



Astrofisica Generale I — 1b

Maurizio Tomasi (maurizio.tomasi@unimi.it)

18 ottobre 2024



Correzioni bolometriche

- Nella [lezione precedente](#) abbiamo calcolato la luminosità totale del centro galattico a partire da misurazioni dello strumento DIRBE.
- [Abbiamo però usato](#) una stima della correzione bolometrica C senza capire come fosse ricavata. Ora colmeremo questa lacuna.



Correzioni bolometriche

- La correzione bolometrica è una costante moltiplicativa che converte una quantità $B(\nu)$ (densità spettrale, densità di flusso...) misurata da uno strumento con banda $P(\nu)$ nella quantità integrata su tutto lo spettro:

$$C = \frac{\int_0^\infty B(\nu) d\nu}{\int_0^\infty P_\nu(\nu) \times B(\nu) d\nu}.$$

- Una volta nota C , si può stimare B integrata:

$$\int_0^\infty B(\nu) d\nu = C \int_0^\infty P_\nu(\nu) \times B(\nu) d\nu.$$



Correzioni bolometriche

- Ovviamente, per poter usare la formula

$$\int_0^\infty B(\nu) d\nu = C \int_0^\infty P_\nu(\nu) \times B(\nu) d\nu$$

occorre avere una stima ragionevole di $B(\nu)$. Ma **non serve conoscere la normalizzazione**: nel nostro caso sappiamo che $B(\nu) \propto N$, con N numero di stelle nel bulge, ma N è proprio l'incognita!

- Però abbiamo un'idea dell'andamento di $B(\nu)$ e possiamo misurare l'integrale $\int_0^\infty P_\nu(\nu) \times B(\nu) d\nu$, quindi possiamo stimare $\int_0^\infty B(\nu) d\nu$.



Dipendenza da ν e da λ

- La costante bolometrica C deve essere identica se si esprime B in funzione di λ o di ν .
- Ma l'espressione analitica di B cambia se si esprime in funzione di ν o di λ , perché deve valere che

$$B(\nu) d\nu = B(\lambda) d\lambda \quad \Rightarrow \quad B(\nu) = B(\lambda(\nu)) \frac{d\lambda}{d\nu}.$$

- Le altre quantità che servono per calcolare C cambiano se si passa da ν a λ ?



Dipendenza da ν e da λ

- Ad esempio, nel caso di un corpo nero la densità spettrale ha due espressioni analitiche diverse:

$$B_{bb}(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

$$B_{bb}(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

- Nel caso della risposta in banda P , la sua espressione analitica cambia, oppure basta sostituire ν con c/λ ?



Risposta in banda

- L'energia ricevuta da un rivelatore resta la stessa se si usa ν o λ , quindi

$$\int_0^\infty P_\nu(\nu) \times B(\nu) d\nu = \int_0^\infty P_\lambda(\lambda) \times B(\lambda) d\lambda.$$

- Se $B(\nu) d\nu = B(\lambda) d\lambda$ allora

$$\int_0^\infty P_\nu(\nu) \times B(\nu) d\nu = \int_0^\infty P_\lambda(\lambda(\nu)) \times B(\nu) d\nu.$$

- Ciò è vero se $P_\lambda(\lambda) = P_\lambda(c/\nu) = P_\nu(\nu)$. Quindi la forma analitica della banda non cambia, basta sostituire $\lambda \rightarrow c/\nu$.



Correzione bolometrica

- Il risultato precedente indica che C può essere espressa sia in funzione di ν che di λ , a patto di cambiare *solo* l'espressione analitica per B :

$$\begin{aligned} C &= \frac{\int_0^\infty B(\nu) d\nu}{\int_0^\infty P_\nu(\nu) \times B(\nu) d\nu} = \\ &= \frac{\int_0^\infty B(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty P_\lambda(\lambda) \times B(\lambda) d\lambda}. \end{aligned}$$

- Ciò sarà utile per i calcoli che faremo tra poco.



Soluzione approssimata

- Stimiamo C per il problema dei dati DIRBE assumendo una banda “top-hat”:

$$P_\nu(\nu) = \chi_{[\nu_0 - \Delta\nu/2, \nu_0 + \Delta\nu/2]}(\nu),$$

e uno spettro di corpo nero con $T = 3800$ K:

$$C \approx \frac{\int_0^\infty B_{bb}(\nu, T) d\nu}{\int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} B_{bb}(\nu, T) d\nu}.$$

- L'integrale al numeratore è $\propto \sigma T^4$ (ma non integriamo su Ω come nella formula di Stefan-Boltzmann), mentre il denominatore richiede un calcolo numerico.



Calcolo analitico della correzione bolometrica

Ricordiamo l'espressione per la radianza spettrale di corpo nero:

$$B_{bb}(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1},$$

$$\text{con } [B_{bb}] = \text{W/sr/m}^2/\text{Hz}.$$



Calcolo approssimato

L'espressione di C non è calcolabile analiticamente a causa dell'integrale al denominatore, ma possiamo valutarla approssimando gli integrali con somme:

$$C \approx \frac{\int_0^\infty B_{bb}(\nu, T) d\nu}{\int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} B_{bb}(\nu, T) d\nu} \approx \frac{\sum_{i=0}^\infty B_{bb}(i \times \delta\nu, T)}{\sum_{i=i_1}^{i_2} B_{bb}(i \times \delta\nu, T)},$$

dove $\delta\nu$ è il passo con cui campioniamo gli addendi (semplificato nell'espressione perché compare sia al numeratore che al denominatore).

