



Physikalische Geodäsie Übung 3



Ausarbeitung im Studiengang
Geodäsie und Geoinformatik
an der Universität Stuttgart

Nicholas Schneider, 3222199
Ziqing Yu, 3218051

Stuttgart, 03.02.2021

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Nico Sneeuw
Universität Stuttgart

PD Dr.-Ing. habil. Johannes Engels
Universität Stuttgart

Dr.-Ing. Markus Antoni
Universität Stuttgart

Ausarbeitung

Aufgabe 1: Stokes'sche Randbedingung, Formel von Bruns, Höhendatum

Durch die Lösung des Stokes-Problems sei das Störpotential im Außenraum der Erde

$$T = T_{0,0} \left(\frac{R}{r} \right) + T_{Rest} \quad \text{mit} \quad T_{Rest}(\lambda, \varphi, r) = \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} \sum_{m=-l}^l T_{l,m} \bar{Y}_{l,m}(\lambda, \varphi) \quad (0.1)$$

bis auf eine Konstante $T_{0,0}$ bekannt. Numerische Werte sind gegeben durch:

$$T_{Rest}(P_0) = 357.9 \, m^2/s^2 \quad T_{Rest}(P_1) = 355.3 \, m^2/s^2 \quad h_{Ell}(P_0) = 36.63 \, m \\ \Delta g_{0,0} = 2.72 \cdot 10^{-6} \, m/s^2 \quad \gamma = 9.81 \, m/s^2 \quad R = 6371000 \, m$$

a) Bestimmung der Potentialanomalie und der Konstanten $T_{0,0}$

In dieser Teilaufgabe soll die Potentialanomalie $\Delta W = W(P_0) - U_0$ der Höhenbezugsfläche und die Konstante $T_{0,0}$ berechnet werden. Zunächst wird die Formel von Bruns für die Punkte P_0 und P_1 herangezogen:

$$h_{Ell}(P_0) = N(P_0) = \frac{T(P_0) - \Delta W}{\gamma} \quad \text{und} \quad h_{Ell}(P_1) = N(P_1) = \frac{T(P_1) - \Delta W}{\gamma} \\ \text{wobei} \quad T(P_{0/1}) = T_{00} + T_{Rest}(P_{0/1}) \quad \text{und} \quad \Delta W = W_0 - U_0$$

Des Weiteren lautet die Stokes'sche Randbedingung:

$$\Delta T = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} |T(\lambda, \varphi, r)| = 0 \\ -\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{2}{R} T \Big|_{r=R} = \Delta g - \frac{2\Delta W}{R}$$

Anschließend lässt sich die allgemeine Lösung und deren Ableitungen wie folgt aufstellen:

$$T(\lambda, \varphi, r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} T_{l,m} \bar{Y}_{l,m}(\lambda, \varphi)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(\lambda, \varphi, r) = \sum_{l=0}^{\infty} -\frac{l+1}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=-l}^l T_{l,m} \bar{Y}_{l,m}$$

Nun gilt es die allgemeine Lösung, sowie die erste Ableitung in die Stokes'sche Randbedingung einzusetzen. Daraus ergibt sich:

$$-\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{2}{R} T \Big|_{r=R} = \Delta g - \frac{2\Delta W}{R}$$

$$= -\sum_{l=0}^{\infty} -\frac{l+1}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=-l}^l T_{l,m} \bar{Y}_{l,m} - \frac{2}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} T_{l,m} \bar{Y}_{l,m}$$

In sphärischer Approximation darf $r(P_0) = R$ gesetzt werden. Folglich wird die oben stehende Gleichung vereinfacht:

$$\Delta g - \frac{2\Delta W}{R} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l+1}{R} \sum_{m=-l}^l T_{l,m} \bar{Y}_{l,m} - \frac{2}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l T_{l,m} \bar{Y}_{l,m}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l-1}{R} \sum_{m=-l}^l T_{l,m} \bar{Y}_{l,m}$$

Zudem wird Δg mit Kugelfunktionen erweitert:

$$\Delta g = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Delta g_{l,m} \bar{Y}_{l,m}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l-1}{R} \sum_{m=-l}^l T_{l,m} \bar{Y}_{l,m} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Delta g_{l,m} \bar{Y}_{l,m} - \frac{2\Delta W}{R}$$

