Übungen Physikalische Geodäsie: Ergänzungen zum Thema "Kugelflächenfunktionen"

Markus Antoni

November 18, 2020

Aufgabe 2a) Berechnung der Koeffizienten

Analyse-Formel

$$c_{lm}^{f} = \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(\lambda, \phi) \cdot \bar{Y}_{lm}(\lambda, \theta) \cdot \sin\theta \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}\theta =$$

Aufgabe 2a) Berechnung der Koeffizienten

Analyse-Formel

$$c_{lm}^{f} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(\lambda, \phi) \cdot \bar{Y}_{lm}(\lambda, \theta) \cdot \sin\theta \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{2\pi} f(\lambda, t) \cdot \bar{Y}_{lm}(\lambda, t) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}t$$

G I S

Aufgabe 2a) Berechnung der Koeffizienten

Analyse-Formel

$$c_{lm}^f = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda, \phi) \cdot \bar{Y}_{lm}(\lambda, \theta) \cdot \sin\theta \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} f(\lambda, t) \cdot \bar{Y}_{lm}(\lambda, t) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}t$$

zugeordnete Legendrefunktionen in der Variable t und $\cos\theta$:
vgl. Skript von Prof. Sneeuw

GIS

Aufgabe 2a) Berechnung der Koeffizienten

Testfunktion $f_1(\lambda, \theta) = \cos^2\theta \Rightarrow f_1(\lambda, t) = t^2$

Nur Koeffizienten c_{00}, c_{20}, c_{40} müssen berechnet werden!

$\Rightarrow$ Warum?

Aufgabe 2a) Berechnung der Koeffizienten

Testfunktion $f_1(\lambda, \theta) = \cos^2\theta \Rightarrow f_1(\lambda, t) = t^2$
Nur Koeffizienten c_{00}, c_{20}, c_{40} müssen berechnet werden!
$\Rightarrow$ Warum?

Kugelflächenfunktion: $\bar{Y}_{0,0}(\lambda, t) = N_{00}P_{00}(t) \cdot \cos(0\lambda) = 1$

Aufgabe 2a) Berechnung der Koeffizienten

Testfunktion $f_1(\lambda, \theta) = \cos^2\theta \Rightarrow f_1(\lambda, t) = t^2$
Nur Koeffizienten c_{00}, c_{20}, c_{40} müssen berechnet werden!
$\Rightarrow$ Warum?

Kugelflächenfunktion: $\bar{Y}_{0,0}(\lambda, t) = N_{00} P_{00}(t) \cdot \cos(0\lambda) = 1$

$$c_{00}^{f} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} t^2 \left(1\right) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{6}(1 - (-1)) = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 2a) Berechnung der Koeffizienten

Testfunktion $f_1(\lambda, \theta) = \cos^2\theta \Rightarrow f_1(\lambda, t) = t^2$
Nur Koeffizienten c_{00}, c_{20}, c_{40} müssen berechnet werden!
$\Rightarrow$ Warum?

Kugelflächenfunktion: $\bar{Y}_{0,0}(\lambda, t) = N_{00} P_{00}(t) \cdot \cos(0\lambda) = 1$

$$c^f_{00} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} t^2 (1) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{6}(1 - (-1)) = \frac{1}{3}$$

und analog: $\bar{Y}_{2,0}(\lambda, t) = N_{20} P_{20}(t) \cdot \cos(0\lambda) = \sqrt{5}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)$

$$c^f_{20} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} t^2 \cdot \sqrt{5}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}t = \ldots$$

(numerische Berechnung möglich mit `gsha.m`)

Aufgabe 2a) Testfunktionen

- exakte Darstellung möglich für f_1 und f_2
- Approximation für f_3

Rekursionsformel $J_k = \int\limits_{-1}^{1} t^k \cosh t \,\mathrm{d}t$?

