Schriftliche Abgabe bis 04.01.2021
LÖSUNG (Version 1)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) [2.5 Punkte]

- Zustandsvektor $\boldsymbol{x}$
  Der Zustandsvektor enthält die geschätzten Parameter eines dynamischen Systems zu einem bestimmter Epoche der Kalmanfilterung. Die Anzahl aller geschätzten Parameter ergibt die Länge des Vektors.
  zu den Epochen/Berechnungsschritten

  $\rightarrow \hat{\boldsymbol{x}}_{n-1|n-1}$ Der geschätzte Zustandsvektor aus vorheriger Epoche $n-1$

  $\rightarrow \hat{\boldsymbol{x}}_{n|n-1}$ Der prädizierte Zustandsvektor aus aktueller Epoche n

  $\rightarrow \hat{\boldsymbol{x}}_{n|n}$ Der geschätzte Zustandsvektor aus aktueller Epoche n (Prädiktion und Update)

- Transitionsmatrix (Übergangsmatrix) $\boldsymbol{\Phi}_n$ Die Transitionsmatrix wird auch Übergangsmatrix genannt und beschreibt den dynamischen Verlauf zwischen zwei Epochen von $t_1 = n-1$ nach $t_2 = n$. Die Transitionsmatrix ist abhängig von der Zeitdifferenz zwischen zwei Epochen. Mit der Transitionsmatrix wird die Prädiktion des Zustandsvektors berechnet. Je besser das dynamische Modell der Realität entspricht umso besser wird die Prädiktion. Die Matrix ist quadratisch, die Anzahl der Spalten/Zeilen entspricht der Länge des Zustandsvektors.

- Kovarianzmatrix des Zustandes $\boldsymbol{P}$
  Die Kovarianzmatrix des Zustandes enthält die Varianzen der Zustandsparameter, wobei diese nicht unbedingt den wahren Genauigkeiten entsprechen müssen. In diese Matrix gehen keine Residuen ein, die ein Maß für die Genauigkeit sein können. Zu Beginn wird die Matrix mit Initialwerten gefüllt, welche vom Anwender gewählt werden. Die Matrix ist quadratisch, die Anzahl der Spalten/Zeilen entspricht der Länge des Zustandsvektors.
  zu den Epochen/Berechnungsschritten

  $\rightarrow \boldsymbol{P}_{n-1|n-1}$ Die Kovarianzmatrix aus vorheriger Epoche $n-1$

  $\rightarrow \boldsymbol{P}_{n|n-1}$Die prädizierte Kovarianzmatrix aus aktueller Epoche n

  $\rightarrow \boldsymbol{P}_{n|n}$ Die geschätzte Kovarianzmatrix aus aktueller Epoche n (Prädiktion und Update)

- Varianzmatrix der Messgenauigkeit (Messrauschen) $\boldsymbol{R}_n$ Enthält die Varianzen und ggf. Kovarianzen der Beobachtungen für Epoche n. Die Matrix ist quadratisch, die Anzahl der Spalten/Zeilen entspricht der Anzahl der Beobachtungen jeweiliger Epoche.

- Kalman Gain Matrix $\boldsymbol{K}_n$ Die Kalman Gain Matrix reguliert, ob für Epoche n dem dynamischen Modell (Prädiktion) oder den Messungen mehr Vertrauen geschenkt wird. Sie enthält Werte zwischen null und eins. Kleine Werte bedeuteten, dass dem prädizierten Zustand mehr Gewicht gegeben wird und die Messungen nur wenig Einfluss auf den gefilterten Zustandsvektor (nach Update) haben. Große Werte bedeuten umgekehrt, dass der Messung mehr vertraut wird als dem dynamischen Modell, und der gefilterte Zustandsvektor mehr von dem Ergebnis der Messungen beeinflusst wird. Die Werte, die für $\boldsymbol{Q}_n$ und $\boldsymbol{R}_n$ gewählt wurden haben daher entscheidenden Einfluss, wie

$\boldsymbol{K}_n$ ausfällt. Die Anzahl der Zeilen entspricht der Länge des Zustandsvektors, die Anzahl der Spalten entspricht der Anzahl an Beobachtungen für Epoche n.

