Lezione di Astronomia II – 2

Maurizio Tomasi (maurizio.tomasi@unimi.it)

22 marzo 2024

Tempo di rilassamento

Tempo di rilassamento

- Veniamo ora al tempo necessario perché un ammasso diventi dinamicamente rilassato.
- Inizialmente le stelle di un ammasso possono *non* essere rilassate: in tal caso le più veloci ($v > v_f$) escono dall'ammasso, e questa «evaporazione» cambia la distribuzione delle v.
- In più, le interazioni gravitazionali provocano una ridistribuzione dell'energia, che porta l'ammasso verso lo stato rilassato.

Tempo di rilassamento

- Per quantificare il tempo di rilassamento, possiamo supporre che esso sia il tempo necessario affinché ciascuna delle stelle dell'ammasso interagiscano un certo numero N di volte con le sue compagne.
- (Questo è analogo al modo in cui si studia un gas ideale che sta raggiungendo l'equilibrio termodinamico).

Tempo di rilassamento

- Possiamo definire un'interazione tra due stelle come la condizione in cui l'energia cinetica diventa uguale all'energia potenziale tra le due (perché?):

$$\frac{1}{2}M_*v^2 \sim G\frac{M_*^2}{r}.$$

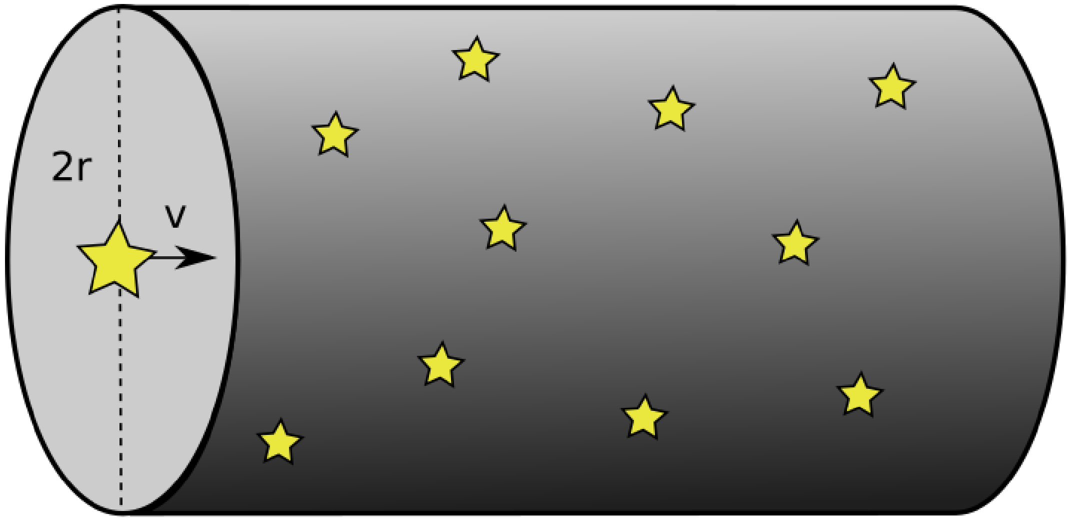
- Ciò avviene quando la distanza tra le due stelle è

$$r_c \sim 2G\frac{M_*}{v^2}.$$

- Il valore r_c è detto **raggio collisionale**.

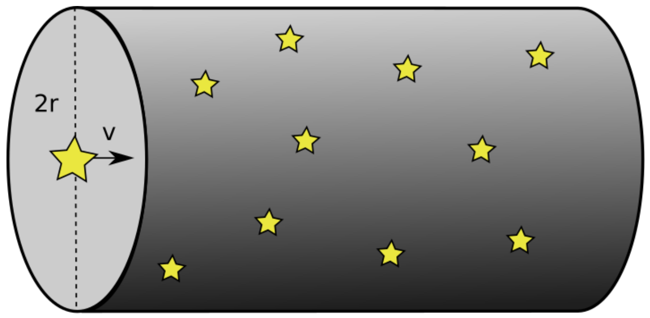
Tempo di rilassamento

- Quanto è probabile che una stella interagisca con altre? Dipende da quanto velocemente la stella si muove e dalla densità delle sue compagne:



- Nel volume $V = \pi r^2 \, \Delta x$ ci sono $Vn = (\pi r^2 \, \Delta x) \, n$ stelle (con n densità numerica).

Tempo di rilassamento



Se la distanza percorsa dalla stella è $\Delta x = v\Delta t$, allora durante il tempo di rilassamento Δt_r la stella interagisce collisionalmente con le $N_{\rm int}$ stelle nel cilindro che ha base $r = r_c$:

$$(\pi r_c^2\, v\, \Delta t_r)\, n = N_{\rm int} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_r = \frac{N_{\rm int}}{\pi r_c^2\, v\, n}.$$

