

Physikalische Geodäsie Übung 1



Ausarbeitung im Studiengang
Geodäsie und Geoinformatik
an der Universität Stuttgart

Nicholas Schneider, 3222199
Ziqing Yu, 3218051

Stuttgart, December 2, 2020

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Nico Sneeuw
Universität Stuttgart

PD Dr.-Ing. habil. Johannes Engels
Universität Stuttgart

Dr.-Ing. Markus Antoni
Universität Stuttgart

Kapitel 1

Ausarbeitung

1.1 Aufgabe 1: Legendre-Funktionen

1.1.1 a

Die unnormierten Legendrepolynome

$$P_3(t) = \frac{2n-1}{n}tP_2(t) - \frac{n-1}{n}P_1(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \quad (1.1)$$

$$P_4(t) = \frac{2n-1}{n}tP_3(t) - \frac{n-1}{n}P_2(t) = \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8} \quad (1.2)$$

Normierungsfaktoren:

$$N_{l,0} = \sqrt{(2l+1)} \quad (1.3)$$

$$N_{0,0} = 1, N_{1,0} = \sqrt{3}, N_{2,0} = \sqrt{5}, N_{3,0} = \sqrt{7}, N_{4,0} = 3.$$

1.1.2 b

Um zu untersuchen, ob auch die zugeordneten Legendrefunktionen immer orthogonal zueinander sind, gilt es das Integral des Produktes der Legendre-Polynome zu untersuchen. Hierbei seien die Integralgrenzen -1 und 1. Ergibt das Integral mit den genannten Grenzen 0, so sind die entsprechenden Legendre-Funktionen orthogonal zueinander. Für die Untersuchung ist es vorweg sinnvoll sich auf diejenigen Polynome, die multipliziert miteinander einen geraden Exponenten erzeugen, zu konzentrieren. Das Produkt erzeugt nämlich anschließend einen ungeraden Exponenten nach der Integration. Bei Einsetzen der Integralgrenzen entstehen folglich unterschiedliche Vorzeichen, welche das gesamte Integral ungleich 0 werden lassen könnten. Nun kann man jegliche Untersuchungen durchführen. Notiert wird jedoch diejenige, die beweist, dass nicht alle Legendre-Funktionen orthogonal zueinander sind. Hierfür prüft man das Integral des Produkts aus $P_{0,0}(t)$ und $P_{2,2}(t)$.

$$\int_{-1}^1 P_{0,0}(t) \cdot P_{2,2}(t) = \int_{-1}^1 P_{2,2}(t) \quad (1.4)$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{5}{12}}(1-t^2) \quad (1.5)$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{6} \left[t - \frac{1}{3}t^3 \right]_{-1}^1 \quad (1.6)$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{6} \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right) \quad (1.7)$$

$$= \frac{2\sqrt{15}}{9} \neq 0 \quad (1.8)$$

Durch die obige Berechnung wurde gezeigt, dass nicht alle Legendrefunktionen immer auch orthogonal zueinander sind.

1.2 Aufgabe 2: Sphärisch-Harmonische Analyse

$$Y_{n,m}(t) = P_{n,m}(t) \begin{Bmatrix} \sin(m\lambda) \\ \cos(m\lambda) \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

1.2.1 a

Für f_1 , weil f_1 nur von θ abhängig ist und $\int_0^{2\pi} \sin(m\lambda) = 0$, nimmt man hier nur $\cos(m\lambda)$

$$f_1(\lambda, \theta) = \cos^2 \theta \implies f_1(\lambda, t) = t^2 \quad (1.10)$$

$$c_{n,m}^{f_1} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} N_{n,m} \cdot P_{n,m}(t) \cdot \cos(m\lambda) \cdot f_1(\lambda, t) d\lambda dt \quad (1.11)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 N_{n,m} \cdot P_{n,m}(t) \cdot t^2 \left[\int_0^{2\pi} \cos(m\lambda) d\lambda \right] dt \quad (1.12)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 2\pi & m = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Wenn $m = 0$:

$$c_{n,0}^{f_1} = \frac{N_{n,0}}{2} \int_{-1}^1 P_{n,0}(t) \cdot t^2 dt \quad (1.14)$$

