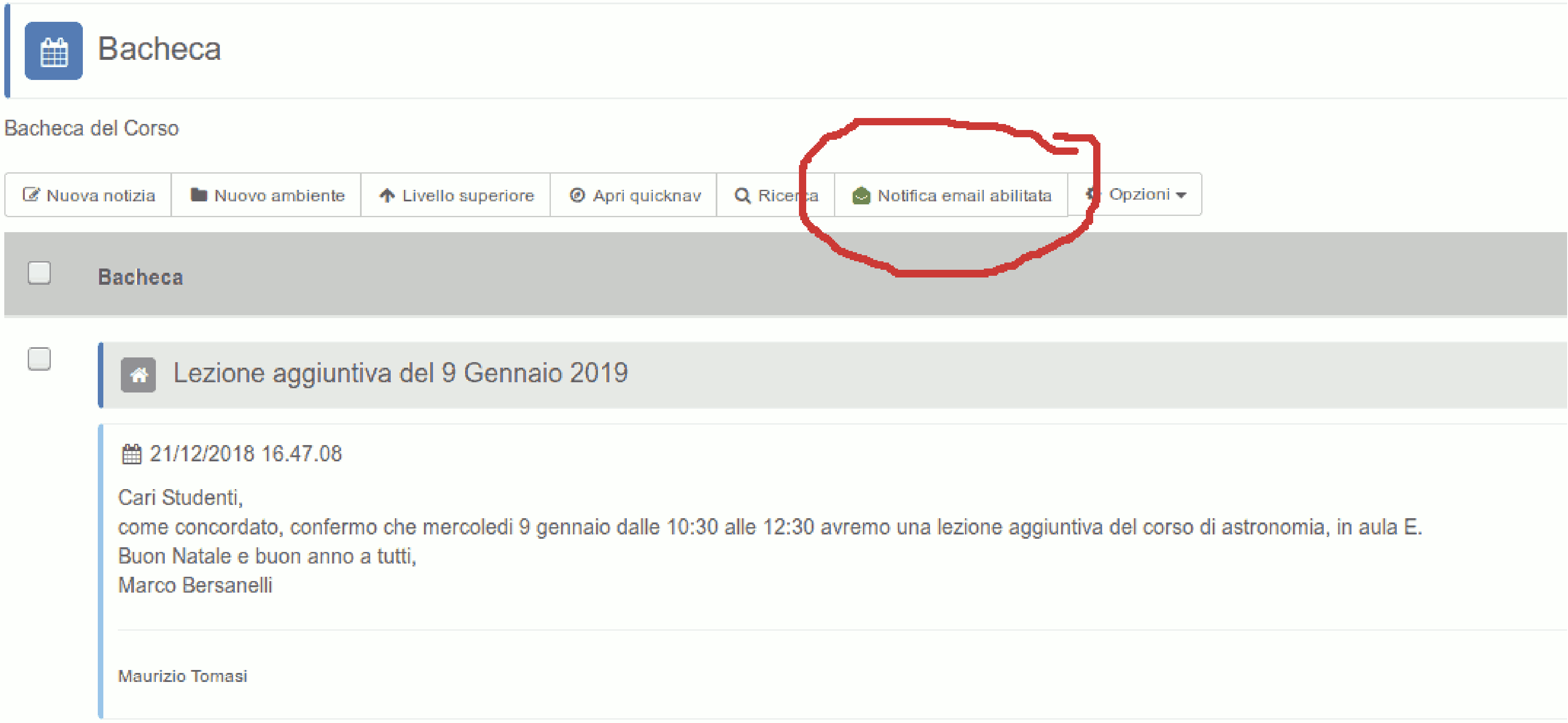
Lezione di Astronomia II – 1

Maurizio Tomasi (maurizio.tomasi@unimi.it)

21 marzo 2024

Come si usa Ariel

Per ricevere le notifiche via email, occorre abilitarle *in tutte le sezioni del sito*.



