Fisica – Lezione 7

Onde sinusoidali, decibel

Maurizio Tomasi (maurizio.tomasi@unimi.it)

Martedì 18 novembre 2025

Introduzione all’argomento di oggi

- Oggi spiegheremo approfonditamente il tipo più semplice di onda: l’onda sinusoidale
- Descriveremo le tre proprietà delle onde sinusoidali: frequenza, sfasamento ed ampiezza
- Introdurremo il concetto di “intensità del suono”
- Parleremo di come si misura l’ampiezza di un’onda, e introdurremo le potenze e i logaritmi

Inquisitori accademici onorari

Onde sinusoidali

- La settimana scorsa abbiamo introdotto il concetto di “onda sinusoidale”
- Dell’equazione

$$\text{oscillazione} = A\sin(2\pi\nu t + \varphi),$$

a noi interesseranno questi parametri:

1. La sua ampiezza (quanto la pressione varia), indicata solitamente con A
2. La sua frequenza (quanto rapidamente oscilla), indicata con ν o con f
3. La sua fase (a che istante l’onda raggiunge il suo massimo), indicata con φ

1. La frequenza

Percezione della frequenza

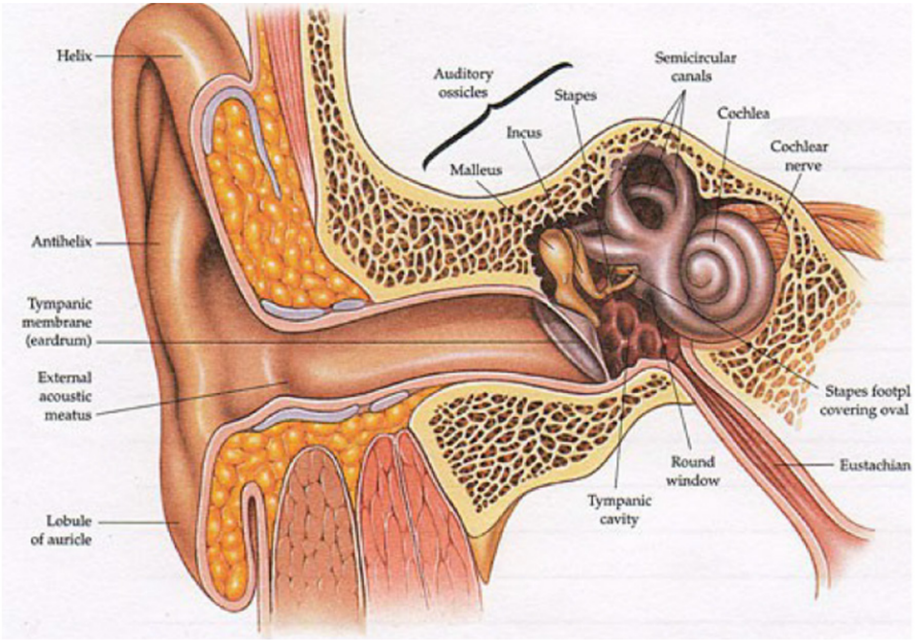
- Un esempio di suono (ossia, di onda periodica regolare) è la nota emessa da uno strumento, ad esempio un violino
- L'essere umano è in grado di percepire suoni la cui frequenza sta nell'intervallo

$$20\,\mathrm{Hz} < \nu < 20\,\mathrm{kHz},$$

ma i valori cambiano con l'età: invecchiando, la frequenza udibile più elevata decresce fino a raggiungere valori intorno a 15, e anche meno.

Perché questi limiti?

- Per alti ν, il timpano e gli ossicini collegati (martello, incudine, staffa) hanno un’inerzia che gli impedisce di oscillare rapidamente.
- Ma anche se potessero oscillare a qualsiasi frequenza, la membrana basilare e le cellule ciliate all’interno della coclea non riuscirebbero comunque a tradurre il segnale meccanico in un impulso nervoso chiaro
- A basse ν, il nostro orecchio non ha una struttura efficiente per tradurre le vibrazioni in segnali neuronali

