

Inhaltverzeichnis

1	Ingenieurgeodätische Netze	2
1.1	Punktvermarkung	2
1.2	Netzdimension und Koordinatensysteme	2
1.3	Netzqualität	2
1.3.1	Genauigkeit	3
1.3.2	Zuverlässigkeit	6
1.4	Datumsdefinition	11
1.5	Datumsverfügung	12
1.5.1	Einfügung	12
1.6	Datumstransformationen	14
1.6.1	Allgemeines	14
1.6.2	Kombination von terrestrischen und GNSS messungen	14

1 Ingenieurgeodätische Netze

1.1 Punktvermarkung

1.2 Netzdimension und Koordinatensysteme

Netzdimension: 1, 2 oder 3 Dimensionen.

Eindimensionale Netze = Höhennetze. z.B DHHN oder lokales Netz.

Messmethoden: Nivellement und Gravimetrie. alternativ: GNSS und Geoidhöhen oder andere spezielle Verfahren.

Datumfestlegung: 1 Verschiebung (Festlegung des Nullpunktes)

Historische Aufbau in Deutschland

- 1.Ordnung: Schleifen Durchmesser 30 - 80 km
- 2.Ordnung: Schleifen Durchmesser 20 km
- 3.Ordnung: Schleifen Durchmesser 10 km
- 4.Ordnung: Schleifen Durchmesser < 4 km

Zweidimensionale Netze = Lagenetze z.B UTM, Gauß-Krüger, lokale Netze, DHDN.

Messmethoden: Winkel + Strecken oder GNSS.

Datumfestlegung: 2 Verschiebungen, 1 Rotation, 1 Maßstab. Historische Aufbau in Deutschland Verdichtung durch Aufnahmepunkte / Polygonpunkte.

- 1.Ordnung: Punktabstand 30 - 40 km
- 2.Ordnung: Punktabstand 10 - 20 km
- 3.Ordnung: Punktabstand 3 - 10 km
- 4.Ordnung: Punktabstand 1 - 3 km

Dreidimensionale Netze z.B WGS 84, ITRF 2008 ...

Messmethoden:

GNSS, VLBI, SLR, DORIS (global)

Winkel und Strecken (lokal)

Datumfestlegung: 3 Verschiebungen, 3 Rotationen, 1 Maßstab.

1.3 Netzqualität

- Definition der Netzqualität (Netzgüte) durch Qualitätsmerkmale.

- Qualitätsparameter (Gütekriterien) konkretisieren die Qualitätsmerkmale.

Beispiel: Genauigkeit ist ein Qualitätsmerkmal, aber Beschreibung durch den numerischen Wert für einen Parameter z.B Standardabweichung.

- Qualitätsmerkmale Ingenieurgeodätischer Netze:

- Genauigkeit
- Zuverlässigkeit (Kontrollierbarkeit)
- Sensitivität (Empfindlichkeit gegenüber Deformation)
- Seperabilität / Trennbarkeit (von Deformationsmodellen)

Qualitätsparameter werden zur Netzoptimierung hergezogen. d.h. Optimierung von funktionalen und/oder Stochastischen Modell um z.B Spur zu minimieren.

3-a Genauigkeit

Grundlagen: Kovarianzmatrix der Parameter/Koordinaten (m ist die Anzahl der Punkte)

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \cdots \\ \Sigma_{21} & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \Sigma_{mm} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \Sigma_{ii} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

lokale Genauigkeitsmaße

A.Punktbezogen, absolute

A1. Helmert'sche Punktfehler

$$\sigma_{H,i} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (= \sqrt{\text{spur}(\Sigma_{ii})})$$

Varianzkriterium: $\sigma_{H,i} \Rightarrow \min$

A2. Punktfehler nach Werkmeister

$$\sigma_{W,i} = \sqrt{\det(\Sigma_{ii})}$$

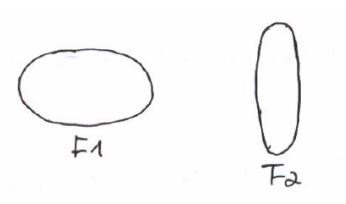
Volumenkriterium: $\sigma_{W,i} \Rightarrow \min$

Forderung: Ellipsoidfläche möglichst klein

$$\begin{aligned} F &= A_1 \cdot A_2 \cdot \pi \\ F^2 &= A_1^2 \cdot A_2^2 \cdot \pi^2 \\ F^2 &= \sigma_0^4 \cdot \pi^2 \cdot (\xi_{2,1-\alpha}^2)^2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ \sigma_0^4 \cdot \pi^2 \cdot (\xi_{2,1-\alpha}^2)^2 &\text{ ist Konstant und } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(\Sigma_{ii}) \end{aligned}$$

A2 hat den Vorteil, dass auch die Kovarianz σ_{xy} berücksichtigt wird.