Valutazioni sulla didattica

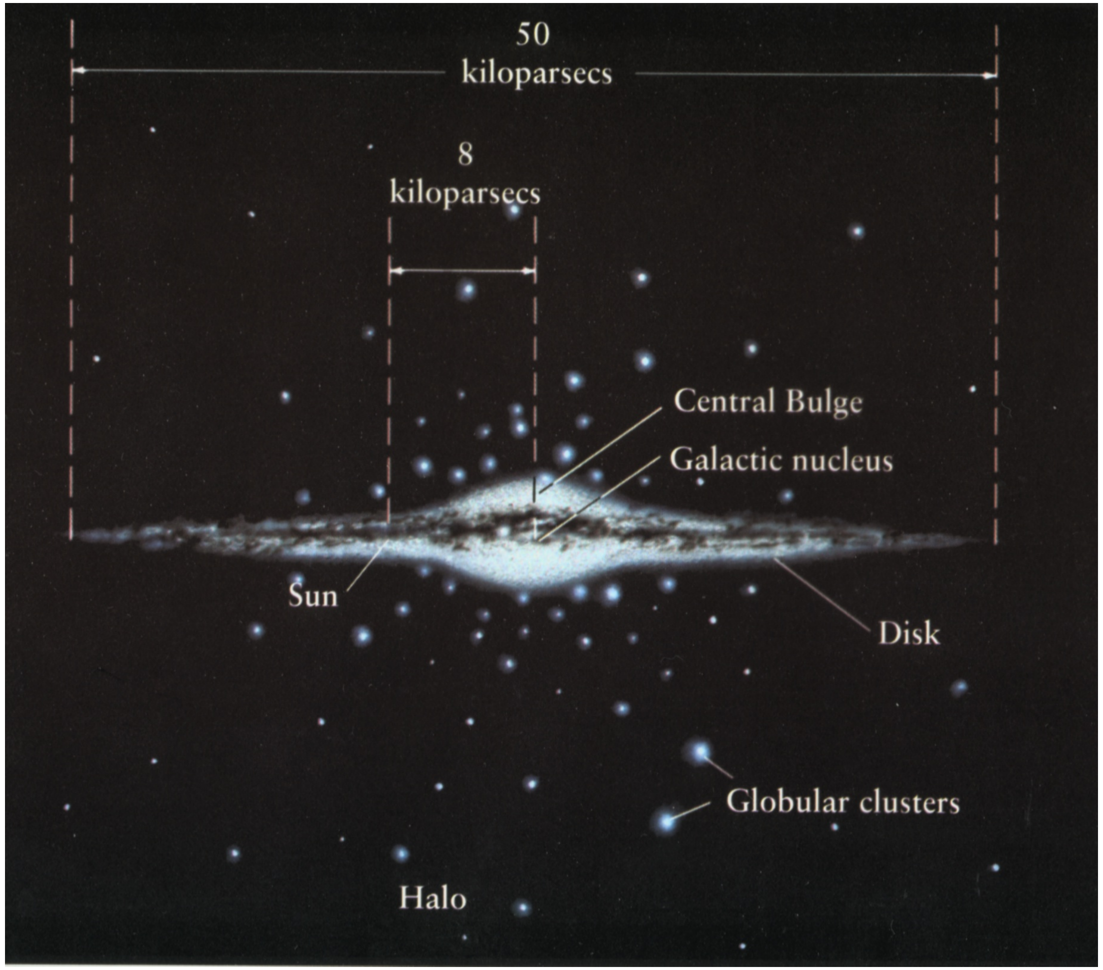
- Tre criticità evidenziate dagli studenti:

  1. Parlo troppo in fretta!
  2. Faccio intervenire poco.
  3. Le slide sono a volte impaginate in modo strano.

- Quest’anno ho cercato di implementare una soluzione per ciascun problema.

