

一级倒立摆仿真模型的建立

翟龙余

(江苏财经职业技术学院, 江苏 淮安 223001)

【摘要】针对一级倒立摆系统,首先利用牛顿力学的知识建立了数学模型,然后利用 Simulink 及其封装功能建立了倒立摆系统的仿真模型,使模型更具灵活性,给仿真带来很大方便。

【关键词】倒立摆;数学模型;仿真模型

【中图分类号】N945.12

【文献标识码】B

【文章编号】1008-1151(2011)08-0268-03

Building the Simulation Model of an Inverted Pendulum

Zhai Longyu

(Jiangsu Finance and Economics College, Huai'an Jiangsu, China 223003)

Abstract: This paper aims at an inverted pendulum system. It argues, after building a mathematical model on the basis of Newtonian mechanics, we can use Simulink and its MASK function to establish a simulation model of an inverted pendulum system, which can make the model more flexible and bring more convenience to the simulation.

Keywords: inverted pendulum; mathematical model; simulation model

倒立摆系统是研究控制理论的一种典型实验装置,具有成本低廉,结构简单,物理参数和结构易于调整的优点,是一个具有高阶次、不稳定、多变量、非线性和强耦合特性的不稳定系统。在控制过程中,它能有效地反映诸如可镇定性、鲁棒性、随动性以及跟踪等许多控制中的关键问题,是检验各种控制理论的理想模型。本文以一级倒立摆为例,首先建立了倒立摆系统的数学模型,最终利用 simulink 建立其仿真模型。

1 一级倒立摆系统的数学模型

经过小心的假设忽略掉一些次要的因素,如忽略了空气阻力、系统内部的摩擦,不考虑构件的变形,则可以将直线一级倒立摆系统抽象成小车和匀质杆组成的系统,如图1所示。这是一个典型的运动刚体系统,可以在惯性坐标系内应用经典牛顿力学理论建立系统的动力学方程。^[1]

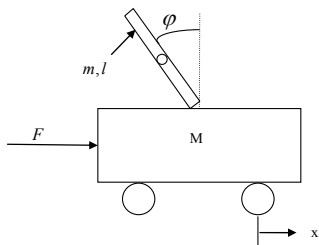


图1 倒立摆系统

各参数符号含义如下:

符号	含义	单位
M	小车质量	kg
m	摆杆质量	kg
b	小车摩擦系数	N/m/sec
l	摆杆转动轴心到杆质心的长度	m
I	摆杆转动惯量	kg·m ²
F	加在小车上的力	N
x	小车位置	m
φ	摆杆与垂直向上方向的夹角	rad

图2是系统中小车和摆杆的受力分析图,其中,N和P为小车与摆杆相互作用力的水平和垂直两个方向的分量。矢量正方向如图2所示。

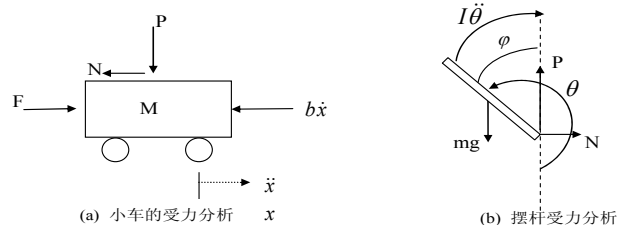


图2 小车与摆杆的受力分析

小车作平动,由小车的水平受力分析,可以得到以下方程:

$$M\ddot{x} = F - b\dot{x} - N \quad (1)$$

【收稿日期】2011-04-17

【作者简介】翟龙余(1966-),男,江苏姜堰人,江苏财经职业技术学院基础教学部副教授,硕士,从事高等数学与matlab应用教学。

摆杆作平面运动，可分解为质心的平动和绕质心转动，

由水平方向的受力分析，可以得到下式：

$$N = m \ddot{x} - ml \ddot{\varphi} \cos \varphi + ml \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \quad (2)$$

代入 (1) 式得：

$$(M + m) \ddot{x} + b \dot{x} - ml \ddot{\varphi} \cos \varphi + ml \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F \quad (3)$$

再由摆杆的垂直方向的受力分析，得到下式：

$$P = mg - ml \ddot{\varphi} \sin \varphi - ml \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \quad (4)$$