Tempo di rilassamento

Se ora poniamo $N_{\text{int}} \approx 1$ e sostituiamo l'espressione $r_c \sim 2G\frac{M_*}{v^2}$ in

$$\Delta t_r = \frac{N_{\text{int}}}{\pi r_c^2\, v\, n}$$

otteniamo:

$$\Delta t_r = \frac{v^3}{4\pi G^2 M_*^2\, n}.$$

Tempo di rilassamento

L'espressione di Δt_r può essere molto semplificata. Innanzitutto, $n = N/\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$; inoltre possiamo usare il teorema del viriale:

$$K = -\frac{1}{2}U,$$

$$\frac{1}{2}NM_* v^2 = \frac{3}{5}G\frac{(NM_*)^2}{R},$$

$$GM_*N \approx Rv^2 \quad \left(\text{supponendo } \tfrac{3}{5} \approx \tfrac{1}{2}\right).$$

Tempo di rilassamento

Sostituendo le espressioni di n e GM_*N, otteniamo

$$\Delta t_r \approx \frac{NR}{3v},$$

quindi il tempo di rilassamento è dello stesso ordine di grandezza del tempo richiesto a compiere N attraversamenti dell'ammasso (R/v è il tempo per *un* attraversamento), con N numero di stelle.

Tempo di rilassamento

- La nostra stima porta a un valore di Δt_r pari a

$$\Delta t_r \approx \frac{1}{3} \times \frac{10^6 \times 5\,\mathrm{pc}}{16\,\mathrm{km/s}} \approx 100\,\mathrm{Gyr},$$

- Ma questo numero è implausibile! L’universo ha meno di 14 miliardi di anni, eppure la maggior parte degli ammassi globulari sembra essere già rilassata.

Tempo di rilassamento

- Il problema è che nel calcolo solo le interazioni a *corto* raggio, mentre sono rilevanti anche gli scambi energetici a distanza.
- Noi abbiamo supposto che si abbia interazione quando la distanza tra due stelle sia inferiore al raggio collisionale r_c dato da

$$\frac{1}{2} M_* v^2 \sim G \frac{M_*^2}{r_c}.$$

- Ma anche a distanze maggiori di r_c ci sono scambi energetici, e noi li abbiamo trascurati.

Distanza media tra le stelle

- Calcoliamo la distanza media λ tra due stelle dell'ammasso. Essa è data da

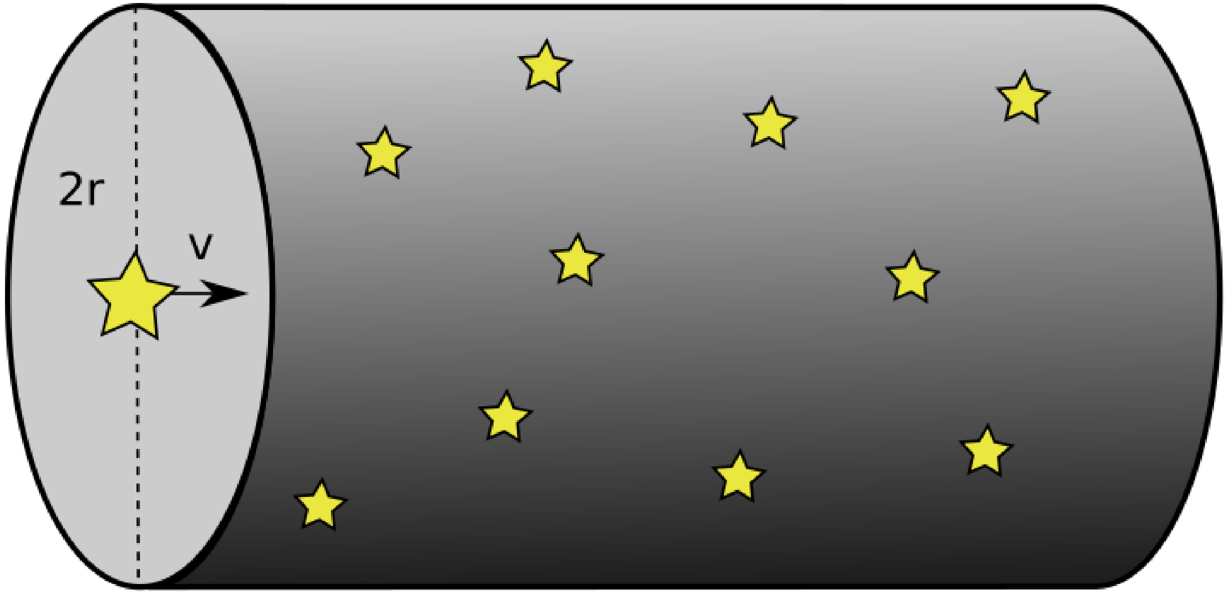
$$\lambda \sim \frac{1}{n^{1/3}} = \left(\frac{4\pi}{3N}\right)^{\frac{1}{3}} R_{\rm core} \approx 2.4 \times 10^{15}\,\mathrm{m} = 6700\,\mathrm{AU},$$

  se $R_{\rm core} = 5\,\mathrm{pc}$ e $N = 10^6$.
- Il raggio collisionale, nel caso $v = v_{\rm rms} = 16\,\mathrm{km/s}$, per una stella $M_* = M_\odot/2$, è invece

$$r_c = \frac{2GM_*}{v^2} \approx 5.2 \times 10^{11}\,\mathrm{m} \approx 750\,R_\odot = 0.3\,\mathrm{AU}.$$