La Via Lattea

Struttura della Via Lattea

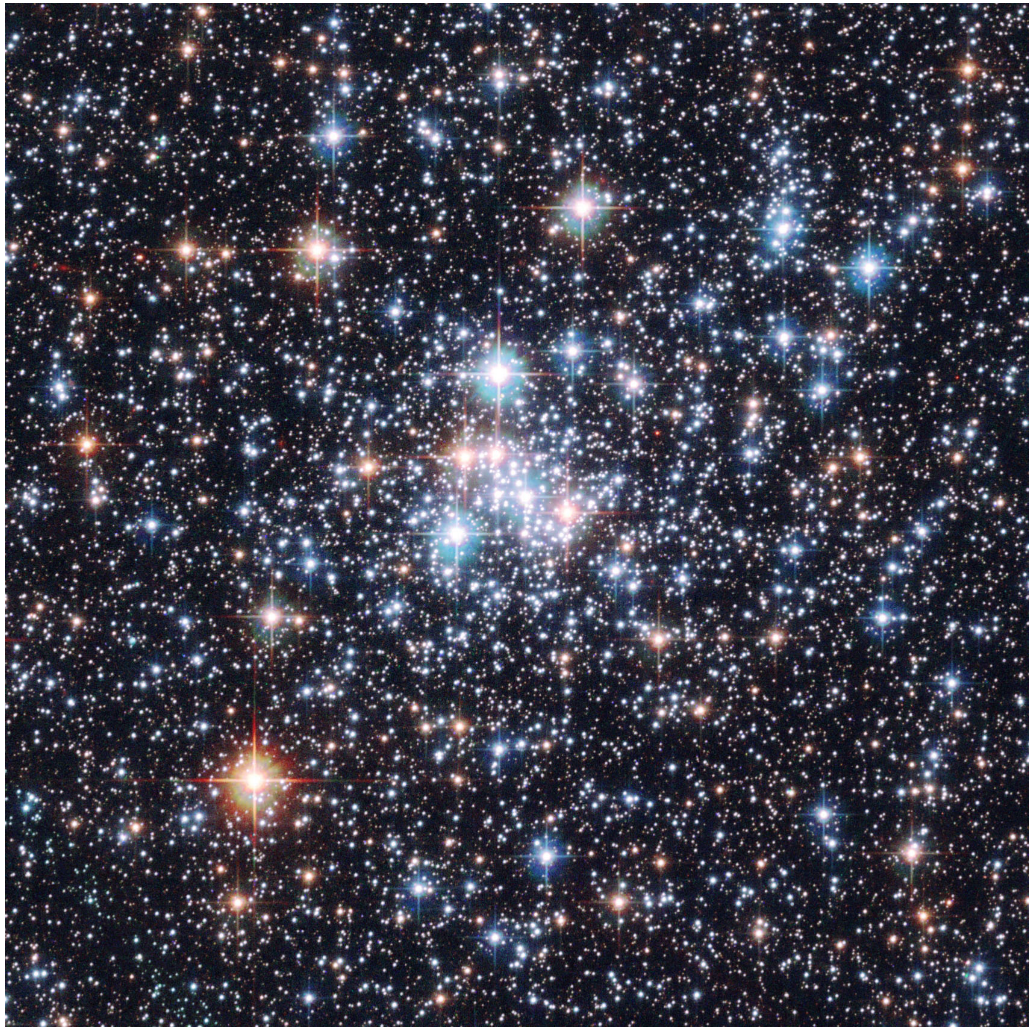


Masse e dimensioni

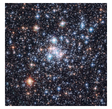
Componente	Massa	Forma e dimensioni
Alone stellare	$10^9\, M_\odot$	Sfera ($r > 20\,\mathrm{kpc}$)
Disco (gas)	$10^{10}\, M_\odot$	Disco ($r = 25\,\mathrm{kpc}, h = 0.15\,\mathrm{kpc}$)
Rigonfiamento centrale	$10^{10}\, M_\odot$	Ellissoide ($6 \times 2 \times 2\,\mathrm{kpc}$)
Disco (stelle)	$10^{11}\, M_\odot$	Disco ($r = 15\,\mathrm{kpc}, h = 1\,\mathrm{kpc}$)
Alone materia oscura	$10^{12}\, M_\odot$	Sfera ($r > 60\,\mathrm{kpc?}$)

Introduzione agli ammassi stellari

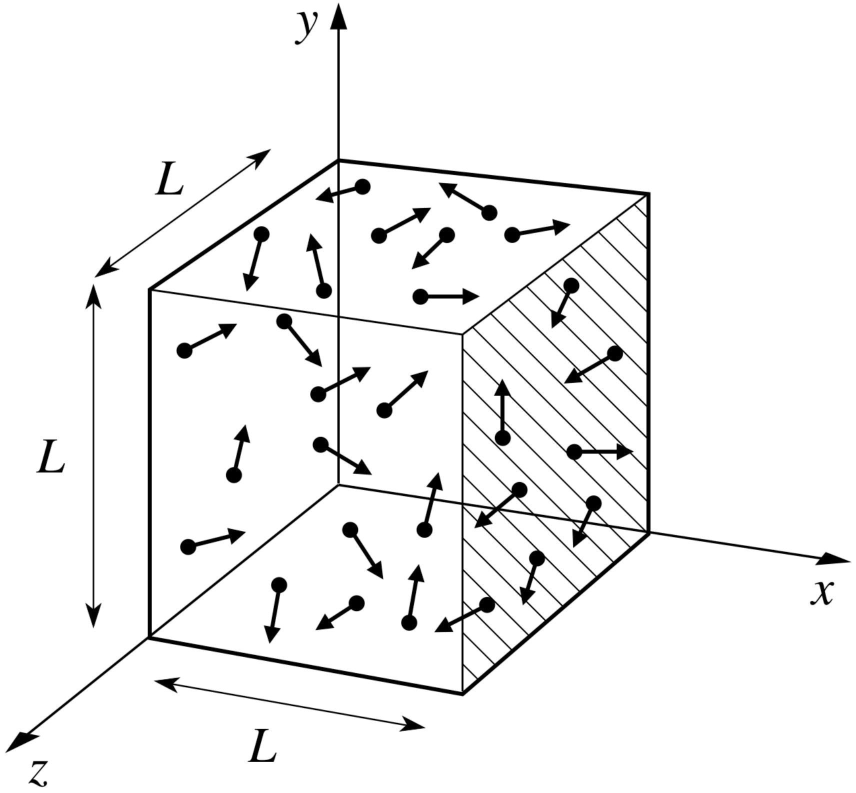
NGC 290 (ammasso aperto)



M22 (ammasso globulare)

	Ammassi aperti	Ammassi globulari
		
# di stelle	10^3–10^4	10^4–10^6
Dimensioni	10 pc	20–100 pc (core: 5 pc)
Gas e polvere?	Sì	No
Nebulose planetarie?	No	Sì
# di ammassi noti	10^3	~160
Dove?	Disco	Alone stellare (~1% della massa totale)

Termodinamica e astrofisica



Essendo sistemi composti da molte particelle, possiamo pensare di usare la termodinamica classica per descriverli?

Termodinamica e astrofisica

- **NO!**
- La teoria del gas ideale funziona solo in sistemi privi di forze a lungo raggio.
- Da questo punto di vista la gravità è un problema!

> *Properties of systems with long range interactions are still poorly understood despite being of importance in most areas of physics.*

(*Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long Range Interactions*, Springer)

Teorema del viriale

- Esiste uno strumento adatto per la descrizione di sistemi gravitazionalmente legati: il *teorema del viriale*.
- Consideriamo un sistema fisico di N particelle confinato in un volume V da forze interne.
- Ogni particella si trova nel punto P_i, la forza risultante su di essa è $\vec{F}_i$, e K_i è la sua energia cinetica.

