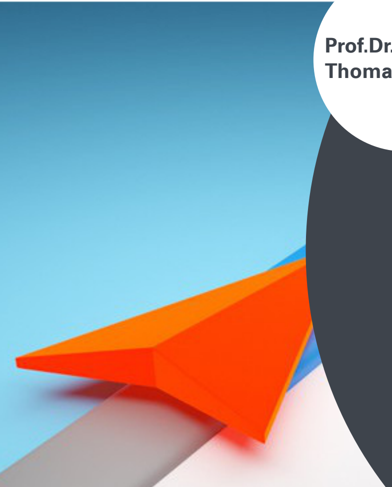
Universität Stuttgart

Prof.Dr.
Thomas Hobiger



Inertialnavigation

Fehlergleichung im n-System - Teil II

8

Fehlergleichung im n-System - Teil II

Wie in Vorlesung 2 in Gl. (2.5) beschrieben, lautet die DGL für die Geschwindigkeiten im n-System.

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n = \boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{a}^p - (2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) \cdot \boldsymbol{v}^n - \boldsymbol{C}_e^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{x}^e(\phi, \lambda, h) + \boldsymbol{g}^n \tag{8.1}$$

Bevor wir mit dem Aufstellen der Geschwindigkeitsfehlergleichung beginnen betrachten wir den Term für den Einfluss der Zentripetalbeschleunigung

$$\boldsymbol{C}_e^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{x}^e(\phi, \lambda, h)$$

Das Produkt $\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e$ alleine ist bereits von der Größenordnung $5 \cdot 10^{-9}$ was erkennen lässt dass kleine Fehler in der Orientierung ($\boldsymbol{C}_e^n$) und/oder der Position $\boldsymbol{x}^e(\phi, \lambda, h)$ einen verschwindend kleinen Beitrag auf die Gesamtbeschleunigung erwirken. Daher können wir für die folgenden Betrachtungen den Beitrag der Zentripetalbeschleunigung vernachlässigen und wir erhalten anstatt Gl. (8.1)

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n = \boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{a}^p - (2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) \cdot \boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{g}^n \tag{8.2}$$

als Ausgangsgleichung.
Möchte man die Auswirkung von kleinen Fehlern δ in der Geschwindigkeitsnavigationsgleichung studieren, bildet man das totale Differential und betrachtet nur lineare Terme so erhält man (vlg. VO 06)

$$\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{v}}^n = -\underbrace{\boldsymbol{\Psi}^n \cdot \boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{a}^p}_{\boldsymbol{h}_1} + \underbrace{\boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{\delta a}^p}_{\boldsymbol{h}_2} - \underbrace{(2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n)\boldsymbol{\delta v}^n}_{\boldsymbol{h}_3} - \underbrace{(2\boldsymbol{\delta\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\delta\Omega}_{en}^n)\boldsymbol{v}^n}_{\boldsymbol{h}_4} + \underbrace{\boldsymbol{\delta g}^n}_{\boldsymbol{h}_5} \tag{8.3}$$

Fehlergleichung im n-System - Teil II

Die Beiträge $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, $\boldsymbol{h}_3$, $\boldsymbol{h}_4$ und $\boldsymbol{h}_5$ aus Gl. (8.3) werden nun im Folgenden einzeln entwickelt, ehe deren Summe herangezogen wird um die Fehlergleichung für die Geschwindigkeiten im n-System zu definieren.

Der erste Term

$$\boldsymbol{h}_1 = -\boldsymbol{\Psi}^n \cdot \boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{a}^p$$

entspricht

$$\boldsymbol{h}_1 = -\boldsymbol{\Psi}^n \cdot \boldsymbol{a}^n$$

Berücksichtigt man dass $\boldsymbol{\Psi}^n$ eine schiefsymmetrische Matrix ist, so stellt obige Gleichung ein Kreuzprodukt dar, welches in kommutierter Form als

$$\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{A}^n \cdot \boldsymbol{\psi}^n$$

angeschrieben werden kann. Damit findet man

$$\boldsymbol{h}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a_D & a_E \\ a_D & 0 & -a_N \\ -a_E & a_N & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}_{\delta\dot{\boldsymbol{v}},\boldsymbol{\psi}^n}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta R \\ \delta P \\ \delta Y \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\psi}^n} \qquad (8.4)$$

was den Einfluss von Orientierungsfehlern und auf die berechnete Beschleunigung beschreibt.