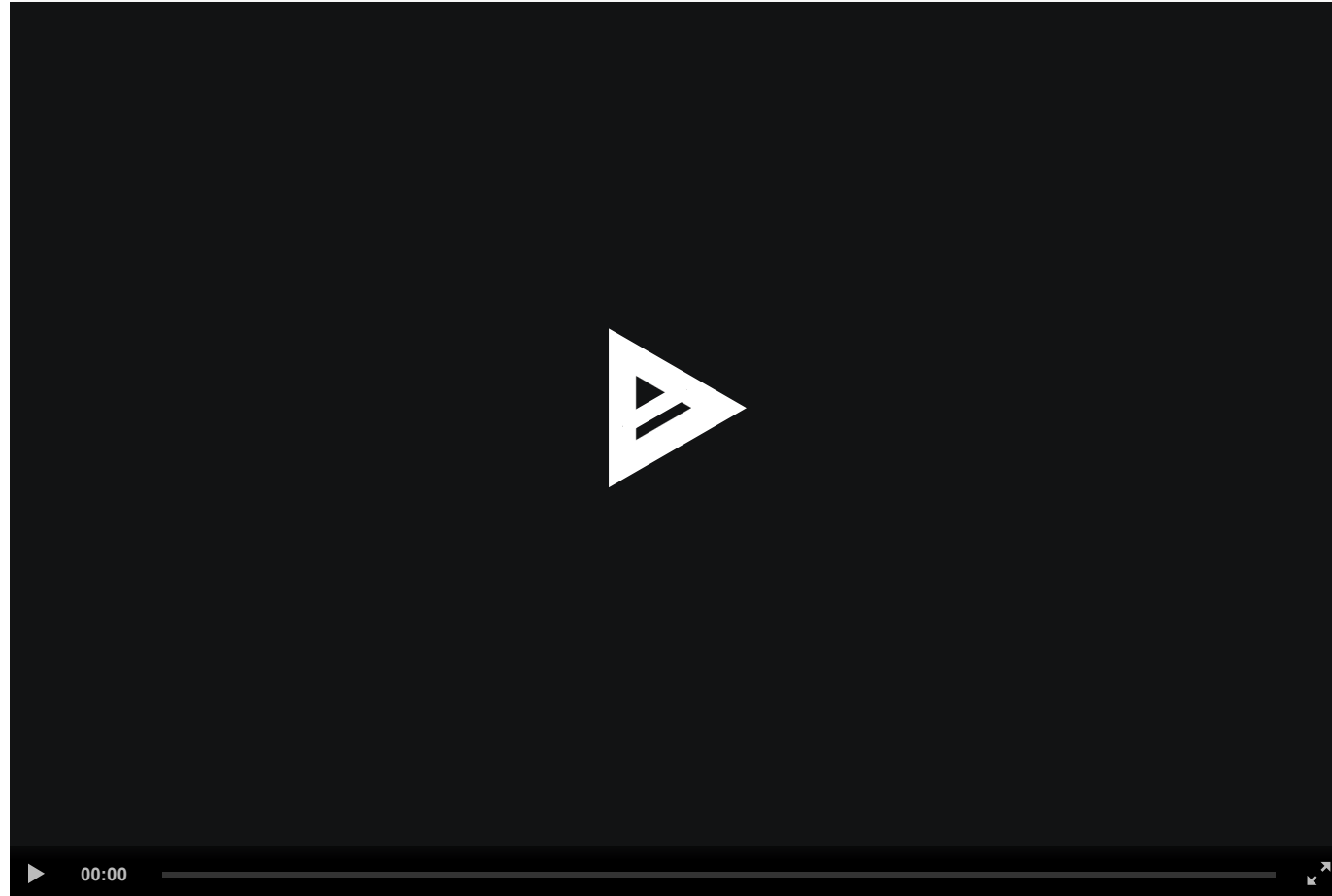


Julia

- Oggi useremo [Julia](#) per calcolare la correzione bolometrica C .
- Julia è un linguaggio di programmazione pensato per il calcolo scientifico, che permette di implementare i calcoli necessari al nostro scopo in maniera molto comoda e veloce.
- Nelle prossime slide includo tutti i comandi necessari per effettuare i calcoli; è possibile anche guardare una vecchia registrazione sul sito [Asciinema](#), che usa la libreria [UnicodePlots](#) per generare grafici da terminale (molto *nerd!*).
- Useremo l'interfaccia [JupyterLab](#), che è accessibile da Julia attraverso il pacchetto [IJulia](#). Vediamo come installarla.



Installazione di JupyterLab





Installazione di librerie

- Una volta installato Julia e fatto partire l'Julia, potrete creare un *notebook* (vedi video seguente). I comandi nel *notebook* si scrivono all'interno di *celle*, che si eseguono premendo Maiusc + Invio.
- Inizieremo scaricando da Internet una serie di librerie molto utili:

```
import Pkg
# Download and install these libraries:
# - GZip: work with .gz compressed files
# - Interpolations: create interpolating functions from discrete data
# - Plots: guess what?
for name in ["GZip", "Interpolations", "Plots"]
    Pkg.add(name)
end
```



Calcolo approssimato di C

La prima cosa che facciamo è implementare la formula di corpo nero $B_{bb}(\nu, T)$ (v. il video):

```
import Plots
const k, h, c = 1.38e-23, 6.626e-34, 3e8
# Write \lambda and press <TAB> to get λ
λ(ν) = c / ν
b(ν, T) = (2h*ν^3 / c^2) / (exp(h*ν / (k*T)) - 1)

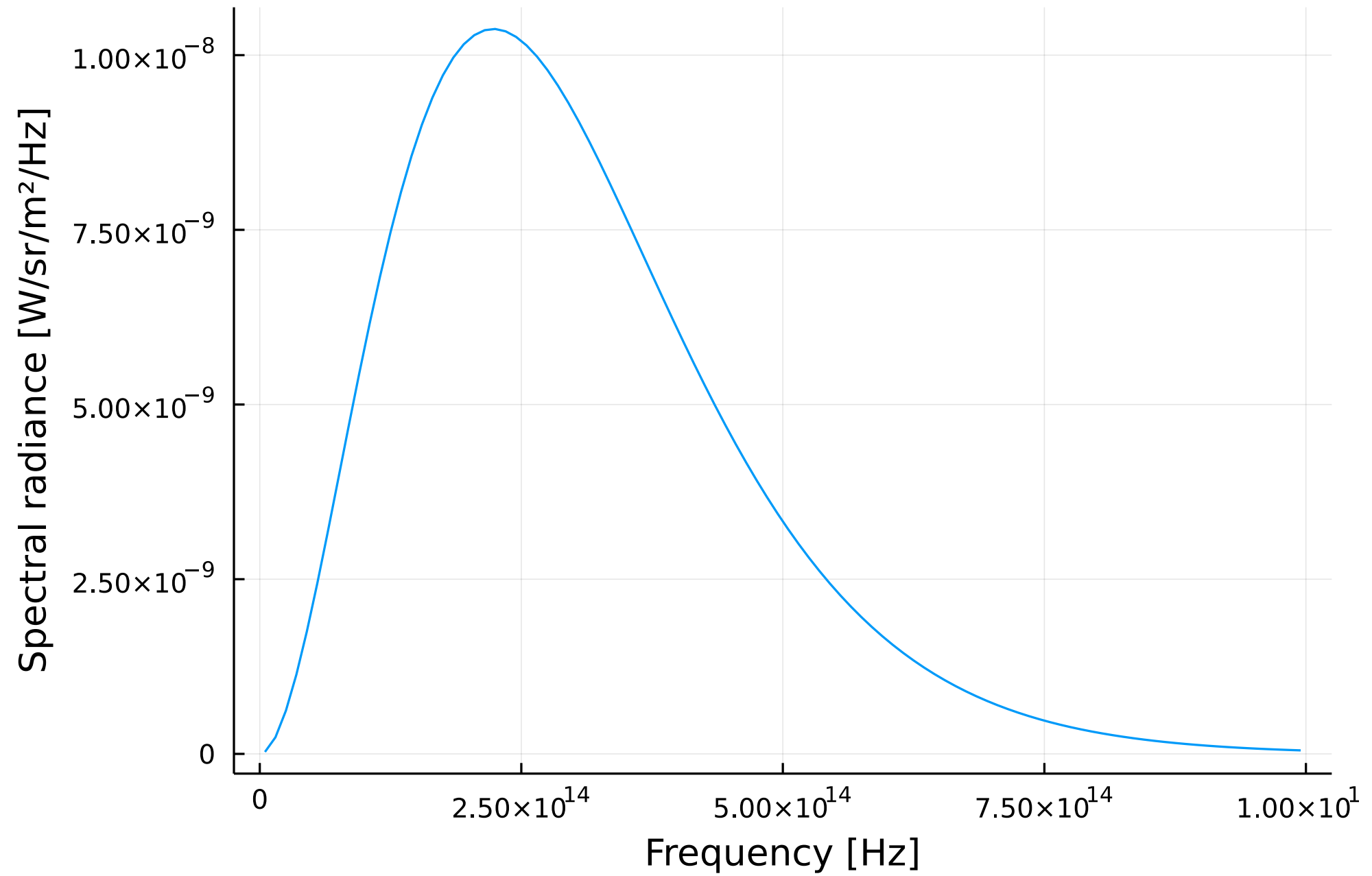
let ν = 0.5e13:1e13:1e15
    plot(ν, b.(ν, 3800),
        label = "", xlabel = "Frequency [Hz]", ylabel = "Spectral radiance [W/sr/m²/Hz]")
end
```



