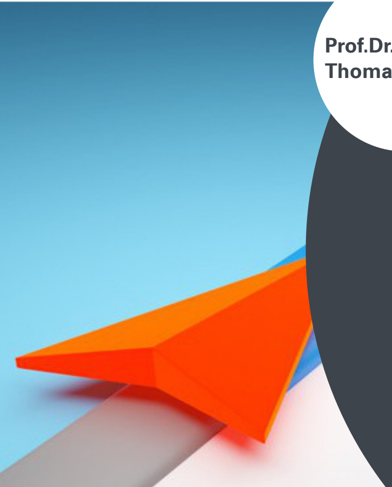
Universität Stuttgart

Prof.Dr.
Thomas Hobiger



Inertialnavigation

Linearisierung der Fehlergleichung im e-System

5

Linearisierung der Fehlergleichung im e-System

- Initiale Bedingungen bei der Integration sind fehlerbehaftet
- Messungen vom Beschleunigungsmesser und Kreisel sind fehlerbehaftet
- Gravitationsfeld ist nicht perfekt bekannt

$\Rightarrow$ Beschreibung der Fehler und Fehlerfortpflanzung erforderlich

Start mit dem Differential (bezeichnet mit δ) von VO 01 (Gl. (1.17))

$$\begin{aligned} \delta \dot{\boldsymbol{x}}^e &= \delta \boldsymbol{v}^e \\ \delta \dot{\boldsymbol{v}}^e &= \delta \left[\boldsymbol{C}_p^e \boldsymbol{a}^p \right] - 2\delta \left[\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{v}^e \right] - \delta \left[\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{x}^e \right] + \delta \boldsymbol{g}^e \end{aligned} \tag{5.1}$$

Angenommen, die Rotationsrate vom e-System bezogen auf das i-System ist bekannt, kann die zweite Gl. (5.1) erweitert werden:

$$\delta \dot{\boldsymbol{v}}^e = \delta \boldsymbol{C}_p^e \boldsymbol{a}^p + \boldsymbol{C}_p^e \delta \boldsymbol{a}^p - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \delta \dot{\boldsymbol{x}}^e - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \delta \boldsymbol{x}^e + \boldsymbol{\Gamma}^e \delta \boldsymbol{x}^e + \delta \boldsymbol{g}^e \tag{5.2}$$

$\boldsymbol{\Gamma}^e$ bezeichnet den Gradienten der Gravitationsbeschleunigung.

Linearisierung der Fehlergleichung im e-System

Das Differential der DCM wird aus den Differenzen zwischen der wahren DCM und der DCM für zusätzliche kleine Rotationen der drei Achsen erhalten:

$$\delta \boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{a}^p = \left[(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Psi}^e) \cdot \boldsymbol{C}_p^e - \boldsymbol{C}_p^e\right] \cdot \boldsymbol{a}^p = -\boldsymbol{\Psi}^e \cdot \boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{a}^p = -\boldsymbol{\Psi}^e \cdot \boldsymbol{a}^e \tag{5.3}$$

$\boldsymbol{\Psi}^e$ ist die schiefsymmetrische Form der Rotationsvektors für Winkel $\boldsymbol{\psi}^e$ mit den folgenden Eigenschaften für beliebige Vektoren $\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{\Psi}^e \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\psi}^e \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\psi}^e \tag{5.4}$$

Mit (5.3) und (5.4) kann (5.2) umgeschrieben werden:

$$\delta \dot{\boldsymbol{v}}^e = \boldsymbol{a}^e \times \boldsymbol{\psi}^e + \boldsymbol{C}_p^e \delta \boldsymbol{a}^p - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \delta \dot{\boldsymbol{x}}^e - \left[\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e - \boldsymbol{\Gamma}^e\right] \delta \boldsymbol{x}^e + \delta \boldsymbol{g}^e \tag{5.5}$$

Was ist $\boldsymbol{\Psi}^e$? Wie steht es in Beziehung zur DCM und dessen Ableitung?

