Universität Stuttgart

Geodätisches Institut

Physikalische Geodäsie Übung 1

Ausarbeitung im Studiengang

Geodäsie und Geoinformatik

an der Universität Stuttgart

Nicholas Schneider, 3222199
Ziqing Yu, 3218051

Stuttgart, December 2, 2020

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Nico Sneeuw
Universität Stuttgart

PD Dr.-Ing. habil. Johannes Engels
Universität Stuttgart

Dr.-Ing. Markus Antoni
Universität Stuttgart

Kapitel 1

Ausarbeitung

1.1 Aufgabe 1: Legendre-Funktionen

1.1.1 a

Die unnormierten Legendrepolynome

$$P_3(t) = \frac{2n-1}{n} t P_2(t) - \frac{n-1}{n} P_1(t) = \frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t \tag{1.1}$$

$$P_4(t) = \frac{2n-1}{n} t P_3(t) - \frac{n-1}{n} P_2(t) = \frac{35}{8} t^4 - \frac{15}{4} t^2 + \frac{3}{8} \tag{1.2}$$

Normierungsfaktoren:

$$N_{l,0} = \sqrt{(2l+1)} \tag{1.3}$$

$N_{0,0} = 1$, $N_{1,0} = \sqrt{3}$, $N_{2,0} = \sqrt{5}$, $N_{3,0} = \sqrt{7}$, $N_{4,0} = 3$.

1.1.2 b

Um zu untersuchen, ob auch die zugeordneten Legendrefunktionen immer orthogonal zueinander sind, gilt es das Integral des Produktes der Legendre-Polynome zu untersuchen. Hierbei seien die Integralgrenzen -1 und 1. Ergibt das Integral mit den genannten Grenzen 0, so sind die entsprechneden Legendre-Funktionen orthogonal zueinander. Für die Untersuchung ist es vorweg sinnvoll sich auf diejenigen Polynome, die multipliziert miteinander einen geraden Exponenten erzeugen, zu konzentrieren. Das Produkt erzeugt nämlich anschließend einen ungeraden Exponenten nach der Integration. Bei Einsetzen der Integralgrenzen entstehen folglich unterschiedliche Vorzeichen, welche das gesamte Integral ungleich 0 werden lassen könnten. Nun kann man jegliche Untersuchungen durchführen. Notiert wird jedoch diejenige, die beweist, dass nicht alle Legendre-Funktionen orthogonal zueinander sind. Hierfür prüft man das Integral des Produkts aus $P_{0,0}(t)$ und $P_{2,2}(t)$.

$$\int_{-1}^{1} P_{0,0}(t) \cdot P_{2,2}(t) = \int_{-1}^{1} P_{2,2}(t) \tag{1.4}$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{5}{12}(1-t^2)} \tag{1.5}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{6} \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^{1} \tag{1.6}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{6} \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right) \tag{1.7}$$

$$= \frac{2\sqrt{15}}{9} \neq 0 \tag{1.8}$$

Durch die obige Berechnung wurde gezeigt, dass nicht alle Legendrefunktionen immer auch orthogonal zueinander sind.

1.2 Aufgabe 2: Sphärisch-Harmonische Analyse

$$Y_{n,m}(t) = P_{n,m}(t) \begin{Bmatrix} \sin(m\lambda) \\ \cos(m\lambda) \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

1.2.1 a

Für f_1, weil f_1 nur mit θ abhängig ist und $\int_0^{2\pi} \sin(m\lambda) = 0$, nimmt man hier nur $\cos(m\lambda)$

$$f_1(\lambda, \theta) = \cos^2\theta \Longrightarrow f_1(\lambda, t) = t^2 \tag{1.10}$$

$$c_{n,m}^{f_1} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} N_{n.m} \cdot P_{n,m}(t) \cdot \cos(m\lambda) \cdot f_1(\lambda, t) d\lambda dt \tag{1.11}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{1} N_{n.m} \cdot P_{n,m}(t) \cdot t^2 \left[\int_0^{2\pi} \cos(m\lambda) d\lambda \right] dt \tag{1.12}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 2\pi & m = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Wenn $m = 0$:

$$c_{n,0}^{f_1} = \frac{N_{n,0}}{2} \int_{-1}^{1} P_{n,0}(t) \cdot t^2 dt \tag{1.14}$$

Wenn n ungerade ist, ist Grad von t von $P_{n,0} \cdot t^2$ auch ungerade. Weil $\int_{-1}^{1} t^{2n-1} dt = 0$, muss man nur $c_{0,0}^{f_1}$, $c_{2,0}^{f_1}$, $c_{4,0}^{f_1}$ berechnen.