Medie temporali

- Le quantità $P_i, \vec{F}_i$ e K_i variano nel tempo
- Siamo però interessati più al loro **valore medio** che alla loro evoluzione istante per istante.
- Data una quantità $f = f(t)$ dipendente dal tempo, il valore di

$$\langle f \rangle_t = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t$$

è la media temporale di f.

Definizione di «viriale»

- Data un'origine del sistema di riferimento O, si dice «viriale» la quantità

$$G \equiv \sum_{i=1}^N (P_i - O) \cdot \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{p}_i,$$

  dove $\vec{r}_i = P_i - O$ è il vettore che punta verso la particella i-esima.

- Se le particelle si trovano in un volume limitato V, allora

  1. G è una quantità limitata;
  2. Dopo un certo tempo, G tende a diventare costante.

Limitatezza del viriale

- Se il sistema è limitato in un volume V e la sua energia è finita, allora esistono degli estremi superiori P e R per la quantità di moto p_i e r_i.
- Di conseguenza,

$$|G| = \left|\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \vec{p}_i\right| \leq \sum_{i=1}^{N} |\vec{r}_i| \cdot |\vec{p}_i| \leq NRP,$$

e l'ipotesi è dimostrata.

Variazione nel tempo del viriale

- La variazione nel tempo del viriale ha media nulla:

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle\dot{G}\right\rangle_t\right| &= \left|\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \dot{G}(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\lim_{\tau\to\infty}\frac{G(\tau)-G(0)}{\tau}\right| \\
&\le \lim_{\tau\to\infty}\frac{2NRP}{\tau} = 0.
\end{aligned}
$$

- Dopo un certo *tempo di rilassamento*, G diventa circa costante.

Teorema del viriale

Il teorema del viriale dice che in un sistema limitato in un volume V, passato il tempo di rilassamento, vale l'uguaglianza

$$2\left\langle K\right\rangle_t = -\left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle_t ,$$

dove $K = \sum_{i=1}^{N} K_i$ è l'energia cinetica totale del sistema.

Dimostrazione del teorema

Usando la proprietà $\left\langle \dot{G} \right\rangle_t = 0$ si ottiene subito la tesi:

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \vec{p}_i \right\rangle_t = 0,$$

$$\left\langle 2 \sum_{i=1}^{N} K_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle_t = 0,$$

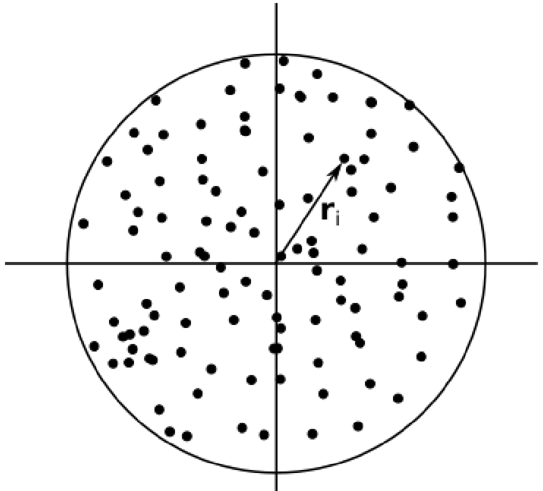
$$2 \left\langle \sum_{i=1}^{N} K_i \right\rangle_t = - \left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle_t .$$

Caso di forze centrali

Dimostriamo ora che per forze con potenziale $U_i = kr_i^{\alpha}$ («forze centrali») in sistemi sferici il teorema del viriale si riduce a:

$$\alpha \langle U \rangle_t = 2 \langle K \rangle_t \,,$$

dove $U = \sum_{i=1}^{N} U_i$ è l’energia potenziale totale.



$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla} U_i(r_i) = -\partial_r U_i(r_i)\,\hat{e}_r = -\alpha\,k\,r_i^{\alpha-1}\hat{e}_r,$$

implica che

$$\begin{aligned} 2\,\langle K\rangle_t &= -\left\langle \sum_{i=1}^N \vec{r}_i\cdot\vec{F}_i \right\rangle_t = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^N \vec{r}_i\cdot\vec{\nabla} U_i(r_i) \right\rangle_t = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^N \alpha\,k\,r_i^\alpha \right\rangle_t = \alpha\,\langle U_{\text{tot}}\rangle_t\,. \end{aligned}$$