又由摆杆对质心的力矩平衡方程有：

$$I \ddot{\varphi} = Pl \sin \varphi + Nl \cos \varphi \quad (5)$$

整理得：

$$(I + ml^2) \ddot{\varphi} - mgl \sin \varphi = ml \ddot{x} \cos \varphi \quad (6)$$

在 φ 与 1 (单位是弧度) 相比很小，即 $\varphi \ll 1$ 时，则可以进行近似处理： $\cos \varphi \approx 1$ ， $\sin \varphi \approx \varphi$ ， $\dot{\varphi} \approx 0$ 。用 u 来代表被控对象的输入力 F ，线性化后得到两个运动方程如下：

$$\begin{cases} (I + ml^2) \ddot{\varphi} - mgl \varphi = ml \ddot{x} \\ (M + m) \ddot{x} + b \dot{x} - ml \ddot{\varphi} = u \end{cases} \quad (7)$$

可解得：

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} \dot{x} + \frac{m^2 g l^2}{I(M + m) + Mml^2} \varphi + \frac{(I + ml^2)}{I(M + m) + Mml^2} u \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} = \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2} \dot{x} + \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2} \varphi + \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2} u \end{cases} \quad (8)$$

把摆杆的转动惯量 $I = \frac{1}{3} ml^2$ 代入，令

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{-4b}{4M + m} & K_2 &= \frac{3mg}{4M + m} & K_3 &= \frac{-3b}{l(4M + m)} \\ K_4 &= \frac{3g(M + m)}{l(4M + m)} & K_5 &= \frac{4}{4M + m} & K_6 &= \frac{3}{l(4M + m)} \end{aligned}$$

经整理后得到倒立摆的数学模型简化形式如下：

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = K_1 \dot{x} + K_2 \varphi + K_5 u \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} = K_3 \dot{x} + K_4 \varphi + K_6 u \end{cases} \quad (9)$$

2 一级倒立摆系统的仿真模型

Simulink 是 Matlab 最重要的组件之一，它提供一个动态系统建模、仿真和综合分析的集成环境。在该环境中，可以构造出复杂的仿真模型，下文根据倒立摆的数学模型，利用 Simulink 的封装功能，构建了倒立摆系统仿真模型子系统。^[2]

根据倒立摆的数学模型即表达式 (9)，在 Matlab 中，用 Simulink 构建一级倒立摆模块 SingleInvPend，具体步骤如下：

(1) 双击 Matlab 图标，启动 Matlab，在工具栏中双击 Simulink 图标启动 Simulink 模块库浏览器窗口，然后再单击其工具栏中的新建 (creat a new mode) 图标，新建一个 Simulink 模型窗口。

(2) 从 Simulink 模块库浏览器的菜单 Simulink 的子菜单端口和子系统模块 (Port & Subsystems) 下选中子系统 Subsystem，并用左键拖入到新建的 Simulink 模型窗口中。左击系统框图下字符串 “Subsystem”，删除后输入 “SingleInvPend”，实现子系统的重新命名。结果如图 3。



图 3 SingleInvPend 模块 图 4 SingleInvPend 模块

(3) 双击图 3 中的 SingleInvPend 模块，从 Port & Subsystems 下在拖出三个输出模块 out，把一个输入模块和四个输出模块分别重新命名为： u 和 x 、 x' 、 a 、 a' ，分别代表系统的输入向量 u 和输出向量 x 、 \dot{x} 、 φ 、 $\dot{\varphi}$ (Matlab 中不支持公式编辑器和希腊字母)。结果如图 4。

(4) 双击 SingleInvPend 模块，然后从 Simulink 下子菜单 “用户自定义函数模块” (User-Defined Functions) 中拖出 Fcn 子模块，单击 Fcn 子模块下的 Fcn，删除 Fcn 重新命名为 K1；再双击 Fcn 子模块并将对话框中的 “Expression” 中的内容修改为： $[-4 * b / (4 * M + m)] * u$ ，然后按 OK，这就定义好了 K_1 。(说明：由于 matlab 子系统的变量名是不区分大小写，所以数学模型中的摆杆的质量 m 在 matlab 中用 ml 代替)

(5) 重复步骤 4) 依次定义 K_2 、 K_3 、 K_4 、 K_5 、 K_6 。

(6) 在窗口中再加入四个积分模块和两个加法模块，双击四个积分模块，把 “Initial condition” 下的内容分别修改为 “init_cond(1)”、“init_cond(2)”、“init_cond(3)”、“init_cond(4)”。“它们表示倒立摆的系统的初始条件。