$$c_{0,0}^{f_1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{1}{3} \tag{1.15}$$

$$c_{2,0}^{f_1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_{-1}^{1} (\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}) t^2 dt = \frac{2\sqrt{5}}{15} \tag{1.16}$$

$$c_{4,0}^{f_1} = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} (\frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}) t^2 dt = 0 \tag{1.17}$$

Für f_2, weil:

$$\int_0^{2\pi} \cos(kt) \sin(nt) dt = 0 \tag{1.18}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt) \sin(nt) dt = \begin{Bmatrix} \pi & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix} \tag{1.19}$$

Man muss nur für $m = 1$ für $Y_{n,1} = P_{n,1}\sin(\lambda)$ berechnen. Wenn n gerade ist, ist Grad von t ungerade. Deshalb sind die Berechnung nur für $c^{f_2}_{1,1}$ und $c^{f_2}_{3,1}$ notwendig.

$$c^{f_1}_{1,1} = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-t^2})^3\sqrt{3}\sqrt{1-t^2}\pi dt \tag{1.20}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{1}(t^4-2t^2+1)dt \tag{1.21}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{15} \tag{1.22}$$

$$c^{f_2}_{3,1} = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-t^2})^3\sqrt{\frac{7}{6}}\cdot\frac{3}{2}(5t^2-1)\sqrt{1-t^2}\pi dt \tag{1.23}$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt{\frac{7}{6}}\int_{-1}^{1}(5t^6-11t^4+7t^2-1)dt \tag{1.24}$$

$$= -\frac{4}{35}\sqrt{\frac{7}{6}} \tag{1.25}$$

$$= -\frac{2\sqrt{42}}{105} \tag{1.26}$$

Für f_3:
Ähnlich wie für f_1, man nimmt da nur $\cos(m\lambda)$ und $c^{f3}_{n,m} = 0$ wenn $m \neq 0$. Man benennt:

$$J_k = \int_{-1}^{1} t^k\cosh(t)dt$$

Dann:

$$c^{f_3}_{0,0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}1\cosh(t)dt = \frac{1}{2}J_0 \tag{1.27}$$

$$c^{f_3}_{1,0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1}t\cosh(t)dt = \frac{\sqrt{3}}{2}J_1 \tag{1.28}$$

$$c^{f_3}_{2,0} = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2})\cosh(t)dt = \frac{3\sqrt{5}}{4}J_2 - \frac{\sqrt{5}}{4}J_0 \tag{1.29}$$

$$c^{f_3}_{3,0} = \frac{\sqrt{7}}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t)\cosh(t)dt = \frac{5\sqrt{7}}{4}J_3 - \frac{3\sqrt{7}}{4}J_1 \tag{1.30}$$

$$c^{f_3}_{4,0} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{35}{8}t^4-\frac{15}{4}t^2+\frac{3}{8})\cosh(t)dt = \frac{105}{16}J_4 - \frac{45}{8}J_2 + \frac{9}{16}J_0 \tag{1.31}$$

$$\tag{1.32}$$

J_0 kann direkt berechnet werden:

$$J_0 = \int_{-1}^{1}\cosh(t)dt = [\sinh(t)]_{-1}^{1} = 2\sinh(1) \tag{1.33}$$

J_1 kann via partielle Integration berechnet werden:

$$J_1 = \int_{-1}^{1} t\cosh(t)dt \tag{1.34}$$
$$= [t\sinh(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \sinh(t)dt \tag{1.35}$$
$$= [t\sinh(t)]_{-1}^{1} - [\cosh(t)]_{-1}^{1} \tag{1.36}$$
$$= 0 \tag{1.37}$$

J_2 bis J_4 werden via partielle Integration rekursive berechnet:

$$J_k = \int_{-1}^{1} t^k \cosh(t)dt \tag{1.38}$$
$$= \left[t^k \sinh(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} kt^{k-1}\sinh(t)dt \tag{1.39}$$
$$= \left[t^k \sinh(t)\right]_{-1}^{1} - k\left[t^{k-1}\cosh(t)\right]_{-1}^{1} + k(k-1)\int_{-1}^{1}\cosh(t)t^{k-2}dt \tag{1.40}$$
$$= \left[t^k \sinh(t)\right]_{-1}^{1} - k\left[t^{k-1}\cosh(t)\right]_{-1}^{1} + k(k-1)J_{k-2} \tag{1.41}$$

Wenn t ungerade ist: $J_k = 0 - 0 + k(k-1)J_{k-2}$. Denn $J_1 = 0$, $J_k = 0$ für alle ungerade k.

