一级倒立摆物理建模和传递函数的推导

设定:

M　小车质量
m　摆杆质量
b　小车摩擦系数
l　摆杆转动轴心到杆质心的长度
I　摆杆惯量
F　加在小车上的力
x　车位置

ϕ　摆杆与垂直向上方向的夹角

θ　摆杆与垂直向下方向的夹角（考虑到摆杆初始位置为竖直向下）

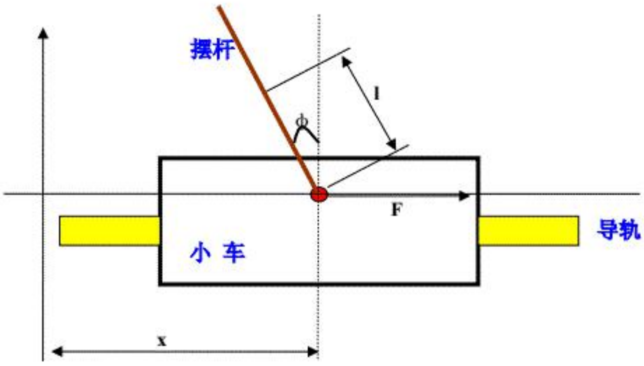

图 1 直线一级倒立摆模型

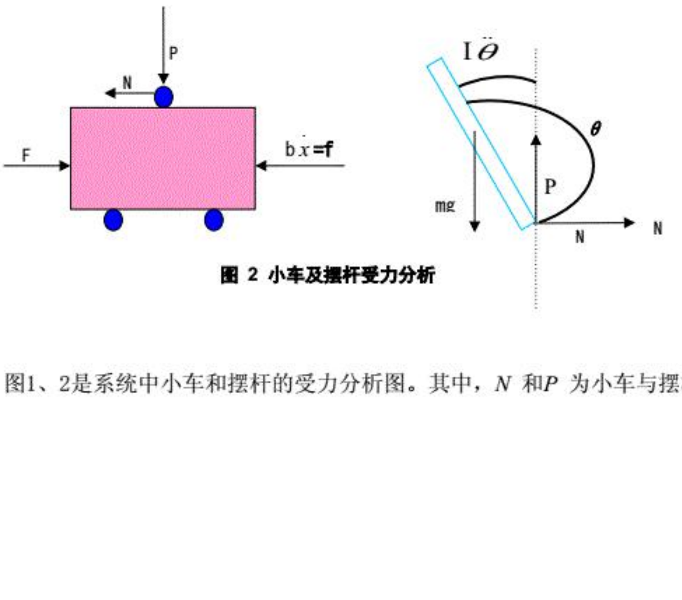

图 2 小车及摆杆受力分析

图1、2是系统中小车和摆杆的受力分析图。其中，N 和P 为小车与摆杆相

互作用。

分析小车水平方向所受的合力，可以得到以下方程：

$$M\ddot{x}=F-b\dot{x}-N \tag{1}$$

由摆杆水平方向的受力进行分析可以得到下面等式：

$$N=m\frac{d^2}{dt^2}(x+l\sin\theta) \tag{2}$$

即：
$$N=m\ddot{x}+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta \tag{3}$$

把这个等式代入式(3)中，就得到系统的第一个运动方程：

$$(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta=F \tag{4}$$

对摆杆垂直方向上的合力进行分析，可以得到下面方程：

$$P-mg=m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta) \tag{5}$$

$$P-mg=-ml\ddot{\theta}\sin\theta-ml\dot{\theta}^2\cos\theta \tag{6}$$

力矩平衡方程：

$$-Pl\sin\theta-Nl\cos\theta=I\ddot{\theta} \tag{7}$$

此方程中力矩的方向，由于$\theta=\pi+\phi$, $\cos\phi=-\cos\theta$，$\sin\phi=-\sin\theta$，故等式前面有负号。

合并这两个方程，约去 P 和N，得到第二个运动方程：

$$(I+ml^2)\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=-ml\ddot{x}\cos\theta \tag{8}$$