(7) 把所有模块按公式 (9) 的运算关系连结起来，得

到子系统的内部结构图，如图 5 所示。

(8) 利用 Simulink 的 Mask 功能进行封装。右击 SingleInvPend 模块，选择 Mask Subsystem (封装子系统) 菜单，弹出子系统封装对话框，点击 Parameters 标签，在参数对话框中，依次添加 $init_cond$ 、 M 、 $M1$ 、 l 、 b 、 g 等各参数变量，结果如图 6。

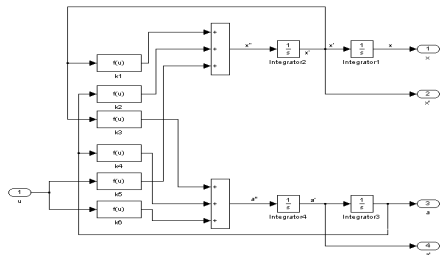


图 5 子系统内部结构

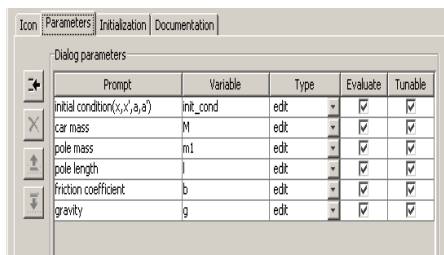


图 6 子系统参数标签

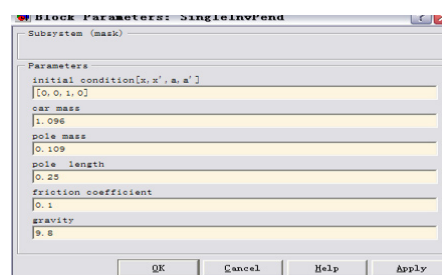


图 7 封装后的参数设计

(9) 双击封装后的子系统，弹出模块的参数对话框，分别输入上述各参数变量的值，如图 7。

至此完成了倒立摆系统的仿真模型的建立。

3 结束语

在倒立摆仿真控制时，有时需要了解不同的初始状态下控制系统的响应，或者要了解系统在其他参数情况下的控制系统的响应，这时我们只要重新双击封装后的子系统模型，再重新输入新的参数值即可，从而使模型更具灵活性，给仿真带来很大方便。

【参考文献】

- [1] 固高科技(深圳)有限公司编著.倒立摆与自动控制原理实验[M].2005,24-27.
- [2] 王正林,王胜开,陈国顺.MATLAB/Simulink 与控制系统仿真[M].北京:电子工业出版社,2005.7:44-77.

(上接第 277 页) 经验来完成，因此容易造成个别输出目标值偏离实际值。

由此可见，各种工程投资估算方法有各自的适用范围，在进行高校建设工程投资估算时，有必要结合投资估算方法的适用范围及同类项目历史资料的实际情况，来选取合适的投资估方法。此外，上述这些方法通常没有反映出工程造价的实际变化特性，因此可在原有方法基础上补充考虑资金时间价值因素方面的估算。

4 结束语

工程投资估算是制订融资方案、进行经济评价、编制初步设计概算的依据，其准确性直接影响到项目决策和工程建设。由于高校建设工程具有不同于其他建设工程的特点，导致高校基建项目投资估算工作也与其他建设工程不尽相同，因此在进行高校建设工程投资估算时，有必要结合投资估算方法的适用范围及同类项目历史资料完善程度，来选取合适的投资估方法。

【参考文献】

- [1] 吴贤国.建筑工程概预算:第二版[M].北京:中国建筑业出版社,2007.
- [2] 江昔平,陶学明.工程决策投资估算动态控制方法分析[J].低温建筑技术,2005(5):127-128.
- [3] 刘杨,赖笑.基于多元线性回归与工程造价倒算的土木工程投资估算方法研究[J].青海师范大学学报:自然科学版,2010(1):92-97.
- [4] 刘宗寿.灰色理论在工程投资估算中的应用[J].科技创业月刊,2010(11):61-62.
- [5] 乐乐,刘昌仁.基于模糊数学房地产项目工程造价估算研究[J].现代商贸工业,2010(3):183-184.
- [6] 戴健.BP 神经网络在工程造价估算中的应用[J].四川建筑,2009(5):219-220.
- [7] 吴世勇.高校建设项目全过程造价管理研究[D].合肥:合肥工业大学,2009.