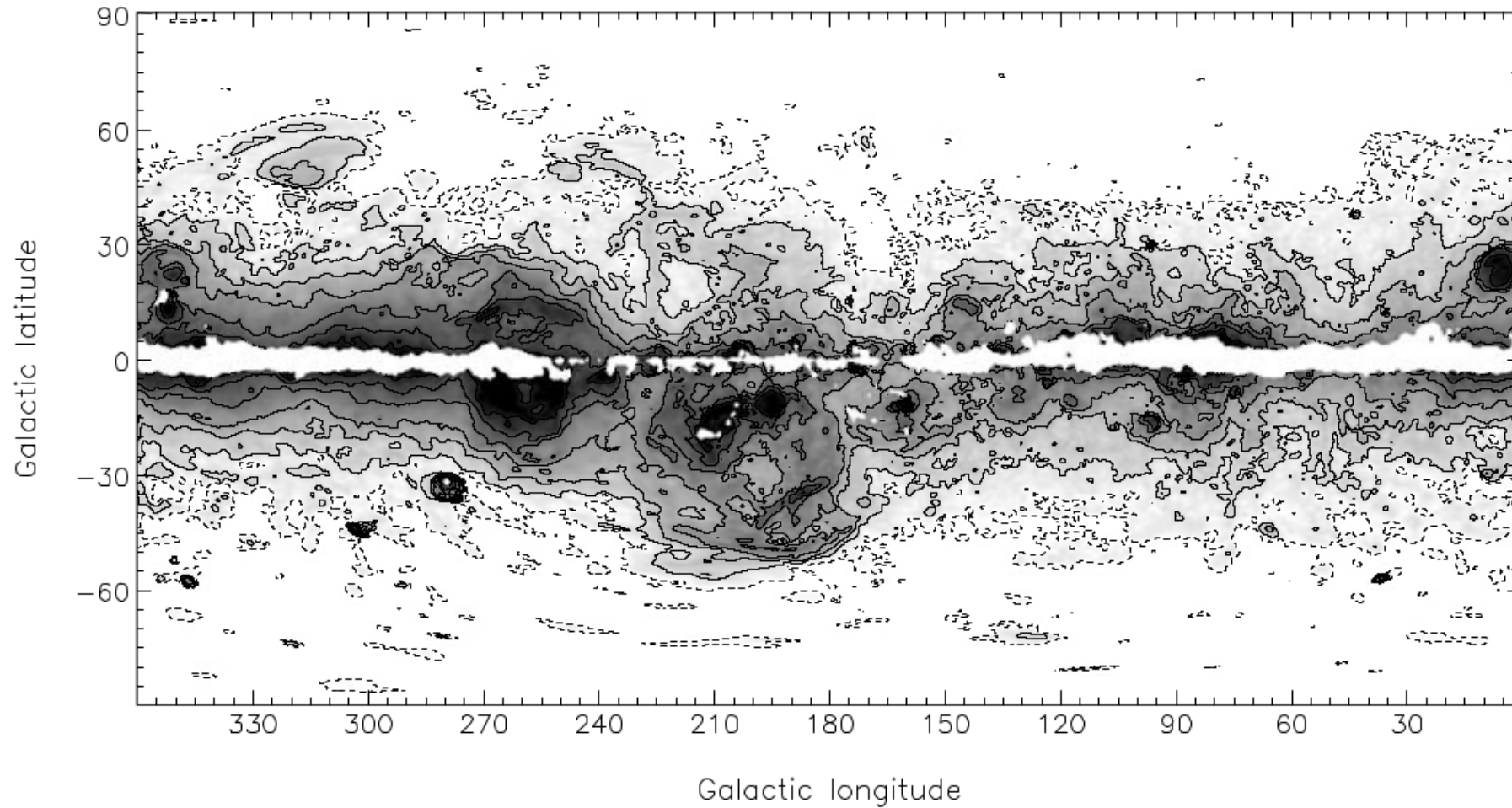


Figure 9. Free-free brightness temperature template at 30 GHz with 1° resolution. Grey-scale is logarithmic from 5 to 1000 μK . Regions where the template is unreliable are masked white. Contours are given at 5 (dot-dashed), 10, 20, 40, 100, 200 and 500 μK .