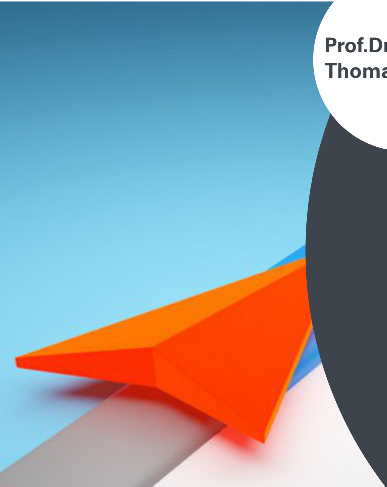
Universität Stuttgart



Prof.Dr.
Thomas Hobiger

Inertialnavigation

Integration der Orientierungsgleichung im e-System

3

Integration der Orientierungsgleichung im e-System

$$\dot{\boldsymbol{q}}_p^e = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_p^e \qquad \text{mit } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{ep1}^p & \omega_{ep2}^p & \omega_{ep3}^p \\ -\omega_{ep1}^p & 0 & \omega_{ep3}^p & -\omega_{ep2}^p \\ -\omega_{ep2}^p & -\omega_{ep3}^p & 0 & \omega_{ep1}^p \\ -\omega_{ep3}^p & \omega_{ep2}^p & -\omega_{ep1}^p & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{q}) \text{ (Indexierung hier vernachlässigt)}$$

Verwende eine numerische Lösung für die Integration

Beispiel Runge-Kutta Integrator für 3. Ordnung*

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{q}}(t_k) &= \hat{\boldsymbol{q}}(t_{k-2}) + \frac{\delta t}{6}\left(\boldsymbol{k}_1 + 4\boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3\right) \\ \boldsymbol{k}_1 &= \boldsymbol{f}(t_{k-2}, \boldsymbol{q}_{k-2}) \\ \boldsymbol{k}_2 &= \boldsymbol{f}(t_{k-1}, \boldsymbol{q}_{k-2} + \boldsymbol{k}_1 \cdot \tfrac{\delta t}{2}) \\ \boldsymbol{k}_3 &= \boldsymbol{f}(t_k, \boldsymbol{q}_{k-2} - \boldsymbol{k}_1 \cdot \delta t + \boldsymbol{k}_2 \cdot 2\delta t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

(* siehe Vorlesungsunterlagen *Parameterschätzung in dynamischen Systemen*!)

Integration der Orientierungsgleichung im e-System

Die Elemente der Matrix $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{\omega}_{ep}^{p} = \boldsymbol{\omega}_{ip}^{p} - \boldsymbol{C}_{e}^{p}\boldsymbol{\omega}_{ie}^{e} \tag{3.3}$$

Ausgabe vom Kreisel (letzte Gleichung aus VO07):

$$\Delta\boldsymbol{\alpha}_{ip}^{p}(t_k) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{ip}^{p}(\tau)d\tau \tag{3.4}$$

Formale Integration von Gl. (3.3):

$$\Delta\boldsymbol{\beta}_{ep}^{p}(t_k) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{ep}^{p}(\tau)d\tau = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\boldsymbol{\omega}_{ip}^{p}(\tau) - \boldsymbol{C}_{e}^{p}(\tau)\boldsymbol{\omega}_{ie}^{e}\right] d\tau \tag{3.5}$$

Von jetzt an verwenden wir folgende Abkürzungen:

$$\Delta t = t_k - t_{k-1},\;\; \boldsymbol{\omega}^{p} = \boldsymbol{\omega}_{ep}^{p},\;\; \Delta\boldsymbol{\alpha}^{p} = \Delta\boldsymbol{\alpha}_{ip}^{p},\;\; \Delta\boldsymbol{\beta}^{p} = \Delta\boldsymbol{\beta}_{ep}^{p},\;\; \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_{p}^{e} \tag{3.6}$$

Integration der Orientierungsgleichung im e-System

Aus Gleichung (3.5) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1}) &= \int\limits_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \boldsymbol{\omega}_{ep}^p(\tau)d\tau \\ &= \Delta\boldsymbol{\alpha}^p(t_{k-1}) - \int\limits_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \boldsymbol{C}_e^p(\tau)\boldsymbol{\omega}_{ie}^e d\tau \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\text{Für kleine } \Delta t: \quad \boldsymbol{C}_e^p(\tau) \approx \boldsymbol{C}_e^p(t_{k-1}) \approx \boldsymbol{C}_e^p(t_{k-2}) \tag{3.8}$$

Aus Gleichung (3.7) und (3.8):

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1}) &= \Delta\boldsymbol{\alpha}^p(t_{k-1}) - \boldsymbol{C}_e^p(t_{k-2})\boldsymbol{\omega}_{ie}^e\Delta t + \ldots \\ \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_k) &= \Delta\boldsymbol{\alpha}^p(t_k) - \boldsymbol{C}_e^p(t_{k-1})\boldsymbol{\omega}_{ie}^e\Delta t + \ldots \end{aligned}} \tag{3.9}$$

$\Delta\boldsymbol{\beta}$ ist eine Funktion der Kreiselmessungen und bekannter Parameter!