Il viriale in sistemi gravitazionali

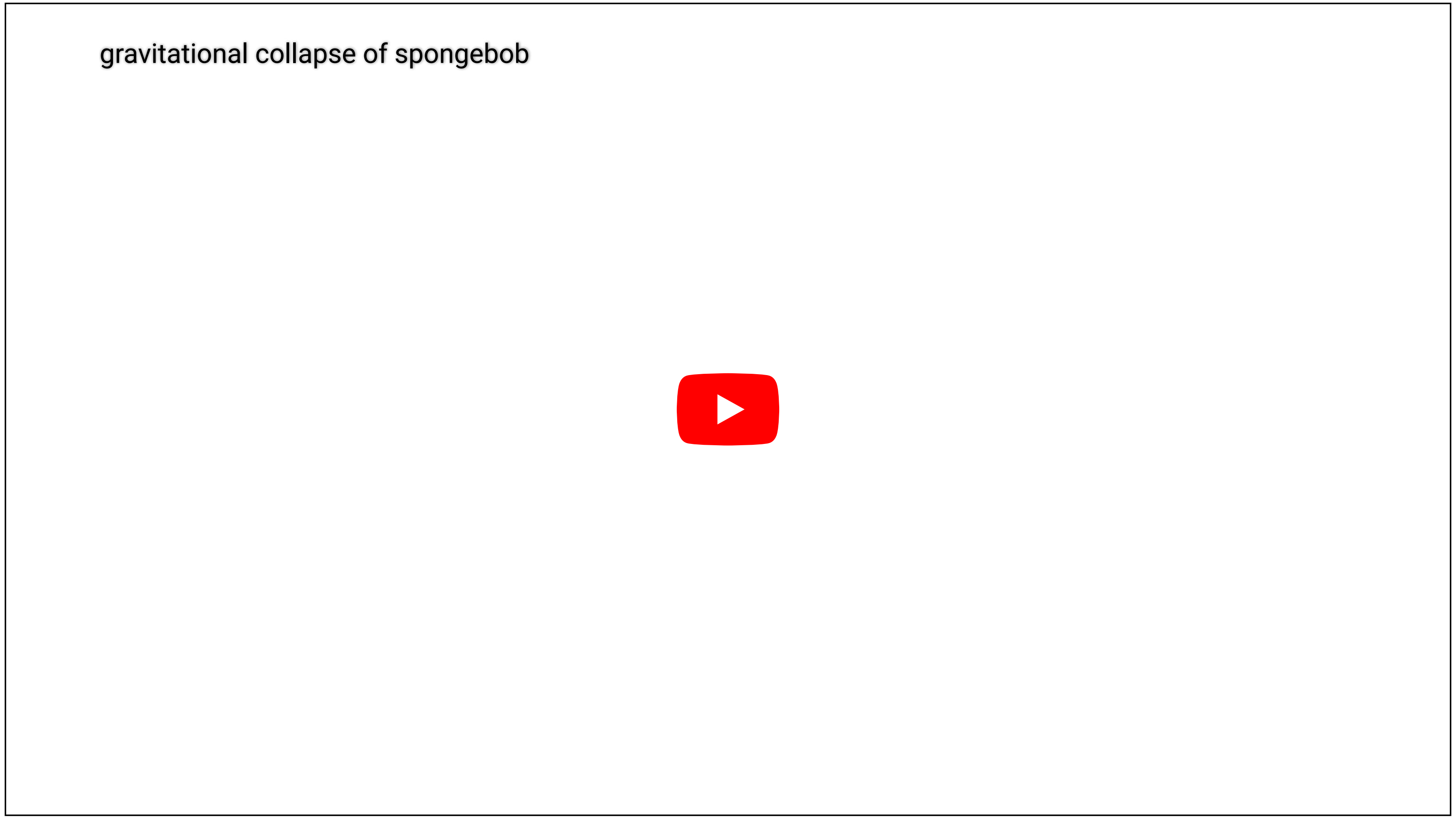
- In un sistema di corpi di massa m dove l'unica forza è quella gravitazionale, $U = kr^{-1}$ (con $k = -Gm^2$), e quindi $\alpha = -1$:

$$\left\langle U \right\rangle_t = -2 \left\langle K \right\rangle_t .$$

- In un sistema virializzato dominato dalla gravità, l'energia potenziale è *doppia* (in modulo) rispetto all'energia cinetica.
- (In realtà la relazione $U \propto r^{-1}$ vale solo lontano dal centro, dove invece $U \propto M(r)/r \propto r^2$ e il moto è come quello di una molla).

Sistemi “virializzati”

- Un sistema per cui vale il teorema del viriale si dice “virializzato”
- I sistemi virializzati dimostrano notevole simmetria, perché l’energia cinetica dei loro componenti si è distribuita statisticamente
- È una condizione simile a quella dell’equilibrio termodinamico
- La prossima animazione mostra un esempio 2D molto simpatico ed efficace



Gravitational collapse of Spongebob

Livello di energia potenziale

- Ricordate che l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva (deriva da un integrale indefinito).
- Il teorema del viriale assume però una costante ben precisa per U: siccome abbiamo supposto che $U = kr^{-1}$, significa che assumiamo che l'energia potenziale di i e j tenda a zero se le due particelle vengono allontanate indefinitamente.

Applicazioni del teorema (1/2)

- Come esempio, stimiamo la temperatura media del Sole usando il teorema del viriale.
- Il Sole è un sistema di volume sferico limitato, sicuramente rilassato, quindi il teorema è applicabile.

Applicazioni del teorema (1/2)

L'energia potenziale gravitazionale del Sole (sfera di raggio R) è

$$U = \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R},$$

mentre l'energia cinetica totale è

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{3}{2} kT$$

(assumiamo che la temperatura sia costante nell'interno).