julia-recording-01 - Installation and blackbody.mkv

Maurizio Tomasi

05:39





Calcolo approssimato

Definiamo una funzione che calcoli la correzione bolometrica C con la formula

$$C \approx \frac{\sum_{i=0}^{\infty} B_{bb}(i \times \delta\nu, T)}{\sum_{i=i_1}^{i_2} B_{bb}(i \times \delta\nu, T)},$$

```
function C(v0, bwidth, T, delta_nu)
    fullnu = 0.5e13:delta_nu:1e15 # [0, infinity)
    partialnu = (v0 - bwidth/2):delta_nu:(v0 + bwidth/2)
    sum(b.(fullnu, T)) / sum(b.(partialnu, T))
end
```



Calcolo approssimato

Dobbiamo decidere il valore del passo $\delta\nu$; proviamo con una serie di valori via via più piccoli, e vediamo quando converge:

```
v0, bwidth, T = c / 2.2e-6, 2.28e13, 3800
for δv in [1e13, 1e12, 1e11, 1e10, 1e9, 1e8]
    @printf("δv = %.0e Hz, T = %.1f K, C = %.2f\n",
           δv, T, C(v0, bwidth, T, δv))
end
```

(Vedi il video).



julia-recording-02 - Simple bolometric constant.mkv

Maurizio Tomasi

02:14



Risultati del calcolo

```
 $\delta v = 1e+13 \text{ Hz}, T = 3800.0 \text{ K}, C = 15.58$   
 $\delta v = 1e+12 \text{ Hz}, T = 3800.0 \text{ K}, C = 20.16$   
 $\delta v = 1e+11 \text{ Hz}, T = 3800.0 \text{ K}, C = 20.19$   
 $\delta v = 1e+10 \text{ Hz}, T = 3800.0 \text{ K}, C = 20.27$   
 $\delta v = 1e+09 \text{ Hz}, T = 3800.0 \text{ K}, C = 20.28$   
 $\delta v = 1e+08 \text{ Hz}, T = 3800.0 \text{ K}, C = 20.28$ 
```

Converge, ma è abbastanza diverso dal valore $C = 14.5$ riportato nell'articolo!

Secondo voi dove sta il problema?



Migliorare la stima di C

Ci sono due spiegazioni possibili per la discrepanza nel valore di C che abbiamo osservato:

1. La banda di DIRBE non è perfettamente rettangolare.
2. L'emissione delle stelle non segue esattamente una legge di corpo nero.



Banda di DIRBE

Occorre avere la risposta in banda del canale a $2.2 \mu\text{m}$ di DIRBE, che si può scaricare qui: lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/c_spectral_res.cfm.



Contenuto del file

```
$ head -n 20 DIRBE_SYSTEM_SPECTRAL_RESPONSE_TABLE.ASC
```

```
=====
```

```
DIRBE SYSTEM SPECTRAL RESPONSE
```

```
Version: Pass 3B data release, November 1996
```

```
Only differs from the Pass 2B (1994) release in that wavelengths  
are now provided to three, rather than two, places after the  
decimal point.
```

```
This file tabulates normalized System Spectral Responses for the 10 DIRBE  
photometric bands.
```

```
=====
```

Wavelength	DIRBE Band									
(μm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

A noi interessa la banda n. 2, ossia la terza colonna.



Banda di DIRBE

Facciamo un grafico della banda (ancora espressa in termini di λ !), per renderci conto di come è fatto il dato:

```
dirbe_bands = readlm(  
    "DIRBE_SYSTEM_SPECTRAL_RESPONSE_TABLE.ASC",  
    skipstart=15,  
)  
  
# Convert from  $\mu\text{m}$  to m  
dirbe_λ = dirbe_bands[:, 1] * 1e-6  
dirbe_band = dirbe_bands[:, 3]  
  
plot(dirbe_λ, dirbe_band,  
     xlabel = "Wavelength [m]")
```

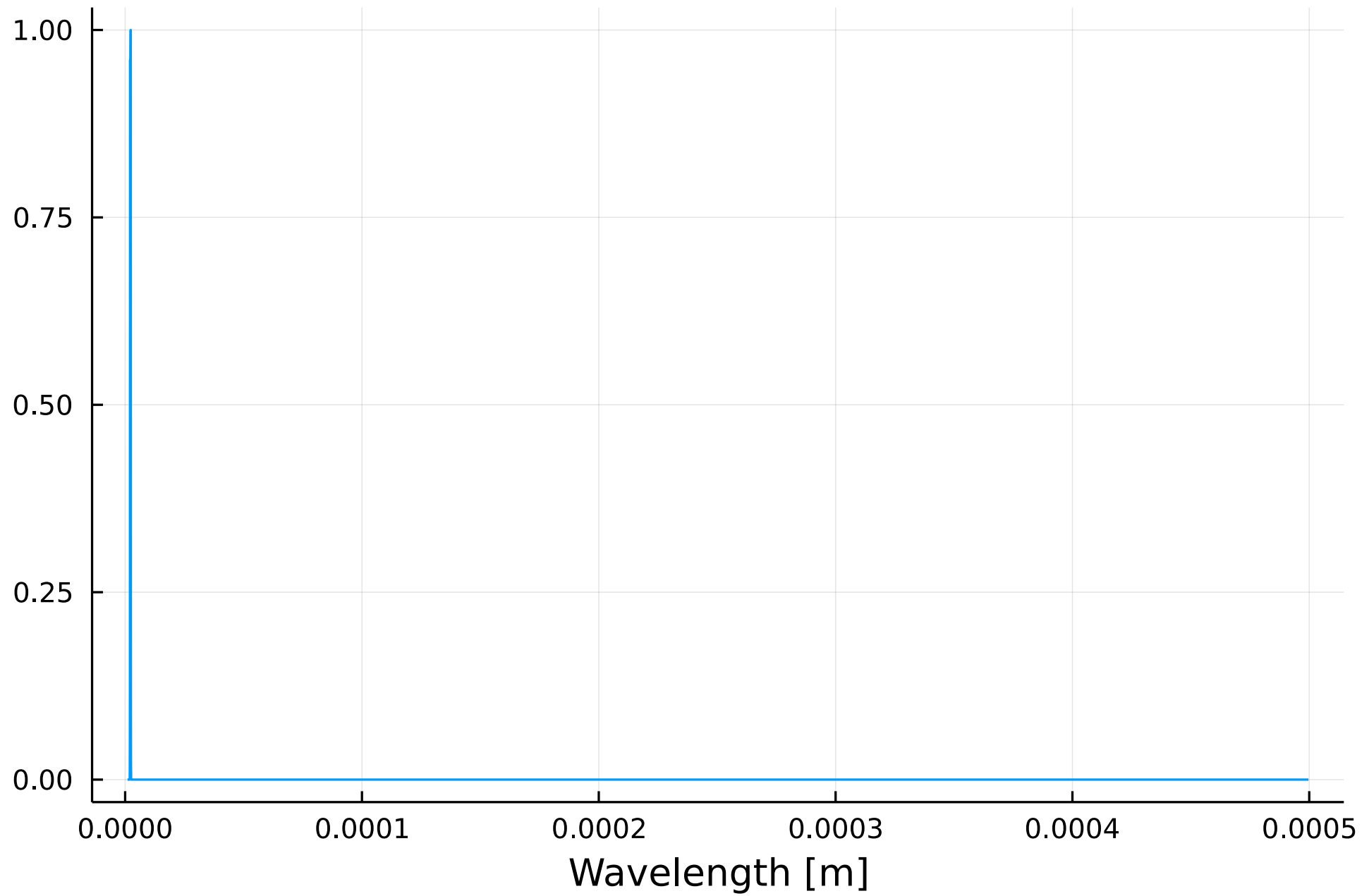
(Vedi il video).



