Schrftliche Abgabe bis 07.12.2020

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Stellen Sie die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{x}$$

sowie dessen Übergangsmatrix $\Phi(\Delta t)$ für folgende Bewegungsmodelle im 2D-Raum auf:

- konstante Position (d.h. keine Geschwindigkeit)
- konstante Geschwindigkeit
- konstante Beschleunigung

Aufgabe 2 (1 Punkt)

Erklären Sie einem Erstsemester, was ein "Random Walk" und ein "Integrated Random Walk" ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Ein Gauß-Markov Prozess erster Ordnung ist wie folgt definiert:

$$\dot{x} = -\beta x + W(t).$$

Finden Sie die Übergangsmatrix $\Phi(\Delta t)$ um die Differentialgleichung als diskrete Differenzengleichungen umzuformulieren in der Form von

$$x_{n+1} = \Phi \cdot x_n + w_{n+1}.$$

Erstellen Sie 30 Realisationen mit je 100 Schritten (d.h. $t = 1 : 100, \Delta t = 1$) vom ersten Gauß-Markov Prozess mit $\beta = 0.1$ und den Initialwert $x_0 = 0$ für jede einzelne Realisation. Für w_{n+1} nehmen Sie Gaußsches weißes Rauschen mit einem Mittelwert von 0 und einer Standardabweichung von 1 an. Stellen Sie Ihre Ergebnisse und die Varianz für alle Realisationen graphisch dar und beschreiben/interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Übergangsmatrix Φ für $\Delta t = 1$ für einen stochastischen Prozess, der durch

$$\ddot{x} = 0 + W(t)$$

gegeben ist. Stellen Sie damit die diskrete Differenzengleichung

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}_{n+1} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} 0 \\ w_{n+1} \end{bmatrix}$$

auf und berechnen mit dem Startwert $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ die Werte x_n für $n = 1 \dots 20$. Die dazu benötigten Werte der Realisierung von w_{n+1} entnehmen Sie der Datei `random_a4.txt` welche auf ILIAS hinterlegt ist. Da diese Datei 50 zufällige Werte für jedes w_n enthält (Spalten der Datei), können Sie 50 Realisierungen des oben beschriebenen Zufallsprozesses $x(t)$ ermitteln. Jede dieser 50 Realisation hat eine Länge von jeweils 20 Werten (Anzahl der Zeilen der Datei). Bestimmen Sie aus all diesen Realisierungen pro Schritt den Mittelwert, d.h den Mittelwert aus den 50 Realisierungen bei Schritt n=1, bei n=2 ..., bei n=20 (Sie bekommen insgesamt 20 Mittelwerte). Berechnen Sie ebenfalls die Varianz von x_n für $n = 1 \dots 20$ und stellen Sie Varianz und Mittelwert graphisch dar.

Aufgabe 5 (1 Punkt)

Berechnen Sie numerisch (d.h. mit dem "Kochbuchrezept"!) die Übergangsmatrix $\boldsymbol{\Phi}$ sowie Matrix des Prozessrauschens $\boldsymbol{Q}$ für $\Delta t = 1$ wenn folgender Rauschprozess

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\sqrt{2}\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} W(t)$$

mit $\omega_0 = 0.1$ und $b^2 = 2\sqrt{2}\omega_0^3$ zu Grunde liegt.