Schriftliche Abgabe bis <u>07.12.2020</u>
LÖSUNG (Version 0)

Aufgabe 1 (2 Punkte)

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{x}$$

Konstante Position

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \Phi(\Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Konstante Geschwindigkeit

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \rightarrow \Phi(\Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Konstante Beschleunigung

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \rightarrow \Phi(\Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2 (1 Punkt)

Random Walk:

$$\dot{x} = 0 + W(t)$$

Ein Random Walk ist ein nicht-stationärer Zufallsprozess zu diskreten Zeitabständen. Im eindimensionalen Fall kann man sich das so vorstellen, dass der RW bei Null beginnt und bei jedem Zeitschritt ein neuer Zufallswert auf den bisherigen Wert drauf addiert wird.

$$x_{n+1} = x_n + w(t)$$

Der Wert, der hinzuaddiert wird, entspricht Gaußschem weißen Rauschen, d.h. die Werte sind normalverteilt mit Mittelwert Null und Standardabweichung σ. Optisch betrachtet sieht der RW wie ein chaotischer Lauf aus. Wenn man sich den Verlauf optisch anschaut, zeigt die Position vom IRW einen deutlich glatteren Verlauf, während die Geschwindigkeit chaotisch zackig wie beim RW ist.

Integrated Random Walk:

$$\ddot{x} = 0 + W(t)$$

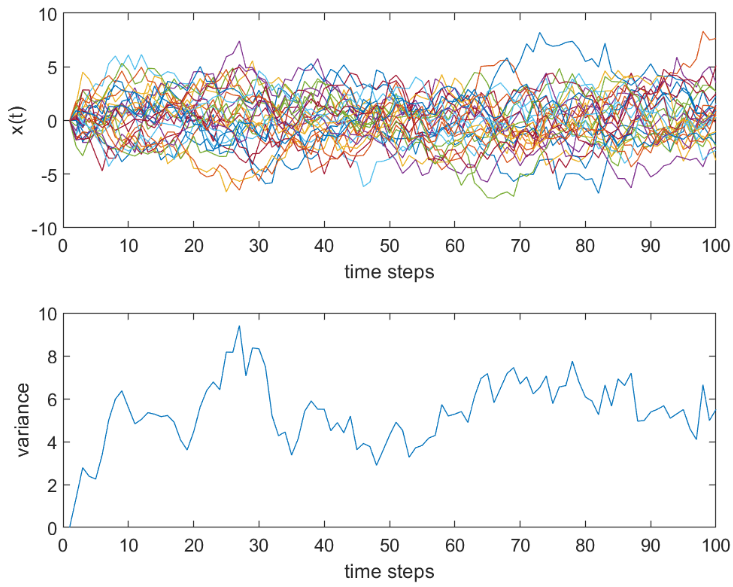
Der IRW ist ebenfalls ein nicht-stationärer Zufallsprozess zu diskreten Zeitabständen. Hierbei wird ein RW gebildet und dieser einmal integriert:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n & +\Delta t \cdot \dot{x}_n & \quad +0 \\ \dot{x}_{n+1} &= 0 & +\dot{x}_n & \quad +w(t) \end{aligned}$$

Das bedeutet praktisch, dass nicht die "Position" (x) sich bei jedem Zeitschritt zufällig ändert, sondern die "Geschwindigkeit" (erste Ableitung, $\dot{x}$) wird jede Epoche um einen Zufallswert verändert. Die Position pro Epoche ergibt sich dann aus der alten Position plus die veränderte Geschwindigkeit (=alte Geschwindigkeit plus Weißes Rauschen) multipliziert mit der Zeitdifferenz.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