julia-recording-03 - DIRBE band.mkv

Maurizio Tomasi

02:21





Banda di DIRBE

Meglio aggiustare la scala; mascheriamo tutti i valori della banda uguali a zero.

```
# Maschera di booleani: vera solo se  
# la banda è maggiore di zero  
mask = dirbe_band .> 0  
  
plot(dirbe_λ[mask] * 1e6, dirbe_band[mask],  
      xlabel = "Wavelength [ $\mu\text{m}$ "])
```

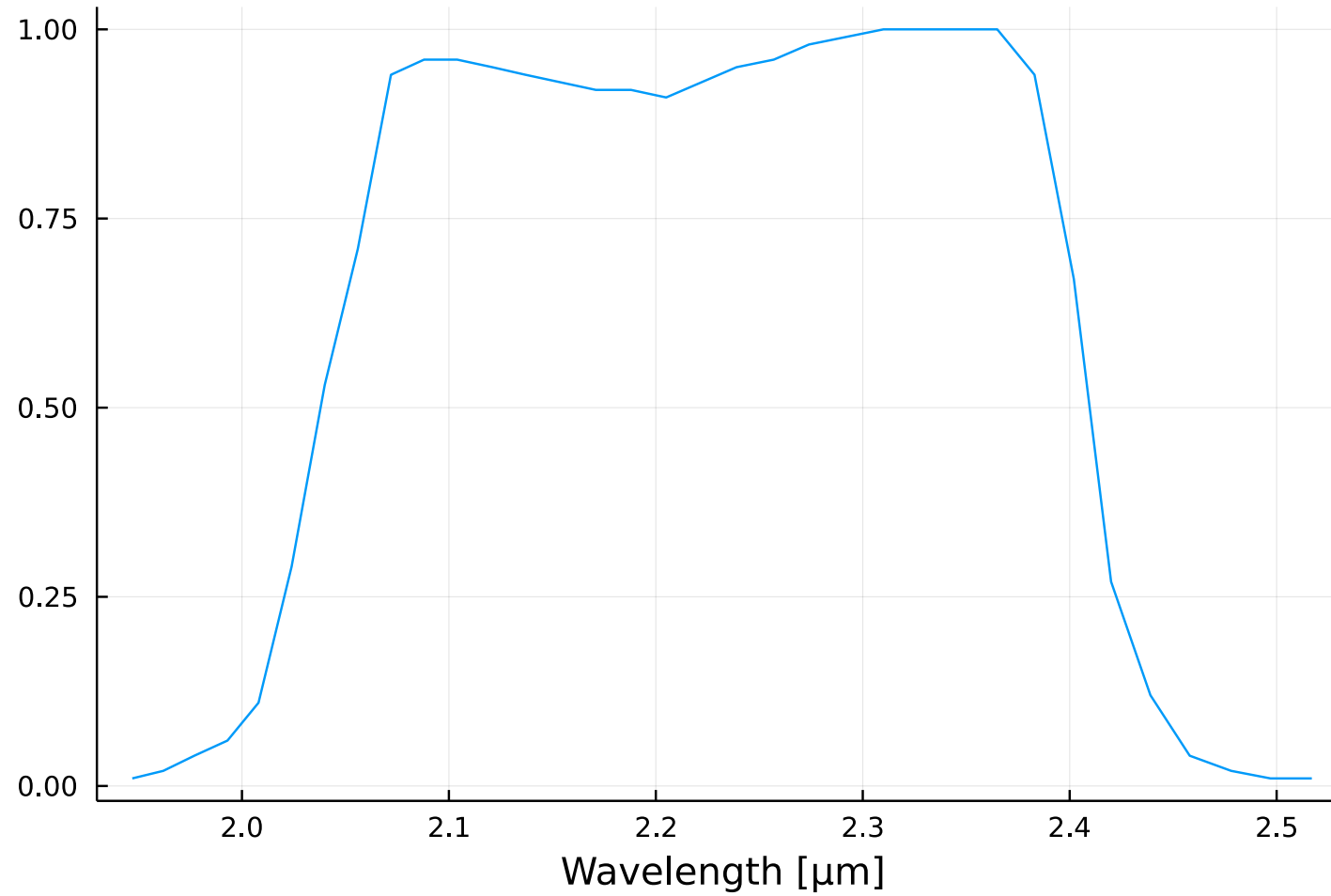
(Vedi il video).



julia-recording-04 - DIRBE band zoomed.mkv

Maurizio Tomasi

01:05



Sembra ok. Proviamo a calcolare il centro della banda!



Centro della banda

La formula più intuitiva per il centro della banda è una media pesata:

$$\lambda_0 = \frac{\int_0^\infty \lambda \times P_\lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty P_\lambda(\lambda) d\lambda} \approx \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i \times P_\lambda(\lambda_i)}{\sum_{i=1}^N P_\lambda(\lambda_i)},$$

Questa è l'implementazione in Julia: molto semplice!

```
@printf(  
    "Band center: %.2f μm\n",  
    1e6 * sum(dirbe_λ .* dirbe_band) / sum(dirbe_band),  
)
```

Il risultato è 2.22 μm, che è quanto ci aspettavamo.



Spettro stellare

- Dobbiamo anche avere un'idea più precisa dello spettro di emissione del centro galattico.
- Il centro galattico appare rosso, e il fatto che sia povero di gas indica un'età avanzata. Questi indizi suggeriscono che le stelle siano giganti rosse; una gigante rossa M0 ha $T \approx 3800 \text{ K}$, $R \approx 100R_{\odot}$ e $L \approx 400L_{\odot}$.
- Per conoscere qual è lo spettro di una gigante rossa M0, dobbiamo fare affidamento a un catalogo di spettri stellari.



Catalogo di spettri stellari

PUBLICATIONS OF THE ASTRONOMICAL SOCIETY OF THE PACIFIC, 110:863–878, 1998 July
© 1998. The Astronomical Society of the Pacific. All rights reserved. Printed in U.S.A.