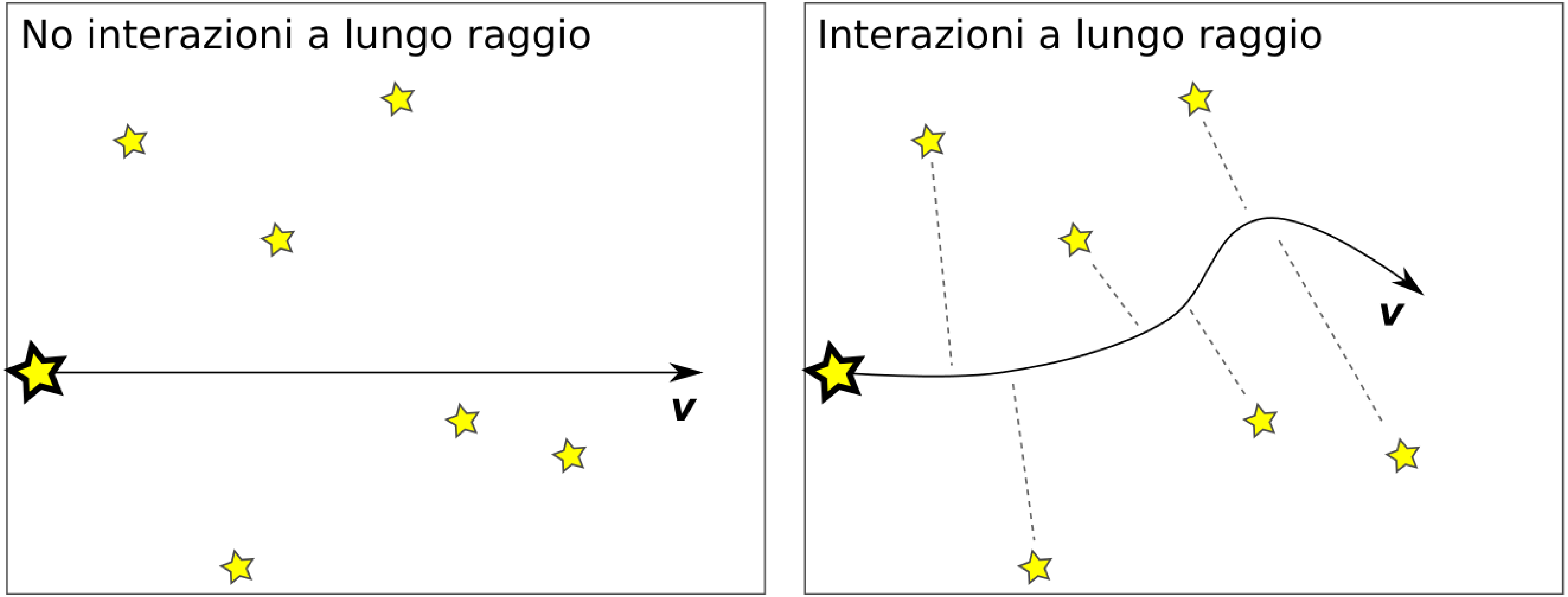
Tempo di rilassamento

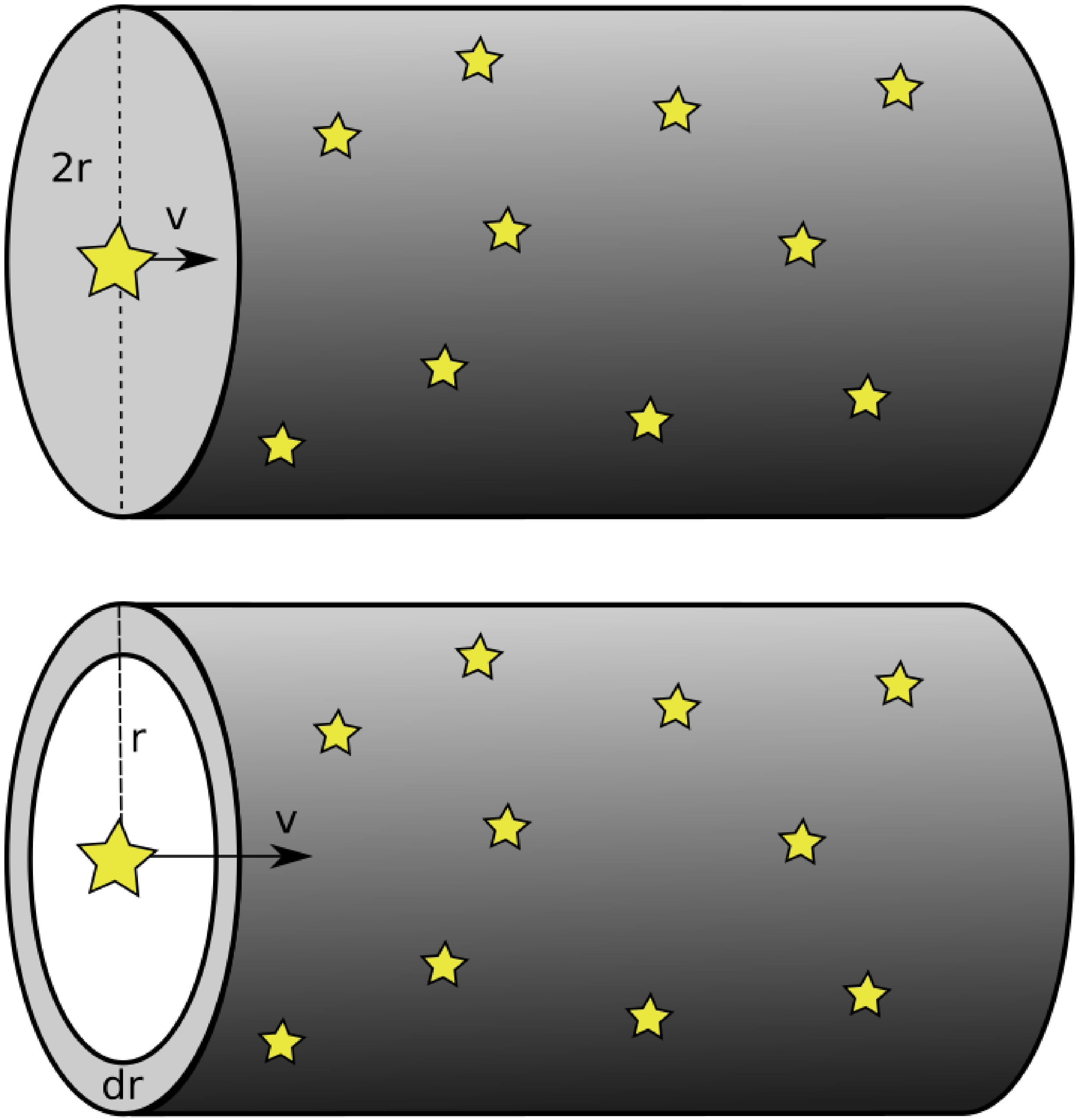
Il problema è che noi abbiamo considerato solo le interazioni a corto raggio, ma il conto precedente ci dice che sono rarissime, perché la distanza media tra le stelle è 10^4 volte maggiore del raggio collisionale.



Interazioni a lungo raggio

Se un a.g. è virializzato, allora ciò è probabilmente determinato soprattutto dalle interazioni a lungo raggio:




2r
v
r
v
dr

Interazioni a lungo raggio

- Vogliamo stimare l'importanza delle interazioni a lungo raggio. Misureremo quindi la deflessione media $\vec{\Delta v}_\perp$ causata da queste interazioni.
- Ovviamente interazioni successive avranno valori diversi di $\Delta v_\perp$, sia in modulo che in direzione e verso. Il moto risultante sarà di tipo Browniano, tale che