Es ergibt sich für $l = m = 0$:

$$-\frac{1}{R} T_{0,0} \bar{Y}_{0,0} = \Delta g_{0,0} \bar{Y}_{0,0} - \frac{2\Delta W}{R}, \quad \text{mit } \bar{Y}_{0,0} = 1$$

$$\Delta g_{0,0} - \frac{2\Delta W}{R} = -\frac{T_{0,0}}{R}$$

Weitergehend wird erneut die Formel von Bruns am Punkt P_0 betrachtet:

$$\begin{aligned}
N(P_0) &= \frac{T(P_0) - \Delta W}{\gamma} \\
\Delta W &= T(P_0) - \gamma N(P_0) \\
\Delta W &= T_{0,0} + T_{Rest}(P_0) - \gamma h_{Ell}(P_0) \\
\Delta g_{0,0} - \frac{2}{R} T_{0,0} + T_{Rest}(P_0) - \gamma h_{Ell}(P_0) &= -\frac{T_{0,0}}{R} \\
T_{0,0} &= R \Delta g_{0,0} - 2 T_{Rest}(P_0) + 2 \gamma h_{Ell}(P_0)
\end{aligned}$$

Berechnung der Potentialanomalie und der Konstanten $T_{0,0}$:

$$\begin{aligned}
T_{0,0} &= R \Delta g_{0,0} - 2 T_{Rest}(P_0) + 2 \gamma h_{Ell}(P_0) = 20.2097 \frac{m^2}{s^2} \\
\Delta W &= W(P_0) - U_0 = \frac{R \Delta g_{0,0}}{2} - \frac{T_{0,0}}{2} = 18.7694 \frac{m^2}{s^2}
\end{aligned}$$

b) Bestimmung des Abstands zwischen Ellipsoid und Höhenbezugsfläche

Die Abstandsberechnung soll zur Höhenbezugsfläche im Punkt P_1 erfolgen. Dazu kann ganz simpel die ellipsoidische Höhe von P_1 berechnet werden:

$$h_{Ell}(P_1) = N(P_1) = \frac{T_{0,0} + T_{Rest}(P_1) - \Delta W}{\gamma} = 36.365 \text{ m}$$

Aufgabe 2: Geoidberechnung mit der Stokes-Funktion

a) Implementierung und Visualisierung der sphärischen Stokes-Funktion

$$St(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \cdot \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (0.2)$$

Für die Stokes-Funktion aus Formel 0.2 sollen die Nullstellen im Intervall $\psi \in [0, \varpi]$ mit dem Newton-Verfahren bestimmt werden.

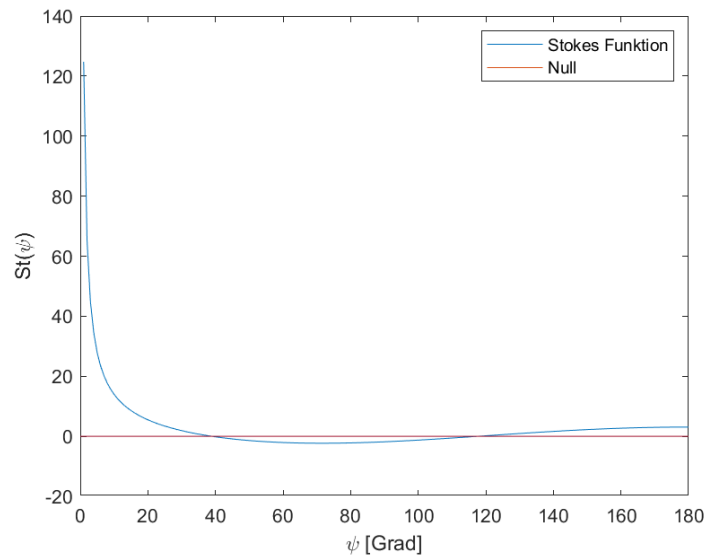


Abbildung 0.1: Visualisierung der Stokes Funktion, sowie $y = 0$

Berechnung der Nullstellen:

$$\frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \cdot \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) = 0$$

$$\rightarrow \psi_1 = 38.9621^\circ \quad \text{und} \quad \psi_2 = 117.6615^\circ$$

Angabe in Grad, Minuten, Sekunden:

$$\psi_1 = 38^\circ 57' 43'' \quad \text{und} \quad \psi_2 = 117^\circ 39' 41''$$

b) Berechnung der Geoidhöhen

Für die drei Punkte $P_1(48.40067893^\circ, 9.97228199^\circ)$, $P_2(48.70311236^\circ, 9.65402314^\circ)$ und $P_3(48.80556353^\circ, 9.21339955^\circ)$ sollen die Geoidhöhen durch eine numerische Approximation der Integralformel von Stokes berechnet werden. Diese lautet:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} St(\psi(\lambda_P, \varphi_P, \lambda_Q, \varphi_Q)) \Delta g(\lambda_Q, \varphi_Q) d\sigma_Q$$

Die berechneten Geoidhöhen lauten:

$$N_1 = 51.1588 \, m, \quad N_2 = 49.9244 \, m, \quad N_3 = 49.5306 \, m$$

c) Diskussion

Der Grund weshalb die Berechnung in Aufgabe 2b) nicht für moderne Geoidmodelle verwendet wird ist, dass die $(\lambda \times \varphi)$ -Blöcke nicht als konstant angenommen werden dürfen.