设$\theta=\pi+\phi$，假设ϕ 与1（单位是弧度）相比很小，即c <<1，则可以进行近似处理：$\cos\theta=-1$，$\sin\theta=-\phi$，$(\frac{d\theta}{dt})^2=0$。用u 来代表被控对象的输入力F，线性化后两个运动方程如下：

$$\begin{cases}(I+ml^2)\ddot{\phi}-mgl\phi=ml\ddot{x}\\(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}-ml\ddot{\phi}=u\end{cases} \tag{9}$$

假设初始条件为0，对式(9)进行拉普拉斯变换：

$$\begin{cases}(I+ml^2)\Phi(s)s^2-mgl\Phi(s)=mlX(s)s^2\\(M+l)X(s)s^2+bX(s)s-ml\Phi(s)s^2=U(s)\end{cases} \tag{10}$$

由于输出为角度ϕ，求解方程组的第一个方程，可以得到：

$$X(s) = [\frac{(I+ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2}]\Phi(s) \tag{11}$$

或

$$\frac{\Phi(s)}{X(s)} = \frac{mls^2}{(I+ml^2)s^2 - mgl} \tag{12}$$

令 $v = \ddot{x}$，则有：

$$\frac{\Phi(s)}{V(s)} = \frac{ml}{(I+ml^2)s^2 - mgl} \tag{13}$$

把上式代入方程组的第二个方程，得到：

$$(M+m)[\frac{(I+ml^2)}{ml} - \frac{g}{s}]\Phi(s)s^2 + b[\frac{(I+ml^2)}{ml} + \frac{g}{s^2}]\Phi(s)s^2 - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \tag{14}$$

整理后得到传递函数：

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s}{s^3 + \frac{b(I+ml^2)}{q}s^2 \frac{(M+m)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}} \tag{15}$$

其中 $q = [(M+m)(I+ml^2) - (ml)^2]$。

系统物理参数：

M	**小车质量**	**1.096Kg**
m	**摆杆质量**	**0.109Kg**
b	**小车摩擦系数**	**0.1N/m/sec**
l	**摆杆转动轴心到杆质心的长度**	**0.25m**
I	**摆杆惯量**	**0.0034Kg*m*m**

设系统状态空间方程为：

$$\dot{X} = AX + Bu$$
$$Y = CX + Du$$

对 $\ddot{x}$，$\ddot{\phi}$ 解代数方程，得到解如下：

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}=\dot{x}\\ \ddot{x}=\dfrac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)Mml^2}\dot{x}+\dfrac{m^2gl^2}{I(M+m)Mml^2}\phi+\dfrac{(I+ml^2)}{I(M+m)Mml^2}u\\ \dot{\phi}=\dot{\phi}\\ \ddot{\phi}=\dfrac{-mlb}{I(M+m)Mml^2}\dot{x}+\dfrac{mg(M+m)}{I(M+m)Mml^2}\phi+\dfrac{ml}{I(M+m)Mml^2}u\end{array}\right\} \qquad (17)$$

整理后得到系统状态空间方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\phi}\\ \ddot{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)Mml^2} & \dfrac{m^2gl^2}{I(M+m)Mml^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \dfrac{-mlb}{I(M+m)Mml^2} & \dfrac{mg(M+m)}{I(M+m)Mml^2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \phi\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{(I+ml^2)}{I(M+m)Mml^2}\\ 0\\ \dfrac{ml}{I(M+m)Mml^2}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}x\\ \phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \phi\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}u \qquad (18)$$

对于质量均匀分布的摆杆有： $I=\frac{1}{3}ml^2$，由(9)的第一个方程

$(I+ml^2)\ddot{\phi}-mgl\phi=ml\ddot{x}$，可得到：

$$(\frac{1}{3}ml^2+ml^2)\ddot{\phi}-\mathrm{mgl}\,\phi=ml\ddot{x}$$

化简：

$$\ddot{\phi}=\frac{3g}{4l}\phi+\frac{3}{4l}\ddot{x}$$

（19）

设X=$\left\{x,\dot{x},\phi,\dot{\phi}\right\}$，$u'=\ddot{x}$,有：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\phi}\\ \ddot{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dfrac{3g}{4l} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \phi\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ \dfrac{3}{4l}\end{bmatrix}u'$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \cdot$$

（20）