$$\left\langle \vec{\Delta v}_\perp \right\rangle = 0$$

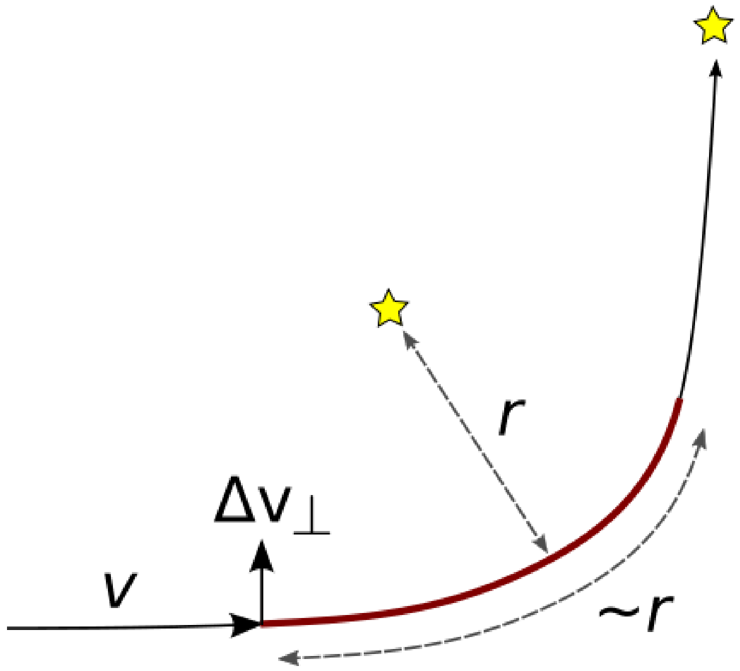
(il moto Browniano non ha una direzione preferenziale).

Interazioni a lungo raggio

- A noi non interessa però caratterizzare la direzione di $\Delta v_\perp$, solo capire l'ordine di grandezza della velocità $\Delta v_\perp$. La quantità più indicata è il *valore quadratico medio* $\left\langle \Delta v_\perp^2 \right\rangle$.
- Esso ha le seguenti proprietà:
  1. È legato alla quantità di energia che acquista la stella a causa delle interazioni a lungo raggio (perché $K \propto v^2$);
  2. Aumenta col passare del tempo;
  3. Diventa importante quando $\left\langle \Delta v_\perp^2 \right\rangle \approx v^2$.

Interazioni a lungo raggio

Cosa avviene in una interazione dove $r > r_c$?



