Universität Stuttgart
Geodätisches Institut

Physikalische Geodäsie Übung 1

Ausarbeitung im Studiengang
Geodäsie und Geoinformatik
an der Universität Stuttgart

Nicholas Schneider,
Ziqing Yu, 3218051

Stuttgart, November 25, 2020

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Nico Sneeuw
Universität Stuttgart

PD Dr.-Ing. habil. Johannes Engels
Universität Stuttgart

Dr.-Ing. Markus Antoni
Universität Stuttgart

Kapitel 1

Ausarbeitung

1.1 Aufgabe 1: Legendre-Funktionen

1.1.1 a

Die unnormierten Legendrepolynome

$$P_3(t) = \frac{2n-1}{n} t P_2(t) - \frac{n-1}{n} P_1(t) = \frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t \tag{1.1}$$

$$P_4(t) = \frac{2n-1}{n} t P_3(t) - \frac{n-1}{n} P_2(t) = \frac{35}{8} t^4 - \frac{15}{4} t^2 + \frac{3}{8} \tag{1.2}$$

Normierungsfaktoren:

$$N_{l,0} = \sqrt{(2l+1)} \tag{1.3}$$

$N_{0,0} = 1$, $N_{1,0} = \sqrt{3}$, $N_{2,0} = \sqrt{5}$, $N_{3,0} = \sqrt{7}$, $N_{4,0} = 3$.

1.1.2 b

Um zu untersuchen, ob auch die zugeordneten Legendrefunktionen immer orthogonal zueinander sind, muss folgende Bedingung überprüft werden:

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) \cdot P_m(t) = 0 \tag{1.4}$$

Nacheinander werden die Legendrefunktionen auf Orthogonalität geprüft.

$$\int_{-1}^{1} P_1(t) \cdot P_2(t) = 0 \checkmark \tag{1.5}$$

$$\int_{-1}^{1} P_1(t) \cdot P_3(t) = 0 \checkmark \tag{1.6}$$

$$\int_{-1}^{1} P_1(t) \cdot P_4(t) = 0 \checkmark \tag{1.7}$$

$$\int_{-1}^{1} P_2(t) \cdot P_4(t) = 0 \checkmark \tag{1.8}$$

$$\int_{-1}^{1} P_2(t) \cdot P_3(t) = \frac{1}{2} \neq 0 \tag{1.9}$$

Durch die Berechnung aus 1.9 wurde gezeigt, dass nicht alle Legendrefunktionen immer auch orthogonal zueinander sind.

1.2 Aufgabe 2: Sphärisch-Harmonische Analyse

$$Y_{n,m}(t) = P_{n,m}(t) \begin{Bmatrix} \sin(m\lambda) \\ \cos(m\lambda) \end{Bmatrix} \tag{1.10}$$

1.2.1 a

Für f_1, weil f_1 nur mit θ abhängig ist und $\int_0^{2\pi} \sin(m\lambda) = 0$, nimmt man hier nur $\cos(m\lambda)$

$$f_1(\lambda, \theta) = \cos^2\theta \Longrightarrow f_1(\lambda, t) = t^2 \tag{1.11}$$

$$c_{n,m}^{f_1} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} N_{n.m} \cdot P_{n,m}(t) \cdot \cos(m\lambda) \cdot f_1(\lambda, t) d\lambda dt \tag{1.12}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{1} N_{n.m} \cdot P_{n,m}(t) \cdot t^2 \left[\int_0^{2\pi} \cos(m\lambda) d\lambda \right] dt \tag{1.13}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 2\pi & m = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Wenn $m = 0$:

$$c_{n,0}^{f_1} = \frac{N_{n,0}}{2} \int_{-1}^{1} P_{n,0}(t) \cdot t^2 dt \tag{1.15}$$

Wenn n ungerade ist, ist Grad von t von $P_{n,0} \cdot t^2$ auch ungerade. Weil $\int_{-1}^{1} t^{2n-1} dt = 0$, muss man nur $c_{0,0}^{f_1}$, $c_{2,0}^{f_1}$, $c_{4,0}^{f_1}$ berechnen.

$$c_{0,0}^{f_1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{1}{3} \tag{1.16}$$

$$c_{2,0}^{f_1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_{-1}^{1} (\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}) t^2 dt = \frac{2\sqrt{5}}{15} \tag{1.17}$$

$$c_{4,0}^{f_1} = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} (\frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}) t^2 dt = 0 \tag{1.18}$$