A3. Eigenwertkriterium.



(a) Problem $F1 = F2$

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \Rightarrow 1 \quad \text{oder} \quad \lambda_{max} \Rightarrow \lambda_{min} \quad \text{allgemein ideal}$$

B. Relative Genauigkeitsmaße

\Rightarrow bezogen auf Koordinatendifferenzen.

\Rightarrow wichtig für Nachbarschaftsgenauigkeit

Relative Standardabweichungen

$$\Delta_{\hat{x}_{i,j}} = \Delta_{\hat{x}_i} - \Delta_{\hat{x}_j}$$

$$\sigma_{\Delta_{\hat{x}_{i,j}}} = \sqrt{\sigma_{\hat{x}_i}^2 + \sigma_{\hat{x}_j}^2 - 2\sigma_{\hat{x}_{i,j}}}$$

Relative Sub-Kovarianzmatrix

$$\Sigma_{\Delta_{lk}} = \Sigma_{ll} + \Sigma_{kk} - \Sigma_{kl} - \Sigma_{lk}$$

A1 bis A3 dann auf B anwendbar.

Globale Genauigkeitsmaße

Gesamte $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$ wird verwendet, gesamtes Netz wird beurteilt.

Erweitertes Varianzkriterium

$$\text{spur}(\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}) \Rightarrow \min$$

Erweitertes Volumenkriterium

$$\det(\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}) \Rightarrow \min$$

”Darstellung” als Konfidenzhyperellipsoid.

Erweiterte Eigenwertkriterium

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \Rightarrow 1 \quad \text{oder} \quad \lambda_{max} \Rightarrow \lambda_{min}$$

Eigenwertkriterium ist besonders sinnvoll, da jede beliebige Funktion der Parameter minimiert wird.

$\hat{\chi}$ ist eine beliebige Funktion

$$\varphi(\hat{\chi}) = \mathbf{f} \cdot \hat{\chi}$$

$$\sigma_{\varphi}^2 = \mathbf{f} \Sigma_{\hat{x}\hat{x}} \mathbf{f}^T$$

Es gilt $\mathbf{f}^T \mathbf{f} \lambda_{\max} \geq \sigma_{\varphi}^2 \geq \mathbf{f}^T \mathbf{f} \lambda_{\min} \longrightarrow \lambda_{\min} \leq \frac{\sigma_{\varphi}^2}{\mathbf{f}^T \mathbf{f}} \leq \lambda_{\max}$ (Releigh-Relation).

Eigenwertkriterium führt auch zu Minimierung des Varianz einer beliebigen Netzfunktion.

Hauptkomponenten Analysis

1.Hk: (u ist die Anzahl der Unbekannter)

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{s}_1 \cdot \sqrt{\lambda_1} = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ \vdots \\ s_{1u} \end{bmatrix} \cdot \lambda_1$$

2.Hk:

$$\begin{matrix} \mathbf{P}_2 = \mathbf{s}_2 \cdot \sqrt{\lambda_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

mit $\lambda_1 = \text{maximaler Eigenwert}$ und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$.

- Funktion, die in Richtung \mathbf{s}_1 wirkt, ist am ungenausten bestimmt.
- Um so größer der Anteil von \mathbf{P}_1 an Gesamtvarianz, um so größer der Effekt von λ_1 (bis zu 60% möglich, dann "wesentliche Eigenvektoren")
- Jede Koordinate des Netzes wird durch den Eigenvektor ein Varianzanteil zugeordnet. Dadurch wird an jedem Punkt der am schwächsten bestimmte Richtung definiert.

Homogenität

Alle Konfidenzellipsen bzw. -ellipsoide weisen die selbe Struktur auf, alle A_1 sind gleichlang, alle A_2 gleichlang ...

Homogenität und Isotropie

Alle Konfidenzellipsen bzw. -ellipsoide sind Kreis- bzw. kugelförmig. Alle Halbachse gleichlang.

Vollständige Isotropie

Isotropie gilt auch für relative Konfidenzellipsen, Radian der Kreise/Kugeln können zwischen punktbezogenen und relativen Kreise/Kugeln unterschiedlich ausfallen.

