Universität Stuttgart

Prof.Dr.
Thomas Hobiger

# Inertialnavigation

# Integrierte Navigation

6

# Integrierte Navigation

In der letzten Vorlesung haben wir folgende Differentialgleichungen für die Fehler aufgestellt

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\boldsymbol{x}}^e &= \delta\boldsymbol{v}^e \\
\delta\dot{\boldsymbol{v}}^e &= \boldsymbol{a}^e \times \boldsymbol{\psi}^e + \boldsymbol{C}_p^e \delta\boldsymbol{a}^p - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \delta\boldsymbol{v}^e - \left[\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e - \boldsymbol{\Gamma}^e\right] \delta\boldsymbol{x}^e + \delta\boldsymbol{g}^e \\
\dot{\boldsymbol{\psi}}^e &= -\boldsymbol{C}_p^e \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_{ip}^p - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\psi}^e
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Dies können wir in einem linearen System kombinieren

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{x}^e \\ \delta\boldsymbol{v}^e \\ \boldsymbol{\psi}^e \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -(\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e - \boldsymbol{\Gamma}^e) & -2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e & \boldsymbol{a}^e\times \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{x}^e \\ \delta\boldsymbol{v}^e \\ \boldsymbol{\psi}^e \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C}_p^e & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{C}_p^e & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{a}^p \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{ip}^p \\ \delta\boldsymbol{g}^e \end{bmatrix}
\end{aligned}
}
\tag{6.2}
$$

wobei $\boldsymbol{a}^e\times$ auch in (schiefsymmetrischer) Matrixform $\boldsymbol{A}^e$ geschrieben werden kann.

# Integrierte Navigation

Zusätzlich zu den DGL für Positions-, Geschwindigkeits- und Orientierungsfehler (vlg. Gl. (6.1)) erwarten wir dass die Instrumenten- und Gravitationsfeldfehler zeitlich korreliert sind. Gehen wir davon aus, dass ein Gauß-Markov Prozess erster Ordnung $\dot{x} = -\beta x$ mit $\beta = \frac{1}{\tau}$ ($\tau \ldots$ Korrelationslänge) diese Korrelation beschreibt, so erhalten wir drei zusätzliche DGL ($\boldsymbol{w}$ entspricht dabei gaußschem weissen Rauschen)

$$\boldsymbol{\delta\dot{a}}^p = -\underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{a,1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{a,2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{a,3} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F_a}} \boldsymbol{\delta a}^p + \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{\beta_{a,1}\sigma_{a,1}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_{a,2}\sigma_{a,2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\beta_{a,3}\sigma_{a,3}^2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{G_a}} \boldsymbol{w_a}$$

$$\boldsymbol{\delta\dot{\omega}}_{ip}^p = -\underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{\omega,1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{\omega,2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{\omega,3} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F_\omega}} \boldsymbol{\delta\omega}_{ip}^p + \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{\beta_{\omega,1}\sigma_{\omega,1}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_{\omega,2}\sigma_{\omega,2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\beta_{\omega,3}\sigma_{\omega,3}^2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{G_\omega}} \boldsymbol{w_\omega}$$

$$\boldsymbol{\delta\dot{g}}^e = -\underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{g,1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{g,2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{g,3} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F_g}} \boldsymbol{\delta g}^e + \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{\beta_{g,1}\sigma_{g,1}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_{g,2}\sigma_{g,2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\beta_{g,3}\sigma_{g,3}^2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{G_a}} \boldsymbol{w_a} \tag{6.3}$$

# Integrierte Navigation

Somit können wir Gl. (6.2)) umschreiben, wobei wir annehmen, dass auch die (Positions-,) Geschwindigkeits- und Orientierungsfehler Rauschprozesse sind.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\delta \boldsymbol{x}^e\\ \delta \boldsymbol{v}^e\\ \boldsymbol{\psi}^e\\ \boldsymbol{\delta a}^p\\ \boldsymbol{\delta\omega}^p_{ip}\\ \boldsymbol{\delta g}^e\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0\\ -(\boldsymbol{\Omega}^e_{ie}\cdot\boldsymbol{\Omega}^e_{ie}-\boldsymbol{\Gamma}^e) & -2\boldsymbol{\Omega}^e_{ie} & \boldsymbol{A}^e & \boldsymbol{C}^e_p & 0 & \boldsymbol{I}\\ 0 & 0 & -\boldsymbol{\Omega}^e_{ie} & 0 & -\boldsymbol{C}^e_p & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{F_\omega} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{F_a} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{F_g}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\delta \boldsymbol{x}^e\\ \delta \boldsymbol{v}^e\\ \boldsymbol{\psi}^e\\ \boldsymbol{\delta a}^p\\ \boldsymbol{\delta\omega}^p_{ip}\\ \boldsymbol{\delta g}^e\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}}$$

$$+\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{G_a} & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{G_\omega} & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{G_g}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{G}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{w_a}\\ \boldsymbol{w_\omega}\\ \boldsymbol{w_g}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}} \quad (6.4)$$