A Stellar Spectral Flux Library: 1150–25000 Å

A. J. PICKLES

Institute for Astronomy, University of Hawaii, Hilo, HI 96720; pickles@ifh.hawaii.edu

Received 1997 November 10; accepted 1998 March 26

ABSTRACT. A stellar spectral flux library of wide spectral coverage and an example of its application are presented. The new library consists of 131 flux-calibrated spectra, encompassing all normal spectral types and luminosity classes at solar abundance, and metal-weak and metal-rich F–K dwarf and G–K giant components. Each library spectrum was formed by combining data from several sources overlapping in wavelength coverage. The SIMBAD database, measured colors, and line strengths were used to check that each input component has closely similar stellar type. The library has complete spectral coverage from 1150 to 10620 Å for all components and to 25000 Å for about half of them, mainly later types of solar abundance. Missing spectral coverage in the infrared currently consists of a smooth energy distribution formed from standard colors for the relevant types. The library is designed to permit inclusion of additional digital spectra, particularly of non-solar abundance stars in the infrared, as they become available. The library spectra are each given as F_λ versus λ , from 1150 to 25000 Å in steps of 5 Å. A program to combine the library spectra in the ratios appropriate to a selected isochrone is described and an example of a spectral component signature of a composite population of solar age and metallicity is illustrated. The library spectra and associated tables are available as text files by remote electronic access.



Spettro stellare

- Gli spettri di Pickles sono disponibili al sito www.eso.org/sci/facilities/paranal/decommissioned/isaac/tools/lib.html.
- Noi scegliamo uno spettro «M iii»; il file è `ukm0iii.dat.gz`, che è compresso usando il programma `gzip`.



Contenuto del file

Si può ispezionare il contenuto del file decomprimendolo con `gunzip` e visualizzando le prime righe con `head`:

```
$ cat ukm0iii.dat.gz | gunzip | head
#iRMS=0.01722689532 0
#    lk ukf_m0iii uks_m0iii          fh          fk          fm
#
1150.0  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
1155.0  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
1160.0  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
1165.0  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
1170.0  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
1175.0  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
1180.0  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
```

Lo spettro è espresso in funzione di λ , non di ν !

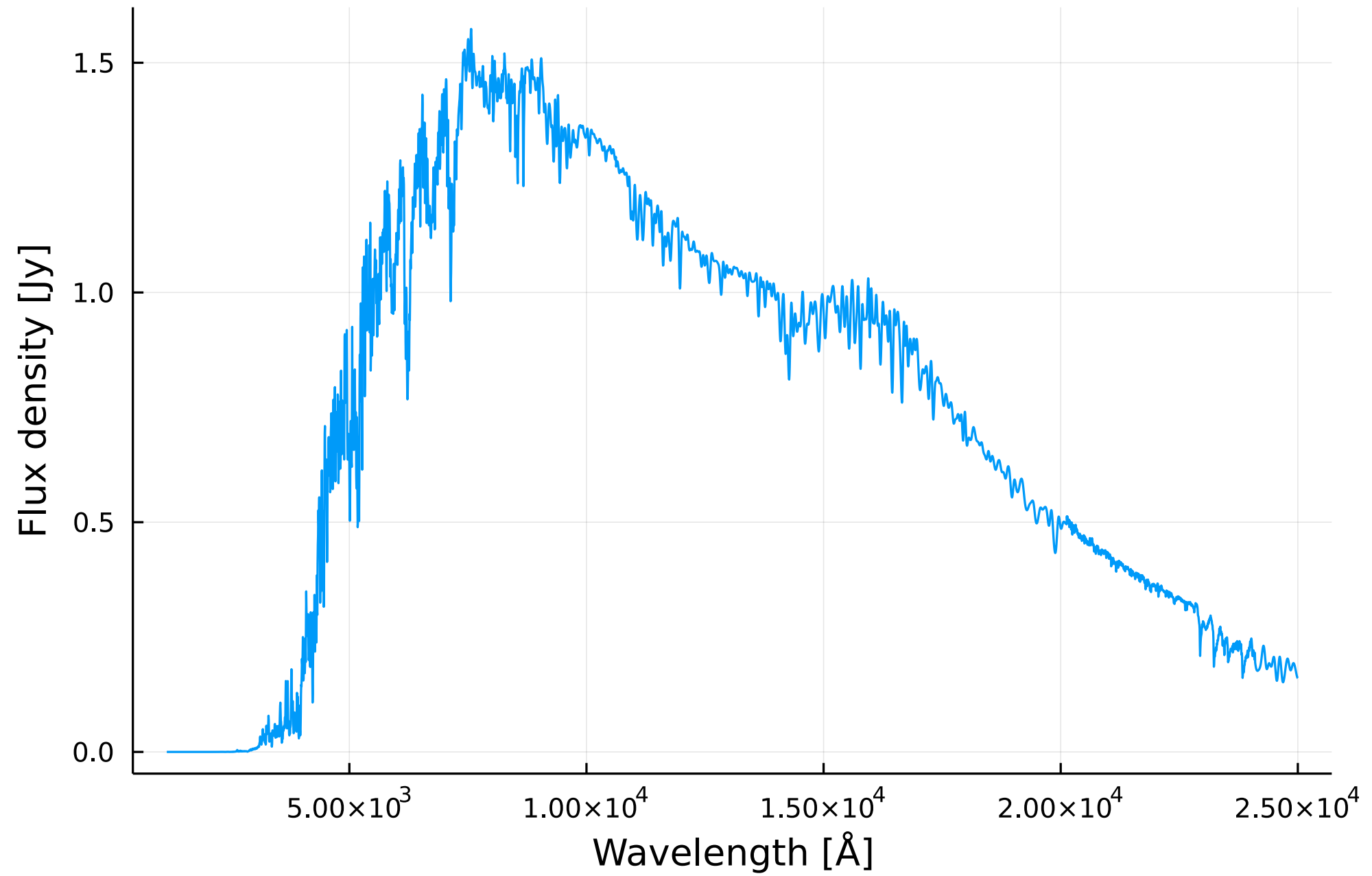


Lettura dello spettro stellare

- Le lunghezze d'onda sono espresse in Å, così dobbiamo convertirle in metri.
- La densità di flusso è nella seconda colonna, ed è espressa in Jansky ($1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W/m}^2/\text{Hz}$).

```
using DelimitedFiles
using GZip
spectrum = GZip.open("ukm0iii.dat.gz") do io
    readlm(io, skipstart=3)
end
m0_λ_pts = spectrum[:, 1] * 1e-10
m0_flux_pts = spectrum[:, 2]

plot(m0_λ_pts, m0_flux_pts,
     xlabel = "Wavelength [Å]",
     ylabel = "Flux density [Jy])"
```



