Universität Stuttgart

Geodätisches Institut

Physikalische Geodäsie Übung 1

Ausarbeitung im Studiengang

Geodäsie und Geoinformatik

an der Universität Stuttgart

Nicholas Schneider,
Ziqing Yu, 3218051

Stuttgart, November 25, 2020

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Nico Sneeuw
Universität Stuttgart

PD Dr.-Ing. habil. Johannes Engels
Universität Stuttgart

Dr.-Ing. Markus Antoni
Universität Stuttgart

Kapitel 1

Ausarbeitung

1.1 Aufgabe 1: Legendre-Funktionen

1.1.1 a

Die unnormierten Legendrepolynome

$$P_3(t) = \frac{2n-1}{n} t P_2(t) - \frac{n-1}{n} P_1(t) = \frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t \tag{1.1}$$

$$P_4(t) = \frac{2n-1}{n} t P_3(t) - \frac{n-1}{n} P_2(t) = \frac{35}{8} t^4 - \frac{15}{4} + \frac{8}{3} \tag{1.2}$$

Normierungsfaktoren:

$$N_{l,0} = \sqrt{(2l+1)} \tag{1.3}$$

$N_{0,0} = 1$, $N_{1,0} = \sqrt{3}$, $N_{2,0} = \sqrt{5}$, $N_{3,0} = \sqrt{7}$, $N_{4,0} = 3$.

1.1.2 b

1.2 Aufgabe 2: Sphärisch-Harmonische Analyse

1.2.1 a

Für f_1

$$f_1(\lambda,\theta) = \cos^2\theta \Longrightarrow f_1(\lambda,t) = t^2 \tag{1.4}$$

$$c^{f_1}_{n,m} = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} N_{n.m}\cdot P_{n,m}(t)\cdot\cos(m\lambda)\cdot f_1(\lambda,t)d\lambda dt \tag{1.5}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} N_{n.m}\cdot P_{n,m}(t)\cdot t^2\left[\int_{0}^{2\pi}\cos(m\lambda)d\lambda\right]dt \tag{1.6}$$

$$\int_{0}^{2\pi}\cos(m\lambda)d\lambda = \begin{cases}0 & m\neq 0\\ 2\pi & m=0\end{cases} \tag{1.7}$$

Wenn $m=0$:

$$c^{f_1}_{n,0} = \frac{N_{n,0}}{2}\int_{-1}^{1} P_{n,0}(t)\cdot t^2 dt \tag{1.8}$$

Wenn n ungerade ist, ist Grad von t von $P_{n,0}\cdot t^2$ auch ungerade. Weil $\int_{-1}^{1} t^{2n-1}dt = 0$, muss man nur $c^{f_1}_{0,0}$, $c^{f_1}_{2,0}$, $c^{f_1}_{4,0}$ berechnen.

$$c^{f_1}_{0,0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{1}{3} \tag{1.9}$$

$$c^{f_1}_{2,0} = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2})t^2dt = \frac{2\sqrt{5}}{15} \tag{1.10}$$

$$c^{f_1}_{4,0} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{35}{8}t^4-\frac{15}{4}t^2+\frac{3}{8})t^2dt = 0 \tag{1.11}$$

Für f_2: Ergebnisse noch nicht sicher

Für f_3:
Ähnlich wie für f_1, $c^{f3}_{n,m} = 0$ wenn $m\neq 0$. Man benennt:

$$J_k = \int_{-1}^{1} t^k\cosh(t)dt$$

Dann:

$$c^{f_3}_{0,0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1\cosh(t)dt = \frac{1}{2}J_0 \tag{1.12}$$

$$c^{f_3}_{1,0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} t\cosh(t)dt = \frac{\sqrt{3}}{2}J_1 \tag{1.13}$$

$$c^{f_3}_{2,0} = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2})\cosh(t)dt = \frac{3\sqrt{5}}{4}J_2-\frac{\sqrt{5}}{4}J_0 \tag{1.14}$$

$$c^{f_3}_{3,0} = \frac{\sqrt{7}}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t)\cosh(t)dt = \frac{5\sqrt{7}}{4}J_3-\frac{3\sqrt{7}}{4}J_1 \tag{1.15}$$

$$c^{f_3}_{4,0} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{35}{8}t^4-\frac{15}{4}t^2+\frac{3}{8})\cosh(t)dt = \frac{105}{16}J_4-\frac{45}{8}J_2+\frac{9}{16}J_0 \tag{1.16}$$

J_0 kann direkt berechnet werden:

$$J_0 = \int_{-1}^{1} \cosh(t)dt = [\sinh(t)]_{-1}^{1} = 2\sinh(1) \tag{1.17}$$

J_1 kann via partielle Integration berechnet werden:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-1}^{1} t\cosh(t)dt && (1.18) \\ &= [t\sinh(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \sinh(t)dt && (1.19) \\ &= [t\sinh(t)]_{-1}^{1} - [\cosh(t)]_{-1}^{1} && (1.20) \\ &= 0 && (1.21) \end{aligned}$$

J_2 bis J_4 werden via partielle Integration rekursive berechnet:

$$\begin{aligned} J_k &= \int_{-1}^{1} t^k \cosh(t)dt && (1.22) \\ &= \left[t^k \sinh(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} kt^{k-1}\sinh(t)dt && (1.23) \\ &= \left[t^k \sinh(t)\right]_{-1}^{1} - k\left[t^{k-1}\cosh(t)\right]_{-1}^{1} + k(k-1)\int_{-1}^{1} \cosh(t)t^{k-2}dt && (1.24) \\ &= \left[t^k \sinh(t)\right]_{-1}^{1} - k\left[t^{k-1}\cosh(t)\right]_{-1}^{1} + k(k-1)J_{k-2} && (1.25) \end{aligned}$$

Wenn t ungerade ist: $J_k = 0 - 0 + k(k-1)J_{k-2}$. Denn $J_1 = 0$, $J_k = 0$ für alle ungerade k.

Für gerade k:

$$J_k = 2\sinh(1) - 2k\cosh(1) + k(k-1)J_{k-2} \tag{1.26}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} J_2 &= 2\sinh(1) - 4\cosh(1) + 2J_0 && (1.27) \\ &= 2\sinh(1) - 4\cosh(1) + 4\sinh(1) && (1.28) \\ &= 6\sinh(1) - 4\cosh(1) && (1.29) \\ J_4 &= 2\sinh(1) - 8\cosh(1) + 12J_2 && (1.30) \\ &= 2\sinh(1) - 8\cosh(1) + 12(6\sinh(1) - 4\cosh(1)) && (1.31) \\ &= 74\sinh(1) - 56\cosh(1) && (1.32) \end{aligned}$$

Berechnung von Koeffizienten:

$$\begin{aligned} c_{0,0}^{f_3} &= \sinh(1) && (1.33) \\ c_{1,0}^{f_3} &= 0 && (1.34) \\ c_{2,0}^{f_3} &= 4\sqrt{5}\sinh(1) - 3\sqrt{5}\cosh(1) && (1.35) \\ c_{3,0}^{f_3} &= 0 && (1.36) \\ c_{4,0}^{f_3} &= 453\sinh(1) - 345\cosh(1) && (1.37) \end{aligned}$$

1.2.2 b