Universität Stuttgart

Geodätisches Institut

Parameterschätzung Übung 1

Ausarbeitung im Studiengang

Geodäsie und Geoinformatik

an der Universität Stuttgart

Ziqing Yu, 3218051

Stuttgart, April 29, 2021

Betreuer: Dr.-Ing. Mohammad Tourian
Universität Stuttgart

Dr. Karim Douch
Universität Stuttgart

Kapitel 1

Ausarbeitung

1.1 a

Der Nährungswert g_0 wird mit dem Mittelwert von $\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{T}$ berechnet:

$$\bar{T} = 2,451\,\mathrm{s}$$
$$\bar{l} = 1,480\,\mathrm{m}$$
$$g_0 = \frac{\bar{l} \cdot 4 \cdot \pi^2}{\bar{T}^2} = 9,724\,\mathrm{m/s^2}$$

1.2 b

Bedingungsgleichungen:

$$T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{g}$$

1.3 c

$$f(T,l,g) = T^2 - 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{g}$$

Linearisierung

$$\frac{\partial f}{\partial T} = 2T$$
$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{g}$$
$$\frac{\partial f}{\partial g} = -\frac{4\pi^2 l}{g^2}$$
$$f(\tilde{T},\tilde{l},\tilde{g}) = f(T,l,g)|_0 + \frac{\partial f}{\partial T}(\Delta T + e_T) + \frac{\partial f}{\partial l}(\Delta l + e_l) + \frac{\partial f}{\partial g}(\Delta g)$$

1.4 d

$$f(\tilde{T},\tilde{l},\tilde{g}) = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{B^T}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{A}\Delta g$$

$$\boldsymbol{B^T} = \begin{bmatrix} 2T_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{4\pi^2}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2T_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{4\pi^2}{g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2T_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{4\pi^2}{g} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2T_n & 0 & 0 & 0 & \frac{4\pi^2}{g} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{4\pi^2 l_1}{g^2} \\ -\frac{4\pi^2 l_2}{g^2} \\ -\frac{4\pi^2 l_3}{g^2} \\ \vdots \\ -\frac{4\pi^2 l_n}{g^2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{w} = f(T,l,g)|_0 + \boldsymbol{B^T}\Delta y$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B^T}\boldsymbol{P^{-1}}\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A^T} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.5 e,f

Die Ergebnisse werden mit Iteration gelöst. ($\boldsymbol{P}$ ist zuerst eine Einheitmatrix.)

$$g_1 = 9.7246\,\mathrm{m/s^2}$$

Varianz:

$$\sigma_1^2 = 2.65 \cdot 10^{-14}$$

1.6 g

Die obige Rechnungen wird jetzt mit neue Gewichtmatrix $\boldsymbol{P}$ berechnet:

$$\boldsymbol{P}_2 = diag([2.5 \cdot 10^{-3}, 2.5 \cdot 10^{-3}, 2.5 \cdot 10^{-3} \cdots 0.2, 0.2, 0.2 \cdots 0.2])$$

man kriegt mit $\boldsymbol{P}_2$ die neue Ergebnisse:

$$g_2 = 9.7262\,\mathrm{m/s^2}$$

Varianz:

$$\sigma_2^2 = 1.54 \cdot 10^{-12}$$

1.7 SVD Verfahren

2 svd Verfahren werden da verwendet:

1.7.1 Verfahren 1

p ist der Einheitvektor der zuschätzen Linie;

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l} & \boldsymbol{T}^2 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Das Ziel ist: $min(\boldsymbol{Mp})^2 \rightarrow min(\boldsymbol{Mp})^t(\boldsymbol{Mp}) \rightarrow min(\boldsymbol{p^t M^t M p})$

$\boldsymbol{M^t M}$ ist normal Matrix $\rightarrow svd(\boldsymbol{M^t M}) = \boldsymbol{USU^t}$

$min((\boldsymbol{p^t U})\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p^t U})^t) \rightarrow \lambda_1(\boldsymbol{u_1^t p})^2 + \lambda_2(\boldsymbol{u_2^t p})^2$, wobei λ_1 und λ_2 Eigenwerte sind.

Annehmen $(\boldsymbol{u_1^t p}) = \cos(\alpha)$ und $(\boldsymbol{u_2^t p}) = \sin(\alpha)$, dann haben wir:

$\cos^2(\alpha) = s \rightarrow min((\lambda_1 - \lambda_2)s + \lambda_2) \rightarrow s = 1$

$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{v_2}$, In der Realität kann man $\boldsymbol{V}$ Matrix direkt von $svd(\boldsymbol{M})$ berechnet.

$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{V(1,2)}{V(2,2)} \longrightarrow g = 9.7188\,\mathrm{m/s^2}$

1.7.2 Verfahren 2

$$T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{g}$$

Diese kann man umschreiben wie:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$$

wobei $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}^2$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{x} = \frac{4\pi^2}{g}$

$$[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{V}] = svd(\boldsymbol{A})$$

$$g = x_{dach} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{S}^{-1} \cdot \boldsymbol{U}^T \cdot \boldsymbol{y} = 9.7232\,\mathrm{m/s^2}$$

Dieses Ergebnis ist ganz gleich wie das von A Modell (normal Least Square)