Supponiamo che lo scambio energetico avvenga solo lungo la linea rossa, e che esso introduca una componente perpendicolare $\Delta v_\perp$ nella velocità v.

Interazioni a lungo raggio

Possiamo stimare l'ordine di grandezza di $\Delta v_\perp$ usando le leggi di Newton:

$$M_* \frac{\Delta v_\perp}{\Delta t} = G \frac{M_*^2}{r^2},$$

da cui

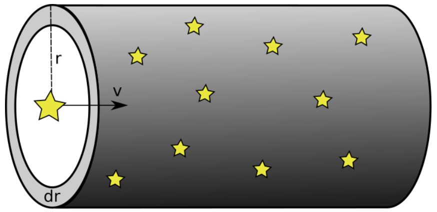
$$\Delta v_\perp = G \frac{M_*}{r^2/\Delta t} = G \frac{M_*}{r\,v}$$

(Δt è il tempo necessario a percorrere il tratto rosso, che è lungo $\sim r$: quindi $r/\Delta t \approx v$).

Interazioni a lungo raggio

- Quali sono i valori plausibili da usare per r? Abbiamo già visto che negli ammassi globulari le interazioni a corto raggio ($r \leq r_c$) contano poco; ma ovviamente $r < R$ (con R dimensione dell'ammasso).
- In generale $r_c < r < R$.
- Siccome $\Delta v_\perp$ è funzione di r, dobbiamo calcolare un valore «medio» di $\Delta v_\perp$.

Interazioni a lungo raggio



Calcoliamo il valore quadratico medio di $\Delta v_\perp$ (la traiettoria della stella nell'ammasso è assimilabile a un moto Browniano):

$$\left\langle (\Delta v_\perp)^2 \right\rangle = \int_{r_c}^{R} (2\pi r\, \mathrm{d}r)\,(v\Delta t)\, n \left(G\,\frac{M_*}{r\,v} \right)^2 = \\ = \frac{2\pi n G^2 M_*^2}{v}\, \Delta t\, \log\left(\frac{R}{r_c}\right) .$$

Interazioni a lungo raggio

- Usiamo il teorema del viriale con N numero di stelle dell'ammasso (assumendo quindi R e v calcolati sul sistema già rilassato):

$$\log \frac{R}{r_c} = \log \frac{Rv^2}{GM_*} \approx \log N.$$

- Quindi

$$\langle (\Delta v_\perp)^2 \rangle = \frac{2\pi n G^2 M_*^2}{v} \Delta t \, \log N.$$

Interazioni a lungo raggio

Per grandi valori di Δt, la componente $\Delta v_\perp$ diventa importante. Dopo quanto tempo $\Delta v_\perp \approx v$?

$$\left\langle (\Delta v_\perp)^2 \right\rangle \approx v^2$$

$$\frac{2\pi n G^2 M_*^2}{v} \Delta t \, \log N \approx v^2$$

$$\Delta t \approx \frac{v^3}{2\pi n G^2 M_*^2 \, \log N}.$$

Interazioni a lungo raggio

Usando le solite sostituzioni

$$n = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3}, \quad N M_* G \approx R v^2,$$

l'espressione di Δt diventa

$$\Delta t \approx \frac{N}{\log N} \frac{R}{v}.$$

Rispetto alla nostra stima iniziale $\Delta t_r \sim NR/v$, qui compare $\log N$ al denominatore. Per un ammasso tipico, $\log N \approx \log 10^6 \approx 14$.

Tempo di rilassamento

Il calcolo esatto porta alla formula

$$\Delta t_r \approx \frac{1}{12\ln(N/2)}\,\frac{NR}{v},$$

da cui si ottiene che

$$\Delta t_r \approx \frac{1}{12\ln(10^6/2)}\,\frac{10^6 \times 5\,\mathrm{pc}}{16\,\mathrm{km/s}} \approx 2\,\mathrm{Gyr},$$

stavolta fisicamente plausibile.

Tempo di rilassamento

- Il calcolo svolto in questa lezione è spiegato nell'esercizio 1.14 di *Cosmology and Astrophysics through problems* (T. Padmanabhan, Cambridge University Press, 1996).
- Nel capitolo 10.7 del volume I di *Theoretical Astrophysics* (T. Padmanabhan, Cambridge U. P., 2000) c'è la derivazione esatta della formula nel caso di un plasma (il potenziale Coulombiano dipende da r come quello Newtoniano).

Età degli ammassi globulari

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 498:704–709, 1998 May 10

THE AGES AND DISTANCES OF GLOBULAR CLUSTERS WITH THE LUMINOSITY FUNCTION METHOD: THE CASE OF M5 AND M55

RAUL JIMENEZ
Royal Observatory, Blackford Hill, Edinburgh EH9 3HJ, Scotland, UK
AND
PAOLO PADOAN
Theoretical Astrophysics Center, Juliane Maries Vej 30, DK-2100 Copenhagen 0, Denmark; raul@roe.ac.uk, padoan@tac.dk
Received 1997 April 21; accepted 1997 December 23