Applicazioni del teorema (1/2)

Usando il teorema del viriale

$$2\left\langle K\right\rangle_t = -\left\langle U\right\rangle_t$$

otteniamo che la **temperatura viriale** è

$$T = \frac{1}{5}\frac{GM_\odot^2}{NkR_\odot} \sim 10^6 \div 10^7\,\mathrm{K}.$$

Essa corrisponde circa alla temperatura del nucleo.

Applicazioni del teorema (2/2)

- Calcoliamo ora l'energia media di legame per nucleone in un nucleo atomico.
- Anche in questo caso abbiamo un sistema di particelle ovviamente rilassato e confinato in un volume limitato, ma **non è classico**: proviamo comunque ad applicare il teorema del viriale.

Applicazioni del teorema (2/2)

- Un nucleo atomico ha raggio $R \sim 10^{-15}\,\mathrm{m}$.
- L'energia cinetica media classica $p^2/(2m)$ è stimabile dal principio di indeterminazione:

$$\Delta p_x \Delta x \sim \frac{\hbar}{2} \qquad \Rightarrow \qquad p_x \approx \frac{\hbar}{2R}.$$

- Siccome $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \approx 3p_x^2 \approx 3\hbar^2/4R^2$, allora

$$K \approx A\frac{p^2}{2m_p} \approx A\frac{3\hbar^2}{8R^2m_p} \sim A\frac{\hbar^2}{R^2m_p}.$$

Applicazioni del teorema (2/2)

Nell'ipotesi che $U \propto r^\alpha$, e che $|\alpha|$ non sia troppo distante dall'unità, dal teorema del viriale vale che $K \sim U$ (stesso ordine di grandezza), ossia

$$A \frac{\hbar^2}{R^2 m_p} \sim U$$

Noi siamo interessati all'energia di legame **per nucleone**, ossia U/A:

$$U/A \sim \frac{\hbar^2}{R^2 m_p} \sim 10\,\mathrm{MeV/nucleone}.$$

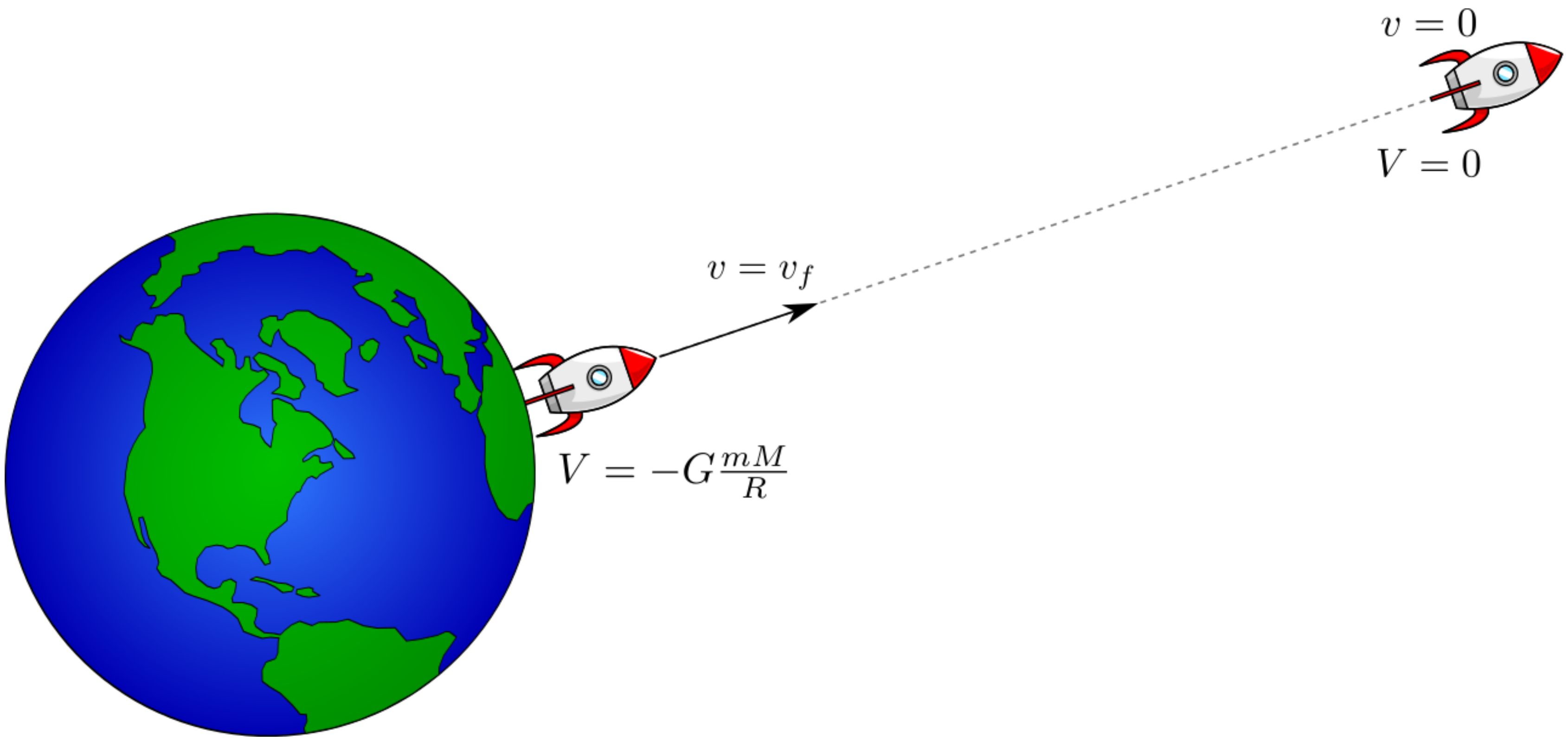
Dinamica degli a.g.