Für f_2, weil:

$$\int_0^{2\pi} \cos(kt) \sin(nt) dt = 0 \tag{1.19}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt) \sin(nt) dt = \begin{Bmatrix} \pi & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix} \tag{1.20}$$

Man muss nur für $m = 1$ für $Y_{n,1} = P_{n,1}\sin(\lambda)$ berechnen. Wenn n gerade ist, ist Grad von t ungerade. Deshalb sind die Berechnung nur für $c^{f_2}_{1,1}$ und $c^{f_2}_{3,1}$ notwendig.

$$c^{f_1}_{1,1} = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-t^2})^3\sqrt{3}\sqrt{1-t^2}\pi dt \tag{1.21}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{1}(t^4-2t^2+1)dt \tag{1.22}$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{15} \tag{1.23}$$
$$c^{f_2}_{3,1} = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-t^2})^3\sqrt{\frac{7}{6}}\cdot\frac{3}{2}(5t^2-1)\sqrt{1-t^2}\pi dt \tag{1.24}$$
$$= \frac{3}{8}\sqrt{\frac{7}{6}}\int_{-1}^{1}(5t^6-11t^4+7t^2-1)dt \tag{1.25}$$
$$= -\frac{4}{35}\sqrt{\frac{7}{6}} \tag{1.26}$$
$$= -\frac{2\sqrt{42}}{105} \tag{1.27}$$

Für f_3:
Ähnlich wie für f_1, man nimmt da nur $\cos(m\lambda)$ und $c^{f3}_{n,m} = 0$ wenn $m \neq 0$. Man benennt:

$$J_k = \int_{-1}^{1} t^k\cosh(t)dt$$

Dann:

$$c^{f_3}_{0,0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1\cosh(t)dt = \frac{1}{2}J_0 \tag{1.28}$$
$$c^{f_3}_{1,0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} t\cosh(t)dt = \frac{\sqrt{3}}{2}J_1 \tag{1.29}$$
$$c^{f_3}_{2,0} = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2})\cosh(t)dt = \frac{3\sqrt{5}}{4}J_2 - \frac{\sqrt{5}}{4}J_0 \tag{1.30}$$
$$c^{f_3}_{3,0} = \frac{\sqrt{7}}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t)\cosh(t)dt = \frac{5\sqrt{7}}{4}J_3 - \frac{3\sqrt{7}}{4}J_1 \tag{1.31}$$
$$c^{f_3}_{4,0} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{35}{8}t^4-\frac{15}{4}t^2+\frac{3}{8})\cosh(t)dt = \frac{105}{16}J_4 - \frac{45}{8}J_2 + \frac{9}{16}J_0 \tag{1.32}$$
$$\tag{1.33}$$

J_0 kann direkt berechnet werden:

$$J_0 = \int_{-1}^{1}\cosh(t)dt = [\sinh(t)]_{-1}^{1} = 2\sinh(1) \tag{1.34}$$

J_1 kann via partielle Integration berechnet werden:

$$J_1 = \int_{-1}^{1} t \cosh(t) dt \tag{1.35}$$
$$= [t \sinh(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \sinh(t) dt \tag{1.36}$$
$$= [t \sinh(t)]_{-1}^{1} - [\cosh(t)]_{-1}^{1} \tag{1.37}$$
$$= 0 \tag{1.38}$$

J_2 bis J_4 werden via partielle Integration rekursive berechnet:

$$J_k = \int_{-1}^{1} t^k \cosh(t) dt \tag{1.39}$$
$$= \left[t^k \sinh(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} k t^{k-1} \sinh(t) dt \tag{1.40}$$
$$= \left[t^k \sinh(t)\right]_{-1}^{1} - k \left[t^{k-1} \cosh(t)\right]_{-1}^{1} + k(k-1) \int_{-1}^{1} \cosh(t) t^{k-2} dt \tag{1.41}$$
$$= \left[t^k \sinh(t)\right]_{-1}^{1} - k \left[t^{k-1} \cosh(t)\right]_{-1}^{1} + k(k-1) J_{k-2} \tag{1.42}$$

Wenn t ungerade ist: $J_k = 0 - 0 + k(k-1)J_{k-2}$. Denn $J_1 = 0$, $J_k = 0$ für alle ungerade k.

