Universität Stuttgart

Prof.Dr.
Thomas Hobiger

Inertialnavigation

Fehlergleichung im n-System - Teil I

7

Fehlergleichung im n-System - Teil I

Wie in Vorlesung 2 in Gl. (2.5) beschrieben, lautet die DGL für die Koordinaten im n-System

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_N}{(M+h)} \\ \frac{v_E}{(N+h)\cos\phi} \\ -v_D \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

Durch Differentialbildung auf linker und rechter Seite erhält man die Fehlergleichungen

$$\delta\dot{\phi} = \frac{1}{M+h}\delta v_N - \frac{v_N}{(M+h)^2}\delta h \tag{7.2}$$

$$\delta\dot{\lambda} = \frac{1}{(N+h)\cos\phi}\delta v_E - \frac{v_E}{(N+h)^2\cos\phi}\delta h + \frac{v_E\tan\phi}{(N+h)\cos\phi}\delta\phi \tag{7.3}$$

$$\delta\dot{h} = -\delta v_D \tag{7.4}$$

wobei Fehler in N und M vernachlässigt wurden, d.h.

$$\partial M/\partial p_i = 0$$

und

$$\partial N/\partial p_i = 0$$

gilt.

Fehlergleichung im n-System - Teil I

Zusammenfassend lassen sich Gl. 7.2 bis 7.4 als neues DGL-System anschreiben

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta\dot{\phi} \\ \delta\dot{\lambda} \\ \delta\dot{h} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta\dot{r}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{v_N}{(M+h)^2} \\ \dfrac{v_E \tan\phi}{(N+h)\cos\phi} & 0 & -\dfrac{v_E}{(N+h)^2\cos\phi} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F_{\delta\dot{r},\delta r}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta r}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{M+h} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(N+h)\cos\phi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F_{\delta\dot{r},\delta v}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta v}} \tag{7.5}$$

Damit haben wir die DGL für die Positionsfehler $\boldsymbol{\delta r}$ im n-System gefunden.

Diskutiere welche Terme das Fehlerbudget dominieren werden!

Fehlergleichung im n-System - Teil I

Zur Herleitung der Fehlergleichung für die Orientierung gehen wir von

$$\dot{\boldsymbol{C}}_p^n = \boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{np}^p \tag{7.6}$$

aus (siehe Gl. (2.10)). Nehmen wir das Differential so erhalten wir

$$\delta\dot{\boldsymbol{C}}_p^n = \delta\boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{np}^p + \boldsymbol{C}_p^n \cdot \delta\boldsymbol{\Omega}_{np}^p \tag{7.7}$$

Die zeitliche Ableitung von $\delta\boldsymbol{C}_p^n = -\boldsymbol{\Psi}^n \cdot \boldsymbol{C}_p^n$ liefert

$$\delta\dot{\boldsymbol{C}}_p^n = -\dot{\boldsymbol{\Psi}}^n \cdot \boldsymbol{C}_p^n - \boldsymbol{\Psi}^n \cdot \dot{\boldsymbol{C}}_p^n = -\dot{\boldsymbol{\Psi}}^n \cdot \boldsymbol{C}_p^n - \boldsymbol{\Psi}^n \cdot \boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{np}^p \tag{7.8}$$

Setze die rechte Seite von Gl. (7.7) gleich der rechten Seite von Gl. (7.8):

$$\delta\boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{np}^p + \boldsymbol{C}_p^n \cdot \delta\boldsymbol{\Omega}_{np}^p = -\dot{\boldsymbol{\Psi}}^n \cdot \boldsymbol{C}_p^n - \boldsymbol{\Psi}^n \cdot \boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{np}^p \tag{7.9}$$

Substituieren wir hier $\delta\boldsymbol{C}_p^n = -\boldsymbol{\Psi}^n \cdot \boldsymbol{C}_p^n$ so erhält man

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}^n = -\boldsymbol{C}_p^n \cdot \delta\boldsymbol{\Omega}_{np}^p \cdot \boldsymbol{C}_n^p \tag{7.10}$$

Fehlergleichung im n-System - Teil I

Die Transformationsvorschrift für Matrizen (vlg. VO "Inertialsensorik") erlaubt es Gl. (7.10) als

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}^n = \delta \boldsymbol{\Omega}^n_{pn} \tag{7.11}$$

umzuschreiben was sich auch in Vektorform

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}^n = \delta \boldsymbol{\omega}^n_{pn} \tag{7.12}$$

ausdrücken lässt. Dies entspricht aber genau

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}^n = -\boldsymbol{C}^n_p \cdot \delta \boldsymbol{\omega}^p_{np}. \tag{7.13}$$