# Integrierte Navigation

Gl. (6.4) stellt ein dynamisches System der Form

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{u}$$

dar. Zum einen beschreibt der deterministische Anteil dieses System, d.h. $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{x}$ die erwartete zeitliche Veränderung der einzelnen Fehlerzustände. Zum anderen aber wird deutlich, dass Sensor bzw. Modellfehler dafür sorgen, dass sich diese Fehler wie Zufallsprozesse verhalten, und (sehr wahrscheinlich) über die Zeit anwachsen.

Daher wird ersichtlich, dass von Zeit zu Zeit Beobachtungen notwendig sind, um die einzelnen Fehlerstände bestimmen zu können und damit die Positions-, Geschwindigkeits- und Orientierungslösung der Vorwärtsintegration zu korrigieren. Dabei eignen sich u.a.

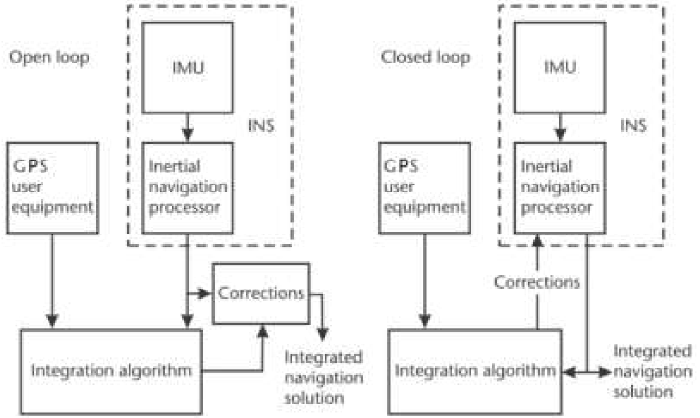
- Positionsbeobachtungen (GNSS, Aufsuchen bekannter Punkte)
- Geschwindigkeitsbeobachtungen (GNSS, Stillstand (zero-velocity))
- Orientierungsbeobachtungen (Magnetkompass, an bekannter Orientierung ausrichten)

wobei diese nun mit den vorwärts integrierten Positions-, Geschwindigkeits- und Orientierungslösung verglichen werden und die Differenz dazu als Messung ("Beobachtung") für die Fehlergleichung herangezogen wird.

# Integrierte Navigation

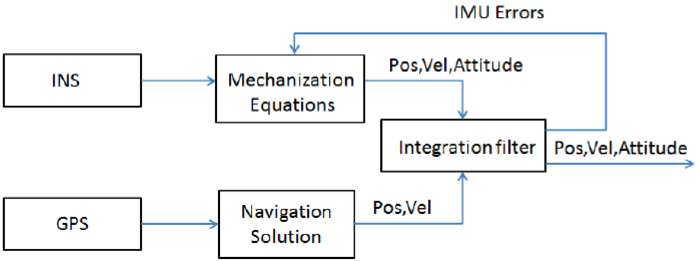
**Integration mit GPS/GNSS - open vs. closed loop**

Generell unterscheiden wir ob die geschätzten Fehler als Korrekturen an die Positions-, Geschwindigkeits- und Orientierungswerte vor der Integration angebracht werden (closed-loop) oder ob diese nur verwendet werden um das Integrationsergebnis zu korrigieren, ohne jedoch die dabei verwendeten Positions-, Geschwindigkeits- und Orientierungswerte zu korrigieren (open-loop).