Vergleich verschiedener Messverfahren

Genetzte numerische Werte

$$\begin{array}{ll}
 \text{Entfernungsmessung(EDM)} & \sigma_D^2 = (2\text{mm})^2 + (1,5\text{ppm})^2 \\
 \text{Richtung} & \sigma_r = 0,25\text{mgon} \Rightarrow \sigma_q = D \cdot \sigma_r \\
 \text{GNSS} & \sigma_b^2 = (3\text{mm})^2 + (0,5\text{ppm})^2
 \end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{l}
 \sigma_D \Rightarrow \text{Streckmessgenauigkeit} \\
 \sigma_r \Rightarrow \text{Richtungsmessgenauigkeit} \\
 \sigma_b \Rightarrow \text{Basisliniengenauigkeit(GNSS)}
 \end{array}$$

Bitte Werte je nach Verfahren und Instrumenten einsetzen! Optimaler Punktabstand für kom-

$D[m]$	$\sigma_D[mm]$	$\sigma_q[mm]$	$\sigma_b[mm]$
100	2,0	0,4	3,0
200	2,0	0,8	3,0
500	2,1	2,0	3,0
700	2,2	2,7	3,0
1000	2,5	3,9	3,0
2000	3,6	7,9	3,2
5000	7,8	19,6	3,9
10000	15,1	39,3	5,8

binerte Richtungs- und Streckenmessung ca. 400 bis 600 m

3-b Zuverlässigkeit

In der Geodäsie: Kontrollierbarkeit = Aufdeckbarkeit von Fehlern durch geometrischen Überbestimmung.(Fehler können im stochastischen und im funktionalen Modell möglich sein.)

$$Q_{vv} = Q_{ll} - Q_{\bar{l}\bar{l}}$$

mit

$$Q_{\bar{l}\bar{l}} = A \cdot Q_{\hat{x}\hat{x}} A^T$$

Innere Zuverlässigkeit

Global:

Freiheitsgrad (Redundanz der Ausgleichung)

$$f = n - u + d$$

$$f = \text{spur}(\mathbf{Q}_{vv} \cdot \mathbf{P}),$$

$\mathbf{Q}_{vv} \cdot \mathbf{P}$ ist Redundanzmatrix

Bedingungsichte: (relativer Wert zur Übereinstimmung)

$$b = \frac{r}{n} = \frac{f}{n} \quad \text{mit } 1 \geq b \geq 0$$

bei $b = 0$ ($f \neq 0$): keine Übereinstimmung, $b = 1$: alle Beobachtungen 100% kontrolliert (nicht möglich) Lokal:

bezogen auf Beobachtungen

$$\mathbf{v} = -\mathbf{Q}_{vv} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{l}$$

Annahme: Fehler in Beobachtung l_i : Δl_i

$$\mathbf{v} = -\mathbf{Q}_{vv} \cdot \mathbf{P} \cdot (\bar{\mathbf{l}} + \mathbf{Q}_i \Delta l_i)$$

$\bar{\mathbf{l}}$ ist fehlerfreie Vektor

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{Q}_{vv} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{L}_i \cdot \Delta l_i$$

Δl_i betrachtet als globaler Fehler.

Auswirkung des groben Fehlers:

$$\Delta v_i = -(\mathbf{Q}_{vv} \cdot \mathbf{P})_{ii} \cdot \Delta l_i = -r_i \cdot \Delta l_i$$

Δl_i wirkt sich auf alle Verbesserungen aus. \Rightarrow Verschmiereffekt.

Redundanzanteil

$$r_i = (\mathbf{Q}_{vv} \cdot \mathbf{P})_{ii}$$

r_i sollte möglichst groß sein, um Verschmiereffekt klein zu halten: $r_i \rightarrow \max$

$$0 \leq r_i \leq 1$$

→1 theoretisch nicht zu erreichen.

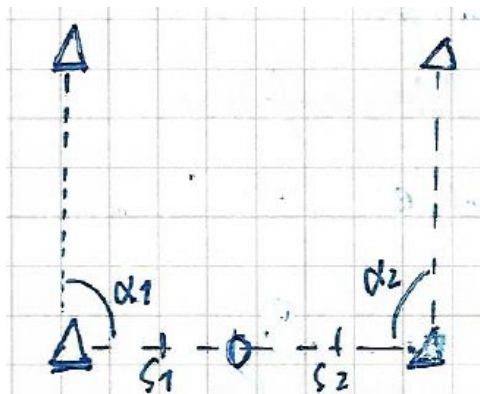
→0 ist ohne Kontrolle

→ $\leq 0,3$ sollte vermieden werden

→0,5 als Ziel

$$f = r = \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n (Q_{vv} \cdot P)_{ii} = \text{spur}(Q_{vv} \cdot P) = \text{rang}(Q_{vv} \cdot P)$$