Linearisierung der Fehlergleichung im e-System

Ableitung der DCM nach der Zeit

$$\dot{\boldsymbol{C}}_p^e = \boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ep}^p \tag{5.6}$$

Nehme das Differential

$$\delta\dot{\boldsymbol{C}}_p^e = \delta\boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ep}^p + \boldsymbol{C}_p^e \cdot \delta\boldsymbol{\Omega}_{ep}^p \tag{5.7}$$

Nehme die zeitliche Ableitung von (5.3)

$$\delta\dot{\boldsymbol{C}}_p^e = -\dot{\boldsymbol{\Psi}}^e \cdot \boldsymbol{C}_p^e - \boldsymbol{\Psi}^e \cdot \dot{\boldsymbol{C}}_p^e = -\dot{\boldsymbol{\Psi}}^e \cdot \boldsymbol{C}_p^e - \boldsymbol{\Psi}^e \cdot \boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ep}^p \tag{5.8}$$

Setze die rechte Seite von Gl. (5.7) gleich der rechten Seite von Gl. (5.8):

$$\delta\boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ep}^p + \boldsymbol{C}_p^e \cdot \delta\boldsymbol{\Omega}_{ep}^p = -\dot{\boldsymbol{\Psi}}^e \cdot \boldsymbol{C}_p^e - \boldsymbol{\Psi}^e \cdot \boldsymbol{C}_p^e \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ep}^p \tag{5.9}$$

Verwende Gl. (5.3) um $\delta\boldsymbol{C}$ zu ersetzen

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}^e = -\boldsymbol{C}_p^e \cdot \delta\boldsymbol{\Omega}_{ep}^p \cdot \boldsymbol{C}_e^p \tag{5.10}$$

Linearisierung der Fehlergleichung im e-System

Bei Vektoren ist dies äquivalent zu

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}^e = -\boldsymbol{C}_p^e \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_{ep}^p \tag{5.11}$$

Ersetze

$$\boldsymbol{\omega}_{ep}^p = \boldsymbol{\omega}_{ip}^p - \boldsymbol{\omega}_{ie}^p = \boldsymbol{\omega}_{ip}^p - \boldsymbol{C}_e^p \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \tag{5.12}$$

und nehme die Differentiale auf beiden Seiten:

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ep}^p = \delta\boldsymbol{\omega}_{ip}^p - \delta\boldsymbol{C}_e^p \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e - \boldsymbol{C}_e^p \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \tag{5.13}$$

Das Differential der Rotationsraten im e-System bezogen auf das i-System ist Null, das Differential einer DCM ist die Transponierte vom Differential der inversen DCM.

$$\begin{aligned} &\delta\boldsymbol{C}_e^p = \left(\delta\boldsymbol{C}_p^e\right)^T \Rightarrow \text{(5.3)} \Rightarrow \delta\boldsymbol{C}_e^p = \left(-\boldsymbol{\Psi}^e \cdot \boldsymbol{C}_p^e\right)^T = \boldsymbol{C}_e^p \cdot (-\boldsymbol{\Psi}^e)^T \\ &\Rightarrow \delta\boldsymbol{C}_e^p = \boldsymbol{C}_e^p \cdot \boldsymbol{\Psi}^e \end{aligned} \tag{5.14}$$

Linearisierung der Fehlergleichung im e-System

Kombination von Gl. (5.11), (5.13), (5.14), (5.3) und (5.4)

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}^e = -\boldsymbol{C}_p^e \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_{ip}^p - \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \boldsymbol{\psi}_e \tag{5.15}$$

oder

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}^e = -\boldsymbol{C}_p^e \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_{ip}^p - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \boldsymbol{\psi}_e \tag{5.16}$$

Wir werden in der nächsten Vorlesung dann die hier gewonnnen Ergebnisse zusammenfassen und uns überlegen wie wir daraus ein komplettes Modell der Fehler in unserem System aufstellen können, welches auch die Sensorfehler und deren stochastische Eigenschaften mit berücksichtigt.