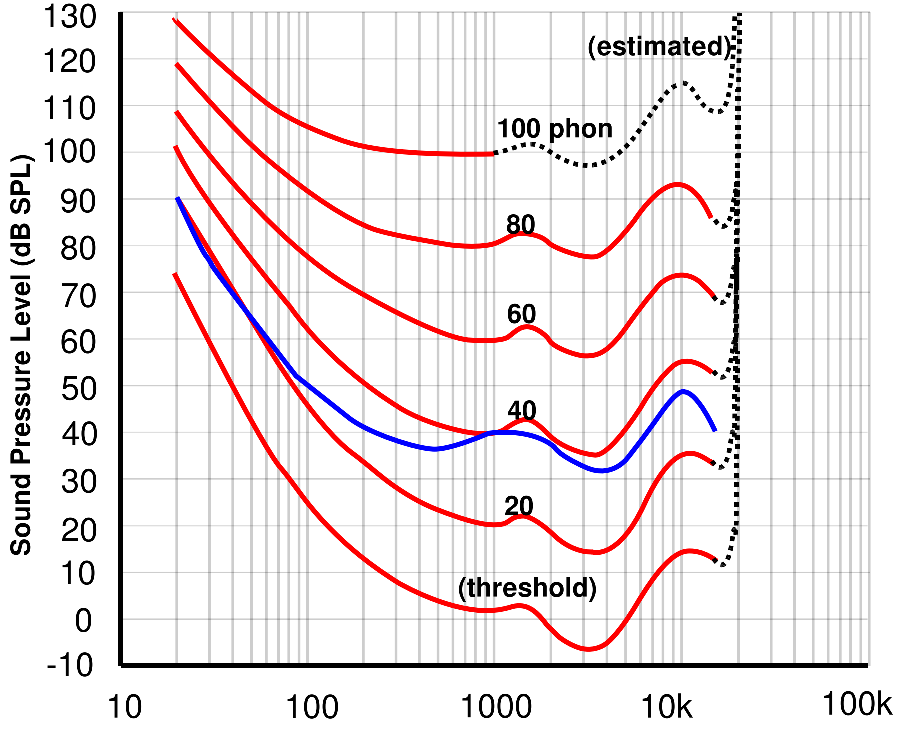


Curve isofoniche

- Il cervello umano non percepisce tutte le frequenze con la stessa sensibilità
- Le cosiddette curve isofoniche rappresentano l'intensità percepita in funzione della frequenza e dell'intensità oggettiva (che definiremo in seguito)
- Esse sono state ricavando facendo sentire un suono ad una frequenza di riferimento alternato ad un altro suono e aumentando o diminuendo il volume del secondo finché non fosse stato intenso quanto il primo, registrando a questo punto l'ampiezza effettiva. Si è poi ripetuto variando l'intensità del suono di riferimento

Curve isofoniche

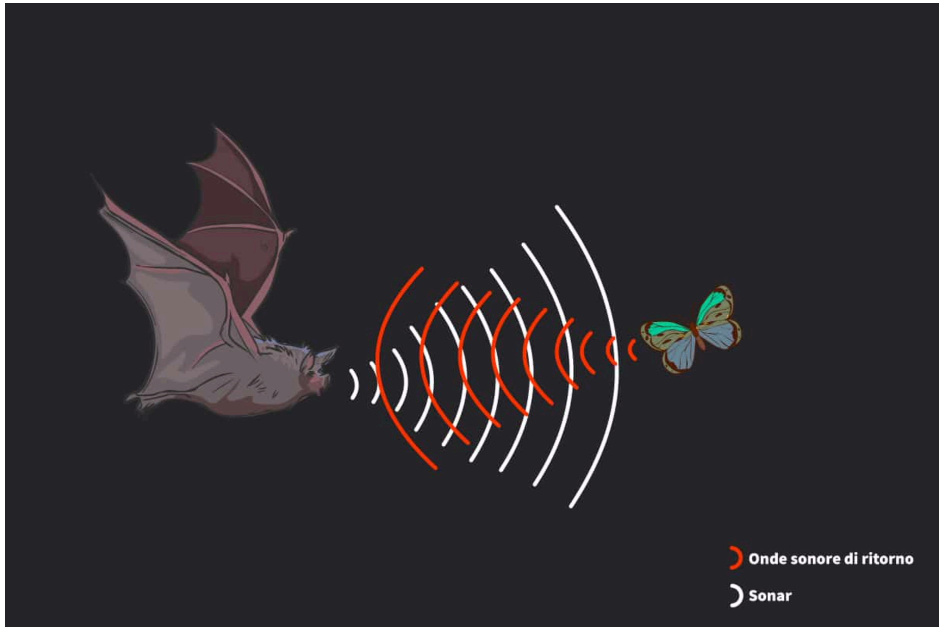
- Asse x: frequenza del suono in Hz.
- Asse y: Ampiezza dell'onda di pressione.
- Le varie curve indicano diverse intensità dell'onda di riferimento, dalla soglia di udibilità alla soglia del dolore.



Equal-loudness contours (red) (from ISO 226:2003 revision)
Original ISO standard shown (blue) for 40-phons

Ultrasuoni

- I suoni con una frequenza superiore a 20 kHz sono detti **ultrasuoni**, e non sono udibili dall'uomo.
- Sono però percepibili da alcuni animali:
  - I cani, per cui esistono fischietti agli ultrasuoni
  - I pipistrelli, che usano l'eco degli ultrasuoni per orientarsi (vedremo meglio l'eco in futuro)



