Times New Roman

Inhaltverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Übung muss man entscheiden, welches Tachymeter für die Absteckung man nutzen kann. Die Vermessungstoleranz wird in Prozent und die gesamte Toleranz sind gegeben. Die Koordinaten der bekannten Punkte und Standardabweichungen davon sind auch bekannt. Mit diesen Bedingungen und der Lageskizze soll man die notwendige Genauigkeit von Tachymeter rechnen und einen nutzbaren Tachymeter bestimmen.

2 Nummerische Werte

Aus der Graph ist es einfach zu lesen: $X_A = 0$, $Y_A = 0$, $X_B = 200$, $Y_B = 0$, $X_S = 100$, $Y_S = -20,5$. Die Länge von AS nennen wir s. Der Winkel zwischen AB und AS nennen wir α.

$$s = \sqrt{100^2 + 20,5^2} = 102,080m$$

$$\alpha = \arctan(\frac{20,5}{100}) = 11,585 = 0,202rad$$

3 Standardabweichung von S

Aus der Aufgabe ist die gesamte Maßtoleranz 10 mm und die Vermessungstoleranz ist 1/3 davon. Dann haben wir $T_M = T \cdot \sqrt{2p - p^2}$, wobei T_M Vermessungstoleranz, T gesamte Toleranz und $p = \frac{1}{3}$ sind. Weil die Vermessungstoleranz mit mindesten 95% Wahrscheinlichkeit eingehalten werden soll, ist Quantil k gleich 1,96. Damit kann man die erwartete Standardabweichung von S ausrechnen.

$$\sigma_{XS} = \sigma_{YS} = \frac{T_M}{2k} = 1,901mm$$

4 Fehlerfortpflanzung und Rechnung

Die Koordinaten von S werden aus Koordinaten von A und B und die gemessene Länge und Winkel gerechnet.

$$X_S = X_A + s \cdot \cos(t_{AS}) = X_A + s \cdot \cos(t_{AB} - \alpha) = X_A + s \cdot \cos(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \quad (1)$$

$$Y_S = Y_A + s \cdot \sin(t_{AS}) = Y_A + s \cdot \sin(t_{AB} - \alpha) = Y_A + s \cdot \sin(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \quad (2)$$

Wegen der Fehlerfortpflanzung muss man die Ableitung machen.
Die Ableitung von X_S

$$\frac{\partial X_S}{\partial X_A} = 1 - s \cdot \sin(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \cdot \frac{1}{(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A})^2 + 1} \cdot (-\frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2}) \cdot (-1) \quad (3)$$

$$\frac{\partial X_S}{\partial X_B} = -s \cdot \sin(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \cdot \frac{1}{(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A})^2 + 1} \cdot (-\frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2}) \quad (4)$$

$$\frac{\partial X_S}{\partial Y_A} = -s \cdot \sin(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \cdot \frac{1}{(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A})^2 + 1} \cdot (-\frac{1}{X_B - X_A}) \quad (5)$$

$$\frac{\partial X_S}{\partial Y_B} = -s \cdot \sin(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \cdot \frac{1}{(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A})^2 + 1} \cdot (\frac{1}{X_B - X_A}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial X_S}{\partial s} = \cos(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \quad (7)$$

$$\frac{\partial X_S}{\partial \alpha} = -s \cdot \sin(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \cdot (-1) \quad (8)$$

Die Ableitung von Y_S

$$\frac{\partial Y_S}{\partial X_A} = s \cdot \cos(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \cdot \frac{1}{(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A})^2 + 1} \cdot (-\frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2}) \cdot (-1) \quad (9)$$

$$\frac{\partial Y_S}{\partial X_B} = s \cdot \cos(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \cdot \frac{1}{(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A})^2 + 1} \cdot (-\frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2}) \quad (10)$$

$$\frac{\partial Y_S}{\partial Y_A} = 1 + s \cdot \cos(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \cdot \frac{1}{(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A})^2 + 1} \cdot \frac{-1}{X_B - X_A} \quad (11)$$

$$\frac{\partial Y_S}{\partial Y_A} = 1 + s \cdot \cos(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \cdot \frac{1}{(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A})^2 + 1} \cdot \frac{1}{X_B - X_A} \quad (12)$$

$$\frac{\partial Y_S}{\partial s} = \sin(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \quad (13)$$

$$\frac{\partial Y_S}{\partial \alpha} = -s \cdot \cos(\arctan(\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}) - \alpha) \cdot (-1) \quad (14)$$

