Übungen Physikalische Geodäsie: "Geoidberechnung nach Stokes"

Markus Antoni

Januar 20, 2021

Aufgabe 1

Nehmen Sie an, dass die gesamte arktische Eismasse eine sphärische Kappe mit Radius 10° um den Pol bedeckt, und dass innerhalb der Kugelkappe eine mittlere Schwereanomalie von $\Delta g = 50\,\mathrm{mGal}$ erzeugt wird. Wie groß ist der Effekt der Eiskappe auf die Geoidhöhe in Stuttgart ($\lambda \approx 9^\circ$, $\phi \approx 49^\circ$) ?

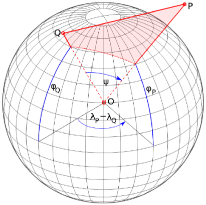
GIS

Integralformel von Stokes

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} St(\psi(\lambda_P, \phi_P, \lambda_Q, \phi_Q))\Delta g(\lambda_Q, \phi_Q)\mathrm{d}\sigma_Q$$

mit

- ψ: Sphärischer Abstand (vgl. Grafik)
- St: Stokesfunktion

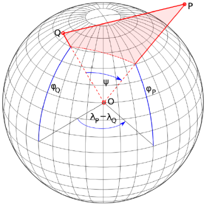


Integralformel von Stokes

$$\delta N_{\mathrm{Eis}} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} St(\psi(\lambda_P, \phi_P, \lambda_Q, \phi_Q)) \Delta g(\lambda_Q, \phi_Q) \mathrm{d}\sigma_Q$$

mit

- ψ: Sphärischer Abstand (vgl. Grafik)
- *St*: Stokesfunktion



- mit globalen Daten
  $\rightarrow$ Berechnung der Geoidhöhe *N*
- hier nur Beitrag zum Geoid δN_{Eis}

Stokesfunktion

- räumliche Stokesfunktion

$$St(\psi, r, R) = \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2l+1}{l-1} P_l(\cos\psi) =$$

Stokesfunktion

- räumliche Stokesfunktion

$$St(\psi, r, R) = \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2l+1}{l-1} P_l(\cos\psi) =$$

$$= \frac{2R}{D} + \frac{R}{r} - 3\frac{RD}{r^2} - \frac{R^2}{r^2}\cos\psi \left[5 + 3\ln\frac{r - R\cos\psi + D}{2r}\right]$$

mit dem Abstand $D = \|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q\| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\psi}$

Stokesfunktion

- räumliche Stokesfunktion

$$St(\psi, r, R) = \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2l+1}{l-1} P_l(\cos\psi) =$$

$$= \frac{2R}{D} + \frac{R}{r} - 3\frac{RD}{r^2} - \frac{R^2}{r^2}\cos\psi \left[5 + 3\ln\frac{r - R\cos\psi + D}{2r}\right]$$

mit dem Abstand $D = \|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q\| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\psi}$

- sphärische Stokesfunktion (r=R):

$$St(\psi) = \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

beachte:
$\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\psi} = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cos\psi} = 2R\sin\frac{\psi}{2}$

Integration?

- "saubere Rechnung":
  - Doppelintegration in sphärischen Koordinaten ($\psi = \psi(\lambda, \phi)$)
  - Integration im gedrehten Koordinatensystem (Variablen: Azimut *A* und sphärischer Abstand ψ)
- Interpretation als Blockmittelwert
  - konstante Schwereanomalie in der Eiskappe ✓
  - Auswertung der sphärischen Stokesfunktion in der Entfernung "Südpol-Stuttgart"

Integration (Bockmittelwert)

$$\delta N_{\mathrm{Eis}} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int\limits_{-90\frac{\pi}{180}}^{-80\frac{\pi}{180}} \int\limits_{0}^{2\pi} St(\psi(\lambda_P, \phi_P, \lambda_Q, \phi_Q))\Delta g(\lambda_Q, \phi_Q) \quad \overbrace{\mathrm{d}\sigma_Q}^{\sin \phi_Q \mathrm{d}\lambda_0 \mathrm{d}\phi_Q}$$

Integration (Bockmittelwert)

$$\delta N_{\text{Eis}} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int\limits_{-90\frac{\pi}{180}}^{-80\frac{\pi}{180}} \int\limits_{0}^{2\pi} St(\psi(\lambda_P, \phi_P, \lambda_Q, \phi_Q))\Delta g(\lambda_Q, \phi_Q) \overbrace{\mathrm{d}\sigma_Q}^{\sin\phi_Q \mathrm{d}\lambda_0 \mathrm{d}\phi_Q}$$

$$= \frac{R}{4\pi\gamma} St(\bar{\psi})\Delta g \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\lambda_Q \cdot \int\limits_{-90\frac{\pi}{180}}^{-80\frac{\pi}{180}} \sin\phi_Q \mathrm{d}\phi_Q =$$

$$= \frac{R}{2\gamma} St(\bar{\psi})\Delta g \left[-\cos\phi_Q\right]_{-90\frac{\pi}{180}}^{-80\frac{\pi}{180}}$$

Integration (Bockmittelwert)

$$\delta N_{\mathrm{Eis}} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int\limits_{-90\frac{\pi}{180}}^{-80\frac{\pi}{180}} \int\limits_{0}^{2\pi} St(\psi(\lambda_P, \phi_P, \lambda_Q, \phi_Q))\Delta g(\lambda_Q, \phi_Q) \overbrace{\mathrm{d}\sigma_Q}^{\sin\phi_Q \mathrm{d}\lambda_0 \mathrm{d}\phi_Q}$$

$$= \frac{R}{4\pi\gamma} St(\bar{\psi})\Delta g \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\lambda_Q \cdot \int\limits_{-90\frac{\pi}{180}}^{-80\frac{\pi}{180}} \sin\phi_Q \mathrm{d}\phi_Q =$$

$$= \frac{R}{2\gamma} St(\bar{\psi})\Delta g \left[-\cos\phi_Q\right]_{-90\frac{\pi}{180}}^{-80\frac{\pi}{180}} = -44.250\ \mathrm{m}$$

Zahlenwerte

- $\Delta g = 50\ \mathrm{mGal}$
- $R = 6371000\ \mathrm{m}$
- $\gamma = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
- $\bar{\psi} = (49 + 90)\frac{\pi}{180}$