2. Sfasamento

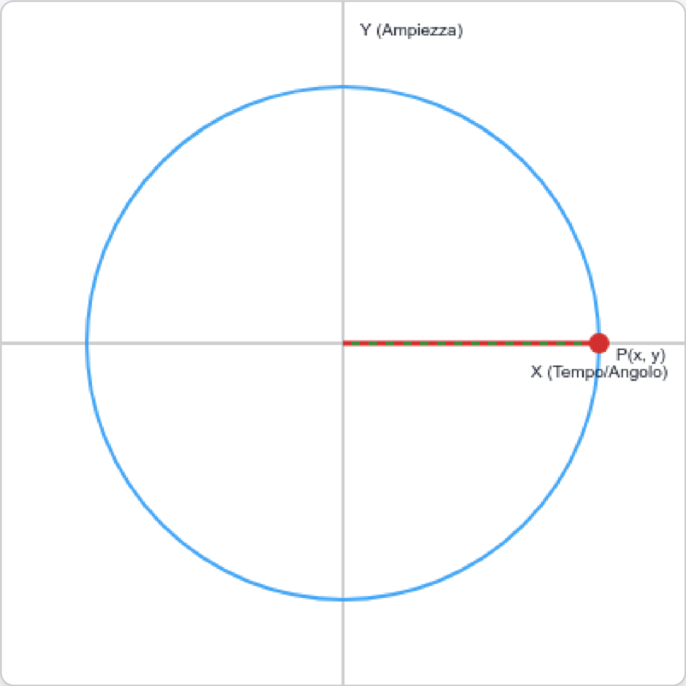
Sfasamento di un’onda

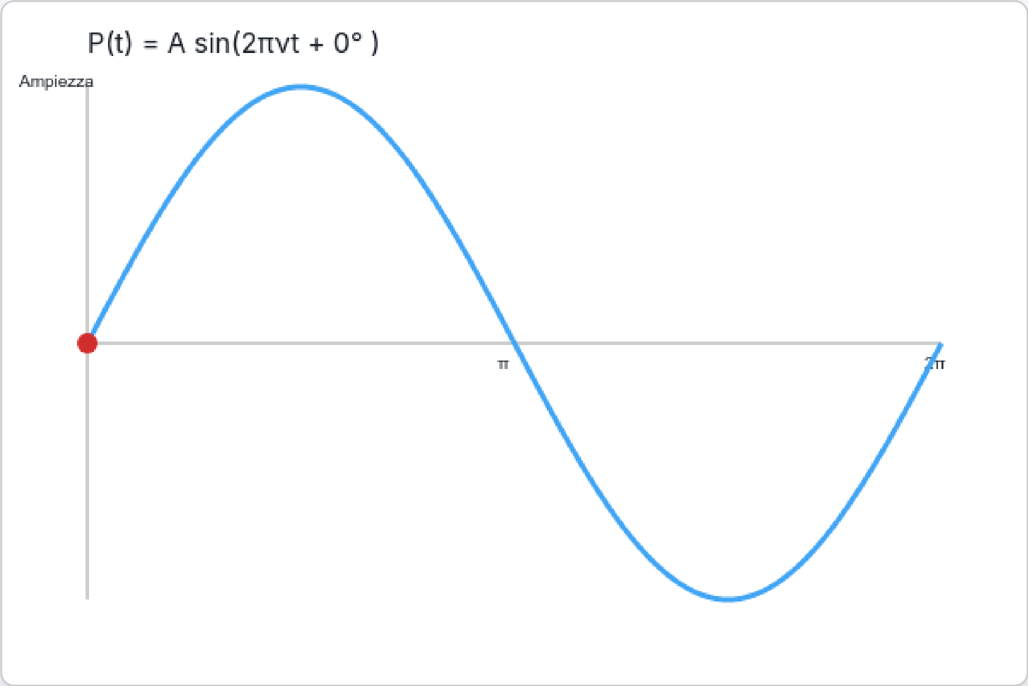
- Dobbiamo ora parlare del termine φ nell’equazione dell’onda sinusoidale:

$$\text{oscillazione} = A \sin(2\pi\nu t + \varphi),$$

- Abbiamo accennato al fatto che sia un **angolo**, e quindi si misura in gradi
- Concettualmente esso rappresenta il momento in cui si inizia a misurare l’onda in un certo punto, e dice se ci troviamo al momento del massimo di pressione, del minimo, etc.

Sfasamento (Fase Iniziale) φ: 0°





Valori di φ

φ	Significato	%
0°	Pressione di equilibrio, crescente	0%
90°	Massima pressione	25%
180°	Pressione di equilibrio, decrescente	50%
270°	Minima pressione	75%

3. Ampiezza

Ampiezza di un’onda

- Passiamo ora a discutere il senso dell’ampiezza A:

$$\text{oscillazione} = A\sin(2\pi\nu t + \varphi),$$

- Come avevamo già accennato, per un’onda acustica in un fluido come l’aria o l’acqua, l’ampiezza A può essere misurata in Pascal (pressione) o in kg/m^3 (densità)
- In un mezzo solido come un muro invece l’ampiezza è uno **spostamento**, e si misura in metri (ma tipicamente lo spostamento è minore di un millesimo di mm!)

Variazione dell'ampiezza

- Immaginate di essere in un prato e di lanciare un urlo
- Chi è vicino a voi sentirà il vostro grido con grande intensità
- Ma, allontanandosi, il suono sarà sempre più debole
- Sapete spiegare il perché?

