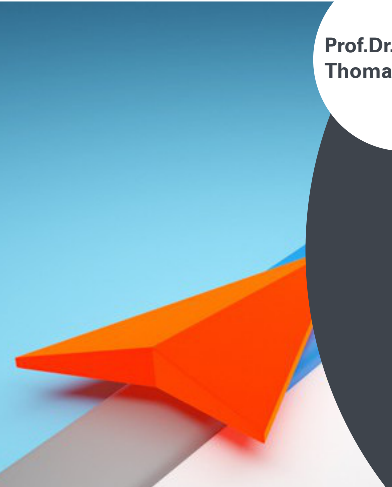
Universität Stuttgart



Prof.Dr.
Thomas Hobiger

Inertialnavigation

Integration der Positions- und Geschwindigkeitsgleichungen im e-System

4

Integration der Positions- und Geschwindigkeitsgleichungen

Differentialgleichungen (1.17) aus V01:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}^e &= \boldsymbol{v}^e \\ \dot{\boldsymbol{v}}^e &= \boldsymbol{C}_p^e \boldsymbol{a}^p - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{v}^e - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{x}^e + \boldsymbol{g}^e \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die Orientierungsgleichung wurde bereits integriert (V03); DCM ist bekannt!
Zweiter, dritter und vierter Term auf der rechten Seite sind langsam variierende Terme und können mit konstanten Werten im Intervall $t_{k-1} < \tau < t_k$ approximiert werden.

$$\boldsymbol{v}^e(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{a}^p d\tau - \left[2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{v}^e + \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{x}^e - \boldsymbol{g}^e\right]_{t_{k-1}} \cdot (t_k - t_{k-1}) \tag{4.2}$$

Ausgabe vom Beschleunigungsmesser (siehe VO ISens):

$$\Delta \boldsymbol{v}^p(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{a}^p(\tau) d\tau \tag{4.3}$$

Integration der Positions- und Geschwindigkeitsgleichungen

Integration von Gl. (4.2) mit Hilfe der *Simpsonsregel*:

$$\begin{aligned}
&\dot{y} = f(t) \Rightarrow \\
&y(t_k) = y(t_{k-1}) + \frac{h}{6}\left(f(t_{k-1}) + 4f(t_{k-1} + \frac{h}{2}) + f(t_{k-1} + h)\right) \\
&h = t_k - t_{k-1}, \quad f(x) = \boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{a}^p
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Fragestellung: Wie können wir $\boldsymbol{a}^p$ vom Beschleunigungsmesser (Gl. (4.3)) erhalten, die in Gl. (4.4) benötigt wird? Generell können wir $\boldsymbol{a}^p$ mittels Taylor-Approximation im Intervall $[t_{k-2}, t_k]$ ausdrücken:

$$\boldsymbol{a}^p(t) = \boldsymbol{a}^p(t_{k-2}) + \dot{\boldsymbol{a}}^p(t_{k-2}) \cdot (t - t_{k-2}) + O(\delta t^2), \quad t - t_{k-2} \leq \delta t \tag{4.5}$$

Integration von Gl. (4.5):

$$\Delta \boldsymbol{v}^p(t_{k-1}) = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \boldsymbol{a}^p(\tau) d\tau = \boldsymbol{a}^p(t_{k-2})\Delta t + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{a}}^p(t_{k-2})\Delta t^2 + \dots \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{v}^p(t_k) &= \boldsymbol{a}^p(t_{k-2})\Delta t + \dot{\boldsymbol{a}}^p(t_{k-2}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\tau - t_{k-1}) + (t_{k-1} - t_{k-2}) d\tau + \dots \\
&= \boldsymbol{a}^p(t_{k-2})\Delta t + \frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{a}}^p(t_{k-2})\Delta t^2
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Integration der Positions- und Geschwindigkeitsgleichungen

Aus Gleichungen (4.6) und (4.7):

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}^p(t_{k-2}) &= \frac{1}{2\Delta t}\left(3\Delta \boldsymbol{v}^p(t_{k-1}) - \Delta \boldsymbol{v}^p(t_k)\right) + \ldots \\
\dot{\boldsymbol{a}}^p(t_{k-2}) &= \frac{1}{\Delta t^2}\left(\Delta \boldsymbol{v}^p(t_k) - \Delta \boldsymbol{v}^p(t_{k-1})\right) + \ldots
\end{aligned}
} \tag{4.8}
$$