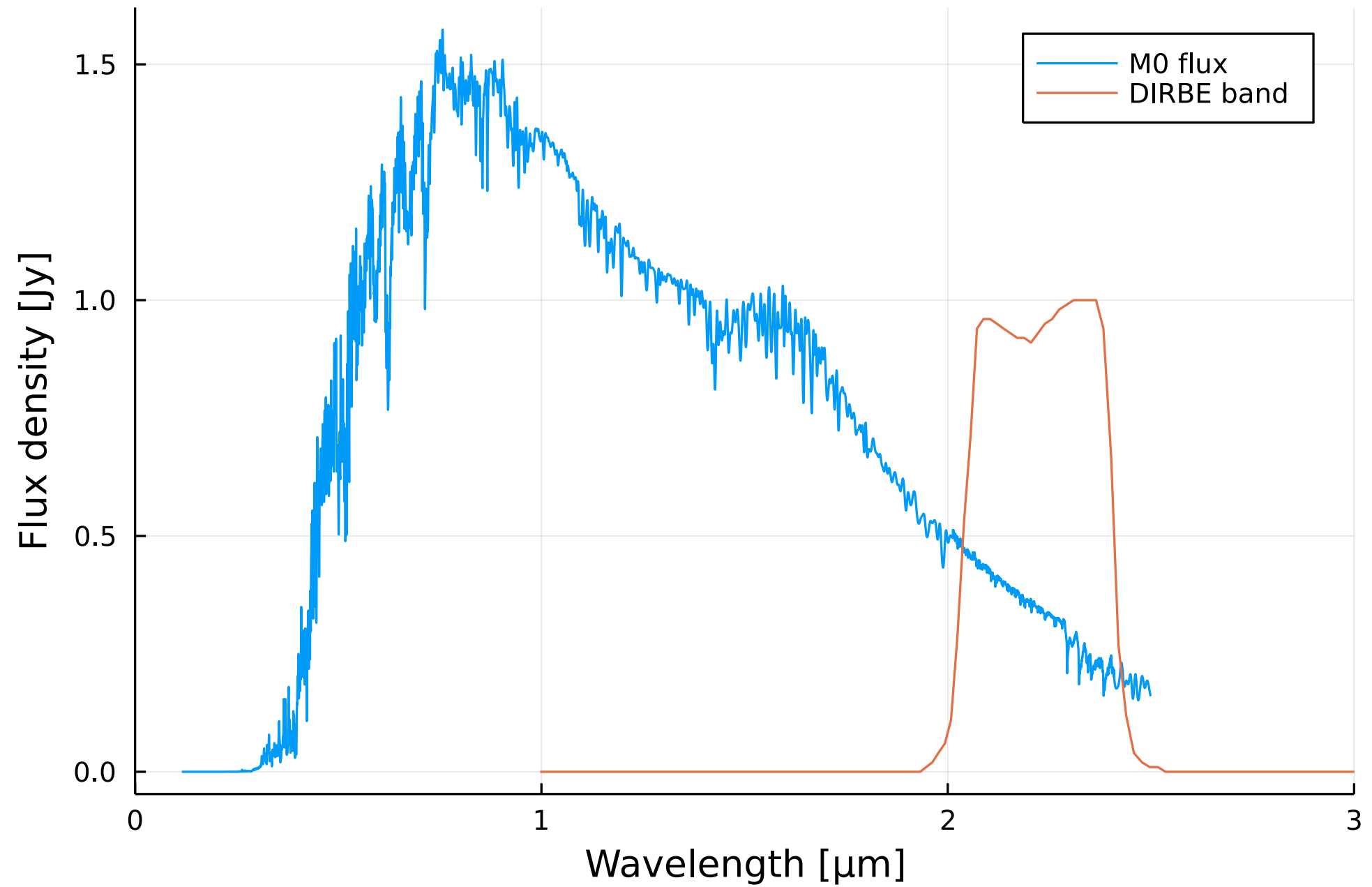


Confronto tra spettro e banda

- Anche se le unità di misura sono diverse, è interessante fare un grafico dello spettro stellare e della banda insieme.

```
plot(m0_lambda_pts * 1e6, m0_flux_pts,  
     label = "M0 flux",  
     xlim = (0, 3),  
     xlabel = "Wavelength [μm]",  
     ylabel = "Flux density [Jy]",  
 )  
plot!(dirbe_lambda * 1e6, dirbe_band,  
      label = "DIRBE band")
```

- La frequenza a 2.2 μm non è centratissima: DIRBE ha la **frequenza a 1.25 μm** che sarebbe più adatta...





Calcolo di C

- In teoria saremmo pronti per calcolare la correzione bolometrica C :

$$C = \frac{\int_0^\infty B(\nu) d\nu}{\int_0^\infty B(\nu) d\nu \times P_\nu(\nu)} = \frac{\int_0^\infty F(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty F(\lambda) d\lambda \times P_\lambda(\lambda)},$$

dove siamo passati da B (densità spettrale) a F (densità di flusso), e da ν a λ .

- Ovviamente dobbiamo però convertire gli integrali in somme:

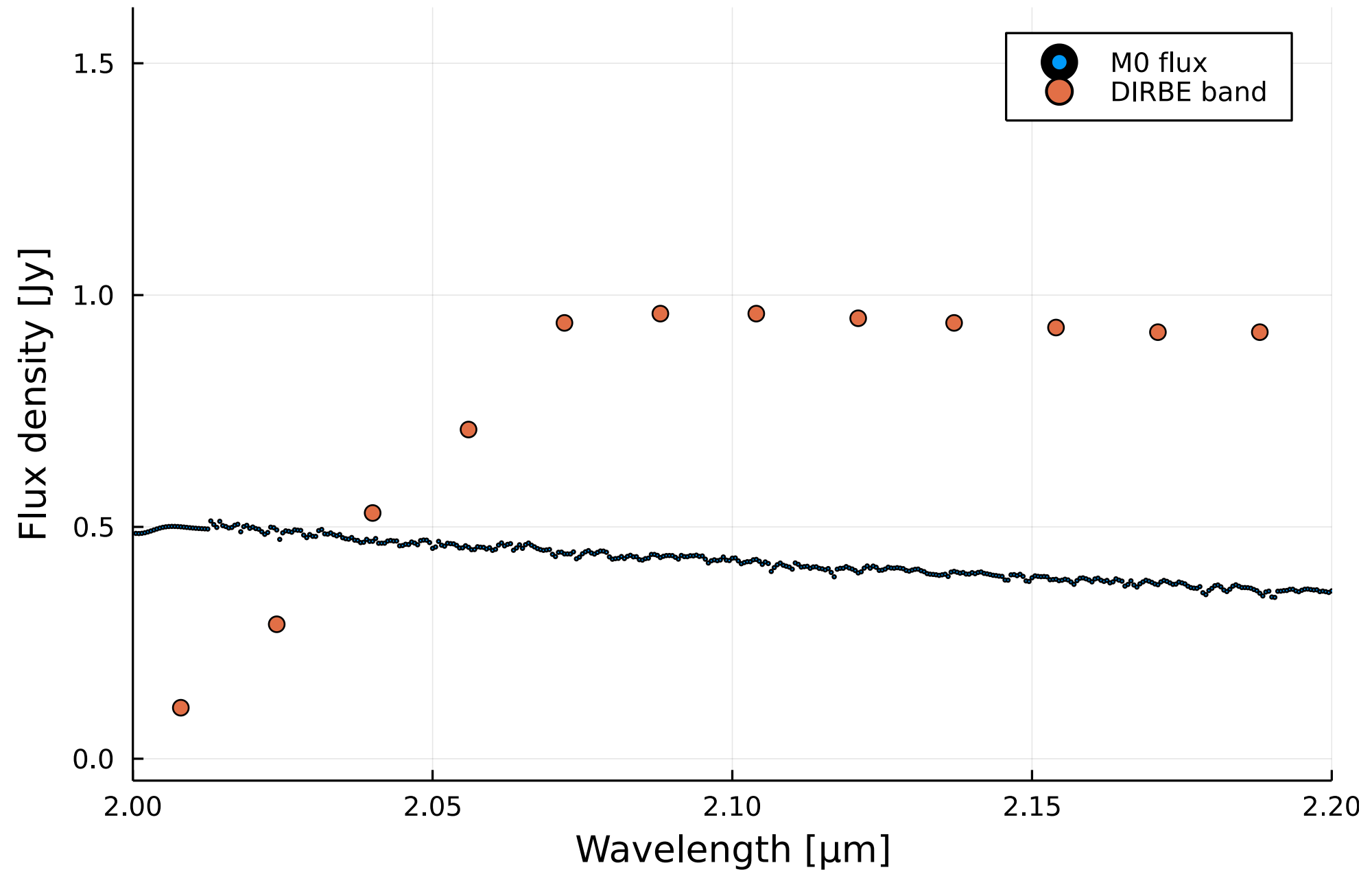
$$C \approx \frac{\sum_i F(\lambda_i) d\lambda}{\sum_i F(\lambda_i) d\lambda \times P_\lambda(\lambda_i)}$$