Ampiezza, potenza, intensità

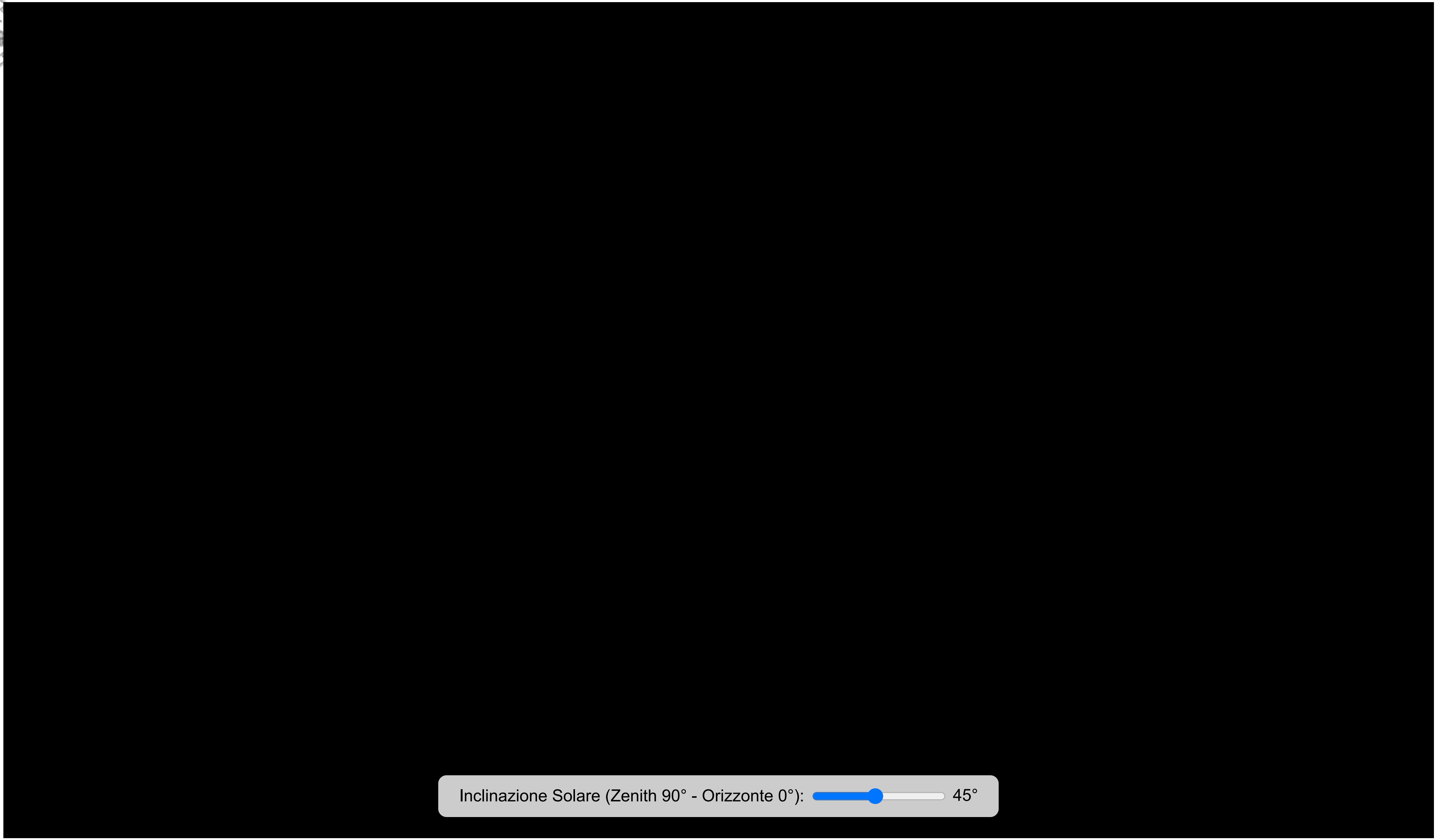
- Un’onda, come già sappiamo, trasmette energia
- La “potenza” di un’onda è legata all’energia trasmessa nell’unità di tempo, e si misura in Watt
- Però un’onda non è una particella ma qualcosa di esteso, e quindi è più appropriato parlare di una potenza W distribuita su una superficie S. Questa è l’**intensità sonora** I:

$$I = \frac{W}{S}$$

che si misura in W/m^2 (Watt per metro quadro).

Ampiezza e intensità

- Ricordate la definizione di pressione? L'avevamo dovuta introdurre per quei casi in cui una forza F non è applicata su un solo punto, ma viene "diluita" perché applicata su tanti punti (= una superficie S).
- Il concetto dell'intensità è lo stesso: l'energia di un'onda si propaga investendo una superficie, e l'intensità misura la "diluzione" della potenza associata.
- È precisamente a causa di questa diluizione che il Sole scalda la Terra di più in estate e di meno in inverno (quando è più inclinato), come mostrato nella slide successiva. (La luce è infatti un'onda elettromagnetica).


