Universität Stuttgart
Geodätisches Institut

Physikalische Geodäsie Übung 3

Ausarbeitung im Studiengang
Geodäsie und Geoinformatik
an der Universität Stuttgart

Nicholas Schneider, 3222199
Ziqing Yu, 3218051

Stuttgart, 03.02.2021

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Nico Sneeuw
Universität Stuttgart

PD Dr.-Ing. habil. Johannes Engels
Universität Stuttgart

Dr.-Ing. Markus Antoni
Universität Stuttgart

Ausarbeitung

Aufgabe 1: Stokes'sche Randbedingung, Formel von Bruns, Höhendatum

Durch die Lösung des Stokes-Problems sei das Störpotential im Außenraum der Erde

$$T = T_{0,0}\left(\frac{R}{r}\right) + T_{Rest} \quad \text{mit} \quad T_{Rest}(\lambda,\varphi,r) = \sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}\sum_{m=-l}^{l} T_{l,m}\overline{Y}_{l,m}(\lambda,\varphi) \tag{0.1}$$

bis auf eine Konstante $T_{0,0}$ bekannt. Numerische Werte sind gegeben durch:

$$T_{Rest}(P_0) = 357.9\ m^2/s^2 \quad T_{Rest}(P_1) = 355.3\ m^2/s^2 \quad h_{Ell}(P_0) = 36.63\ m$$
$$\Delta g_{0,0} = 2.72\cdot 10^{-6}\ m/s^2 \quad \gamma = 9.81\ m/s^2 \quad R = 6371000\ m$$

a) Bestimmung der Potentialanomalie und der Konstanten $T_{0,0}$

In dieser Teilaufgabe soll die Potentialanomalie $\Delta W = W(P_0) - U_0$ der Höhenbezugsfläche und die Konstante $T_{0,0}$ berechnet werden. Zunächst wird die Formel von Bruns für die Punkte P_0 und P_1 herangezogen:

$$h_{Ell}(P_0) = N(P_0) = \frac{T(P_0) - \Delta W}{\gamma} \quad \text{und} \quad h_{Ell}(P_1) = N(P_1) = \frac{T(P_1) - \Delta W}{\gamma}$$
$$\text{wobei} \quad T(P_{0/1}) = T_{00} + T_{Rest}(P_{0/1}) \quad und \quad \Delta W = W_0 - U_0$$

Des Weiteren lautet die Stokes'sche Randbedingung:

$$\Delta T = 0$$
$$\lim_{r\to\infty} \mid T(\lambda,\varphi,r) \mid = 0$$
$$-\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R} - \frac{2}{R}T\bigg|_{r=R} = \Delta g - \frac{2\Delta W}{R}$$

Anschließend lässt sich die allgemeine Lösung und deren Ableitungen wie folgt aufstellen:

$$
\begin{aligned}
T(\lambda, \varphi, r) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} T_{l,m} \overline{Y}_{l,m}(\lambda, \varphi) \\
\frac{\partial T}{\partial r}(\lambda, \varphi, r) &= \sum_{l=0}^{\infty} -\frac{l+1}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=-l}^{l} T_{l,m} \overline{Y}_{l,m}
\end{aligned}
$$

Nun gilt es die allgemeine Lösung, sowie die erste Ableitung in die Stokes'sche Randbedingung einzusetzen. Daraus ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R} - \frac{2}{R} T\bigg|_{r=R} &= \Delta g - \frac{2\Delta W}{R} \\
= -\sum_{l=0}^{\infty} -\frac{l+1}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=-l}^{l} T_{l,m} \overline{Y}_{l,m} &- \frac{2}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} T_{l,m} \overline{Y}_{l,m}
\end{aligned}
$$

In sphärischer Approximation darf $r(P_0) = R$ gesetzt werden. Folglich wird die oben stehende Gleichung vereinfacht:

$$
\begin{aligned}
\Delta g - \frac{2\Delta W}{R} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l+1}{R} \sum_{m=-l}^{l} T_{l,m} \overline{Y}_{l,m} - \frac{2}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} T_{l,m} \overline{Y}_{l,m} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l-1}{R} \sum_{m=-l}^{l} T_{l,m} \overline{Y}_{l,m}
\end{aligned}
$$

Zudem wird Δg mit Kugelfunktionen erweitert:

$$
\begin{aligned}
\Delta g &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \Delta g_{l,m} \overline{Y}_{l,m} \\
\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l-1}{R} \sum_{m=-l}^{l} T_{l,m} \overline{Y}_{l,m} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \Delta g_{l,m} \overline{Y}_{l,m} - \frac{2\Delta W}{R}
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich für $l = m = 0$:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{R} T_{0,0} \overline{Y}_{0,0} = \Delta g_{0,0} \overline{Y}_{0,0} - \frac{2\Delta W}{R}, &\quad \text{mit} \quad \overline{Y}_{0,0} = 1 \\
\Delta g_{0,0} - \frac{2\Delta W}{R} &= -\frac{T_{0,0}}{R}
\end{aligned}
$$

