

Übung 1: Kugelflächenfunktionen

Ausgabe: 11. November 2020

Abgabe: 25. November 2020, 17 Uhr

Aufgabe 1: Legendre-Funktionen

- a) Bestimmen Sie mit den Startwerten $P_1(t) = t$ und $P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$, und der Rekursionsformel

$$P_n(t) = \frac{2n-1}{n}tP_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(t)$$

die unnormierten Legendrepolynome bis zum Grad $n = 4$ und geben Sie deren Normierungsfaktoren N_{n0} an.

- b) Die Legendrepolynome $P_n(t)$ bilden ein orthogonales Funktionensystem im Intervall $I = [-1, 1]$. Untersuchen Sie, ob auch die zugeordneten Legendrefunktionen $\bar{P}_{n,m}(t)$ immer orthogonal zueinander sind, und begründen Sie ihre Aussage.

Aufgabe 2: Sphärisch-Harmonische Analyse

- a) Approximieren Sie die folgenden Funktionen

$$f_1(\lambda, \vartheta) = \cos^2 \vartheta, \quad f_2(\lambda, \vartheta) = \sin^3 \vartheta \sin \lambda, \quad f_3(\lambda, \vartheta) = \cosh(\cos \vartheta)$$

durch Kugelflächenfunktionen, indem Sie mit Hilfe der Integralformel

$$c_{nm}^f = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\lambda, \vartheta) \cdot \bar{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta) d\sigma$$

die Koeffizienten c_{lm}^f – bis zum maximalen Grad $n = m = 4$ – berechnen.

- Überlegen Sie zuerst, welche Integrale notwendig sind, und begründen Sie Ihre Aussagen.
- Um Schreibarbeit zu vermeiden, wird die Substitution $t = \cos \vartheta$ empfohlen.
- Entwickeln Sie für die Testfunktion f_3 eine Rekursion für die Integrale $J_k = \int_{-1}^1 t^k \cosh t dt$.

- b) "Verifizieren" Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie die berechneten Koeffizienten c_{nm}^f in die Synthesformel

$$f(\lambda, \vartheta) = \sum_n \sum_m c_{nm}^f \bar{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta)$$

einsetzen und das Ergebnis mit den ursprünglichen Funktionen vergleichen.

Für die Berechnungen der Kugelflächenfunktionen können Sie das Paket SHBUNDLE verwenden:
<https://www.gis.uni-stuttgart.de/forschung/downloads/shbundle/>

Aufgabe 3: Rotation von Kugelflächenfunktionen

Kugelflächenfunktionen bilden ein vollständiges System für die Darstellung aller stetigen und beschränkten Funktionen $f(\lambda, \vartheta)$ auf der Kugel. Daher lassen sich durch eine geeignete Linearkombination der originalen Funktionen $\hat{Y}_{nm}(\lambda, \vartheta)$ auch die Kugelflächenfunktionen $\hat{Y}_{lm}(\lambda', \vartheta')$ darstellen, die in einem zuvor gedrehten Koordinatensystem (λ', ϑ') ausgewertet werden:

$$\hat{Y}_{nm}(\lambda', \vartheta') = e^{-im\gamma} \sum_{k=-n}^n d_{km}^n(\beta) \hat{Y}_{nk}(\lambda - \alpha, \vartheta)$$

Die Berechnungen vereinfachen sich in der komplexen Repräsentation und mit einer alternativen Normierung (vgl. `LeNorm.m` im `SHBUNDLE`):

$$\hat{Y}_{n,\pm m}(\lambda, \vartheta) = \bar{P}_{n,|m|}(\cos \vartheta) e^{\pm im\lambda} \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2\sqrt{2\pi}} & m > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} & m = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} & m < 0. \end{cases}$$

1. Implementieren Sie eine MATLAB-Funktion mit der (ineffektiven) Summendarstellung

$$d_{km}^n(\beta) = \sqrt{\frac{(n+m)!(n-m)!}{(n+k)!(n-k)!}} \sum_{t=t_1}^{t_2} \binom{n+k}{t} \binom{n-k}{n-m-t} (-1)^t \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2n-a} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^a$$

der sogenannten *Wigner-d-Funktionen* $d_{km}^n(\beta)$ mit den Abkürzungen $a = k - m + 2t$, $t_1 = \max(0, k - m)$ und $t_2 = \min(n - m, n + k)$.

2. Testen Sie mit dem Winkel $\gamma = \pi/12$ die Rotation der Kugelflächenfunktion $\hat{Y}_{6,4}(\lambda, \vartheta)$ wobei der Meta-Pol – d.h. das Abbild des Nordpols – in Stuttgart ($\Lambda_S = 9^\circ 11' \text{ O}$, $\Phi_S = 48^\circ 46' \text{ N}$) liegen soll. Visualisieren Sie das Ergebnis und die Differenz beider Berechnungen.