Inclinazione Solare (Zenith 90° - Orizzonte 0°): 45°

Ampiezza e intensità

- L'intensità **non** è l'ampiezza, ma ad essa è strettamente legata
- Esiste infatti una relazione, tra la pressione P di un'onda e la sua intensità I:

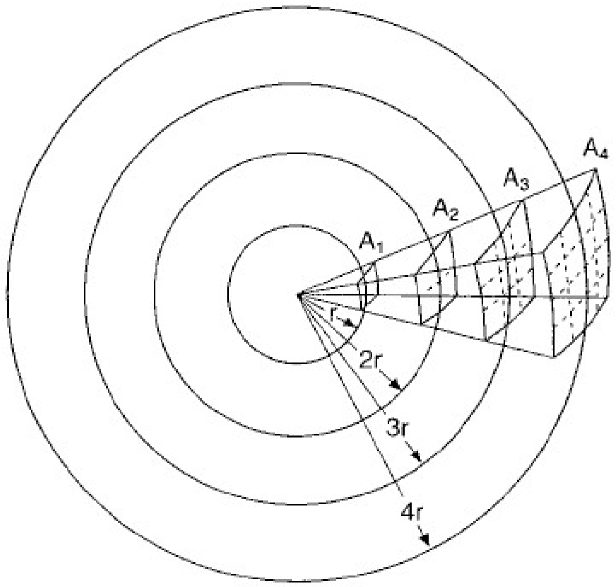
$$I = \frac{1}{2} \frac{P^2}{\rho v_{\text{suono}}},$$

  dove ρ è la densità dell'aria.

- Non spiegheremo questa relazione; notate però che è qualitativamente simile a $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

Variazione dell’ampiezza

- Il motivo per cui il suono propagandosi si attenua ha a che fare principalmente con la **conservazione dell’energia**
- L’urlo nasce dalla vostra bocca, che ha una piccola superficie. Ma il suono si propaga ovunque nello spazio (anche verso l’alto), e l’energia sonora deve necessariamente “diluirsi” sulla superficie $4\pi r^2$ di una sfera sempre più grande.
- Ciò avverrebbe anche **in mancanza di attrito e forze viscose**!



Interludio: formule

- È bene avere presenti alcune formule geometriche legate al cerchio e alla sfera
- Supponendo che r sia il raggio (in metri) del cerchio o della sfera, valgono queste proprietà:

  1. Lunghezza della circonferenza: $2\pi r$
  2. Area del cerchio: πr^2
  3. Superficie della sfera: $4\pi r^2$
  4. Volume della sfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$

Trucchi mnemonici

- Per ricordare le formule, tenete presente le unità di misura: le **lunghezze** hanno r, le **superfici** r^2, ed i **volumi** r^3!
- Per distinguere l'area del cerchio (πr^2) dalla superficie della sfera ($4\pi r^2$), ricordate che la superficie di una mela (sfera) è esattamente quattro volte la superficie interna (cerchio) quando la dividete in due

Legge dell'inverso del quadrato

- In un caso ideale, l'intensità dell'onda sonora varia come **l'inverso del quadrato** della distanza r. Se quindi due persone misurano un'intensità I_1 e I_2 a due distanze r_1 e r_2, vale che

$$I_1 \times 4\pi r_1^2 = I_2 \times 4\pi r_2^2.$$

- La formula è più utile semplificando 4π e risolvendo per I_2:

$$I_2 = I_1 \times \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Esempio

- Una persona è seduta in prima fila a 3 m dal professore ($r_1 = 3\,\mathrm{m}$)
- Un'altra persona è seduta più dietro, a 9 metri dal professore ($r_2 = 9\,\mathrm{m}$)
- Se l'orecchio della prima persona riceve un suono di intensità I_1, la seconda persona riceve un suono di ampiezza

$$I_2 = I_1 \times \frac{r_1^2}{r_2^2} = I_1 \times \frac{(3\,\mathrm{m})^2}{(9\,\mathrm{m})^2} = I_1 \times \frac{9}{81} = \frac{I_1}{9}$$

Intensità percepita

- Possiamo concludere che se la distanza triplica, l’intensità si riduce di un fattore 9, ossia 3^2
- Questo vuol dire che la seconda persona percepisce la voce del professore 9 volte meno intensa?
- (Potete fare la prova, se volete!)

Legge di Weber-Fechner

- Il calcolo non è sbagliato: l'intensità diminuisce davvero di un fattore 9
- Ma l'intensità non è ciò che misura il nostro orecchio. (Se così fosse, le aule universitarie dovrebbero essere fatte in modo che il professore stia al centro, e tutti gli studenti in cerchio attorno a lui!)
- In prima approssimazione, le percezioni sensoriali seguono la cosiddetta "legge di Weber-Fechner"

Il lavoro di Weber

- Ernst Weber (1795-1878) scoprì che la variazione di uno stimolo viene percepita in modo differente a seconda dell'intensità iniziale dello stimolo
- Weber verificò che se a una persona che regge un peso si aggiunge un ulteriore peso, questa lo percepirà diversamente:
  - Aggiungere 100 g ad un carico di 10 kg dà una percezione minima, quasi inavvertibile
  - Ma aggiungere 100 g ad un carico di 200 g è invece chiaramente avvertibile!