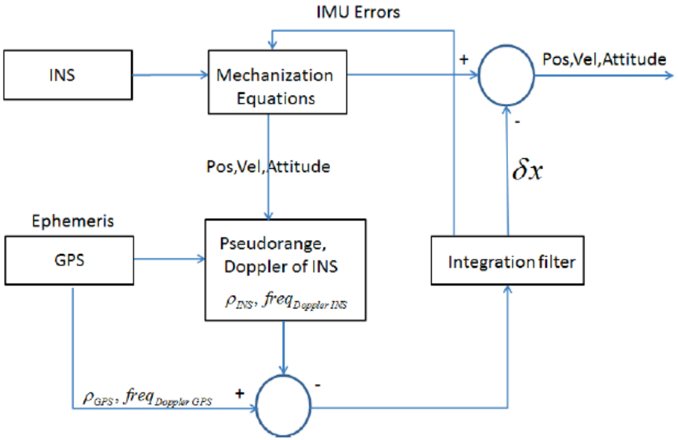
# Integrierte Navigation

## Integration mit GPS/GNSS - loosely coupled



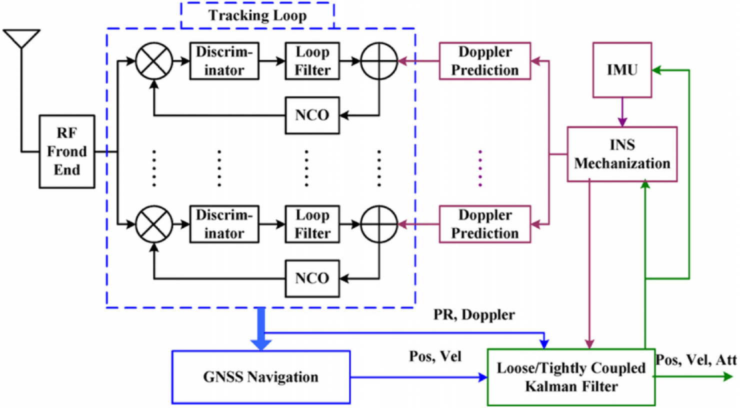
# Integrierte Navigation

## Integration mit GPS/GNSS - tightly coupled



# Integrierte Navigation

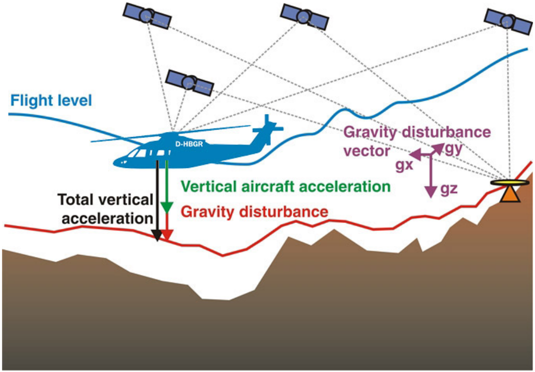
## Integration mit GPS/GNSS - deeply/ultra-tightly coupled



# Integrierte Navigation

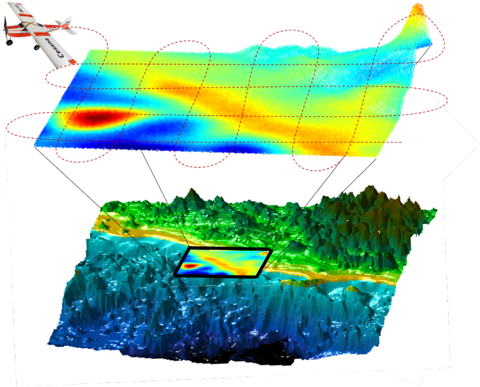
**Anwendungsfall - Gravimetrie**

Wenden wir Gl. (6.4) an, so erhalten wir neben geschätzten Fehlern von Position, Geschwindigkeit und Orientierung auch die Sensorfehler sowie Fehler des Gravitationsmodell $\delta \boldsymbol{g}^e$ aus der Kalmanfilter Lösung. Haben wir also sehr genaue Koordinaten des Sensors (z.B. aus RTK) so können wir auch $\delta \boldsymbol{g}^e$ sehr genau mitbestimmen, und damit eine Vermessung des Gravitationsfeldes der Erde vornehmen. Dies wird in der Gravimetrie von mobilen Plattformen (Fluggravimetrie, Seegravimetrie) angewandt.



# Integrierte Navigation

## Anwendungsfall - Fluggravimetrie



# Integrierte Navigation

## Anwendungsfall - Navigation

Wenn wir uns nur für die Navigationslösung interessieren, gehen (oder müssen wir) davon aus, dass Fehler des Erdschweremodells nicht relevant sind, bzw. als Sensorfehler mit modelliert werden. D.h. es gilt $\boldsymbol{\delta g}^e = \mathbf{0}$ bzw. auch $\boldsymbol{\Gamma}^e \boldsymbol{\delta x}^e = \mathbf{0}$. Damit erhält man die klassische Fehlergleichung mit 15 Zuständen

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{x}^e \\ \delta\boldsymbol{v}^e \\ \boldsymbol{\psi}^e \\ \boldsymbol{\delta a}^p \\ \boldsymbol{\delta\omega}_{ip}^p \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e & -2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e & \boldsymbol{A}^e & \boldsymbol{C}_p^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e & \mathbf{0} & -\boldsymbol{C}_p^e \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\omega}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{a}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{x}^e \\ \delta\boldsymbol{v}^e \\ \boldsymbol{\psi}^e \\ \boldsymbol{\delta a}^p \\ \boldsymbol{\delta\omega}_{ip}^p \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{a}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{G}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{a}} \\ \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}} \tag{6.5}$$

Idealerweise modelliert man aber die Fehler besser im n-System (siehe nächste Vorlesung).

# Integrierte Navigation

## Beispiel einer GNSS/IMU Sensor-Fusion