Campionamento (1/4)

- Non possiamo però applicare subito la formula per C .
- C'è infatti un problema nel campionamento delle curve, evidente se si fa un ingrandimento del grafico precedente:

```
scatter(m0_lambda_pts * 1e6, m0_flux_pts,  
        xlim = (2.0, 2.2),  
        label="M0 flux",  
        xlabel="Wavelength [μm]",  
        ylabel = "Flux density [Jy]",  
        markersize=1)  
scatter!(dirbe_lambda * 1e6, dirbe_band,  
        label="DIRBE band")
```





Campionamento (2/4)

- Nella formula per C , dobbiamo valutare il prodotto $F(\lambda_i) d\lambda \times P_\lambda(\lambda_i)$ per gli stessi valori di λ_i :

$$C \approx = \frac{\sum_i F(\lambda_i) d\lambda}{\sum_i F(\lambda_i) d\lambda \times P_\lambda(\lambda_i)}$$

- Ma qui ci sono dei valori di λ_i per cui $P(\lambda_i)$ è ignoto!



Campionamento (3/4)

- Dobbiamo ricampionare la curva meno fitta (P) in modo che passi attraverso le stesse ascisse di F .
- Usiamo una libreria di Julia, [Interpolations](#), per implementare un'interpolazione lineare:

```
using Interpolations

# dirbe_band_interp: funzione con argomento λ
dirbe_band_interp = LinearInterpolation(
    dirbe_λ,          # Sparsely-populated array for x
    dirbe_band,       # Sparsely-populated array for y
    extrapolation_bc=Flat(),
)
```



Campionamento (4/4)

Verifichiamo ora il funzionamento dell'interpolazione:

```
scatter(m0_lambda_pts * 1e6, m0_flux_pts,  
        label="M0 flux",  
        xlim = (2.02, 2.07),  
        xlabel = "Wavelength [μm]",  
        ylabel = "Flux density [Jy]",  
        markersize = 2,  
)  
scatter!(dirbe_lambda * 1e6, dirbe_band,  
         label="DIRBE band", markersize=8);  
scatter!(m0_lambda_pts * 1e6, dirbe_band_interp.(m0_lambda_pts),  
         label="DIRBE band (interpolated)",  
         markersize=2)
```

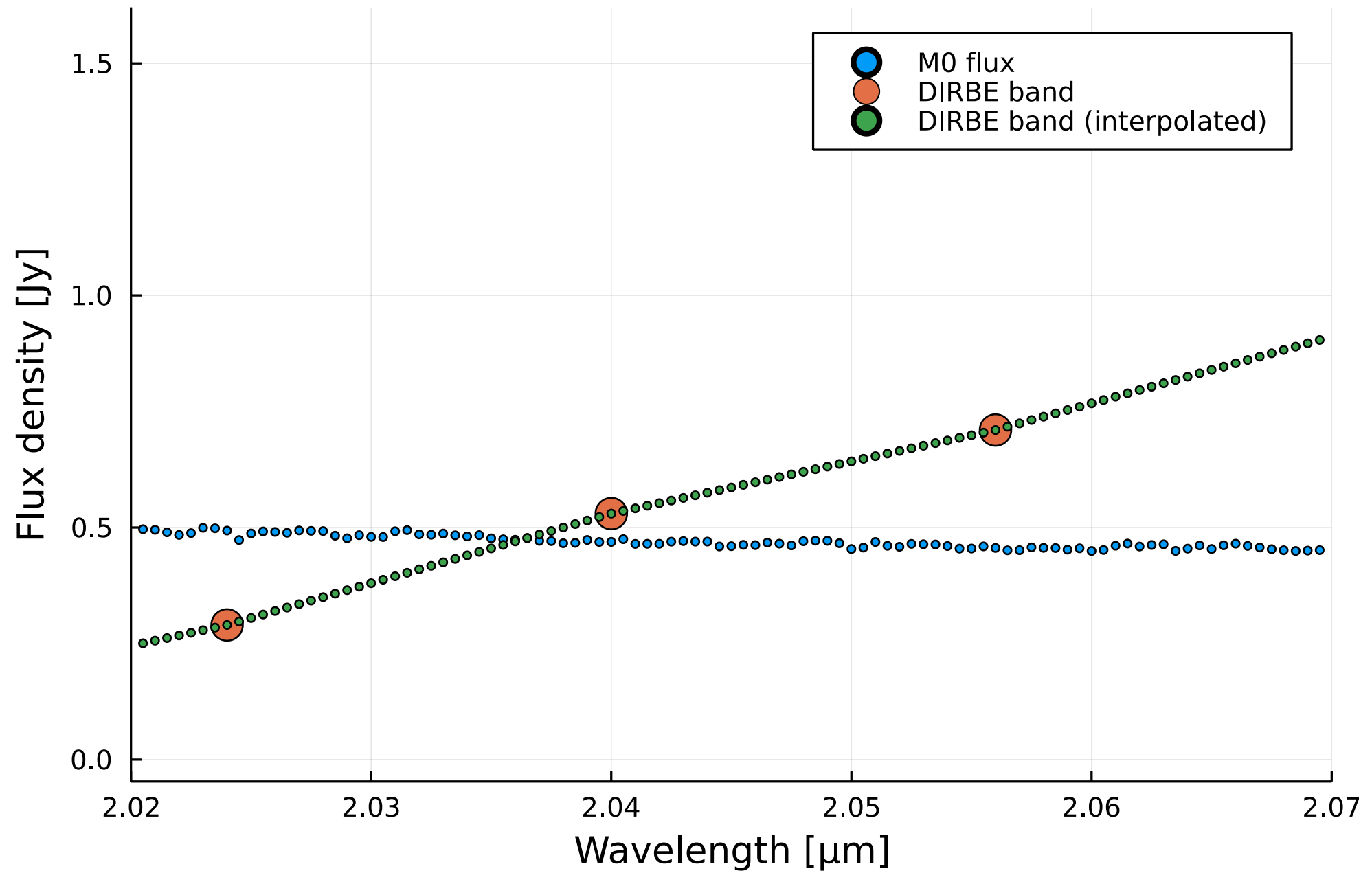
(Vedi il video).



julia-recording-09 - Interpolation.mkv

Maurizio Tomasi

02:59





Calcolo di C

- Per calcolare C , applichiamo la formula

$$C \approx \frac{\sum_i F(\lambda_i) d\lambda}{\sum_i F(\lambda_i) d\lambda \times P_\lambda(\lambda_i)}.$$

```
C(flux, band) = sum(flux) / sum(flux .* band)
@printf(
    "Bolometric correction: %.2f\n",
    C(m0_flux_pts, dirbe_band_interp.(m0_lambda_pts)),
)
```

- Il risultato è in perfetto accordo con Dwek:

```
Bolometric correction: 14.55
```




Dipendenza dalle assunzioni

- La prima stima che avevamo fornito per C era basata sulla formula

$$C \approx \frac{\int_0^\infty B_{bb}(\nu, T) d\nu}{\int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} B_{bb}(\nu, T) d\nu} \approx 20.28,$$

che usava un'approssimazione sia per la banda di DIRBE che per lo spettro stellare.