Gleichung (4.8) eingesetzt in (4.5) und integriert:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}^p(t_{k-2}) &= \frac{1}{2\Delta t}\left(3\Delta \boldsymbol{v}^p(t_{k-1}) - \Delta \boldsymbol{v}^p(t_k)\right) + \ldots \\
\boldsymbol{a}^p(t_{k-1}) &= \frac{1}{2\Delta t}\left(3\Delta \boldsymbol{v}^p(t_{k-1}) - \Delta \boldsymbol{v}^p(t_k)\right) + \frac{1}{\Delta t}\left(\Delta \boldsymbol{v}^p(t_k) - \Delta \boldsymbol{v}^p(t_{k-1})\right) + \ldots \\
\boldsymbol{a}^p(t_k) &= \frac{1}{2\Delta t}\left(3\Delta \boldsymbol{v}^p(t_{k-1}) - \Delta \boldsymbol{v}^p(t_k)\right) + \frac{2}{\Delta t}\left(\Delta \boldsymbol{v}^p(t_k) - \Delta \boldsymbol{v}^p(t_{k-1})\right) + \ldots
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Integration der Positions- und Geschwindigkeitsgleichungen

Setze $\delta t = 2\Delta t$ und kennzeichne die Approximation mit $\hat{}$ (unter Vernachlässigung Terme höherer Ordnung)

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{a}}^p(t_{k-2}) &= \frac{3\Delta \boldsymbol{v}^p(t_{k-1}) - \Delta \boldsymbol{v}^p(t_k)}{\delta t} \\
\hat{\boldsymbol{a}}^p(t_{k-1}) &= \frac{\Delta \boldsymbol{v}^p(t_{k-1}) + \Delta \boldsymbol{v}^p(t_k)}{\delta t} \\
\hat{\boldsymbol{a}}^p(t_k) &= \frac{3\Delta \boldsymbol{v}^p(t_k) - \Delta \boldsymbol{v}^p(t_{k-1})}{\delta t}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$\boldsymbol{a}^p$ ist eine Funktion der Beschleunigungsmessungen und bekannter Parameter!

Verwende die Simpsonsregel aus Gl. (4.4) um Gl. (4.2) zu integrieren:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{C}_p^e \boldsymbol{a}^p d\tau = \frac{\delta t}{6} \left[\left(\boldsymbol{C}_p^e \boldsymbol{a}^p \right)(t_{k-2}) + 4 \left(\boldsymbol{C}_p^e \boldsymbol{a}^p \right)(t_{k-1}) + \left(\boldsymbol{C}_p^e \boldsymbol{a}^p \right)(t_k) \right] \tag{4.11}$$

Integration der Positions- und Geschwindigkeitsgleichungen

Verwende die DCM, wie berechnet in V03, verwende $\boldsymbol{a}^p$, wie berechnet in Gl. (4.10))

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}^e(t_k) = \quad & \hat{\boldsymbol{v}}^e(t_{k-2}) \\
& + \Big[\hat{\boldsymbol{C}}_p^e(t_{k-2})\,(3\Delta\boldsymbol{v}^p(t_{k-1}) - \Delta\boldsymbol{v}^p(t_k)) \\
& + 4\hat{\boldsymbol{C}}_p^e(t_{k-1})\,(\Delta\boldsymbol{v}^p(t_{k-1}) + \Delta\boldsymbol{v}^p(t_k)) \\
& + \hat{\boldsymbol{C}}_p^e(t_k)\,(3\Delta\boldsymbol{v}^p(t_k) - \Delta\boldsymbol{v}^p(t_{k-1}))\Big]/6 \\
& - \Big[2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e\hat{\boldsymbol{v}}^e(t_{k-2}) + \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e\hat{\boldsymbol{x}}^e(t_{k-2}) - \boldsymbol{g}^e\Big]\cdot\delta t
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Und schließlich

$$
\hat{\boldsymbol{x}}^e(t_k) = \hat{\boldsymbol{x}}^e(t_{k-1}) + \hat{\boldsymbol{v}}^e(t_{k-1})\cdot\Delta t \tag{4.13}
$$