ABSTRACT

We present new age and distance determinations for the Galactic globular clusters M55 and M5, using the luminosity function (LF) method of Padoan & Jimenez. Using the set of stellar tracks computed by Jimenez & MacDonald and taking into account a value of $[\alpha/\mathrm{Fe}] = 0.4$, we find an age of 12.5 ± 1.0 Gyr for M55 and 10.6 ± 0.8 Gyr for M5. We also find $m - M = 14.21 \pm 0.08$ mag for M55, and $m - M = 14.55 \pm 0.10$ mag for M5, where the errors refer to the internal accuracy obtained from the method applied to the observed LFs of M5 and M55. These values of $m - M$ agree with the ones obtained using the tip of the red giant branch and with the ones given by the subdwarf fitting method with Reid's new *Hipparcos* results. If the accuracy of the LF method is further confirmed, it will mean that the period of the formation of the Galactic halo took place over a few Gyr and that halo globular clusters are not older than 14 Gyr.

Subject headings: globular clusters: individual (M5, M55) — stars: distances — stars: evolution

Età degli ammassi globulari

The LF is a natural clock because the number of stars in a given luminosity bin decreases with time, since more massive stars evolve more rapidly than less massive ones. The fact that small differences in stellar masses correspond to large differences in evolutionary time explains the power of the LF clock…

Età degli ammassi globulari

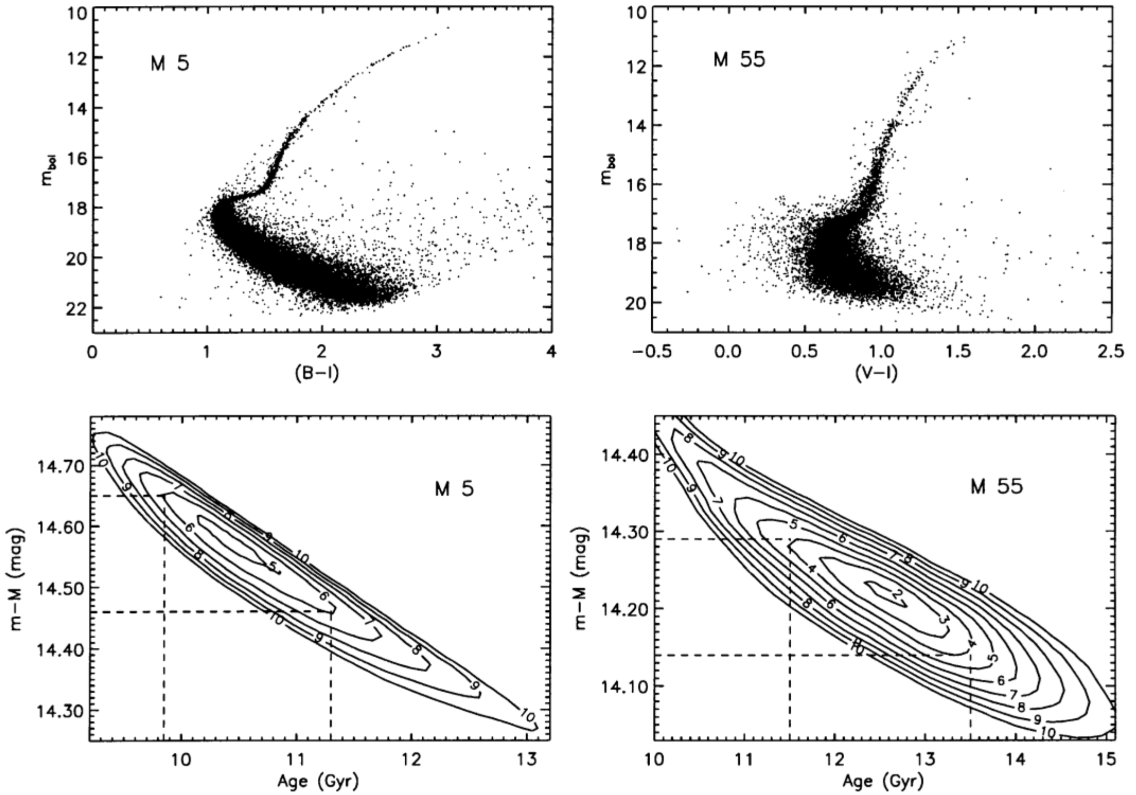
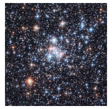


FIG. 1.—*Upper panels*: Color-magnitude diagrams for M5 (*left*) and M55 (*right*) containing all the stars, after the elimination of the AGB and HB stars, used in this work. *Lower panels*: Contour plots of $R(t, m - M)$ (see text), the residual between theoretical and observational counts for M5 (*left*) and M55 (*right*). The contour lines are closed around a minimum value of $R(t, m - M)$, which shows that the LF method can break the age-distance degeneracy. The numbers along the contour lines are the values of $100 \times R$ that are to be compared with the uncertainty in the observational stellar counts in percent. The dashed lines mark the 1 σ value around the most probable age and distance modulus.

Tempo di vita degli a.g.

- Il testo di riferimento del corso (Kutner) sostiene che il tempo di vita degli ammassi globulari sia molto superiore a quello dell'Universo ($\sim 200\,\mathrm{Gyr}$).
- Però questo esclude le perturbazioni che avvengono quando gli ammassi globulari attraversano il disco Galattico, e che possono portare alla loro progressiva distruzione.
- Inoltre simulazioni al computer (Zonoozi et al., 2011, Zonoozi et al., 2014) mostrano che i processi di evaporazione sono fino a un ordine di grandezza più rapidi di quanto stimato dal nostro calcolo.