Beispiel (Redundanz 2D)



(b)

Beobachtungen	Redundanz	Redundanzanteile
α_1, s_1	0	0 0
α_1, s_1, s_2	1	0 0,5 0,5
$\alpha_1, \alpha_2, s_1, s_2$	2	0,5 0,5 0,5 0,5

Minimal aufdeckbarer Beobachtungsfehler ∇l_i^2

Nichtzentralitätsparameter

$$\delta_i = \frac{\Delta l_i^2 \cdot p_i^2 \cdot q_{vv,i}}{\sigma_0^2} \Leftrightarrow \Delta l_i^2 = \frac{\delta_i \cdot \sigma_0^2}{p_i^2 \cdot q_{vv,i}}$$

→ Übergang auf Grenzwert δ_0

$$\begin{aligned}\nabla l_i &= \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{\delta_0}{p_i^2 \cdot q_{vv,i}}} \\ &= \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{\delta_0}{p_i \cdot r_i}} \\ &= \sigma_i \cdot \sqrt{\frac{\delta_0}{r_i}} \quad \text{mit} \quad \sigma_i = \sigma_0 \frac{\delta_0}{r_i}\end{aligned}$$

Dieser Wert gibt an, wie groß ein Beobachtungsfehler werden muss, um mit anschließenden Test aufgedeckt zu werden.

$$\nabla l_i \rightarrow \min$$

Häufige Forderung

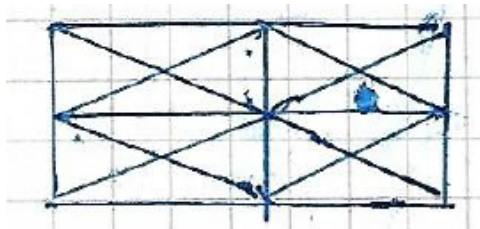
$$\nabla l_i \text{ (6 bis 8) } \sigma_i$$

Äußere Zuverlässigkeitsmaße

Null

Vergleich verschiedenen Messverfahren

anhand der Bedingungs-dichte a. Streckennetz



(c) Streckennetz: 4 Diagonalenvierecke

$$n = 20$$

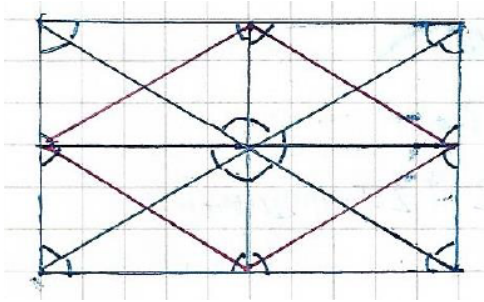
$$v = 2 \times 9 = 18$$

$$d = 3$$

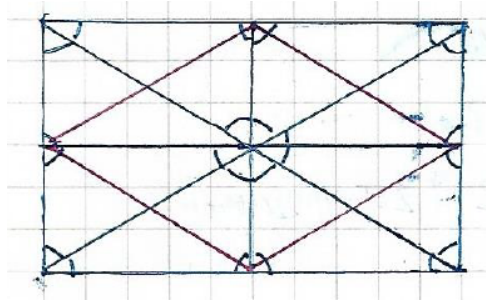
$$f = 20 - 18 + 3 = 15$$

$$b = \frac{f}{n} = 0,25$$

b. Winkelnetz



(d) 1 diagonal



(e) 2 diagonal

b1. eine Diagonale pro Viereck

$n = 18(\text{Aussenwinkel}) + 5(\text{Innenwinkel})$ da Summe der Winkeln immer 400 gon

$$n = 23$$

$$v = 18$$

$$d = 4$$

$$f = 9$$

$$b = \frac{9}{23} = 0,39$$

b2. zwei Diagonale pro Viereck

$$n = 24 + 7 = 31$$

$$f = 31 - 18 + 4 = 17$$

$$b = \frac{17}{31} = 0,55$$

c. kombinierte Netze

Diagonal Vierecke mit Strecken und Winkeln(a + b2)