Denn alle Bekannte und Beobachtungen sind unkorreliert:

$$\begin{bmatrix} (\frac{\partial X_S}{\partial X_A})^2 & (\frac{\partial X_S}{\partial X_B})^2 & (\frac{\partial X_S}{\partial Y_A})^2 & (\frac{\partial X_S}{\partial Y_B})^2 & (\frac{\partial X_S}{\partial s})^2 & (\frac{\partial X_S}{\partial \alpha})^2 \\ (\frac{\partial Y_S}{\partial X_A})^2 & (\frac{\partial Y_S}{\partial X_B})^2 & (\frac{\partial Y_S}{\partial Y_A})^2 & (\frac{\partial Y_S}{\partial Y_B})^2 & (\frac{\partial Y_S}{\partial s})^2 & (\frac{\partial Y_S}{\partial \alpha})^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\sigma_{XA})^2 \\ (\sigma_{XB})^2 \\ (\sigma_{YA})^2 \\ (\sigma_{YB})^2 \\ (\sigma_s)^2 \\ (\sigma_\alpha)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma_{XS})^2 \\ (\sigma_{YS})^2 \end{bmatrix}$$

Man könnte diese Gleichung wie folgend entwickeln

$$\begin{bmatrix} (\frac{\partial X_S}{\partial X_A})^2 & (\frac{\partial X_S}{\partial X_B})^2 & (\frac{\partial X_S}{\partial Y_A})^2 & (\frac{\partial X_S}{\partial Y_B})^2 \\ (\frac{\partial Y_S}{\partial X_A})^2 & (\frac{\partial Y_S}{\partial X_B})^2 & (\frac{\partial Y_S}{\partial Y_A})^2 & (\frac{\partial Y_S}{\partial Y_B})^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\sigma_{XA})^2 \\ (\sigma_{XB})^2 \\ (\sigma_{YA})^2 \\ (\sigma_{YB})^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\frac{\partial X_S}{\partial s})^2 & (\frac{\partial X_S}{\partial \alpha})^2 \\ (\frac{\partial Y_S}{\partial s})^2 & (\frac{\partial Y_S}{\partial \alpha})^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\sigma_s)^2 \\ (\sigma_\alpha)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma_{XS})^2 \\ (\sigma_{YS})^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\sigma_s)^2 \\ (\sigma_\alpha)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{\partial X_S}{\partial s})^2 & (\frac{\partial X_S}{\partial \alpha})^2 \\ (\frac{\partial Y_S}{\partial s})^2 & (\frac{\partial Y_S}{\partial \alpha})^2 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} (\sigma_{XS})^2 \\ (\sigma_{YS})^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\frac{\partial X_S}{\partial X_A})^2 & (\frac{\partial X_S}{\partial X_B})^2 & (\frac{\partial X_S}{\partial Y_A})^2 & (\frac{\partial X_S}{\partial Y_B})^2 \\ (\frac{\partial Y_S}{\partial X_A})^2 & (\frac{\partial Y_S}{\partial X_B})^2 & (\frac{\partial Y_S}{\partial Y_A})^2 & (\frac{\partial Y_S}{\partial Y_B})^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\sigma_{XA})^2 \\ (\sigma_{XB})^2 \\ (\sigma_{YA})^2 \\ (\sigma_{YB})^2 \end{bmatrix} \right)$$

Danach setzt man die nummerische Werte ein und wir kriegen die notwendige Genauigkeit des Tachymeters.

$$\sigma_s = 1,125mm$$

$$\sigma_\alpha = 0,942mgon$$

5 Bestimmung von Tachymeter

Ein Ingenieurtachymeter ist dafür notwendig, z.B, Leica TS30 hat die Winkelgenauigkeit $0,01mgon$ für Richtungswinkel und $1mm + 1ppm$ für Strecke. Diese Genauigkeit reicht für die Absteckung.