- Designmatrix $\boldsymbol{H}_n$ Die $\boldsymbol{H}$-Matrix ist vergleichbar mit der A-Matrix in der klassischen Ausgleichung und beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen Beobachtungen und Zustandsparameter. Im Kontrast zur einer klassischen Ausgleichung müssen nicht alle Zustände beobachtet sein und es muss auch keine Überbestimmung vorliegen, sobald der Zustandsvektor vollständig vorliegt. Die Anzahl der Spalten entspricht der Länge des Zustandsvektors und die Anzahl der Zeilen entspricht der Anzahl an Beobachtungen für Epoche n.
- Matrix des Prozessrauschens $\boldsymbol{Q}_n$ Da die Prädiktion auf dem dynamischen Modell/Prozess beruht, was häufig nicht exakt der Realität entspricht, werden die Unsicherheiten des Prozesses in der $\boldsymbol{Q}$-Matrix angegeben, die von der Zeitdifferenz abhängen. Sie kann über das 'Kochrezept' berechnet werden. Die Matrix ist quadratisch, die Anzahl der Spalten/Zeilen entspricht der Länge des Zustandsvektors.

b) [0.5 Punkte]

- $\boldsymbol{P}$: Zu Beginn der Kalmanfilterung lassen große Werte es zu, dass sich der Zustandsvektor sich erst einspielen kann. Sind keine ausreichend genauen Initialwerte für den Zustandsvektor bekannt, sollten für $\boldsymbol{P}_n$ größere Werte gewählt werden.
- $\boldsymbol{Q}$: Ein großes Prozessrauschen führt dazu, dass dem zugrundeliegenden dynamischen Modell und der Prädiktion weniger Vertrauen geschenkt wird und sich das Update mehr auf die Messungen stützt. Beim kleinen Prozessrauschen folgt die Kalmanfilterung mehr dynamische Modell und vertraut den Messungen weniger stark.
- $\boldsymbol{R}$: Große Varianzen der Messungen führen dazu, dass $\boldsymbol{R}$ groß wird und die Messungen weniger starken Einfluss auf das Ergebnis haben. Kleine Werte lassen umgekehrt die Messungen mehr Einfluss auf das Ergebnis haben.
- $\boldsymbol{K}$: Bei großen Werten haben die Messungen einen großen Einfluss auf das Ergebnis des Zustandsvektors nach dem Update, die Prädiktion wird weniger stark einbezogen. Bei kleinen Werten haben die Messungen einen kleinen Einfluss auf das Ergebnis des Zustandsvektors nach dem Update, die Prädiktion bekommt mehr Gewicht und beeinflusst das Ergebnis stärker.

c) [0.5 Punkte] Richtig ist ii). Die Relation zwischen dem Messrauschen und dem Prozessrauschen muss passen, damit die Kalmanfilterung weder zum (meist nicht perfekten) dynamischen Modell folgt und andererseits nicht zu stark den (häufig verrauschten) Messungen folgt. Die Ausgewogenheit mit Hinblick auf die Genauigkeiten des Modells und den Messungen sollte eingespielt sein, damit die Filterung gute Ergebnisse liefert.

d) [0.5 Punkte] Folgende Matrizen verändern sich bei konstantem Δt nicht: $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{H}$ (Anmerkung: $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{R}$ bleiben nur dann identisch, wenn sich die Anzahl an Beobachtungen, das Messrauschen und die Ableitungen nicht ändern), alle anderen müssen jede Epoche neu bestimmt werden.

Aufgabe 2 (1 Punkt)

d)

In b) wird im dynamischen Modell davon ausgegangen, dass nur eine konstante Position vorliegt und keine Geschwindigkeit vorhanden ist (RW), der Erwartungswert der Geschwindigkeit ist 0. Daher wird das Ergebnis der Kalmanfilterung von den Messungen im Update-Schritt "nachgezogen", das dynamische Modell zeigt während der Prädiktion aufgrund des RW keine Bewegung. Je nach dem wie klein oder groß das Messrauschen gewählt wurde haben die Messungen einen großen oder kleinen Einfluss auf den Updateschritt und "ziehen" den gefilterten Zustandsvektor entweder mit kleiner oder mit großer Verspätung nach. Siehe rote Spur im Plott.

In c) wird ein IRW als dynamisches Modell angesetzt, d.h. das dynamische Modell geht von einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig in y- und x-Richtung ohne Beschleunigung aus. Nach einigen Epochen spielt sich die Geschwindigkeit auf einen realistischen Wert ein. Da sich an den Zacken allerdings die Geschwindigkeit in y- und x-Richtung ändert, müssen sich die entsprechenden Zustandsparameter erst neu adaptieren, was einige Epochen dauert. Daher 'überschießen' die gefilterten Ergebnisse die Zacken. Je kleiner das Messrauschen, umso schneller können sich die entsprechenden Zustandsparameter anpassen.

Wenn das Messrauschen zwischen 0.1 m und 1.0 m variiert wird, lässt sich sehr schön erkennen, wie stark/schnell die Filterung jeweils eher den Beobachtungen oder dem dynamischen Modell folgt.