La conclusione di Fechner

- Gustav Fechner (1801-1887) descrisse matematicamente quanto aveva osservato Weber, e derivò la formula

  $$p = k \log_{10} S + C$$

  dove p è la "percezione" (ciò che avvertono i miei sensi), S è lo stimolo (il fenomeno fisico che raggiunge i miei sensi), e k e C costanti che non ci interessano qui.

- Anche se la legge di Weber-Fechner è un'approssimazione, è stata importante storicamente per definire il "decibel". Dovremo quindi capire il funzionamento di $\log_{10}$, che è l'inverso di una potenza.

Potenze

- Per capire i decibel è sufficiente considerare solo le potenze in base 10. Quasi tutto quanto diremo però si applica anche ad altre basi
- La potenza n di 10 è definita come

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ volte}}$$

- Esempio: $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$
- Trucco: il numero n dice il numero di zeri che seguono 1.

Prodotti di potenze

- Quando moltiplichiamo tra loro due potenze di 10, il risultato è una potenza di 10 il cui esponente è la **somma** dei due:

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m}$$

- Questo è banale da dimostrare:

$$10^n \times 10^m = \underbrace{10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ volte}} \times \underbrace{10 \times \ldots \times 10}_{m \text{ volte}} = \underbrace{10 \times \ldots \times 10}_{n+m \text{ volte}}$$

Rapporti tra potenze

- Quando si dividono due potenze di dieci, il risultato è una potenza di dieci con esponente la **differenza** dei due esponenti:

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$$

- Anche in questo caso la dimostrazione è banale:

$$\frac{10^n}{10^m} = \frac{\overbrace{\cancel{10} \times \cancel{10} \times \ldots \cancel{10}}^{m \text{ cancellazioni}} \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10}{\underbrace{\cancel{10} \times \cancel{10} \times \ldots \cancel{10}}_{m \text{ volte}}} = 10^{n-m}$$

Altre proprietà

- Usando un po’ di logica, si possono estendere queste operazioni anche in altri casi.
- Ad esempio, possiamo definire le potenze **negative** tramite rapporti di potenze. Una potenza come

$$10^{-4}$$

può essere vista come

$$10^{-4} = 10^{1-5} = \frac{10^1}{10^5} = \frac{10}{100.000} = 0{,}0001.$$

Potenza zero-esima

- Possiamo anche attribuire un significato alla potenza zero:

$$10^0$$

- Basta scrivere

$$10^0 = 10^{1-1} = \frac{10^1}{10^1} = \frac{10}{10} = 1$$

- Quindi, il 10 elevato alla zero è uguale per convenzione a 1. (Questo è coerente con il nostro trucco: “10^0 è uguale a 1 seguito da zero zeri”!)

Potenze frazionarie

- Chiediamoci ora che significato dare alla potenza

$$10^{0{,}5}$$

- Perché la nostra definizione sia coerente con quanto detto sinora, dovremmo fare in modo che le vecchie proprietà valgano anche qui. Quindi, in particolare:

$$10^{0{,}5} \times 10^{0{,}5} = 10^{0{,}5+0{,}5} = 10^1 = 10.$$

- Ma sappiamo già qual è il numero che, moltiplicato per se stesso, è uguale a 10: si tratta della **radice quadrata** di 10, ossia $\sqrt{10} \approx 3{,}162$.

Potenze frazionarie

- Usando la stessa logica, è possibile dare un senso a **qualsiasi** esponente:

$$10^{0,25} = \sqrt[4]{10} \approx 1{,}778,$$
$$10^{1,5} = 10^1 \times 10^{0,5} = 10 \times \sqrt{10} = 31{,}623,$$

  (la scrittura $\sqrt[4]{10}$ indica quel numero che elevato alla potenza 4 è uguale a 10).

- I matematici hanno scoperto che se si definisce questa formula

$$10^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{10^n},$$

  le proprietà delle potenze continuano ad essere valide!

Potenze frazionarie

- Lavorando con potenze di 10 intere, abbiamo visto che il risultato è sempre 1 seguito o preceduto da zeri:

$$10^4 = 10.000, \qquad 10^{-2} = 0{,}01$$

- Però quando le potenze sono numeri con la virgola non è più così:

$$10^{0{,}5} \approx 3{,}162, \qquad 10^{-1{,}7} \approx 0{,}01995.$$

- È possibile scrivere *qualsiasi* numero come una potenza di 10?