Integration der Orientierungsgleichung im e-System

Generell können wir $\boldsymbol{\omega}^p$ mittels Taylor-Entwicklung im Intervall $[t_{k-2}, t_k]$ ausdrücken:

$$\boldsymbol{\omega}^p(t) = \boldsymbol{\omega}^p(t_{k-2}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}^p(t_{k-2}) \cdot (t - t_{k-2}) + O(\delta t^2), \quad t - t_{k-2} \leq \delta t$$

1) Finde Ausdrücke für: $\boldsymbol{\omega}^p(t_{k-2}), \dot{\boldsymbol{\omega}}^p(t_{k-2})$

2) Bestimme $\boldsymbol{\omega}^p(t)$ für $t = k-1, k$

(3.10)

Von Gl. (3.5)

$$\Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1}) = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \boldsymbol{\omega}^p(\tau) d\tau = \boldsymbol{\omega}^p(t_{k-2})\Delta t + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\omega}}^p(t_{k-2})\Delta t^2 + \ldots \tag{3.11}$$

$$\Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}^p(\tau) d\tau = \boldsymbol{\omega}^p(t_{k-2})\Delta t + \frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{\omega}}^p(t_{k-2})\Delta t^2 + \ldots \tag{3.12}$$

Integration der Orientierungsgleichung im e-System

Von Gleichungen (3.11) und (3.12):

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^p(t_{k-2}) &= \frac{1}{2\Delta t}\left(3\Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1}) - \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_k)\right) + \ldots \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^p(t_{k-2}) &= \frac{1}{\Delta t^2}\left(\Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_k) - \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1})\right) + \ldots \end{aligned}} \tag{3.13}$$

Gl. (3.13) eingesetzt in Gl. (3.10)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^p(t_{k-2}) &= \frac{1}{2\Delta t}\left(3\Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1}) - \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_k)\right) + \ldots \\ \boldsymbol{\omega}^p(t_{k-1}) &= \frac{1}{2\Delta t}\left(3\Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1}) - \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_k)\right) + \frac{1}{\Delta t}\left(\Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_k) - \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1})\right) + \ldots \\ \boldsymbol{\omega}^p(t_k) &= \frac{1}{2\Delta t}\left(3\Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1}) - \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_k)\right) + \frac{2}{\Delta t}\left(\Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_k) - \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1})\right) + \ldots \end{aligned} \tag{3.14}$$

Integration der Orientierungsgleichung im e-System

Setze $\delta t = 2\Delta t$ und kennzeichne die Approximation mit $\hat{}$ (unter Vernachlässigung Terme höherer Ordnung)

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\omega}}^p(t_{k-2}) &= \frac{3\Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1}) - \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_k)}{\delta t} \\
\hat{\boldsymbol{\omega}}^p(t_{k-1}) &= \frac{\Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1}) + \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_k)}{\delta t} \\
\hat{\boldsymbol{\omega}}^p(t_k) &= \frac{3\Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_k) - \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1})}{\delta t}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$\boldsymbol{\omega}^p$ ist eine Funktion der Kreiselmessungen und bekannter Parameter!

Integration der Orientierungsgleichung im e-System

Berechnung von $\boldsymbol{k}_1$ (vgl. Gl. (3.2)):

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t_{k-2}, \boldsymbol{q}_{k-2}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(t_{k-2})\hat{\boldsymbol{q}}_{k-2}$$

$$\boldsymbol{A}(t_{k-2}) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1^p(t_{k-2}) & \omega_2^p(t_{k-2}) & \omega_3^p(t_{k-2}) \\ -\omega_1^p(t_{k-2}) & 0 & \omega_3^p(t_{k-2}) & -\omega_2^p(t_{k-2}) \\ -\omega_2^p(t_{k-2}) & -\omega_3^p(t_{k-2}) & 0 & \omega_1^p(t_{k-2}) \\ -\omega_3^p(t_{k-2}) & \omega_2^p(t_{k-2}) & -\omega_1^p(t_{k-2}) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

worin wir die berechneten Werte aus (3.15) verwenden können

Ähnlich für $\boldsymbol{k}_2$ und $\boldsymbol{k}_3$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ \hat{\boldsymbol{q}}(t_k) = \boldsymbol{D} \cdot \hat{\boldsymbol{q}}(t_{k-2}) = \\ &\Rightarrow\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\omega}}^p(t_{k-2}), \hat{\boldsymbol{\omega}}^p(t_{k-1}), \hat{\boldsymbol{\omega}}^p(t_k)) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Integration der Orientierungsgleichung im e-System

Zusammenfassung des Integrationsprozesses:

1. Berechnung Gl. (3.9) $\Rightarrow \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_{k-1}), \Delta\boldsymbol{\beta}^p(t_k)$
2. Berechnung Gl. (3.15) $\Rightarrow \hat{\boldsymbol{\omega}}^p(t_{k-2}), \hat{\boldsymbol{\omega}}^p(t_{k-1}), \hat{\boldsymbol{\omega}}^p(t_k)$
3. Berechnung Gl. (3.2) $\Rightarrow \hat{\boldsymbol{q}}(t_k)$
4. Normierung der Quaterionen
5. Berechnung DCM $\boldsymbol{C}$ mit normierten Quaterionen $\boldsymbol{q}$