- prinzipielle Form: $J_k = A_k + B_k J_{k-2}$
- via partielle Integration

alternatives Beispiel einer Rekursionsformel

$$S_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} S_{n-2} \qquad S_n := \int \sin^n x \,\mathrm{d}x$$

GIS

Aufgabe 3a) Rotation von Kugelflächenfunktionen

Auswertung von KFF in gedrehten Koordinatensystemen:

- Darstellung des Gravitationsfeldes (und dessen Ableitungen) im bewegten Satellitensystem
- Vermeidung der $(1/\sin\theta)$-Singularität am Pol
- Repräsentation von sphärisch-radialen Basisfunktionen als SH-Koeffizienten

Verwendung von KFF in komplexer Form

$$\hat{Y}_{nm}(\lambda', \theta') = \exp(-\imath m \gamma) \sum_{k=-n}^{n} d^n_{km}(\beta) \hat{Y}_{nk}(\lambda - \alpha, \theta)$$

$d^n_{km}(\beta)$: *Wigner-d-Funktion*
(in anderer Notation aka: *dlmk-Funktion*)

Wie bestimmen Mathematiker die *dlmk* (Teil 1)?

- Gruppentheorie beschäftigt sich mit algebraischen Strukturen und Symmetrien
- Gruppe $(\mathcal{G}, \circ)$ mit $\{a, b, c, ...\} \in \mathcal{G}$ und Verknüpfung "$\circ$":
  - abgeschlossen: $a \circ b \in \mathcal{G}$
  - assoziativ: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
  - neutrales Element $e \in \mathcal{G}$: $a \circ e = e \circ a = a$
  - inverses Element $a^{-1} \in \mathcal{G}$: $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$
- Beispiele für Gruppen:
  - ganze Zahlen bzgl. Addition $(\mathbb{Z}, +)$
  - 'Bewegungen' des Zauberwürfels
  - Permutationen

Wie bestimmen Mathematiker die *dlmk* (Teil 2)?

- Darstellung ρ einer Gruppe $(\mathcal{G}, \circ)$ in einer Struktur W:

$$\rho(a \circ b) = \rho(a) \cdot \rho(b)$$

- Darstellung in der *allgemeinen linearen Gruppe* $GL(V)$ eines Vektorraums $V \approx$ "**Matrixform der Gruppe**"$\Rightarrow$ Untersuchung mit linearer Algebra
- *Spezielle orthogonale Gruppe* $SO(3)$:
  Transformation (eines skalaren Feldes) im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ über 3 Eulerwinkel (α, β, γ) mittels Exponential- und Wigner-d-Funktionen

- N. SNEEUW (1991): *Inclination functions – A group theoretical Background and a recursive algorithm*

GIS

Wie bestimmen Geodäten die *dlmk*?

- Gruppentheorie meist unbekannt und nicht notwendig
- **KFF bilden ein vollständiges System**: Jede Funktion lässt sich durch Linearkombination darstellen
- Bei Drehungen existiert eine exakte Lösung:

$$\hat{Y}_{nm}(\lambda', \theta') = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} a_{ik} \hat{Y}_{ik}(\lambda, \theta)$$

- jede KFF erfüllt eine Differentialgleichung auf der Kugel, die nur vom Grad n abhängt
- die Differentialgleichung wird auch nach der Drehung erfüllt $\Rightarrow$ nur Grad n auf der RHS, keine Doppelsumme
- Drehung einer Kugelflächenfunktion um die z-Achse bzw. λ-Richtung: Exponentialfunktion mit Argument : $(\lambda - \alpha)$

G I S

Herleitung der Wigner-d-Funktionen

- Drehung des Koordinatensystems (λ, θ) um die zweite Achse und den Winkel β: $\underline{\mathbf{R}}_2(\beta)$
- differentielle Änderungen der KFF durch eine Drehung + Ableitungen der KFF
  $\Rightarrow$ Differentialgleichung der Wigner-d-Funktionen
- Lösung analog zu den Formeln von Ferrers/Roudriguez

$$d_{km}^{n} \propto (1-x)^{\frac{m-k}{2}}(1+x)^{-\frac{m+k}{2}} \frac{\mathrm{d}^{n-k}\left\{(1-x)^{n-m}(1+x)^{n+m}\right\}}{\mathrm{d}x^{n-k}}$$

- A. F. Nikiforov, und V. B. Uvarov (1988): *Special Functions of Mathematical Physics*. Birkhäuser, Basel.

