Übung 2: Somigliana-Pizzetti-Normalpotential

Ausgabe: *09. Dezember 2020* Abgabe: *18. Januar 2021*, 9 Uhr

Aufgabe 1: Somigliana-Pizzetti-Normalpotential

Bestimmen Sie aus der geozentrischen Gravitationskonstante GM, den Halbachsen a, b des Referenzellipsoides und aus der Rotationsgeschwindigkeit der Erde ω den konstanten Potentialwert U_0 des Somigliana-Pizzetti-Referenzpotentials auf dem Referenzellipsoid.

Hilfreich ist dabei — neben der sphärischen Reihenentwicklung des Normalpotentials aus Aufgabe 2 — eine exakte Darstellung in ellipsodischen Koordinaten

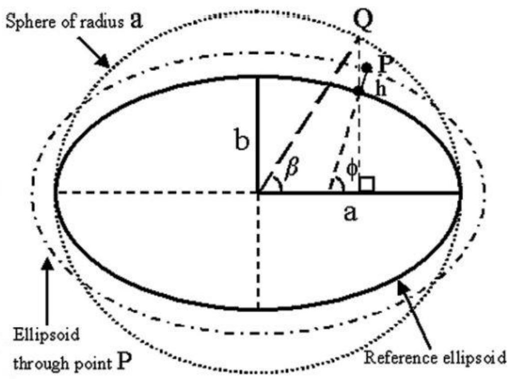
$$U^{\mathrm{Ell}}(\lambda,\beta,u) = \left(U_0 - \frac{\omega^2 a^2}{3}\right)\frac{Q^*_{0,0}\left(\frac{u}{E}\right)}{Q^*_{0,0}\left(\frac{b}{E}\right)} + \frac{\omega^2 a^2}{3}\frac{Q^*_{2,0}\left(\frac{u}{E}\right)}{Q^*_{2,0}\left(\frac{b}{E}\right)} P_{2,0}(\sin\beta)$$

mit $E = \sqrt{a^2 - b^2}$,

$$Q^*_{0,0}\left(\frac{u}{E}\right) = \operatorname{arccot}\left(\frac{u}{E}\right) = \arctan\left(\frac{E}{u}\right)$$

$$Q^*_{2,0}\left(\frac{b}{E}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(3\left(\frac{b}{E}\right)^2 + 1\right)\operatorname{arccot}\left(\frac{b}{E}\right) - 3\left(\frac{b}{E}\right)\right].$$

Dabei bezeichnet β die geozentrische Breite und u die kleine Halbachse des Ellipsoides durch den Berechnungspunkt $P(\lambda,\beta,u)$ (vgl. Skizze).



Li & Götze, 2001,

Hinweise:

- *Multiplizieren Sie beide Darstellungen des Potentials mit dem Radius r und betrachten Sie die Grenzwerte "im Unendlichen".*
- *Stellen sie den Radius $r = r(u)$ als Funktion der kleinen Halbachse u dar.*
- *Approximieren Sie die Funktionen $Q^*_{0,0}(..)$ und $Q^*_{2,0}(..)$ durch die ersten Terme ihrer Tayloreihen.*
- *Unter Vernachlässigung "kleiner Größen" erreicht man einen Zusammenhang zwischen den fünf definierenden Größen (a, b, ω, GM, U_0)*

Markus Antoni — Raum 5.322 — markus.antoni@gis.uni-stuttgart.de

Aufgabe 2: Somigliana-Pizzetti-Normalpotential (in sphärischen Koordinaten)

Die Darstellung des Somigliana-Pizzetti-Potentials in sphärischen Koordinaten lautet:

$$U^{\mathrm{Sph}}(\lambda,\varphi,r) = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{L}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} J_{2n}P_{2n}(\sin\varphi)\right] + \frac{\omega^2}{2}r^2\cos^2\varphi$$

mit

$$J_2 = \frac{e^2}{3}\left(1 - \frac{2}{15}\frac{e'\hat{m}}{q_0}\right)$$

$$J_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}\left(1 - n + 5n\frac{J_2}{e^2}\right) \qquad n > 1.$$

Außerdem gelten noch die folgenden Abkürzungen:

$$e = \frac{E}{a}, \qquad e' = \frac{E}{b}$$

$$\hat{m} = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}, \qquad q_0 = Q^*_{2,0}\left(\frac{b}{E}\right)$$

1. Diskutieren Sie für das Somigliana-Pizzetti-Normalpotential die Konvergenz der Reihenentwicklungen für die Entwicklungsgrade $L = 2, 4, 6, 8$ und visualieren Sie Ihre Ergebnisse.
2. Vergleichen Sie das Somigliana-Pizzetti-Normalpotential zum Grad $L_{\max} = 8$ und das 'volle' Schwerepotential (hier: Modell EGM96 mit dem Entwicklungsgrad $L_{\max} = 36$), indem Sie die Entwicklungen auf einer Kugel um das Geozentrum mit Radius 6371 km auswerten. Stellen Sie die Potentiale und deren Differenz in farbcodierten Erdkarten dar und visualisieren Sie auch die entsprechende Werte entlang des Meridians durch Greenwich. (Hilfreich sind erneut die Funktionen des SHBundle, insbesondere `vec2cs.m` und `gshs_grid.m`.)

Konstanten

$a =$	$6378\,136.701$ m	große Halbachse des Referenzellipsoides
$b =$	$6356\,751.661$ m	kleine Halbachse des Referenzellipsoides
$GM =$	$3.986004415 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m^3 s^{-2}}$	
$\omega =$	$7.292115 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}$	