Weitergehend wird erneut die Formel von Bruns am Punkt P_0 betrachtet:

$$N(P_0) = \frac{T(P_0) - \Delta W}{\gamma}$$
$$\Delta W = T(P_0) - \gamma N(P_0)$$
$$\Delta W = T_{0,0} + T_{Rest}(P_0) - \gamma h_{Ell}(P_0)$$
$$\Delta g_{0,0} - \frac{2}{R} T_{0,0} + T_{Rest}(P_0) - \gamma h_{Ell}(P_0) = -\frac{T_{0,0}}{R}$$
$$T_{0,0} = R\Delta g_{0,0} - 2T_{Rest}(P_0) + 2\gamma h_{Ell}(P_0)$$

Berechnung der Potentialanomalie und der Konstanten $T_{0,0}$:

$$T_{0,0} = R\Delta g_{0,0} - 2T_{Rest}(P_0) + 2\gamma h_{Ell}(P_0) = 20.2097\,\frac{m^2}{s^2}$$
$$\Delta W = W(P_0) - U_0 = \frac{R\Delta g_{0,0}}{2} + \frac{T_{0,0}}{2} = 18.7694\,\frac{m^2}{s^2}$$

b) Bestimmung des Abstands zwischen Ellipsoid und Höhenbezugsfläche

Die Abstandsberechnung soll zur Höhenbezugsfläche im Punkt P_1 erfolgen. Dazu kann ganz simpel die ellipsoidische Höhe von P_1 berechnet werden:

$$h_{Ell}(P_1) = N(P_1) = \frac{T_{0,0} + T_{Rest}(P_1) - \Delta W}{\gamma} = 36.365\,m$$

Aufgabe 2: Geoidberechnung mit der Stokes-Funktion

a) Implementierung und Visualisierung der sphärischen Stokes-Funktion

$$St(\psi) = \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \cdot \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right) \tag{0.2}$$

Für die Stokes-Funktion aus Formel 0.2 sollen die Nullstellen im Intervall $\psi \epsilon [0, \varpi]$ mit dem Newton-Verfahren bestimmt werden.

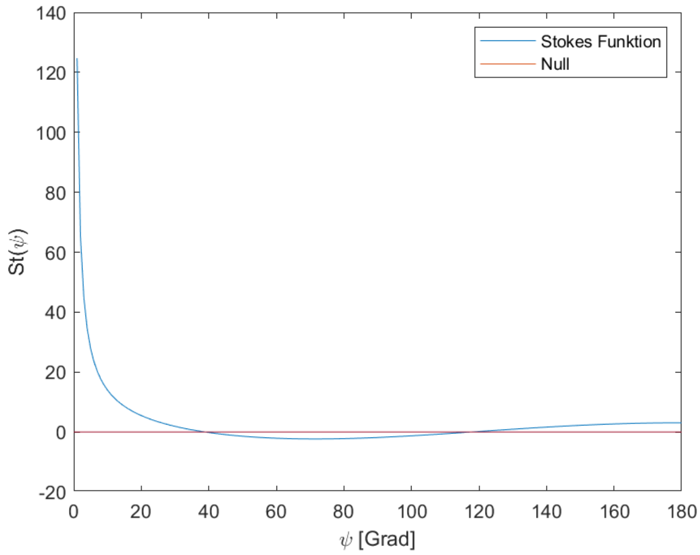

Abbildung 0.1: *Visualisierung der Stokes Funktion, sowie $y = 0$*

Berechnung der Nullstellen:

$$\frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \cdot \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow \psi_1 = 38.9621^\circ \quad \text{und} \quad \psi_2 = 117.6615^\circ$$

Angabe in Grad, Minuten, Sekunden:

$$\psi_1 = 38^\circ\, 57'\, 43'' \quad \text{und} \quad \psi_1 = 117^\circ\, 39'\, 41''$$

b) Berechnung der Geoidhöhen

Für die drei Punkte $P_1(48.40067893^\circ, 9.97228199^\circ)$, $P_2(48.70311236^\circ, 9.65402314^\circ)$ und $P_3(48.80556353^\circ, 9.21339955^\circ)$ sollen die Geoidhöhen durch eine numerische Approximation der Integralformel von Stokes berechnet werden. Diese lautet:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_\sigma St(\psi(\lambda_P, \varphi_P, \lambda_Q, \varphi_Q))\Delta g(\lambda_Q, \varphi_Q) d\sigma_Q$$

Die berechneten Geoidhöhen lauten:

$$N_1 = 51.1588\ m, \quad N_2 = 49.9244\ m, \quad N_3 = 49.5306\ m$$

c) Diskussion

Der Grund weshalb die Berechnung in Aufgabe 2b) nicht für moderne Geoidmodelle verwendet wird ist, dass die $(\lambda \times \varphi)$-Blöcke nicht als konstant angenommen werden dürfen.