GIS

Summenformel vom Übungsblatt

Berechnung über verschiedene Rekursionsformeln oder über eine Summe:

$$d^n_{km}(\beta) = SQRT \cdot \sum_{t=t_1}^{t_2} \binom{n+k}{t} \binom{n-k}{n-m-t} (-1)^t \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2n-a} \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{a}$$

$$SQRT = \sqrt{\frac{(n+m)!(n-m)!}{(n+k)!(n-k)!}}$$

- Grad n, Ordnungen (m, k) sind ganzzahlig mit $-n \leq k, m \leq +n$
- für große Anzahl an Berechnungen ist Summe nicht sinnvoll (Abhängigkeit vom Laufindex t)
- 'naive' Implementierung ist numerisch instabil (Fakultäten)

GIS

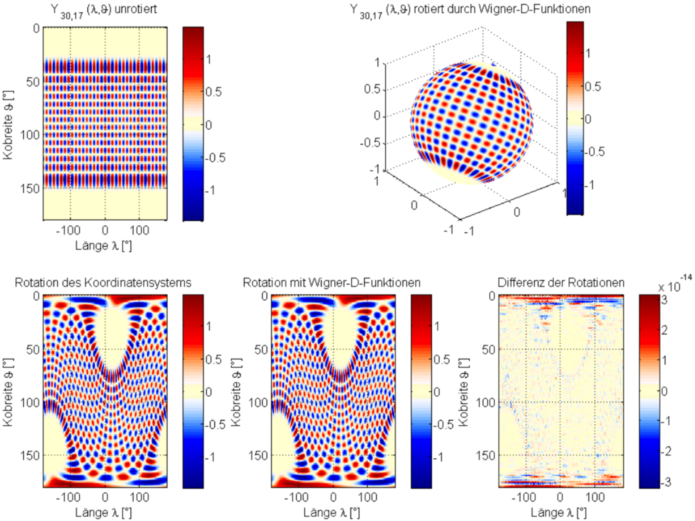
Hinweise zur Implementierung

- skalarer Winkel β ist hier ausreichend
- Grad n und Ordnungen (m, k) sind ganzzahlig (prüfen)
- Exponenten $\boxed{a = m-k+2t}$ und $\boxed{2n-a}$ sind alle nicht-negativ (einmalige Berechnung für alle Grade/Ordnungen?)
- "Skalierung" *SQRT* kann über `gammaln` realisiert werden (Logarithmus-Gesetze)
- Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ sind symmetrisch und rekursiv berechenbar:

```
if 2*k > n; k = n-k; end
binom = 1
for ii = 1:k
    binom = binom * (n+1-ii)/ii;
end
```

- (Berechnung für einen Vektor $k = [-n, ..., n]$ ist optional)

Ergebnis


Y 30,17 (λ,ϑ) unrotiert
Y 30,17 (λ,ϑ) rotiert durch Wigner-D-Funktionen
Rotation des Koordinatensystems
Rotation mit Wigner-D-Funktionen
Differenz der Rotationen
Kobreite ϑ [°]
Länge λ [°]
x 10^-14

Weitere Fakten

- zum Grad n gehören $(2n+1)^2$ Wigner-d-Funktionen
- zugeordnete Legendrefunktionen sind – bis auf die Normierung – eine Teilmenge der Wigner-d-Funktionen vom gleichen Grad
- geodätische Neigungsfunktionen (inclination functions) = im Wesentlichen ein Produkt aus Wigner-d-Funktionen und zugeordneten Legendrefunktionen