- Gli ammassi globulari sono a simmetria sferica, quindi virializzati.
- Usando il teorema del viriale, calcoliamo le seguenti quantità per un ammasso tipico:
  1. Velocità di fuga;
  2. Velocità quadratica media;
  3. Massa.

Velocità di fuga

- È sensato supporre che un ammasso globulare sia legato? Per rispondere a questo, dobbiamo stimare la velocità di fuga.
- Se la velocità media delle stelle fosse maggiore della velocità di fuga, allora l'ammasso non potrebbe essere legato: «evaporerebbe» lasciando sfuggire le sue stelle nello spazio.

Velocità di fuga



Per stimare la velocità di fuga v_f si impone la conservazione dell'energia tra i due istanti mostrati in figura.

Velocità di fuga

- Nel caso di una stella posta inizialmente a una distanza R dal centro di massa dell'ammasso, l'equazione di conservazione dell'energia diventa:

$$\frac{1}{2} M_* v_f^2 - G \frac{M_* \, M_{\rm GC}}{R} = 0,$$

- Se $M_{\rm GC} \sim 10^6 \, M_\odot$ e $R \sim 10\,{\rm pc}$, si ha che

$$v_f = \sqrt{\frac{2 G M_{\rm GC}}{R}} \sim 30\,{\rm km/s}.$$

- Notate che per una particella che sfugge l'energia totale è **nulla**.

Velocità quadratica media

Vogliamo calcolare la velocità (quadratica) media delle stelle in un ammasso globulare. Questa quantità è legata all'energia cinetica K:

$$
\begin{aligned}
K &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} M_* v_i^2 = \frac{1}{2} M_* N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \\
&= \frac{1}{2} M_{\mathrm{GC}} v_{\mathrm{rms}}^2
\end{aligned}
$$

Velocità quadratica media

Di conseguenza, dal teorema del viriale

$$2\left\langle K\right\rangle_t = -\left\langle U\right\rangle_t = -\left\langle\frac{3}{5}\frac{GM_{\mathrm{GC}}^2}{R}\right\rangle_t$$

abbiamo che

$$v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{3GM_{\mathrm{GC}}}{5R}} \sim 15\,\mathrm{km/s}.$$

Velocità di fuga e velocità quadratica media

Dal momento che

$$\left(v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{3GM_{\mathrm{GC}}}{5R}} \right) < \left(v_f = \sqrt{\frac{2GM_{\mathrm{GC}}}{R}} \right),$$

ciò conferma l’ipotesi che l’ammasso globulare (e in generale qualsiasi sistema gravitazionale virializzato) sia un sistema legato.

Massa viriale degli a.g.

- Calcoliamo ora la massa totale di un ammasso globulare da parametri osservativi.
- L'energia potenziale e cinetica dell'ammasso è

$$K = \frac{1}{2} M_{\mathrm{GC}} \left\langle v^2 \right\rangle_t , \quad U = -\frac{3}{5} \frac{G M_{\mathrm{GC}}^2}{R} .$$

- Dal fatto che $2 \langle K \rangle_t + \langle U \rangle_t = 0$ si ha che

$$M = \frac{5}{3G} \left\langle v^2 \right\rangle_t R.$$

Massa viriale degli a.g.

Per il nostro ammasso tipico con $R = 5\,\mathrm{pc}$ e $v = 15\,\mathrm{km/s}$ abbiamo che

$$M \sim 10^{39}\,\mathrm{g} \approx 5 \times 10^{5}\,M_{\odot}.$$

Questo valore della massa è detto **massa viriale**.

Tempo di rilassamento

Tempo di rilassamento

- Veniamo ora al tempo necessario perché un ammasso diventi dinamicamente rilassato.
- Inizialmente le stelle di un ammasso possono *non* essere rilassate: in tal caso le più veloci ($v > v_f$) escono dall'ammasso, e questa «evaporazione» cambia la distribuzione delle v.
- In più, le interazioni gravitazionali provocano una ridistribuzione dell'energia, che porta l'ammasso verso lo stato rilassato.

Tempo di rilassamento

- Per quantificare il tempo di rilassamento, possiamo supporre che esso sia il tempo necessario affinché ciascuna delle stelle dell'ammasso interagiscano un certo numero N di volte con le sue compagne.
- (Questo è analogo al modo in cui si studia un gas ideale che sta raggiungendo l'equilibrio termodinamico).

