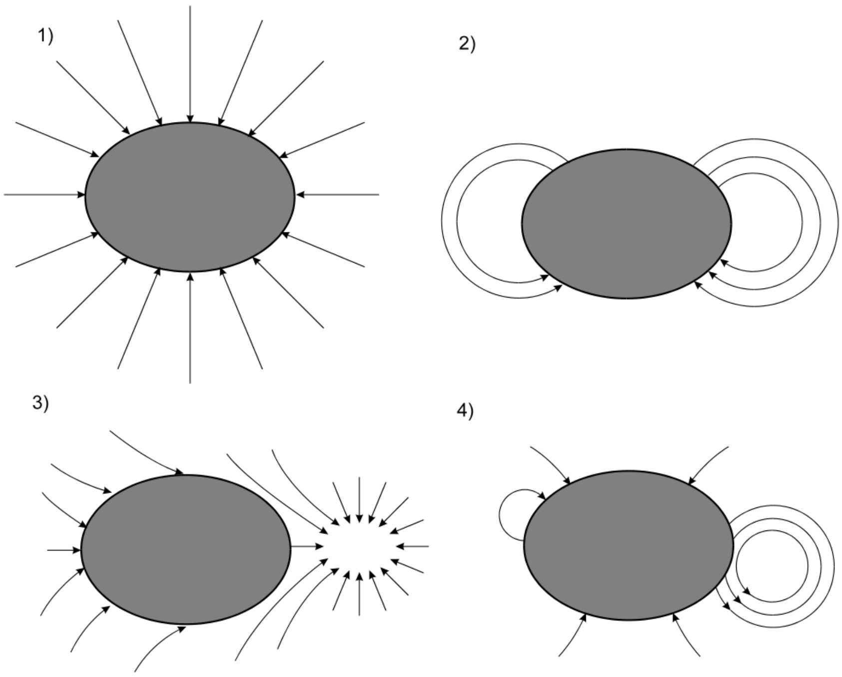
Seminarübung 1: Potentialtheorie

Ausgabe: *11. November 2020*

Aufgabe 1: Feldliniendarstellungen von Gravitationsfeldern

In den Skizzen 1-4 sind die Lotlinien (Orthogonaltrajektorien der Äquipotentialflächen) des gravitativen Störpotentials eines Himmelskörpers dargestellt. Die Pfeile geben die Richtung der Anziehungskräfte an, die auf einen Probekörper im Feld wirken. Es sei vorausgesetzt, dass sich außerhalb der Randfläche des Himmelskörpers keine weiteren gravitativen Massen befinden.

Welche der Skizzen stehen im Widerspruch zu den Eigenschaften eines Gravitationsfeldes? Begründen Sie Ihre Antwort!



Aufgabe 2: Bestimmung der Erdmasse aus Schwerewerten an der Oberfläche

Das Erdschwerefeld kann mit einer gewissen Genauigkeit durch das Gravitationsfeld einer isotropen Kugel approximiert werden. Es sei ein Mittelwert der Schwere γ an der Erdoberfläche gegeben. Bestimmen Sie mit dem Satz von Gauß damit die Erdmasse.

Aufgabe 3: Fünfte Kraft

Manche Physiker vermuten – bislang ohne jeden experimentellen Nachweis – die Existenz einer „fünften Kraft" (neben gravitativer, elektromagnetischer, schwacher und starker Kraft). In Analogie zur Gravitation, soll auch die fünften Kraft zwischen zwei Punktmassen von der folgenden Form sein:

$$\mathbf{F}_{A,B} = cM_A M_B \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B}{\|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B\|^\alpha}.$$

Dabei sind M_A, M_B von den Eigenschaften der Punktmassen (Masse, Ladung, etc.) abhängig, und c, α sind geeignete Konstanten.

(a) Zeigen Sie, dass die fünfte Kraft konservativ ist und geben Sie deren Potential an.

(b) Wie müssen die Konstanten gewählt werden, damit sich aus der Formel wieder die Gravitationskraft ergibt?

(c) Zeigen Sie: Falls sich die Konstante α der fünften Kraft vom Wert α der Gravitationskraft unterscheidet, so ist die fünfte Kraft nicht divergenzfrei. Interpretieren Sie diese Aussage.

Formeln und Zahlenwerte

Gravitationskonstante $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$

Erdradius $R = 6371\,000\,\mathrm{m}$

Mittelwert der Schwere an der Erdoberfläche $\gamma = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

Gradient in kartesischen Koordinaten

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

Gradient in sphärischen Koordinaten

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial V}{\partial \lambda}\mathbf{e}_\lambda$$

Divergenz in sphärischen Koordinaten

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{v} &= \operatorname{div}\left[v_\lambda(\lambda,\varphi,r)\mathbf{e}_\lambda + v_\varphi(\lambda,\varphi,r)\mathbf{e}_\varphi + v_r(\lambda,\varphi,r)\mathbf{e}_r\right] = \\ &= \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{r\cos\varphi}\left[-\sin\varphi\, v_\varphi + \cos\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right] + \\ &\quad + \frac{1}{r^2}\left[2r\, v_r + r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r}\right]\end{aligned}$$