Ammassi aperti

	Ammassi aperti	**Ammassi globulari**
		
# di stelle	10^3–10^4	10^4–10^6
Dimensioni	10 pc	20–100 pc (core: 5 pc)
Gas e polvere?	Sì	No
Nebulose planetarie?	No	Sì
# di ammassi noti	10^3	~160
Dove?	Disco	Alone stellare (~1% della massa totale)

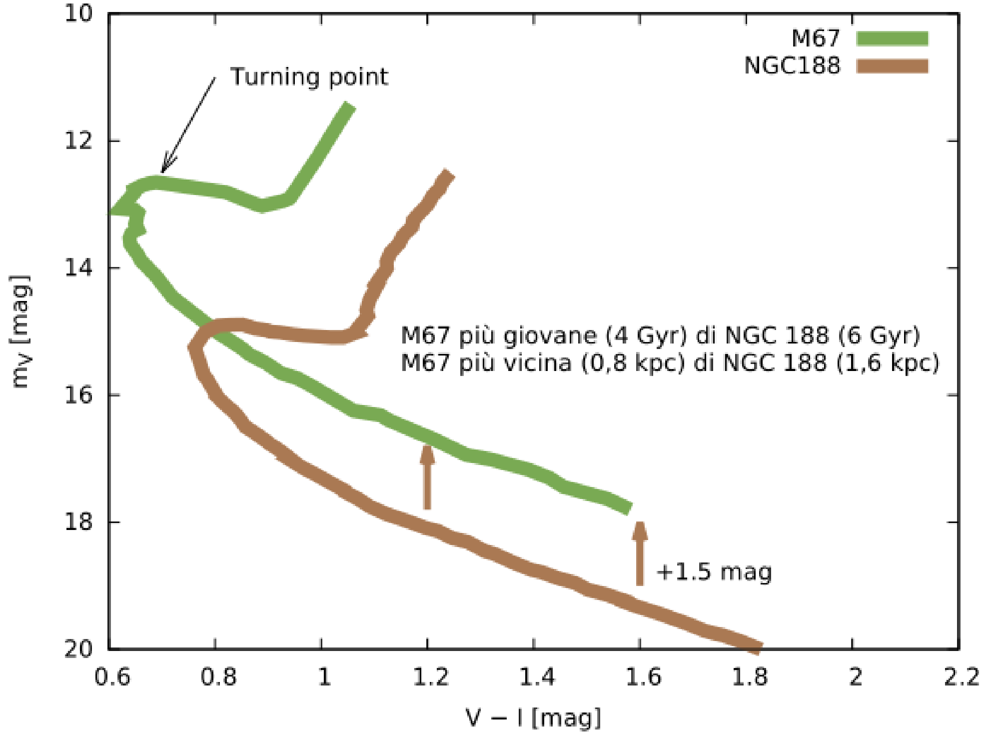
M45

Nel Toro. $N \sim 500$, età 10^8 yr, $R \sim 8$ ly, $D \sim 440$ ly.

