Universität Stuttgart

Institute für Navigation

Zustandsschätzung in dynamischen Systemen
Übung 1

Ausarbeitung im Studiengang

Geodäsie und Geoinformatik

an der Universität Stuttgart

Ziqing Yu, 3218051

Stuttgart, November 27, 2020

Betreuer: Prof. Dr. techn. Thomas Hobiger
Universität Stuttgart

MSc. Tomke Jantje Lambertus
Universität Stuttgart

Kapitel 1

Ausarbeitung

1.1 Aufgabe 1

Der Zusammenhang zwischen gemessene Länge und gesuchte Länge für jede Epoche lautet:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = m_1 \tag{1.1}$$
$$\overline{BC} + \overline{CD} = m_2 \tag{1.2}$$
$$\overline{CD} + \overline{DE} = m_3 \tag{1.3}$$
$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = m_4 \tag{1.4}$$
$$\overline{DE} = m_5 \tag{1.5}$$

Die Lösung der ersten Teilgleichung

$$\hat{\boldsymbol{x}}(1) = (\boldsymbol{A^T P A})^{-1} \boldsymbol{A^T P y_1} \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A x}(1) \tag{1.7}$$
$$\sigma(1) = \sqrt{\frac{\boldsymbol{e' P e}}{5-1}} \tag{1.8}$$
$$\boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{x}}(1)) = \sigma^2(1)(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P A})^{-1} \tag{1.9}$$

wobei:

$$\boldsymbol{y_1} = \begin{bmatrix} m_1(1) \\ m_2(1) \\ m_3(1) \\ m_4(1) \\ m_5(1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \overline{AB} \\ \overline{BC} \\ \overline{CD} \\ \overline{DE} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0{,}1^2} & & & & \\ & \frac{1}{0{,}1^2} & & & \\ & & \frac{1}{0{,}1^2} & & \\ & & & \frac{1}{0{,}1^2} & \\ & & & & \frac{1}{0{,}1^2} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Wenn man alle 8 Zeitpunkten berücksichtigt:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \\ \boldsymbol{y_3} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_8} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A}_{sum} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}_{sum} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{P} \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

Dann sind die sequentielle Lösung durch folgende Formeln gerechnet. Zu jeder Epoche die Berechnung ist unter Einbeziehung der Messungen aller vorangegangen Epochen. ($2 \leq i \leq 8$)

$$\hat{\boldsymbol{x}}(i) = \hat{\boldsymbol{x}}(i-1) + \left[\sigma(i-1)^2(\boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{x}}(i-1)))^{-1} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\right]^{-1} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(i-1)) \tag{1.12}$$

$$\sigma(i) = \sqrt{\frac{1}{r(i)}(r(i-1) + \Delta\hat{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{x}}(i-1))\Delta\hat{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{e_i}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{e_i}} \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{x}}(i)) = \sigma^2(i)(\sigma^2(i-1)\boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{x}}(i-1)) + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1} \tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{1.15}$$

$$r(i) = 4i - 5 \tag{1.16}$$

Die Abstände und Fehler von t_1 bis t_8 sind:

	$\overline{AB}$ m	$\overline{BC}$ m	$\overline{CD}$ m	$\overline{DE}$ m	σ m
t_1	1,76	0,86	2,10	1,49	1,25
t_2	1,75	0,97	2,00	1,61	1,29
t_3	1,61	1,10	1,91	1,56	1,65
t_4	1,64	1,13	1,85	1,59	1,65
t_5	1,63	1,16	1,84	1,61	1,47
t_6	1,61	1,18	1,84	1,61	1,33
t_7	1,59	1,20	1,83	1,60	1,24
t_8	1,58	1,20	1,82	1,61	1,16

Tabelle 1.1: *Für erste 8 Zeitpunkten*

Die Ergebnisse für die andere 8 Epochen:

	$\overline{AB}$ m	$\overline{BC}$ m	$\overline{CD}$ m	$\overline{DE}$ m	σ m
t_1	1,48	1,34	1,78	1,55	0,15
t_2	1,49	1,31	1,78	1,58	0,32
t_3	1,50	1,32	1,75	1,62	0,48
t_4	1,52	1,29	1,95	1,62	2,88
t_5	1,52	1,30	2,06	1,61	3,19
t_6	1,51	1,30	2,14	1,61	3,17
t_7	1,51	1,30	2,18	1,63	3,10
t_8	1,52	1,29	2,23	1,63	3,01

Tabelle 1.2: *Für zweite 8 Epochen*

Bei den erst 8 Messungen sind σ relativ groß aber konstant weil die Leute nicht ruhig bleiben aber sie bewegen sich auch nicht. Bei den zweit Messungen ist σ seit t_4 erhöht, das ist die Zeitpunkt wenn der Person sich bewegt hat.

1.2 Aufgabe 2

1.3 Aufgabe 3

Die Runge-Kutta dient um die Differentialgleichungen zu lösen, hier soll $y' = t^2 + 2t - y + 1$ mit Anfangswert $y(0) = 0$ an der Stelle $t = 0.5$ berechnet werden. Die Schrittweite $h = 0.1$.

Runge-Kutta dritter Ordnung:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \tag{1.17}$$
$$k_1 = f(y_n, t_n) \tag{1.18}$$
$$k_2 = f(y_n + \frac{h}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}) \tag{1.19}$$
$$k_3 = f(y_n - hk_1 + 2hk_2, t_n + h) \tag{1.20}$$
$$\text{mit} \quad f(t, y_n) = y'_n \tag{1.21}$$

Die Ergebnisse für jede Schritt:

n	0	1	2	3	4	5
t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	0	0,1052	0,2213	0,3492	0,4897	0,6434

Tabelle 1.3: *Dritte RK Verfahren*

$y(0,5) = 0,6434$ nach Runge Kutta dritter Ordnung.

analog, Runge-Kutta vierter Ordnung:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{1.22}$$
$$k_1 = f(y_n, t_n) \tag{1.23}$$
$$k_2 = f(y_n + \frac{h}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}) \tag{1.24}$$
$$k_3 = f(y_n + \frac{h}{2}k_2, t_n + \frac{h}{2}) \tag{1.25}$$
$$k_4 = f(y_n + hk_3, t_n + h) \tag{1.26}$$

n	0	1	2	3	4	5
t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	0	0,1052	0,2213	0,3492	0,4897	0,6435

Tabelle 1.4: *Vierte RK Verfahren*

Die Unterschied zwischen dritte und vierte Ordnung an $t = 0,5$ ist $-2,14 \cdot 10^{-5}$. Das ist sehr klein und kann in meisten Fälle ignoriert werden.

1.4 Aufgabe 4

Die Differentialgleichung ist von y und c unabhängig:

$$y' = c \tag{1.27}$$

In dieser Aufgabe ist y_{n+m} zu berücksichtigen. Nach dem Einsatz von 1.27:

$$\begin{aligned}
y_{n+m} &= y_{n+m-1} + hc && (1.28)\\
&= y_{n+m-2} + hc + hc && (1.29)\\
&\cdots && (1.30)\\
&= y_n + mhc && (1.31)
\end{aligned}$$

Weil y_n und c unkorreliert sind, lautet die Fehlerfortpflanzung

$$\frac{\partial y_{n+m}}{\partial y_n} = 1 \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial y_{n+m}}{\partial c} = mh \tag{1.33}$$

$$\sigma^2_{y_{m+n}} = \begin{bmatrix} 1 & mh \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma^2_{y_n} & 0 \\ 0 & \sigma^2_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ mh \end{bmatrix} = \sigma^2_{y_n} + (mh)^2\sigma^2_c \tag{1.34}$$

$$\sigma_{y_n} = \sqrt{\sigma^2_{y_n} + (mh)^2\sigma^2_c} \tag{1.35}$$

wobei σ_{y_n} und σ_c sind die Unsicherheit von y_n und c.