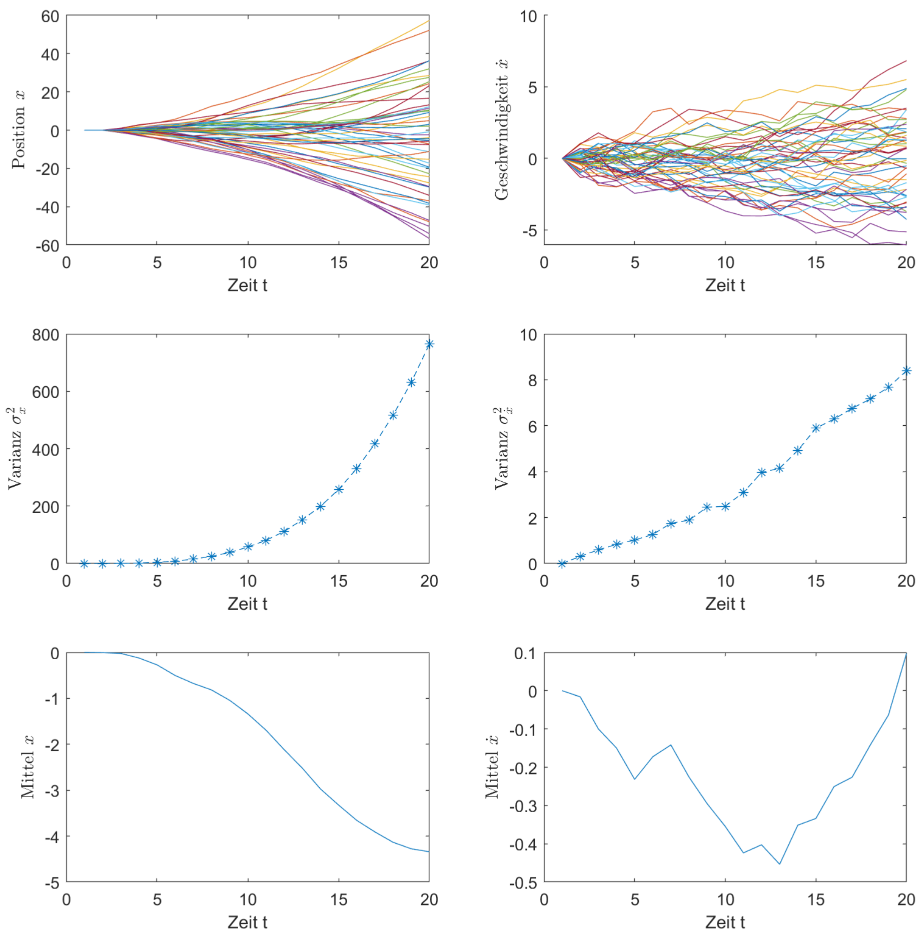
$$\mathbf{\Phi} = e^{-\beta \Delta t} = 0.9048$$



Die Reihen beginnen alle bei Null und driften schnell auseinander. Pro Schritt wird auf jede Reihe ein Zufallswert aufaddiert, d.h. die Reihen bewegen sich zufällig und chaotisch um Null. Wenn man die Zeitschritte verlängert, z.B. bis t = 1.000.000 fällt auf, dass sich dieses chaotische Umherwandern auf einen bestimmten Bereich um Null beschränkt und nicht beliebig groß wird. Die Varianz ist ebenfalls chaotisch.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\Phi} = e^{F \cdot \Delta t} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Die Position zeigt einen nahezu glatten Verlauf, da sich pro Zeitschritt nur die Geschwindigkeit um einen kleinen Zufallswert (weißes Rauschen) ändet. Die Varianz steigt exponentiell an, während die Varianz für die Geschwindigkeit linear anzeigt.

Aufgabe 5 (1 Punkt)

Vorgehensweise:

```
w = 0.1; % Omega
b = sqrt(2*sqrt(2)*w^3);
dt = 1;

F = [0 , 1; -w^2, -sqrt(2)*w];
%Phi = expm(F*dt);
```

```
GWGt = [ 0 0;  0 b^2];
A = [-F, GWGt; zeros(2),F']*dt;
B = expm(A);

Phi = B(3:4,3:4)';
Q = Phi*B(1:2,3:4);
```

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.995 & 0.931 \\ -0.009 & 0.864 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.0012 \\ 0.0012 & 0.0025 \end{bmatrix}$$