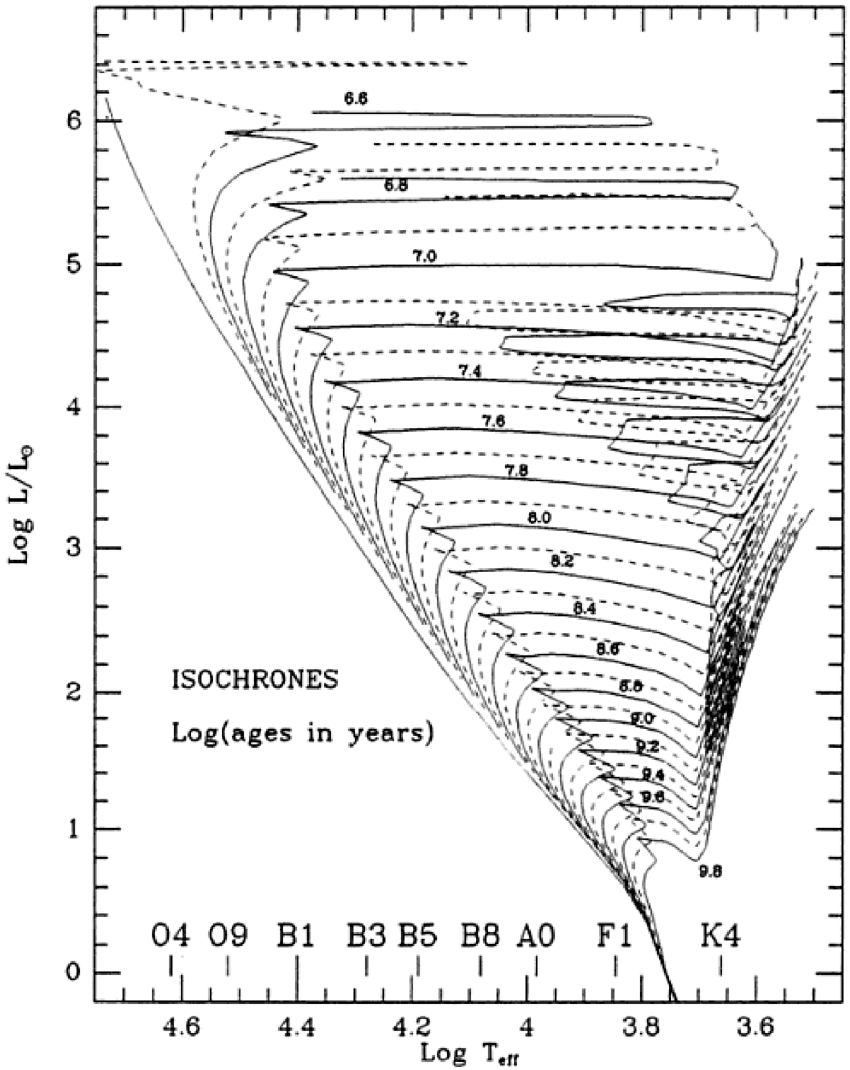
Popolazione di ammassi aperti

- A tutt'oggi sono stati censiti circa 1 100 ammassi aperti
- Nel disco galattico ne sono presenti probabilmente di più: a distanze maggiori è difficile fare un censimento a causa della polvere del disco galattico.
- Gli ammassi aperti formano quindi una popolazione molto più numerosa di quella degli ammassi globulari.

Diagramma HR di ammassi aperti



Isocrone



ISOCHRONES
Log(ages in years)
6.6
6.8
7.0
7.2
7.4
7.6
7.8
8.0
8.2
8.4
8.6
8.8
9.0
9.2
9.4
9.6
9.8
O4 O9 B1 B3 B5 B8 A0 F1 K4
Log $L/L_\odot$
Log T_{eff}

Tempo di rilassamento per a. aperti

- Gli ammassi aperti M 67 e NGC 188 sono tra i più antichi che si conoscano: gran parte degli ammassi hanno un'età inferiore a $10^9\ \mathrm{yr}$.
- Dalla formula

$$\Delta t_r \approx \frac{1}{12 \log \frac{N}{2}} \frac{N R^{3/2}}{\sqrt{G M_*}}$$

si ottiene per gli ammassi aperti che $\Delta t_r \approx 10^8 \div 10^9\ \mathrm{Gyr}$: quindi buona parte degli a.a. **non sono rilassati**.

Tempo di rilassamento per a. aperti

Monthly Notices of the ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY

Mon. Not. R. Astron. Soc. **410,** 2787–2798 (2011) doi:10.1111/j.1365-2966.2010.17653.x

Star clusters under stress: why small systems cannot dynamically relax

Joseph M. Converse★ and Steven W. Stahler

Astronomy Department, University of California, Berkeley, CA 94720, USA

Accepted 2010 September 6. Received 2010 August 24; in original form 2010 July 14

ABSTRACT

Utilizing a series of N-body simulations, we argue that gravitationally bound stellar clusters of modest population evolve very differently from the picture presented by classical dynamical relaxation theory. The system's most massive stars rapidly sink towards the centre and form binary systems. These binaries efficiently heat the cluster, reversing any incipient core contraction and driving a subsequent phase of global expansion. Most previous theoretical studies demonstrating deep and persistent dynamical relaxation have either conflated the process with mass segregation, ignored three-body interactions, or else adopted the artificial assumption that all cluster members are single stars of identical mass. In such a uniform-mass cluster, binary formation is greatly delayed, as we confirm here both numerically and analytically. The relative duration of core contraction and global expansion is effected by stellar evolution, which causes the most massive stars to die out before they form binaries. In clusters of higher N, the epoch of dynamical relaxation lasts for progressively longer periods. By extrapolating our results to much larger populations, we can understand, at least qualitatively, why some globular clusters reach the point of true core collapse.

Key words: binaries: general – stars: kinematics and dynamics – stars: luminosity function, mass function – open clusters and associations: general.

Tempo di rilassamento per a. aperti

> *…[the] evolutionary status [of open clusters] is much less clear. Half of open clusters disintegrate within* $2 \times 10^8\,\mathrm{yr}$ *after birth [], a span corresponding to at most a few initial relaxation times. Not surprisingly, there is little observational signature that relaxation has occurred.*

(Converse and Stahler, MNRAS 410, 2011)

Età degli ammassi aperti

Perché gli ammassi aperti hanno vita così breve? Alcune ragioni:

1. Nel disco galattico sono presenti molti oggetti massivi (nubi molecolari giganti) la cui forza gravitazionale può distruggere gli ammassi;
2. La loro massa non è sufficientemente grande da impedire la «evaporazione»;
3. A causa della rotazione differenziale del piano galattico (che vedremo in seguito), gli ammassi sono soggetti a forze di marea.

Popolazioni stellari

Popolazione I	Popolazione II
Ammassi aperti (non solo)	Ammassi globulari (non solo)
Piano galattico	Alone sferico
Gas e polvere	Niente gas né polvere (ma nebulose pl.)
Alta metallicità	Bassa metallicità