Für gerade k:

$$J_k = 2\sinh(1) - 2k\cosh(1) + k(k-1)J_{k-2} \tag{1.42}$$

Ansatz:

$$J_2 = 2\sinh(1) - 4\cosh(1) + 2J_0 \tag{1.43}$$
$$= 2\sinh(1) - 4\cosh(1) + 4\sinh(1) \tag{1.44}$$
$$= 6\sinh(1) - 4\cosh(1) \tag{1.45}$$
$$J_4 = 2\sinh(1) - 8\cosh(1) + 12J_2 \tag{1.46}$$
$$= 2\sinh(1) - 8\cosh(1) + 12(6\sinh(1) - 4\cosh(1)) \tag{1.47}$$
$$= 74\sinh(1) - 56\cosh(1) \tag{1.48}$$

Berechnung von Koeffizienten:

$$c_{0,0}^{f_3} = \sinh(1) \tag{1.49}$$
$$c_{1,0}^{f_3} = 0 \tag{1.50}$$
$$c_{2,0}^{f_3} = 4\sqrt{5}\sinh(1) - 3\sqrt{5}\cosh(1) \tag{1.51}$$
$$c_{3,0}^{f_3} = 0 \tag{1.52}$$
$$c_{4,0}^{f_3} = 453\sinh(1) - 345\cosh(1) \tag{1.53}$$

1.2.2 b

Für f_1:

$$\sum_n \sum_m c_{n,m}^{f_1} \bar{Y}_{n,m}(\lambda, t) = c_{0,0}^{f_1} \bar{Y}_{0,0}(\lambda, t) + c_{2,0}^{f_1} \bar{Y}_{2,0}(\lambda, t) + c_{4,0}^{f_1} \bar{Y}_{4,0}(\lambda, t) \tag{1.54}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \cos(0) + \frac{2\sqrt{5}}{15} \cdot \sqrt{5} \cdot (\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}) \cdot \cos(0) + 0 \tag{1.55}$$

$$= t^2 \tag{1.56}$$

$$= \cos^2(\theta) \tag{1.57}$$

Für f_2:

$$\sum_n \sum_m c_{n,m}^{f_2} \bar{Y}_{n,m}(\lambda, t) = c_{1,1}^{f_2} \bar{Y}_{1,1}(\lambda, t) + c_{3,1}^{f_2} \bar{Y}_{3,1}(\lambda, t) \tag{1.58}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{15} \cdot \sqrt{3}\sqrt{1-t^2}\sin(\lambda) - \frac{2\sqrt{42}}{105} \cdot \sqrt{\frac{7}{6}} \cdot \frac{3}{2}(5t^2 - 1)\sqrt{1-t^2}\sin(\lambda) \tag{1.59}$$

$$= \frac{3}{4}\sin\theta\sin\lambda - \frac{1}{4}\sin 3\theta \sin\lambda \tag{1.60}$$

Mit MATLAB ist das maximale Ergebnis von $\frac{3}{4}\sin\theta\sin\lambda - \frac{1}{4}\sin 3\theta\sin\lambda - \sin^3(\theta)\sin(\lambda)$ im Bereich von 10^{-16} (bis zum $n = m = 4$)

Für f_3:

$$\sum_n \sum_m c_{n,m}^{f_2} \bar{Y}_{n,m}(\lambda, t) = c_{0,0}^{f_3} \bar{Y}_{0,0}(\lambda, t) + c_{2,0}^{f_3} \bar{Y}_{2,0}(\lambda, t) + c_{4,0}^{f_3} \bar{Y}_{4,0}(\lambda, t) \tag{1.61}$$

$$= \sinh(1) + (4\sqrt{5}\sinh(1) - 3\sqrt{5}\cosh(1)) \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{4}(1 + 3\cos(2\theta)) \tag{1.62}$$

$$+ (453\sinh(1) - 345\cosh(1)) \cdot 3 \cdot (\frac{35}{8}\cos^4\theta - \frac{15}{4}\cos^2\theta + \frac{3}{8}) \tag{1.63}$$

Mit MATLAB ist das maximale Ergebnis von $\cosh(\cos\theta) - \sum_n \sum_m c_{n,m}^{f_2} \bar{Y}_{n,m}(\lambda, t)$ im Bereich von 10^{-5} (bis zum $n = m = 4$)

1.3 Aufgabe 3: Rotation von Kugelflächenfunktionen