

Übungen Physikalische Geodäsie: "Geoidberechnung nach Stokes"

Markus Antoni

Januar 20, 2021

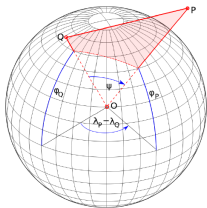
Nehmen Sie an, dass die gesamte arktische Eismasse eine sphärische Kappe mit Radius 10° um den Pol bedeckt, und dass innerhalb der Kugelkappe eine mittlere Schwereanomalie von $\Delta g = 50 \text{ mGal}$ erzeugt wird. Wie groß ist der Effekt der Eiskappe auf die Geoidhöhe in Stuttgart ($\lambda \approx 9^\circ$, $\phi \approx 49^\circ$) ?

Integralformel von Stokes

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} St(\psi(\lambda_P, \phi_P, \lambda_Q, \phi_Q)) \Delta g(\lambda_Q, \phi_Q) d\sigma_Q$$

mit

- ψ : Sphärischer Abstand (vgl. Grafik)
- St : Stokesfunktion

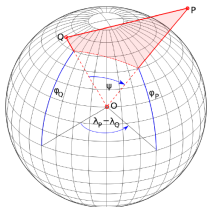


Integralformel von Stokes

$$\delta N_{\text{Eis}} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} St(\psi(\lambda_P, \phi_P, \lambda_Q, \phi_Q)) \Delta g(\lambda_Q, \phi_Q) d\sigma_Q$$

mit

- ψ : Sphärischer Abstand (vgl. Grafik)
- St : Stokesfunktion



- mit globalen Daten
→ Berechnung der Geoidhöhe N
- hier nur Beitrag zum Geoid δN_{Eis}

- räumliche Stokesfunktion

$$St(\psi, r, R) = \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2l+1}{l-1} P_l(\cos \psi) =$$

■ räumliche Stokesfunktion

$$\begin{aligned} St(\psi, r, R) &= \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2l+1}{l-1} P_l(\cos \psi) = \\ &= \frac{2R}{D} + \frac{R}{r} - 3\frac{RD}{r^2} - \frac{R^2}{r^2} \cos \psi \left[5 + 3 \ln \frac{r - R \cos \psi + D}{2r} \right] \end{aligned}$$

mit dem Abstand $D = \|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q\| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \psi}$

■ räumliche Stokesfunktion

$$\begin{aligned} St(\psi, r, R) &= \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2l+1}{l-1} P_l(\cos \psi) = \\ &= \frac{2R}{D} + \frac{R}{r} - 3\frac{RD}{r^2} - \frac{R^2}{r^2} \cos \psi \left[5 + 3 \ln \frac{r - R \cos \psi + D}{2r} \right] \end{aligned}$$

mit dem Abstand $D = \|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q\| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \psi}$

■ sphärische Stokesfunktion (r=R):

$$St(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)$$

beachte:

$$\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \psi} = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos \psi} = 2R \sin \frac{\psi}{2}$$

- "saubere Rechnung":
 - Doppelintegration in sphärischen Koordinaten ($\psi = \psi(\lambda, \phi)$)
 - Integration im gedrehten Koordinatensystem
(Variablen: Azimut A und sphärischer Abstand ψ)
- Interpretation als Blockmittelwert
 - konstante Schwereanomalie in der Eiskappe ✓
 - Auswertung der sphärischen Stokesfunktion in der Entfernung "Südpol-Stuttgart"

Integration (Bockmittelwert)

$$\delta N_{\text{Eis}} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{-90 \frac{\pi}{180}}^{-80 \frac{\pi}{180}} \int_0^{2\pi} St(\psi(\lambda_P, \phi_P, \lambda_Q, \phi_Q)) \Delta g(\lambda_Q, \phi_Q) \underbrace{\cos \phi_Q d\lambda_Q d\phi_Q}_{d\sigma_Q}$$

Integration (Bockmittelwert)

$$\begin{aligned}
 \delta N_{\text{Eis}} &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{-90 \frac{\pi}{180}}^{-80 \frac{\pi}{180}} \int_0^{2\pi} St(\psi(\lambda_P, \phi_P, \lambda_Q, \phi_Q)) \Delta g(\lambda_Q, \phi_Q) \underbrace{\cos \phi_Q d\lambda_Q d\phi_Q}_{d\sigma_Q} \\
 &= \frac{R}{4\pi\gamma} St(\bar{\psi}) \Delta g \int_0^{2\pi} d\lambda_Q \cdot \int_{-90 \frac{\pi}{180}}^{-80 \frac{\pi}{180}} \cos \phi_Q d\phi_Q = \\
 &= \frac{R}{2\gamma} St(\bar{\psi}) \Delta g \left[\sin \phi_Q \right]_{-90 \frac{\pi}{180}}^{-80 \frac{\pi}{180}}
 \end{aligned}$$

Integration (Bockmittelwert)

$$\begin{aligned}\delta N_{\text{Eis}} &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{-90}^{-80} \int_{\frac{\pi}{180}}^{\frac{\pi}{180}} \int_0^{2\pi} St(\psi(\lambda_P, \phi_P, \lambda_Q, \phi_Q)) \Delta g(\lambda_Q, \phi_Q) \underbrace{\cos \phi_Q d\lambda_Q d\phi_Q}_{d\sigma_Q} \\&= \frac{R}{4\pi\gamma} St(\bar{\psi}) \Delta g \int_0^{2\pi} d\lambda_Q \cdot \int_{-90}^{-80} \cos \phi_Q d\phi_Q = \\&= \frac{R}{2\gamma} St(\bar{\psi}) \Delta g \left[\sin \phi_Q \right]_{-90}^{-80} = 3.8714 \text{ m}\end{aligned}$$

Zahlenwerte

- $\Delta g = 50 \text{ mGal} = 0.0005 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $R = 6371000 \text{ m}$
- $\gamma = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $\bar{\psi} = (49 + 90) \frac{\pi}{180} \implies St(\bar{\psi}) = 1.5695$