Wenn n ungerade ist, ist der Grad von t von $P_{n,0} \cdot t^2$ auch ungerade. Da $\int_{-1}^1 t^{2n-1} dt = 0$, muss man nur $c_{0,0}^{f_1}, c_{2,0}^{f_1}, c_{4,0}^{f_1}$ berechnen.

$$c_{0,0}^{f_1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \quad (1.15)$$

$$c_{2,0}^{f_1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) t^2 dt = \frac{2\sqrt{5}}{15} \quad (1.16)$$

$$c_{4,0}^{f_1} = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{35}{8} t^4 - \frac{15}{4} t^2 + \frac{3}{8} \right) t^2 dt = 0 \quad (1.17)$$

Für f_2 , weil:

$$\int_0^{2\pi} \cos(kt) \sin(nt) dt = 0 \quad (1.18)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt) \sin(nt) dt = \begin{cases} \pi & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.19)$$

Man muss nur $m = 1$ für $Y_{n,1} = P_{n,1} \sin(\lambda)$ berechnen. Wenn n gerade ist, ist der Grad von t ungerade. Deshalb sind die Berechnungen nur für $c_{1,1}^{f_2}$ und $c_{3,1}^{f_2}$ notwendig.

$$c_{1,1}^{f_1} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 (\sqrt{1-t^2})^3 \sqrt{3} \sqrt{1-t^2} \pi dt \quad (1.20)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{-1}^1 (t^4 - 2t^2 + 1) dt \quad (1.21)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{15} \quad (1.22)$$

$$c_{3,1}^{f_2} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 (\sqrt{1-t^2})^3 \sqrt{\frac{7}{6}} \cdot \frac{3}{2} (5t^2 - 1) \sqrt{1-t^2} \pi dt \quad (1.23)$$

$$= \frac{3}{8} \sqrt{\frac{7}{6}} \int_{-1}^1 (5t^6 - 11t^4 + 7t^2 - 1) dt \quad (1.24)$$

$$= -\frac{4}{35} \sqrt{\frac{7}{6}} \quad (1.25)$$

$$= -\frac{2\sqrt{42}}{105} \quad (1.26)$$

Für f_3 :

Ähnlich wie für f_1 , nimmt man nur $\cos(m\lambda)$ und $c_{n,m}^{f_3} = 0$ wenn $m \neq 0$. Man benennt:

$$J_k = \int_{-1}^1 t^k \cosh(t) dt$$

Dann:

$$c_{0,0}^{f_3} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 1 \cosh(t) dt = \frac{1}{2} J_0 \quad (1.27)$$

$$c_{1,0}^{f_3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 t \cosh(t) dt = \frac{\sqrt{3}}{2} J_1 \quad (1.28)$$

$$c_{2,0}^{f_3} = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) \cosh(t) dt = \frac{3\sqrt{5}}{4} J_2 - \frac{\sqrt{5}}{4} J_0 \quad (1.29)$$

$$c_{3,0}^{f_3} = \frac{\sqrt{7}}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) \cosh(t) dt = \frac{5\sqrt{7}}{4} J_3 - \frac{3\sqrt{7}}{4} J_1 \quad (1.30)$$

$$c_{4,0}^{f_3} = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}\right) \cosh(t) dt = \frac{105}{16} J_4 - \frac{45}{8} J_2 + \frac{9}{16} J_0 \quad (1.31)$$

$$(1.32)$$

J_0 kann direkt berechnet werden:

$$J_0 = \int_{-1}^1 \cosh(t) dt = [\sinh(t)]_{-1}^1 = 2 \sinh(1) \quad (1.33)$$

J_1 kann via partielle Integration berechnet werden:

$$J_1 = \int_{-1}^1 t \cosh(t) dt \quad (1.34)$$

$$= [t \sinh(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \sinh(t) dt \quad (1.35)$$

$$= [t \sinh(t)]_{-1}^1 - [\cosh(t)]_{-1}^1 \quad (1.36)$$

$$= 0 \quad (1.37)$$

J_2 bis J_4 werden via partielle Integration rekursiv berechnet:

$$J_k = \int_{-1}^1 t^k \cosh(t) dt \quad (1.38)$$

$$= [t^k \sinh(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 k t^{k-1} \sinh(t) dt \quad (1.39)$$

$$= [t^k \sinh(t)]_{-1}^1 - k [t^{k-1} \cosh(t)]_{-1}^1 + k(k-1) \int_{-1}^1 \cosh(t) t^{k-2} dt \quad (1.40)$$

$$= [t^k \sinh(t)]_{-1}^1 - k [t^{k-1} \cosh(t)]_{-1}^1 + k(k-1) J_{k-2} \quad (1.41)$$

Wenn t ungerade ist: $J_k = 0 - 0 + k(k-1) J_{k-2}$. Denn $J_1 = 0$, $J_k = 0$ für alle ungerade k .

Für gerade k :

$$J_k = 2 \sinh(1) - 2k \cosh(1) + k(k-1) J_{k-2} \quad (1.42)$$

Ansatz:

$$J_2 = 2 \sinh(1) - 4 \cosh(1) + 2J_0 \quad (1.43)$$

$$= 2 \sinh(1) - 4 \cosh(1) + 4 \sinh(1) \quad (1.44)$$

$$= 6 \sinh(1) - 4 \cosh(1) \quad (1.45)$$

$$J_4 = 2 \sinh(1) - 8 \cosh(1) + 12J_2 \quad (1.46)$$

$$= 2 \sinh(1) - 8 \cosh(1) + 12(6 \sinh(1) - 4 \cosh(1)) \quad (1.47)$$

$$= 74 \sinh(1) - 56 \cosh(1) \quad (1.48)$$

Berechnung von Koeffizienten:

$$c_{0,0}^{f_3} = \sinh(1) \quad (1.49)$$

$$c_{1,0}^{f_3} = 0 \quad (1.50)$$

$$c_{2,0}^{f_3} = 4\sqrt{5} \sinh(1) - 3\sqrt{5} \cosh(1) \quad (1.51)$$

$$c_{3,0}^{f_3} = 0 \quad (1.52)$$

$$c_{4,0}^{f_3} = 453 \sinh(1) - 345 \cosh(1) \quad (1.53)$$

1.2.2 bFür f_1 :

$$\sum_n \sum_m c_{n,m}^{f_1} \tilde{Y}_{n,m}(\lambda, t) = c_{0,0}^{f_1} \tilde{Y}_{0,0}(\lambda, t) + c_{2,0}^{f_1} \tilde{Y}_{2,0}(\lambda, t) + c_{4,0}^{f_1} \tilde{Y}_{4,0}(\lambda, t) \quad (1.54)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \cos(0) + \frac{2\sqrt{5}}{15} \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \cos(0) + 0 \quad (1.55)$$

$$= t^2 \quad (1.56)$$

$$= \cos^2(\theta) \quad (1.57)$$

Für f_2 :

$$\sum_n \sum_m c_{n,m}^{f_2} \tilde{Y}_{n,m}(\lambda, t) = c_{1,1}^{f_2} \tilde{Y}_{1,1}(\lambda, t) + c_{3,1}^{f_2} \tilde{Y}_{3,1}(\lambda, t) \quad (1.58)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{15} \cdot \sqrt{3} \sqrt{1-t^2} \sin(\lambda) - \frac{2\sqrt{42}}{105} \cdot \sqrt{\frac{7}{6}} \cdot \frac{3}{2} (5t^2 - 1) \sqrt{1-t^2} \sin(\lambda) \quad (1.59)$$

$$= \frac{3}{4} \sin \theta \sin \lambda - \frac{1}{4} \sin 3\theta \sin \lambda \quad (1.60)$$

Mit MATLAB ist das maximale Ergebnis von $\frac{3}{4} \sin \theta \sin \lambda - \frac{1}{4} \sin 3\theta \sin \lambda - \sin^3(\theta) \sin(\lambda)$ im Bereich von 10^{-16} (bis zum $n = m = 4$)