1.5 Aufgabe 5

1.5.1 a

In dieser Teilaufgabe ist die Koordinaten mit Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung mit Schrittweite $h = 100\,\mathrm{s}$ von $t_1 = 1000\,\mathrm{s}$ nach $t_s = 1900\,\mathrm{s}$ berechnet. Die Formeln sind in 1.22 bis 1.26.

x (m)	1.880289566568e+07
y (m)	1.661568254689e+07
z (m)	-4.599055621492e+06
v_x (m/s)	-4.070049594214e+02
v_y (m/s)	-5.159170009037e+02
v_z (m/s)	-3.503303895904e+03

Tabelle 1.5: *Position und Geschwindigkeit an 1900s (von 1000s mit Schrittweite 100s)*

1.5.2 b

Ähnlich wie 1.5.1, aber von $t_2 = 2800\,\mathrm{s}$ nach t_s:

x (m)	1.880289473488e+07
y (m)	1.661568259796e+07
z (m)	-4.599055761960e+06
v_x (m/s)	-4.070061798922e+02
v_y (m/s)	-5.159183580348e+02
v_z (m/s)	-3.503303232403e+03

Tabelle 1.6: *Position und Geschwindigkeit an 1900s (von 2800s mit Schrittweite 100s)*

1.5.3 c

1.5.1 und 1.5.2 werden wiederholt mit Schrittweite $h = 1\,\mathrm{s}$:

x (m)	1.880289566450e+07
y (m)	1.661568254808e+07
z (m)	-4.599055623060e+06
v_x (m/s)	-4.070049591118e+02
v_y (m/s)	-5.159170004552e+02
v_z (m/s)	-3.503303895892e+03

Tabelle 1.7: *Position und Geschwindigkeit an 1900s (von 1000s mit Schrittweite 1s)*

x (m)	1.880289473654e+07
y (m)	1.661568259745e+07
z (m)	-4.599055760315e+06
v_x (m/s)	-4.070061799650e+02
v_y (m/s)	-5.159183586592e+02
v_z (m/s)	-3.503303232411e+03

Tabelle 1.8: *Position und Geschwindigkeit an 1900s (von 2800s mit Schrittweite 1s)*

1.5.4 d

In dieser Teilaufgabe werden 1.5.1, 1.5.2 und 1.5.3 mit Runge-Kutta zweiter Ordnung statt Runge-Kutta vierter Ordnung wiederholt.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \tag{1.36}$$

$$k_1 = f(y_n, t_n) \tag{1.37}$$

$$k_2 = f(y_n + hk_1, t_n + h) \tag{1.38}$$

Die Ergebnisse:

x (m)	1.880289566568e+07
y (m)	1.661568254689e+07
z (m)	-4.599055621492e+06
v_x (m/s)	-4.070049594214e+02
v_y (m/s)	-5.159170009037e+02
v_z (m/s)	-3.503303895904e+03

Tabelle 1.9: *Position und Geschwindigkeit an 1900s (von 1000s mit Schrittweite 100s)(RK2)*

x (m)	1.880289473488e+07
y (m)	1.661568259796e+07
z (m)	-4.599055761960e+06
v_x (m/s)	-4.070061798922e+02
v_y (m/s)	-5.159183580348e+02
v_z (m/s)	-3.503303232403e+03

Tabelle 1.10: *Position und Geschwindigkeit an 1900s (von 2800s mit Schrittweite 100s)(RK2)*

x (m)	1.880289566450e+07
y (m)	1.661568254808e+07
z (m)	-4.599055623060e+06
v_x (m/s)	-4.070049591118e+02
v_y (m/s)	-5.159170004552e+02
v_z (m/s)	-3.503303895892e+03

Tabelle 1.11: *Position und Geschwindigkeit an 1900s (von 1000s mit Schrittweite 1s)(RK2)*