- Qual è l'importanza relativa delle due assunzioni nel determinare la soluzione finale?



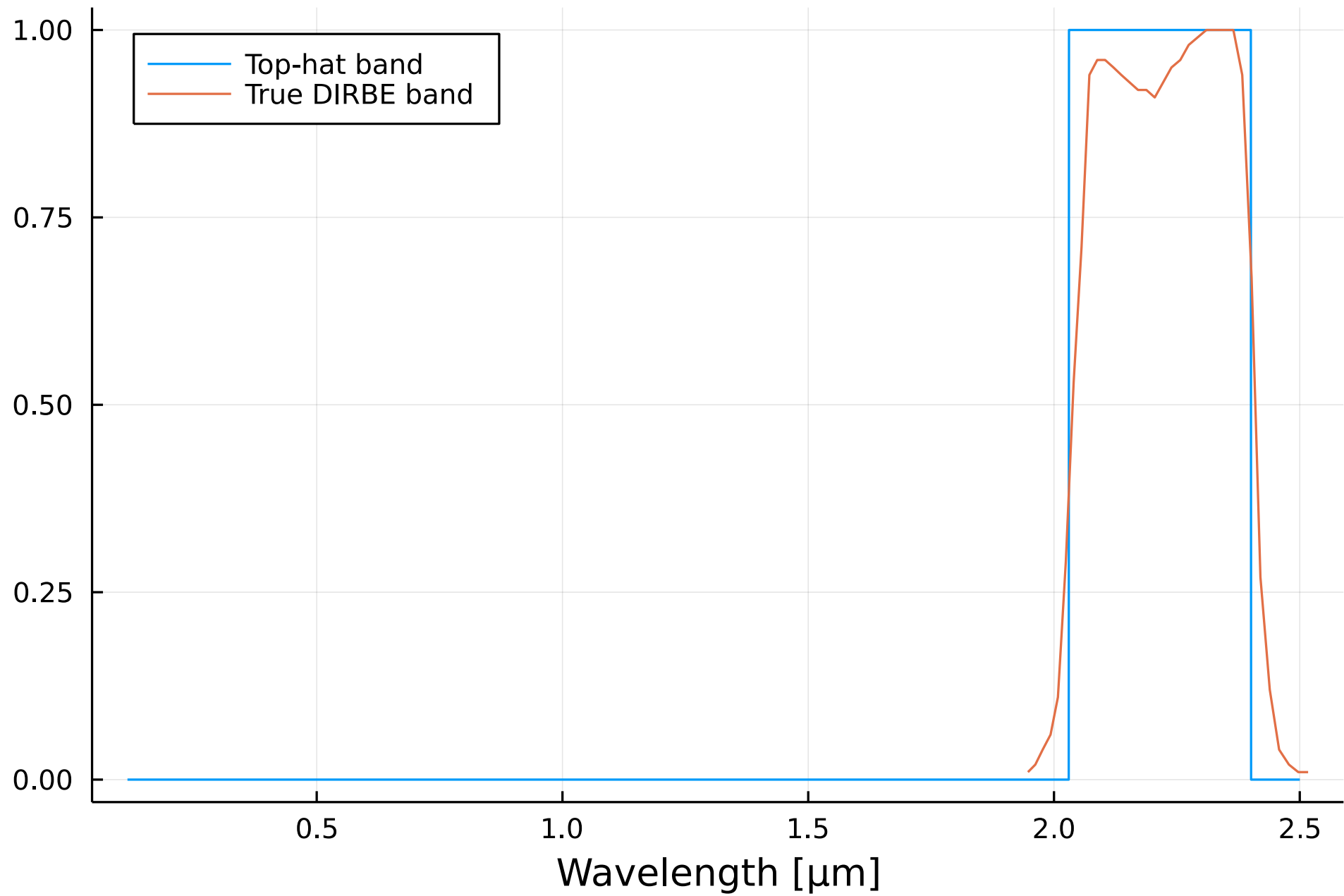
Spettro realistico, banda ideale

Rifacciamo il calcolo usando la banda ideale ma lo spettro realistico:

```
tophat_band = zeros(length(m0_λ_pts))  # Vector of zeros

let (λ1, λ2) = (λ(v0 + Δv/2), λ(v0 - Δv/2))
  # In Julia you can write "a < x < b" instead of "(a < x) && (x < b)"
  tophat_band[λ1 .< m0_λ_pts .< λ2] .= 1 # Set to 1 the points within the interval
end

plot(m0_λ_pts * 1e6, tophat_band,
      label = "Top-hat band",
      xlabel = "Wavelength [μm]",
      legend = :topleft)
plot!(dirbe_λ[mask] * 1e6, dirbe_band[mask],
      label = "True DIRBE band")
```





Spettro realistico, banda ideale

- Calcoliamo ora C in questo caso:

```
@printf("C = %.2f\n", C(m0_flux_pts, tophat_band))
```

- Il risultato è:

```
C = 13.99
```

- Quindi l'approssimazione della banda ideale conta molto poco!



Spettro ideale, banda realistica

- Consideriamo ora la seconda ipotesi: usiamo uno spettro di corpo nero e la banda effettiva di DIRBE.
- Ci occorre la formula del corpo nero in funzione di λ :

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

che in Julia si implementa così:

```
bλ(λ, T) = (2h * c^2 / λ^5) / (exp(h*c / (λ*k*T)) - 1)
```



Spettro ideale, banda realistica

- Facciamo ora il calcolo:

```
@printf(  
    "C = %.2f\n",  
    C(bλ.(m0_λ_pts, T), dirbe_band_interp.(m0_λ_pts)),  
)
```

- Il risultato è:

```
C = 18.90
```

- Quindi l'approssimazione dello spettro di corpo nero è decisamente grossolana per una stella di questo tipo!



Avvisi



Questionari per la didattica

- Preoccupatevi di compilare con cura i questionari! Sono esaminati una volta all'anno dalla Commissione Paritetica Docenti-Studenti, e i risultati sono presi molto sul serio.
- Dovrete dare una valutazione per il corso e per queste esercitazioni. Se potete, date un vostro giudizio (nei commenti liberi) sull'utilità di queste lezioni di approfondimento rispetto alle lezioni nel loro complesso, e mettetelo nei commenti generali del corso.