I logaritmi

- La risposta è: “un po’ sì, e un po’ no”
- Non si può infatti scrivere un numero negativo o lo zero come una potenza di dieci (a meno di non usare strumenti matematici sofisticati, che però non sono rilevanti per questo corso): **non esiste** un k per cui valga $10^k = -3$!
- Ma se un numero n è positivo, i matematici hanno mostrato che è **sempre possibile** scriverlo come una potenza di dieci. L’esponente del dieci è detto “logaritmo in base dieci di n”, e si scrive $\log_{10} n$

$$n = 10^{\log_{10} n}.$$

I logaritmi

- Riprendendo i nostri due esempi di prima

$$10^{0{,}5} \approx 3{,}162, \qquad 10^{-1{,}7} \approx 0{,}01995,$$

da queste stesse eguaglianze segue che

$$\log_{10} 3{,}162 \approx 0{,}5, \qquad \log_{10} 0{,}01995 \approx -1{,}7$$

- Ovviamente, le cose sono molto più semplici (ed esatte!) quando abbiamo potenze intere di 10:

$$\log_{10} 10.000 = 4, \qquad \log_{10} 0{,}00001 = -5.$$

Significato di $\log_{10}$ $(n > 1)$

- Se osserviamo alcuni logaritmi in base 10, possiamo notare una particolarità:

$$\log_{10} 1000 = 3, \quad \log_{10} 51.523{,}4 \approx 4{,}712, \quad \log_{10} 7.823.552{,}8 \approx 6{,}8$$

- Se un numero maggiore di 1 ha k cifre prima della virgola, il suo logaritmo è semp tale che

$$k - 1 \leq \log_{10} n < k$$

In altre parole, il logaritmo in base 10 può essere anche usato per "contare" le cifre

Numeri minori di 1

- Dal momento che $10^0 = 1$, vale allora che

$$\log_{10} 1 = 0.$$

- Per i numeri positivi che sono minori di 1, il logaritmo è negativo:

$$\begin{aligned} 10^{-2} &= 0{,}01 \quad &\Rightarrow \quad &\log_{10} 0{,}01 = -2, \\ 10^{-1{,}7} &\approx 0{,}01995 \quad &\Rightarrow \quad &\log_{10} 0{,}01995 = -1{,}7 \end{aligned}$$

- Se un numero è più piccolo di 1, il logaritmo dice più o meno quante cifre ci sono dopo la virgola

Significato di $\log_{10}(n < 1)$

- Vediamo alcuni casi pratici con $n < 1$:

$$\log_{10} 0{,}001 = -3, \quad \log_{10} 0{,}054 \approx -1{,}268, \quad \log_{10} 0{,}00000852 \approx -$$

- Se un numero minore di 1 ha k zeri dopo la virgola, il suo logaritmo è sempre nega e tale che

$$-k - 1 \leq \log_{10} n < -k$$

Anche qui il logaritmo “conta”, ma nella direzione opposta, e stavolta conta gli zeri

Approssimazioni

- Se volete stimare un logaritmo, è possibile arrotondare i numeri: il logaritmo “perdona” facilmente gli arrotondamenti.
- L’abbiamo visto proprio negli esempi delle slide precedenti:

$$
\begin{aligned}
10^{-1{,}7} \approx 0{,}01995 \quad &\Rightarrow \quad \log_{10} 0{,}01995 = -1{,}7, \\
10^{-2} = 0{,}01 \quad &\Rightarrow \quad \log_{10} 0{,}01 = -2
\end{aligned}
$$

Arrotondando 0.01995 a 0.1 (**grande** arrotondamento! abbiamo dimezzato il numero!), il risultato −1,7 diventa 2.

Esercizi

Provate a stimare (ad occhio!) il valore del logaritmo di 10 di questi numeri

$$\log_{10} 16.341 \qquad \log_{10} 65.316.732.001$$

$$\log_{10} 5 \qquad \log_{10} 1$$

$$\log_{10} 0{,}1 \qquad \log_{10} 0{,}01$$

$$\log_{10} 0{,}3 \qquad \log_{10} 0{,}089$$

$$\log_{10} 10{,}35 \qquad \log_{10} 163{,}1$$

Proprietà dei logaritmi

- Dalle proprietà delle potenze discendono le proprietà dei logaritmi:

$$\log_{10}\left(10^n \times 10^m\right) = \log_{10} 10^{n+m} = n + m = \log_{10} 10^n + \log_{10} 10^m.$$

- Lo stesso vale per il logaritmo di una divisione, solo che al posto della somma $n + m$ compare la differenza $n - m$
- Quindi, **i logaritmi trasformano i prodotti in somme, e le divisioni in differenze**

Esempi

- Supponiamo di voler calcolare un prodotto molto complicato:

$$3.562.512 \times 7.412.559.919$$

- Se passiamo ai logaritmi in base dieci, abbiamo che

$$\log_{10} 3.562.512 \approx 6,?, \qquad \log_{10} 7.412.559.919 \approx 9,?$$

- Quindi il logaritmo in base 10 del risultato sarà $6,? + 9,?$, ossia qualcosa tra 15 e 16: il risultato è quindi un numero a 16–17 cifre. Infatti