Fehlergleichung im n-System - Teil II

Der zweite Term

$$\boldsymbol{h}_2 = \underbrace{\boldsymbol{C}_p^n}_{\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\delta\dot{v}},\boldsymbol{\delta a}}} \cdot \boldsymbol{\delta a}^p$$

bedarf keiner weiteren Überlegungen. Der dritte Term

$$\boldsymbol{h}_3 = -(2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n)\boldsymbol{\delta v}^n$$

lässt sich einfach finden, wenn man berücksichtigt (siehe auch letzte Vorlesung), dass

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} \omega_E \cos\phi \\ 0 \\ -\omega_E \sin\phi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}\cos\phi \\ -\dot{\phi} \\ -\dot{\lambda}\sin\phi \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

Damit ergibt sich

$$\boldsymbol{h}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -(2\omega_E + \dot{\lambda})\sin\phi & \dot{\phi} \\ (2\omega_E + \dot{\lambda})\sin\phi & 0 & (2\omega_E + \dot{\lambda})\cos\phi \\ -\dot{\phi} & -(2\omega_E + \dot{\lambda})\cos\phi & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{1}}_{\boldsymbol{\delta\dot{v}},\boldsymbol{\delta v}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta v}} \tag{8.6}$$

Fehlergleichung im n-System - Teil II

Um den 4. Term

$$\boldsymbol{h}_4 = -(2\boldsymbol{\delta\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\delta\Omega}_{en}^n) \cdot \boldsymbol{v}^n$$

zu untersuchen schreiben wir diesen um, indem wir das (implizite) Kreuzprodukt vertauschen und das Vorzeichen wechseln, d.h.

$$\boldsymbol{h}_4 = \boldsymbol{V}^n \cdot (2\boldsymbol{\delta\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\delta\omega}_{en}^n) \tag{8.7}$$

Dabei ist

$$\boldsymbol{V}^n = \begin{bmatrix} 0 & -v_D & v_E \\ v_D & 0 & -v_N \\ -v_E & v_N & 0 \end{bmatrix} \tag{8.8}$$

Die beiden Terme im Klammerausdruck von (8.7) finden wir durch Bildung der totale Differentiale von $\boldsymbol{\delta\omega}_{ie}^n$ und $\boldsymbol{\delta\omega}_{en}^n$ (siehe Gl. (8.5)). Wir erhalten

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} -\omega_E \sin\phi \cdot \delta\phi \\ 0 \\ -\omega_E \cos\phi \cdot \delta\phi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} -\dot{\lambda} \sin\phi \cdot \delta\phi + \cos\phi \cdot \delta\dot{\lambda} \\ -\delta\dot{\phi} \\ -\dot{\lambda} \cos\phi \cdot \delta\phi - \sin\phi \cdot \delta\dot{\lambda} \end{bmatrix} \tag{8.9}$$

Fehlergleichung im n-System - Teil II

Damit wird

$$2\boldsymbol{\delta\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\delta\omega}_{en}^{n} = \begin{bmatrix} -(2\omega_E + \dot{\lambda})\sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(2\omega_E + \dot{\lambda})\cos\phi & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cos\phi & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\phi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\dot{\phi} \\ \delta\dot{\lambda} \\ \delta\dot{h} \end{bmatrix} \tag{8.10}$$

In der letzten Vorlesung haben wir die DGL für die Position

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\phi} \\ \delta\dot{\lambda} \\ \delta\dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{v_N}{(M+h)^2} \\ \frac{v_E \tan\phi}{(N+h)\cos\phi} & 0 & -\frac{v_E}{(N+h)^2\cos\phi} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{M+h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(N+h)\cos\phi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{bmatrix} \tag{8.11}$$

gefunden, welche wir verwenden können um den letzten Vektor in Gl. (8.10) zu ersetzen.