Für f_3 :

$$\sum_n \sum_m c_{n,m}^{f_3} \tilde{Y}_{n,m}(\lambda, t) = c_{0,0}^{f_3} \tilde{Y}_{0,0}(\lambda, t) + c_{2,0}^{f_3} \tilde{Y}_{2,0}(\lambda, t) + c_{4,0}^{f_3} \tilde{Y}_{4,0}(\lambda, t) \quad (1.61)$$

$$= \sinh(1) + (4\sqrt{5} \sinh(1) - 3\sqrt{5} \cosh(1)) \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{4} (1 + 3 \cos(2\theta)) \quad (1.62)$$

$$+ (453 \sinh(1) - 345 \cosh(1)) \cdot 3 \cdot \left(\frac{35}{8} \cos^4 \theta - \frac{15}{4} \cos^2 \theta + \frac{3}{8}\right) \quad (1.63)$$

Mit MATLAB ist das maximale Ergebnis von $\cosh(\cos \theta) - \sum_n \sum_m c_{n,m}^{f_3} \tilde{Y}_{n,m}(\lambda, t)$ im Bereich von 10^{-5} (bis zum $n = m = 4$)

1.3 Aufgabe 3: Rotation von Kugelflächenfunktionen**1.3.1 Implementierung der Wigner-d-Funktionen $d_{km}^n(\beta)$**

Die zu implementierende (ineffektive) Summendarstellung sieht wie folgt aus:

$$d_{km}^n(\beta) = \sqrt{\frac{(n+m)!(n-m)!}{(n+k)!(n-k)!}} \sum_{t=t_1}^{t_2} \binom{n+k}{t} \binom{n-k}{n-m-t} (-1)^t \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2n-a} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^a \quad (1.64)$$

$$\text{mit } a = m - k + 2t, \quad t_1 = \max(0, k - m) \text{ und } t_2 = \min(n - m, n + k) \quad (1.65)$$

Die Funktion ist auf der nächsten Seite zu sehen oder dem Anhang zu entnehmen.

```
function[d] = Wigner_d(m,n,k,beta)
% Nicholas Schneider & Ziqing Yu
% 30/11/2020
% Mit dieser Funktion kann man die Wigner-d-Funktion berechnen.
% input: Grad n,
%         Ordnung m und k
%         Winkel beta

% output: Wigner-d-Funktion

% pruefen, ob m,n,k ganzzahlig ist
if (rem(m,1)~=0 || rem(n,1)~=0 || rem(k,1)~=0)
    error('n,m,k müssen ganzzahlig sein.')
end
% pruefen, ob -n<=k und m<=n
if (-n > k || m > n || -n > k || k > n)
    error('Bedingungen -n<=k oder m<=n nicht erfüllt.')
end
% SQRT berechnen
SQRT = sqrt((factorial(n+m) * factorial(n-m)) / (factorial(n+k) * factorial(n-k)));

%
t1 = max(0,k-m);
t2 = min(n-m,n+k);

Sigma = 0;
for t = t1:t2
    a = m - k + 2 * t;
    Sigma = Sigma + binomfun(n+k,t) * binomfun(n-k,n-m-t) * (-1)^t * cos(beta/2)^a *
(2*n-a) * sin(beta/2)^a;
end
d = SQRT * Sigma;

end
```


1.3.2 Rotation der Kugelflächenfunktionen und Visualisierung

Mit dem Winkel $\gamma = \varpi/2$ soll die Rotation der Kugelflächenfunktion getestet werden. Dabei soll der Meta-Pol in Stuttgart liegen.