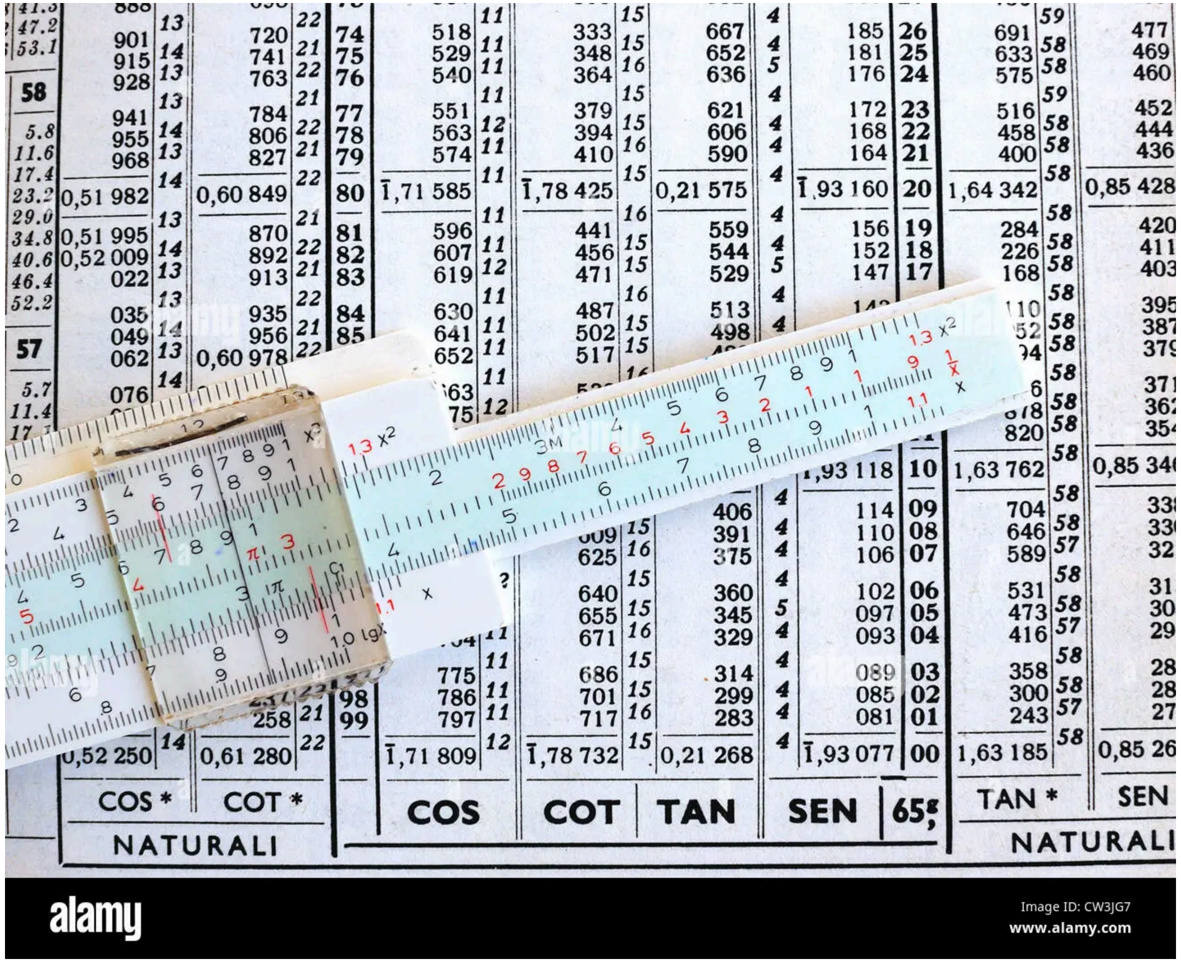
$$3.562.512 \times 7.412.559.919 = 26.407.333.662.156.528$$

Calcoli veloci

- Prima che inventassero le calcolatrici, per calcolare prodotti tra grandi numeri si usavano i logaritmi
- Si mandavano a memoria i logaritmi in base 10 dei numeri da 1 a 9, e poi si scrivev numeri in modo "furbo" per calcolarne più rapidamente i logaritmi. Ad esempio:

$$\log_{10} 351.912 \approx \log_{10} 350.000 = \log_{10} 3{,}5 \times 10^5 = \log_{10} 3{,}5 + \log_{10}$$
$$= \log_{10} 3{,}5 + 5 = 0{,}54 + 5 = 5{,}54$$

- Una volta calcolati i logaritmi, si sommavano tra loro per ottenere il logaritmo in b del risultato. Con trucchi e regoli calcolatori, dal logaritmo si risaliva al risultato.


COS *
COT *
NATURALI
COS
COT
TAN
SEN
TAN *
SEN
NATURALI
alamy
Image ID: CW3JG7
www.alamy.com

Conclusioni

Cosa sapere per l’esame

- Onde sinusoidali
- Significato della fase
- Ampiezza e intensità sonora
- Potenze e logaritmi in base 10