Ersetze

$$\boldsymbol{\omega}^p_{np} = \boldsymbol{\omega}^p_{ip} - \boldsymbol{\omega}^p_{in} = \boldsymbol{\omega}^p_{ip} - \boldsymbol{C}^p_n \cdot \boldsymbol{\omega}^n_{in} \tag{7.14}$$

und nehme die Differentiale auf beiden Seiten:

$$\delta \boldsymbol{\omega}^p_{np} = \delta \boldsymbol{\omega}^p_{ip} - \delta \boldsymbol{C}^p_n \cdot \boldsymbol{\omega}^n_{in} - \boldsymbol{C}^p_n \cdot \delta \boldsymbol{\omega}^n_{in} \tag{7.15}$$

Damit finden wir für (7.13) die Differentialgleichung für die Orientierungsfehler in der Orientierung als

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}^n = -\boldsymbol{\Omega}^n_{in} \cdot \boldsymbol{\psi}^n + \delta \boldsymbol{\omega}^n_{in} - \boldsymbol{C}^n_p \cdot \delta \boldsymbol{\omega}^p_{ip} \tag{7.16}$$

Fehlergleichung im n-System - Teil I

Beachtetet man, dass

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} = \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n} \tag{7.17}$$

gilt mit (siehe VO "Inertialsensorik")

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} = \begin{bmatrix} \omega_E \cos\phi \\ 0 \\ -\omega_E \sin\phi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega}_{en}^{n} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}\cos\phi \\ -\dot{\phi} \\ -\dot{\lambda}\sin\phi \end{bmatrix} \tag{7.18}$$

so läßt sich $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}$ in Gl. (7.16) durch Bildung der totalen Differentiale von $\boldsymbol{\delta\omega}_{ie}^{n}$ und $\boldsymbol{\delta\omega}_{en}^{n}$ berechnen und wir erhalten

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} = \begin{bmatrix} -\omega_E \sin\phi \cdot \delta\phi \\ 0 \\ -\omega_E \cos\phi \cdot \delta\phi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} = \begin{bmatrix} -\dot{\lambda}\sin\phi \cdot \delta\phi + \cos\phi \cdot \delta\dot{\lambda} \\ -\delta\dot{\phi} \\ -\dot{\lambda}\cos\phi \cdot \delta\phi - \sin\phi \cdot \delta\dot{\lambda} \end{bmatrix} \tag{7.19}$$

Stellen wir $\boldsymbol{\delta\omega}_{in}^{n} = \boldsymbol{\delta\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\delta\omega}_{en}^{n}$ in Matrix-Vektor Form zusammen so ergibt sich

$$\boldsymbol{\delta\omega}_{in}^{n} = \begin{bmatrix} -(\omega_E + \dot{\lambda})\sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(\omega_E + \dot{\lambda})\cos\phi & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cos\phi & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\phi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\dot{\phi} \\ \delta\dot{\lambda} \\ \delta\dot{h} \end{bmatrix} \tag{7.20}$$

Fehlergleichung im n-System - Teil I

Substitutieren wir für den zweiten Vektor auf der rechten Seite von Gl. (7.20) die Lösung aus Gl. (7.5) so erhält man

$$\boldsymbol{\delta\omega}_{in}^{n} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\omega_E \sin\phi & 0 & -\frac{v_E}{(N+h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(M+h)^2} \\ -\omega_E \cos\phi - \frac{v_E}{(N+h)\cos^2\phi} & 0 & \frac{v_E \tan\phi}{(N+h)^2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}_{\dot{\boldsymbol{\psi}}^n,\boldsymbol{\delta r}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta r}}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{N+h} & 0 \\ -\frac{1}{M+h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan\phi}{N+h} & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}_{\dot{\boldsymbol{\psi}}^n,\boldsymbol{\delta v}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta v}} \tag{7.21}$$

wodurch sich die DGL für die Orientierungsfehler wie folgt darstellen lässt

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\psi}}^n = -\boldsymbol{\Omega}_{in}^n \cdot \boldsymbol{\psi}^n + \boldsymbol{F}_{\dot{\boldsymbol{\psi}}^n,\boldsymbol{\delta r}}\boldsymbol{\delta r} + \boldsymbol{F}_{\dot{\boldsymbol{\psi}}^n,\boldsymbol{\delta v}}\boldsymbol{\delta v} - \boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{\delta\omega}_{ip}^p} \tag{7.22}$$