Tempo di rilassamento

- Possiamo definire un’interazione tra due stelle come la condizione in cui l’energia cinetica diventa uguale all’energia potenziale tra le due (perché?):

$$\frac{1}{2}M_*v^2 \sim G\frac{M_*^2}{r}.$$

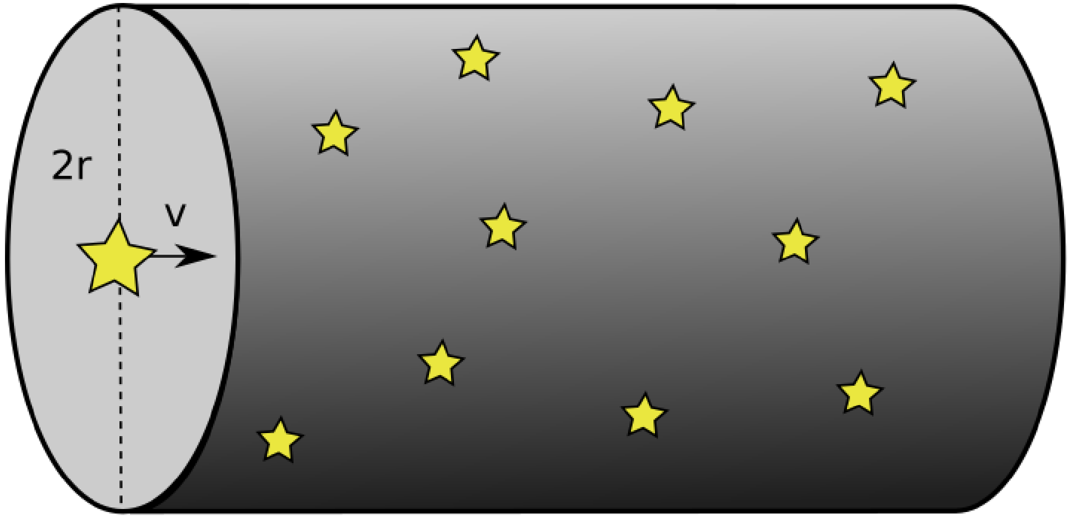
- Ciò avviene quando la distanza tra le due stelle è

$$r_c \sim 2G\frac{M_*}{v^2}.$$

- Il valore r_c è detto **raggio collisionale**.

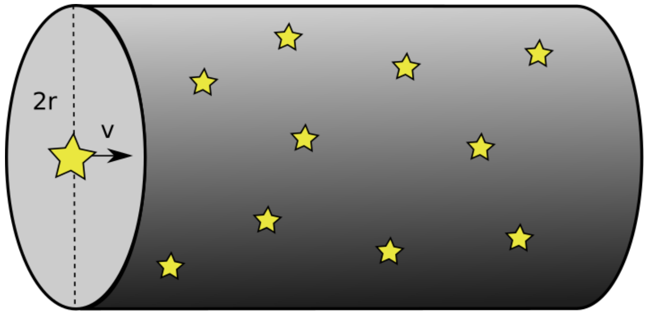
Tempo di rilassamento

- Quanto è probabile che una stella interagisca con altre? Dipende da quanto velocemente la stella si muove e dalla densità delle sue compagne:



- Nel volume $V = \pi r^2 \, \Delta x$ ci sono $Vn = (\pi r^2 \, \Delta x) \, n$ stelle (con n densità numerica).

Tempo di rilassamento



Se la distanza percorsa dalla stella è $\Delta x = v\Delta t$, allora durante il tempo di rilassamento Δt_r la stella interagisce collisionalmente con le $N_{\rm int}$ stelle nel cilindro che ha base $r = r_c$:

$$(\pi r_c^2\, v\, \Delta t_r)\, n = N_{\rm int} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_r = \frac{N_{\rm int}}{\pi r_c^2\, v\, n}.$$

Tempo di rilassamento

Se ora poniamo $N_{\text{int}} \approx 1$ e sostituiamo l'espressione $r_c \sim 2G\frac{M_*}{v^2}$ in

$$\Delta t_r = \frac{N_{\text{int}}}{\pi r_c^2\, v\, n}$$

otteniamo:

$$\Delta t_r = \frac{v^3}{4\pi G^2 M_*^2\, n}.$$

Tempo di rilassamento

L'espressione di Δt_r può essere molto semplificata. Innanzitutto, $n = N/\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$; inoltre possiamo usare il teorema del viriale:

$$
\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{2}U,\\
\frac{1}{2}NM_*v^2 &= \frac{3}{5}G\frac{(NM_*)^2}{R},\\
GM_*N &\approx Rv^2 \quad (\text{supponendo } \tfrac{3}{5} \approx \tfrac{1}{2}).
\end{aligned}
$$

Tempo di rilassamento

Sostituendo le espressioni di n e GM_*N, otteniamo

$$\Delta t_r \approx \frac{NR}{3v},$$

quindi il tempo di rilassamento è dello stesso ordine di grandezza del tempo richiesto a compiere N attraversamenti dell’ammasso (R/v è il tempo per *un* attraversamento), con N numero di stelle.

Tempo di rilassamento

La nostra stima porta a un valore di Δt_r pari a

$$\Delta t_r \approx \frac{1}{3} \times \frac{10^6 \times 5\,\mathrm{pc}}{16\,\mathrm{km/s}} \approx 100\,\mathrm{Gyr},$$

che è implausibile! (L'universo ha meno di 14 miliardi di anni).

Questo contrasta col fatto che la maggior parte degli ammassi globulari sembri essere già rilassata.