Übung 1: Kugelflächenfunktionen

Ausgabe: *11. November 2020* Abgabe: *2. Dezember 2020*, 17 Uhr

Aufgabe 1: Legendre-Funktionen

a) Bestimmen Sie mit den Startwerten $P_1(t) = t$ und $P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$, und der Rekursionsformel

$$P_n(t) = \frac{2l-1}{n} t P_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(t)$$

die unnormierten Legendrepolynome bis zum Grad $n = 4$ und geben Sie deren Normierungsfaktoren N_{n0} an.

b) Die Legendrepolynome $P_n(t)$ bilden ein orthogonales Funktionensystem im Intervall $I = [-1, 1]$. Untersuchen Sie, ob auch die zugeordneten Legendrefunktionen $\bar{P}_{n,m}(t)$ immer orthogonal zueinander sind, und begründen Sie ihre Aussage.

Aufgabe 2: Sphärisch-Harmonische Analyse

a) Approximieren Sie die folgenden Funktionen

$$f_1(\lambda, \vartheta) = \cos^2 \vartheta, \quad f_2(\lambda, \vartheta) = \sin^3 \vartheta \sin \lambda \quad f_3(\lambda, \vartheta) = \cosh(\cos \vartheta)$$

durch Kugelflächenfunktionen, indem Sie mit Hilfe der Integralformel

$$c^f_{nm} = \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma f(\lambda, \vartheta) \cdot \bar{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) \mathrm{d}\sigma$$

die Koeffizienten c^f_{lm} — bis zum maximalen Grad $n = m = 4$ — berechnen.

- *Überlegen Sie zuerst, welche Integrale notwendig sind, und begründen Sie Ihre Aussagen.*
- *Um Schreibarbeit zu vermeiden, wird die Substitution $t = \cos \vartheta$ empfohlen.*
- *Entwickeln Sie für die Testfunktion f_3 eine Rekursion für die Integrale $J_k = \int_{-1}^{1} t^k \cosh t \mathrm{d}t$.*

b) "Verifizieren" Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie die berechneten Koeffizienten c^f_{nm} in die Syntheseformel

$$f(\lambda, \vartheta) = \sum_n \sum_m c^f_{nm} \bar{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta)$$

einsetzen und das Ergebnis mit den ursprünglichen Funktionen vergleichen.

Für die Berechnungen der Kugelflächenfunktionen können Sie das Paket SHBundle verwenden:
`https://www.gis.uni-stuttgart.de/forschung/downloads/shbundle/`

Aufgabe 3: Rotation von Kugelflächenfunktionen

Kugelflächenfunktionen bilden ein vollständiges System für die Darstellung aller stetigen und beschränkten Funktionen $f(\lambda, \vartheta)$ auf der Kugel. Daher lassen sich durch eine geeignete Linearkombination der originalen Funktionen $\hat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta)$ auch die Kugelflächenfunktionen $\hat{Y}_{lm}(\lambda', \vartheta')$ darstellen, die in einem zuvor gedrehten Koordinatensystem (λ', ϑ') ausgewertet werden:

$$\hat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') = \mathrm{e}^{-\imath m\gamma} \sum_{k=-n}^{n} d^n_{km}(\beta) \hat{Y}_{nk}(\lambda - \alpha, \vartheta)$$

Die Berechnungen vereinfachen sich in der komplexen Repräsentation und mit einer alternativen Normierung (vgl. `LeNorm.m` im SHBUNDLE):

$$\hat{Y}_{n,\pm m}(\lambda, \vartheta) = \bar{P}_{n,|m|}(\cos\vartheta)\mathrm{e}^{\pm\imath m\lambda} \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2\sqrt{2\pi}} & m > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} & m = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} & m < 0. \end{cases}$$

1. Implementieren Sie eine MATLAB-Funktion mit der (ineffektiven) Summendarstellung

$$d^n_{km}(\beta) = \sqrt{\frac{(n+m)!(n-m)!}{(n+k)!(n-k)!}} \sum_{t=t_1}^{t_2} \binom{n+k}{t} \binom{n-k}{n-m-t} (-1)^t \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2n-a} \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^a$$

   der sogenannten *Wigner-d-Funktionen* $d^n_{km}(\beta)$ mit den Abkürzungen $a = m - k + 2t$, $t_1 = \max(0, k - m)$ und $t_2 = \min(n - m, n + k)$.

2. Testen Sie mit dem Winkel $\gamma = \pi/12$ die Rotation der Kugelflächenfunktion $\hat{Y}_{6,4}(\lambda, \vartheta)$ wobei der Meta-Pol – d.h. das Abbild des Nordpols – in Stuttgart ($\Lambda_S = 9^\circ\, 11'$ O, $\Phi_S = 48^\circ\, 46'$ N) liegen soll. Visualisieren Sie das Ergebnis und die Differenz beider Berechnungen.