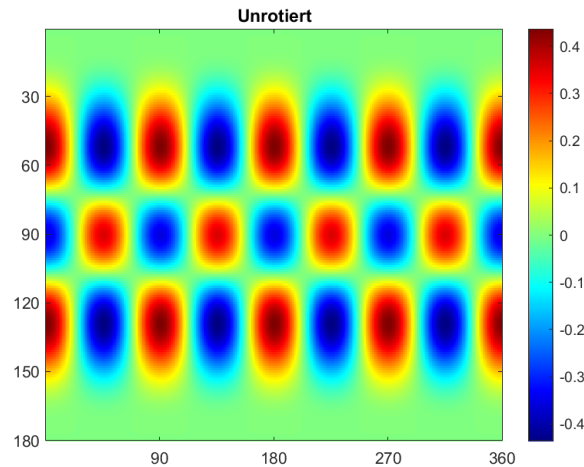


Abbildung 1.1: Ergebnis der Kugelflächenfunktion unrotiert

Abbildung 1.1 zeigt zunächst das unrotierte Ergebnis der Kugelflächenfunktion.

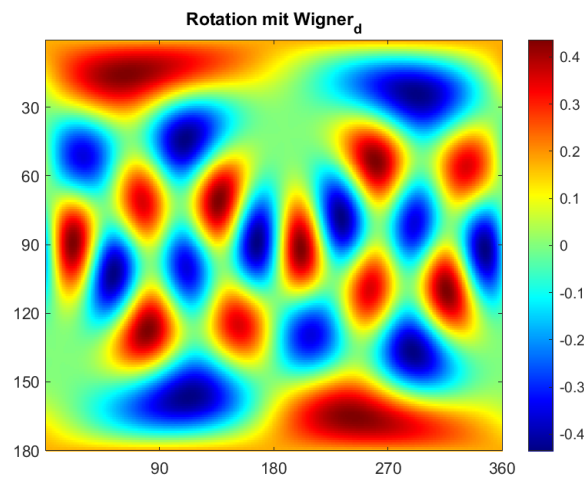


Abbildung 1.2: Rotation der Kugelflächenfunktion über Wigner

Abbildung 1.2 präsentiert das Ergebnis der Rotation der Kugelflächenfunktion, die durch die Berechnung über Wigner entstanden ist.

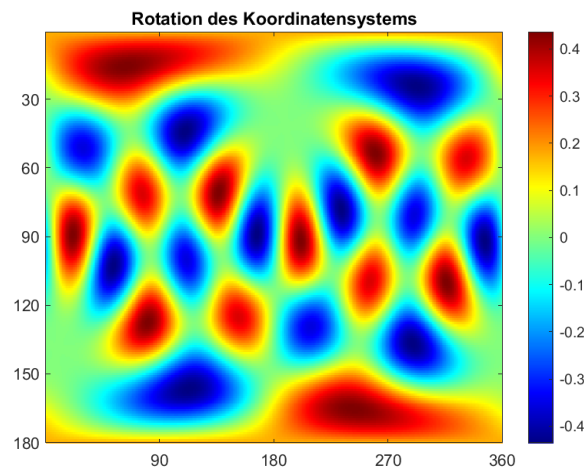


Abbildung 1.3: Rotation der Kugelflächenfunktion mit Stuttgart als Meta-Pol

In Abbildung 1.3 ist die Rotation der Kugelflächenfunktion mit Stuttgart als Meta-Pol dargestellt.

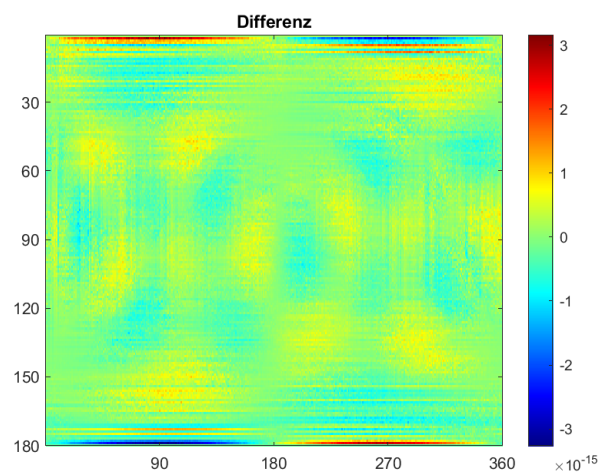


Abbildung 1.4: Differenz beider Berechnungen

In Abbildung 1.4 sieht man nun den Plot der Differenzen beider Berechnungen.