Fehlergleichung im n-System - Teil II

Ausserdem berücksichtigen wir dass

$$\dot{\lambda} = \frac{v_E}{(N+h)\cos\phi} \quad \text{und} \qquad \dot{\phi} = \frac{v_N}{(M+h)}$$

so erhalten wir nach längerer Rechnung und Umstellen von Termen folgenden Zusammenhang

$$2\boldsymbol{\delta\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\delta\omega}_{en}^{n} = \begin{bmatrix} -2\omega_E \sin\phi & 0 & -\frac{-v_E}{(N+h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(M+h)^2} \\ -2\omega_E\cos\phi - \frac{v_E}{(N+h)\cos^2\phi} & 0 & \frac{v_E\tan\phi}{(N+h)^2} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta r}}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{N+h} & 0 \\ -\frac{1}{M+h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan\phi}{N+h} & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta v}} \tag{8.12}$$

Fehlergleichung im n-System - Teil II

Damit finden wir für $\boldsymbol{h}_4$ folgenden Ausdruck

$$\boldsymbol{h}_4 = \boldsymbol{V}^n \cdot (2\boldsymbol{\delta\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\delta\omega}_{en}^n) = \boldsymbol{F}^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{\delta\dot{v}},\boldsymbol{\delta r}} \cdot \boldsymbol{\delta r} + \boldsymbol{F}^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\delta\dot{v}},\boldsymbol{\delta v}} \cdot \boldsymbol{\delta v} \tag{8.13}$$

mit

$$\boldsymbol{F}^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{\delta\dot{v}},\boldsymbol{\delta r}} =$$

$$\begin{bmatrix} -v_E(2\omega_E\cos\phi + \frac{v_E}{(N+h)\cos^2\phi}) & 0 & -\frac{v_D\cdot v_N}{(M+h)^2} + \frac{v_E^2\tan\phi}{(N+h)^2} \\ 2\omega_E(v_N\cos\phi - v_D\sin\phi) + \frac{v_E\cdot v_N}{(N+h)\cos^2\phi} & 0 & -\frac{v_E}{(N+h)^2}(v_D + v_N\tan\phi) \\ 2\omega_E v_E\sin\phi & 0 & \frac{v_E^2}{(N+h)^2} + \frac{v_N^2}{(M+h)^2} \end{bmatrix} \tag{8.14}$$

und

$$\boldsymbol{F}^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\delta\dot{v}},\boldsymbol{\delta v}} = \begin{bmatrix} \frac{v_D}{M+h} & -\frac{v_E\tan\phi}{N+h} & 0 \\ 0 & \frac{v_D+v_N\tan\phi}{N+h} & 0 \\ -\frac{v_N}{M+h} & -\frac{v_E}{N+h} & 0 \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

Fehlergleichung im n-System - Teil II

Der letzte Term $\boldsymbol{h}_5 = \delta \boldsymbol{g}^n$, d.h. Fehler in der Berechnung von g^n ist vor allem von dem Höhenfehler abhängig und kann daher wie folgt angeschrieben werden

$$\boldsymbol{h}_5 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2g(\phi,\lambda,h)}{R} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F^2_{\delta\dot{v},\delta r}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta r}} \tag{8.16}$$

wobei R einfach durch $N + h$ oder $M + h$ ersetzt werden kann. Damit können wir die Fehlergleichung für die Geschwindigkeitskomponenten in allgemeiner Form anschreiben

$$\boxed{\boldsymbol{\delta\dot{v}} = \boldsymbol{A}^n \cdot \boldsymbol{\psi}^n + (\boldsymbol{F^1_{\delta\dot{v},\delta r}} + \boldsymbol{F^2_{\delta\dot{v},\delta r}}) \cdot \boldsymbol{\delta r} + (\boldsymbol{F^1_{\delta\dot{v},\delta v}} + \boldsymbol{F^2_{\delta\dot{v},\delta v}}) \cdot \boldsymbol{\delta v} + \boldsymbol{C}^n_p \cdot \boldsymbol{\delta a}^p} \tag{8.17}$$

wobei die dazu benötigten Matrizen $\boldsymbol{F}$ aus Gl. (8.6), (8.14), (8.15) und (8.16) entnommen werden können. Zusammen mit den DGL für die Positions- und Orientierungsgleichungen, welche wir in der letzten Vorlesung erarbeitet haben, steht nun der gesamte mathematische Rahmen zur Verfügung um alle Fehler in einen konsistenten dynamischen Modell für die Navigationsrechnung im n-System voranzutreiben.