Für gerade k:

$$J_k = 2\sinh(1) - 2k\cosh(1) + k(k-1)J_{k-2} \tag{1.43}$$

Ansatz:

$$J_2 = 2\sinh(1) - 4\cosh(1) + 2J_0 \tag{1.44}$$
$$= 2\sinh(1) - 4\cosh(1) + 4\sinh(1) \tag{1.45}$$
$$= 6\sinh(1) - 4\cosh(1) \tag{1.46}$$
$$J_4 = 2\sinh(1) - 8\cosh(1) + 12J_2 \tag{1.47}$$
$$= 2\sinh(1) - 8\cosh(1) + 12(6\sinh(1) - 4\cosh(1)) \tag{1.48}$$
$$= 74\sinh(1) - 56\cosh(1) \tag{1.49}$$

Berechnung von Koeffizienten:

$$c_{0,0}^{f_3} = \sinh(1) \tag{1.50}$$
$$c_{1,0}^{f_3} = 0 \tag{1.51}$$
$$c_{2,0}^{f_3} = 4\sqrt{5}\sinh(1) - 3\sqrt{5}\cosh(1) \tag{1.52}$$
$$c_{3,0}^{f_3} = 0 \tag{1.53}$$
$$c_{4,0}^{f_3} = 453\sinh(1) - 345\cosh(1) \tag{1.54}$$

1.2.2 b

Für f_1:

$$\sum_n \sum_m c_{n,m}^{f_1} \bar{Y}_{n,m}(\lambda, t) = c_{0,0}^{f_1} \bar{Y}_{0,0}(\lambda, t) + c_{2,0}^{f_1} \bar{Y}_{2,0}(\lambda, t) + c_{4,0}^{f_1} \bar{Y}_{4,0}(\lambda, t) \tag{1.55}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \cos(0) + \frac{2\sqrt{5}}{15} \cdot \sqrt{5} \cdot (\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}) \cdot \cos(0) + 0 \tag{1.56}$$

$$= t^2 \tag{1.57}$$

$$= \cos^2(\theta) \tag{1.58}$$

Für f_2:

$$\sum_n \sum_m c_{n,m}^{f_2} \bar{Y}_{n,m}(\lambda, t) = c_{1,1}^{f_2} \bar{Y}_{1,1}(\lambda, t) + c_{3,1}^{f_2} \bar{Y}_{3,1}(\lambda, t) \tag{1.59}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{15} \cdot \sqrt{3}\sqrt{1-t^2} \sin(\lambda) - \frac{2\sqrt{42}}{105} \cdot \sqrt{\frac{7}{6}} \cdot \frac{3}{2}(5t^2 - 1)\sqrt{1-t^2} \sin(\lambda) \tag{1.60}$$

$$= \frac{3}{4} \sin\theta \sin\lambda - \frac{1}{4} \sin 3\theta \sin\lambda \tag{1.61}$$

Mit MATLAB ist das maximale Ergebnis von $\frac{3}{4} \sin\theta \sin\lambda - \frac{1}{4} \sin 3\theta \sin\lambda - \sin^3(\theta)\sin(\lambda)$ im Bereich von 10^{-16} (bis zum $n = m = 4$)

Für f_3:

$$\sum_n \sum_m c_{n,m}^{f_2} \bar{Y}_{n,m}(\lambda, t) = c_{0,0}^{f_3} \bar{Y}_{0,0}(\lambda, t) + c_{2,0}^{f_3} \bar{Y}_{2,0}(\lambda, t) + c_{4,0}^{f_3} \bar{Y}_{4,0}(\lambda, t) \tag{1.62}$$

$$= \sinh(1) + (4\sqrt{5}\sinh(1) - 3\sqrt{5}\cosh(1)) \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{4}(1 + 3\cos(2\theta)) \tag{1.63}$$

$$+ (453\sinh(1) - 345\cosh(1)) \cdot 3 \cdot (\frac{35}{8}\cos^4\theta - \frac{15}{4}\cos^2\theta + \frac{3}{8}) \tag{1.64}$$

Mit MATLAB ist das maximale Ergebnis von $\cosh(\cos\theta) - \sum_n \sum_m c_{n,m}^{f_2} \bar{Y}_{n,m}(\lambda, t)$ im Bereich von 10^{-5} (bis zum $n = m = 4$)

1.3 Aufgabe 3: Rotation von Kugelflächenfunktionen