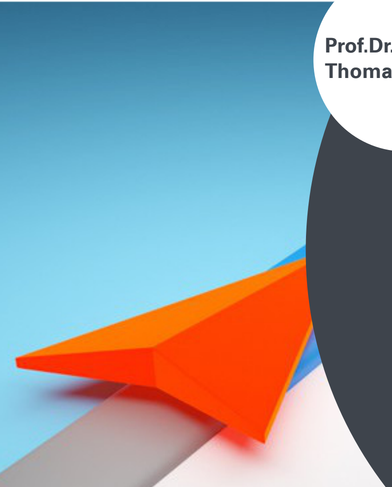
Universität Stuttgart

Prof.Dr.
Thomas Hobiger

Inertialnavigation



Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im e-System

1

Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im e-System

Navigation in 3D - Strap Down Konzept

Benötigt werden jeweils drei orthogonal angeordnete Sensoren

- Beschleunigungssensor
- Kreisel

} **IMU**

Vorsicht:

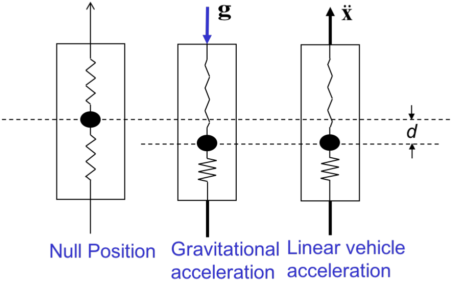
- Beschleunigungssensoren messen ebenfalls die Gravitationsbeschleunigung

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g}$$

$\boldsymbol{a}$: Angreifende Kräfte (Output Beschl.)

$\ddot{\boldsymbol{x}}$: Beschleunigung in Bezug zum inertialen Raum (benötigt)

$\boldsymbol{g}$: Gravitationsbeschleunigung



Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im e-System

- In einem Strap Down Navigator IMU sind drei Beschleunigungssensoren und drei Kreisel mit der Plattform verbunden welche die gesamte IMU (befestigt mit dem p-System) trägt
- Die Beschleunigungssensoren sind empfindlich für alle angreifenden Kräfte
- Die angreifenden Kräfte bestehen aus kinematischer Beschleunigung der IMU in Bezug zum inertialen Raum (i-System) und der Gravitationsbeschleunigung

angreifende Kräfte
Beschleunigungsmessung

$$\boldsymbol{a} = \underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}}_{\text{kin. Beschl.}} - \boldsymbol{g} \tag{1.1}$$

Differentialgleichungen im e-System

Die Koordinaten vom Vektor $\boldsymbol{a}$ (angreifende Kräfte) sind im p-System gemessen. Diese können direkt ins e-System transformiert werden

$$\boldsymbol{a}^e = \boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{a}^p \tag{1.2}$$

mit der zusammengesetzten DCM

$$\boldsymbol{C}_p^e = \boldsymbol{C}_n^e \cdot \boldsymbol{C}_b^n \cdot \boldsymbol{C}_p^b \tag{1.3}$$

Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im e-System

Transformation der kinematischen Beschleunigung

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} = \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{i} \cdot \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}^i \tag{1.4}$$

Beziehung zwischen dem e-System und dem i-System

$$\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{C}_e^i \cdot \boldsymbol{x}^e \tag{1.5}$$

Daher:

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}^i = \frac{d^2}{dt^2}\left(\boldsymbol{C}_e^i \cdot \boldsymbol{x}^e\right) \tag{1.6}$$

Erste Ableitung (verwende ISens Gl. (4.12)):

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}_e^i \cdot \boldsymbol{x}^e\right) = \boldsymbol{C}_e^i \cdot \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}^e + \boldsymbol{C}_e^i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{x}^e \tag{1.7}$$

Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im e-System

Zweite Ableitung (verwende ISens Gl. (4.12) wiederum):

