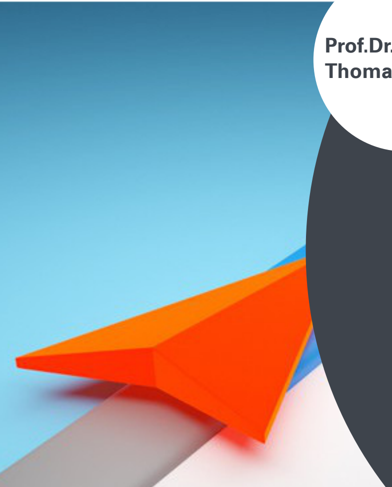
Universität Stuttgart



Prof.Dr.
Thomas Hobiger

Inertialnavigation

Differentialglei-chungen für eine Strap Down IMU im n-System

2

Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im n-System

Warum bevorzugen wir es, die Bewegung eines Körpers im lokalen Horizontsystem zu modellieren?

- Die Winkel Gieren, Stampfen und Rollen können direkt über die Mechanik erhalten werden, da der lokale Rahmen gleichermaßen in Richtung Norden, Osten und Unten ausgerichtet ist
- Wir können direkt die Differenzen der geod. Koordinaten $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$, Δh bestimmen(und leicht zwischen den vertikalen und horizontalen Komponenten unterscheiden)
- Einfache Darstellung des Gravitationsvektors $\boldsymbol{g}$
- Durch den sogenannten Schuler Effekt werden die Rechenfehler in den Navigationsparametern in der horizontalen Ebene gebunden (Fehler oszillieren mit der Schuler Frequenz)

Differentialgleichungen im n-System

Position ist parametrisiert durch die Länge λ, Breite ϕ und Höhe h.

Geschwindigkeiten im n-System:

$$\boldsymbol{v}^n = \boldsymbol{C}_e^n \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^e \tag{2.1}$$

Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im n-System

Beziehungen zwischen den kartesischen Koordinaten sowie der Länge, Breite und Höhe:

$$\begin{bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\phi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\phi\sin\lambda \\ [N(1-e^2)+h]\sin\phi \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Bedeutung von N, M, e? Nehme die zeitlichen Ableitungen auf beiden Seiten:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1^e \\ \dot{x}_2^e \\ \dot{x}_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi}(M+h)\sin\phi\cos\lambda - \dot{\lambda}(N+h)\cos\phi\sin\lambda + \dot{h}\cos\phi\cos\lambda \\ -\dot{\phi}(M+h)\sin\phi\sin\lambda + \dot{\lambda}(N+h)\cos\phi\cos\lambda + \dot{h}\cos\phi\sin\lambda \\ \dot{\phi}(M+h)\cos\phi + \dot{h}\sin\phi \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Füge Gl. (2.3) in Gl. (2.1) ein:

siehe VO ISens:

$$\begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}(M+h) \\ \dot{\lambda}(N+h)\cos\phi \\ -\dot{h} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im n-System

Gl. (2.3) kann direkt invertiert werden und ergibt eine DGL für die Position:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{v_N}{(M+h)} \\ \dfrac{v_E}{(N+h)\cos\phi} \\ -v_D \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Für die DGL der Geschwindigkeit transformieren wir die zugehörige Gleichung im e-System (Gl. (**??**). Ersetze die linke Seite von Gl. (2.1):

$$\dot{\boldsymbol{v}}^e = \frac{d}{dt}\dot{\boldsymbol{x}}^e = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}_n^e \cdot \boldsymbol{v}^n\right) = \boldsymbol{C}_n^e \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n \boldsymbol{v}^n\right) \tag{2.6}$$

Ersetze Gl. (2.1) und Gl. (2.2) auf der rechten Seite:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n \boldsymbol{v}^n = \boldsymbol{C}_e^n \cdot \left[\boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{a}^p - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{C}_n^e \cdot \boldsymbol{v}^n - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{x}^e(\phi, \lambda, h) + \boldsymbol{g}^e\right] \tag{2.7}$$

Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im n-System

Wende ISens Gl. (4.6) an

$$\boldsymbol{C}_e^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{C}_n^e = \boldsymbol{\Omega}_{ie}^n \tag{2.8}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}^n = \boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{a}^p - (2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) \cdot \boldsymbol{v}^n - \boldsymbol{C}_e^n \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{x}^e(\phi, \lambda, h) + \boldsymbol{g}^n \tag{2.9}$$

Die DGL für die Orientierung:

$$\dot{\boldsymbol{C}}_p^n = \boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{np}^p = \boldsymbol{C}_n^p(\boldsymbol{\Omega}_{ip}^p - \boldsymbol{\Omega}_{in}^p) \tag{2.10}$$

System von DGL

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{v_N}{(M+h)} \\ \dfrac{v_E}{(N+h)\cos\phi} \\ -v_D \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}^n = \boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{a}^p - (2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) \cdot \boldsymbol{v}^n - \boldsymbol{C}_e^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{x}^e(\phi, \lambda, h) + \boldsymbol{g}^n$$

$$\dot{\boldsymbol{C}}_p^n = \boldsymbol{C}_p^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{np}^p = \boldsymbol{C}_n^p(\boldsymbol{\Omega}_{ip}^p - \boldsymbol{\Omega}_{in}^p)$$

Das System der DGL ist nun kombiniert! Vergleiche Gleichungen im e-System (letze VO).

Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im n-System

Ersetze die Differentialgl. für die DCM mit den Differentialgl. für Quaternionen?

Von ISens Gl. (3.16) mit $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_t^s$

$$\begin{aligned} 4q_0q_1 &= \boldsymbol{C}_t^s(2,3) - \boldsymbol{C}_t^s(3,2) \\ \Rightarrow 4(\dot{q}_0q_1 + q_0\dot{q}_1) &= \dot{\boldsymbol{C}}_t^s(2,3) - \dot{\boldsymbol{C}}_t^s(3,2) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Von ISens Gl. (4.12)

$$\begin{gathered} \dot{\boldsymbol{C}}_t^s(2,3) = \boldsymbol{C}_t^s(2,1)\omega_{st2}^t - \boldsymbol{C}_t^s(2,2)\omega_{st1}^t \\ \dot{\boldsymbol{C}}_t^s(3,2) = -\boldsymbol{C}_t^s(3,1)\omega_{st3}^t + \boldsymbol{C}_t^s(3,3)\omega_{st1}^t \\ \Rightarrow 4(\dot{q}_0q_1 + q_0\dot{q}_1) = -\left(\boldsymbol{C}_t^s(2,2) + \boldsymbol{C}_t^s(3,3)\right)\omega_{st1}^t + \boldsymbol{C}_t^s(2,1)\omega_{st2}^t + \boldsymbol{C}_t^s(3,1)\omega_{st3}^t \end{gathered} \tag{2.13}$$

Ersetze die DCM-Elemente von ISens Gl. (3.3):

$$\begin{aligned} 2(\dot{q}_0q_1 + q_0\dot{q}_1) = \quad & -q_0^2\omega_{st1}^t - q_0q_3\omega_{st2}^t + q_0q_2\omega_{st3}^t + \\ & q_1^2\omega_{st1}^t + q_1q_2\omega_{st2}^t + q_1q_3\omega_{st3}^t \end{aligned} \tag{2.14}$$

Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im n-System

Gleichung (2.14) muss gelten für beliebige q_1, q_0

$$\begin{aligned}\dot{q}_0 &= \frac{1}{2}\left(q_1\omega^t_{st1} + q_2\omega^t_{st2} + q_3\omega^t_{st3}\right)\\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}\left(-q_0\omega^t_{st1} - q_3\omega^t_{st2} + q_2\omega^t_{st3}\right)\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ähnlich erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{q}_2 &= \frac{1}{2}\left(q_3\omega^t_{st1} - q_0\omega^t_{st2} - q_1\omega^t_{st3}\right)\\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}\left(-q_2\omega^t_{st1} + q_1\omega^t_{st2} - q_0\omega^t_{st3}\right)\end{aligned} \tag{2.16}$$

In kompakter Form:

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_0\\ \dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & \omega^t_{st1} & \omega^t_{st2} & \omega^t_{st3}\\ -\omega^t_{st1} & 0 & \omega^t_{st3} & -\omega^t_{st2}\\ -\omega^t_{st2} & -\omega^t_{st3} & 0 & \omega^t_{st1}\\ -\omega^t_{st3} & \omega^t_{st2} & -\omega^t_{st1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} \tag{2.17}$$

Differentialgleichungen für eine Strap Down IMU im n-System

Mit Gl. (2.17) können die Differentialgleichungen für die DCM in Gl. (1.17) ersetzt werden

$$\begin{bmatrix} \dot{q}^e_{p0} \\ \dot{q}^e_{p1} \\ \dot{q}^e_{p2} \\ \dot{q}^e_{p3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega^p_{ip1} - \omega^p_{ie1} & \omega^p_{ip2} - \omega^p_{ie2} & \omega^p_{ip3} - \omega^p_{ie3} \\ -\omega^p_{ip1} + \omega^p_{ie1} & 0 & \omega^p_{ip3} - \omega^p_{ie3} & -\omega^p_{ip2} + \omega^p_{ie2} \\ -\omega^p_{ip2} + \omega^p_{ie2} & -\omega^p_{ip3} + \omega^p_{ie3} & 0 & \omega^p_{ip1} - \omega^p_{ie1} \\ -\omega^p_{ip3} + \omega^p_{ie3} & \omega^p_{ip2} - \omega^p_{ie2} & -\omega^p_{ip1} + \omega^p_{ie1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^e_{p0} \\ q^e_{p1} \\ q^e_{p2} \\ q^e_{p3} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

und die dritte Gleichung in (2.11) wird umgeformt nach:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}^n_{p0} \\ \dot{q}^n_{p1} \\ \dot{q}^n_{p2} \\ \dot{q}^n_{p3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega^p_{ip1} - \omega^p_{in1} & \omega^p_{ip2} - \omega^p_{in2} & \omega^p_{ip3} - \omega^p_{in3} \\ -\omega^p_{ip1} + \omega^p_{in1} & 0 & \omega^p_{ip3} - \omega^p_{in3} & -\omega^p_{ip2} + \omega^p_{in2} \\ -\omega^p_{ip2} + \omega^p_{in2} & -\omega^p_{ip3} + \omega^p_{in3} & 0 & \omega^p_{ip1} - \omega^p_{in1} \\ -\omega^p_{ip3} + \omega^p_{in3} & \omega^p_{ip2} - \omega^p_{in2} & -\omega^p_{ip1} + \omega^p_{in1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^n_{p0} \\ q^n_{p1} \\ q^n_{p2} \\ q^n_{p3} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$