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\boldsymbol{C}_e^i \cdot \boldsymbol{x}^e\right) = \boldsymbol{C}_e^i \left(\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}^e + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}^e + \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{x}^e\right) \tag{1.8}$$

Füge Gl. (1.6) und (1.8) in Gl. (1.4) ein:

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{C}_e^i \left(\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}^e + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}^e + \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{x}^e\right) \tag{1.9}$$

Verwende ISens Gl. (1.8) um die Basisvektoren zu transformieren:

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e} \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}^e + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}^e + \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{x}^e\right) \tag{1.10}$$

Das bedeutet:
In den Klammern auf der rechten Seite stehen die Koordinaten (im e-System) der kinematischen Beschleunigung der IMU in Bezug zum inertialen Raum.

Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im e-System

Die Punkte über den Symbolen stehen für die Ableitungen nach der Zeit im e-System
Kombiniere Gl. (1.1), (1.2) und (1.10):

$$\ddot{\boldsymbol{x}}^e = \boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{a}^p - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^e - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{x}^e + \boldsymbol{g}^e \tag{1.11}$$

Koordinaten des Gravitationsvektors im e-System: $\boldsymbol{g}^e$

Dies ist eine DGL von 2. Ordnung für die Position (Koordinaten) der IMU im e-System.

DGL 2. Ordnung können in DGL erster Ordnung transformiert werden, indem die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}^e$ durch die 1. Ableitung der Positionskoordinaten ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}^e &= \boldsymbol{v}^e \\ \dot{\boldsymbol{v}}^e &= \underbrace{\boldsymbol{C}_p^e}_{?} \cdot \boldsymbol{a}^p - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{v}^e - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{x}^e + \boldsymbol{g}^e \end{aligned} \tag{1.12}$$

Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im e-System

Die Kreisel im Strap Down Navigator IMU messen die Rotationsgeschwindigkeit der Plattform (p-System) in Bezug zum inertialen Raum. Diese Messungen können zur Bestimmung der DCM vom p-System ins e-System benutzt werden.

Erzeuge DCM vom p-System ins i-System:

$$\boldsymbol{C}_p^i = \boldsymbol{C}_e^i \cdot \boldsymbol{C}_p^e \tag{1.13}$$

und nehme die zeitlichen Ableitungen auf beiden Seiten

$$\boldsymbol{C}_e^i \cdot \boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ip}^p = \boldsymbol{C}_e^i \cdot \dot{\boldsymbol{C}}_p^e + \boldsymbol{C}_e^i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{C}_p^e \tag{1.14}$$

und stelle die Gleichung um

$$\dot{\boldsymbol{C}}_p^e = \boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ip}^p - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{C}_p^e \tag{1.15}$$

Eine alternative Formulierung wäre, direkt die zeitlichen Ableitungen der DCM vom p-System ins e-System zu nehmen:

$$\dot{\boldsymbol{C}}_p^e = \boldsymbol{C}_p^e \boldsymbol{\Omega}_{ep}^p = \boldsymbol{C}_p^e \cdot \left(\boldsymbol{\Omega}_{ip}^p - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^p\right) \tag{1.16}$$

Verwende ISens Gl. (4.6) um die Äquivalenz zu zeigen!

Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im e-System

Vollständiges System der DGL:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}^e &= \boldsymbol{v}^e \\
\dot{\boldsymbol{v}}^e &= \boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{a}^p - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{v}^e - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{x}^e + \boldsymbol{g}^e \\
\dot{\boldsymbol{C}}_p^e &= \boldsymbol{C}_p^e \cdot \left(\boldsymbol{\Omega}_{ip}^p - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^p\right)
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

$$\text{mit } \boldsymbol{C}_p^e = \boldsymbol{C}_n^e \cdot \boldsymbol{C}_b^n \cdot \boldsymbol{C}_p^b$$

Die dritte Gleichung ist losgelöst von den ersten beiden Gleichungen! Theoretisch kann diese separat integriert werden.