$$n = 31(\text{Winkeln}) + 20(\text{Strecken}) = 51$$

$$v = 18$$

$$d = 3$$

$$f = 36$$

$$b = \frac{36}{51} = 0,71$$

In der Realität: 0,5 bis 0,6

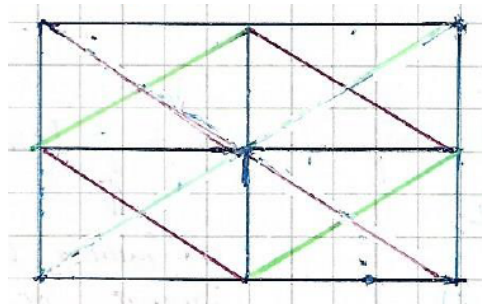
d. Polygonzug als negative Beispiel(beideseitig angeschlossen)(obwohl kombiniertes Netz)

$$f = 3$$

$$b = \frac{b}{n} = \frac{3}{n} = \frac{3}{v+3}$$

Punktanzahl	v	b
1	2	0,6
2	4	0,43
3	6	0,33
4	8	0,27
5	10	0,23

e.Lagenetz mit GNSS



(f) GNSS

e1.(blau) (12 Beobachtungen \rightarrow 24 Koordinaten)

e2.(blau,rot) (16 Beobachtungen, 32 Koordinaten)

e3.(blau,rot,grün) (20 Beobachtungen, 40 Koordinaten)

$v = 18, d = 2$, da Rotation und Maßstab gemessen

	e1	e2	e3
b	8	16	24
f	0,33	0,5	0,6

- GNSS und kombiniertes Netz bringen vergleichbare gute Ergebnisse
- Streckennetz und insbesondere Polygonzug fallen deutlich ab
- Winkelnetz erfordert hohen Aufwand um mit GNSS oder Kombinationslösung zu konkurrieren.

1.4 Datumsdefinition

$$r_Q = v - d$$

Durch Beobachtung der Datumparameter kann der Datumdefekt reduziert werden. Die Kompensation kann verhindert werden, wenn die entsprechende Parameter geschätzt wird, deshalb muss diese Möglichkeit nicht genutzt werden (z.B Maßstabsschätzung trotz Streckenmessung)

1.5 Datumsverfügung

5-a Einfügung

Datumsverfügung kann geschehen durch

a. Nutzung von Festpunkte

→ hierarchische Ausgleichung, Normalgleichungsmatrix N ist regulär und invertierbar.

b. Nutzung von Datumpunkte

freie Ausgleichung

→ Normalgleichungsmatrix N ist singulär und nicht invertierbar. (Pseude-inverse nötig)

Bei singuläre Matrix N benötigt man Ränderungsmatrizen G

$$\begin{bmatrix} N & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} N^+ & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix}$$

Im Prinzip ist G frei wählbar und muss nur den Rangabfall ausgeglichen.

N : zu invertierende Matrix

G : Ränderungsmatrix

N^+ : Moor – Penrose – Inverse / Pseude Inverse

Forderung:

$$N \cdot G = 0$$

$$G^T \hat{x} = 0 \text{ (zusätzlich)}$$

Dimension von G : $u \times d$, u ist Anzahl der Unbekannter, d ist Anzahl der Datumdefekt.

Alternative Ränderungsmatrix über Spektralzerlegung:

$$N = S \cdot D \cdot S^T$$

D : Spektralmatrix

S^T : Modelmatrix mit Eigenvektoren

$$S = (S_r, S_0)$$

$$\dim(S_r) = q, r_Q$$

$$\dim(S_0) = q, d$$

$S_0 = G$: normierte Ränderungsmatrix.

Allgemeine Ränderungsmatrizen B über sogenannten Helmertbedingungen.

$$g_{ij} = \frac{b_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^u b_{ij}^2}}, \quad j = 1, 2, \dots, d$$

Überführung von B nach G .

Ableitung von G aus B für 1D-Fall

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{u}} \\ \frac{1}{\sqrt{u}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{u}} \end{bmatrix}, da \sum b_i^2 = u$$

Gesamtspurminimierung:

→ Alle Punkte tragen zur Datumfestlegung bei.

Inversion

$$N^+ = (N + GG^T)^{-1} - GG^T$$

außerdem: \hat{x} mit minimalem Norm, $\hat{x}^T \hat{x} \rightarrow \min$

Teilspurminimierung

→ Nur ein Teil der Punkte tragen zur Datumfestlegung bei.

$$G_i = E_i G$$

$$E_i = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Auswahlmatrix})$$

I_p hat Dimension der Anzahl der Datumfestliegende Koordinaten p

$$G_i = E_i G = \begin{bmatrix} G_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

Inversion:

$$\begin{bmatrix} N & G_i \\ G_i^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} N^{-1} & G(G_i^T G)^{-1} \\ (G^T G_i)^{-1} G^T & 0 \end{bmatrix}$$

N^{-1} ist generalisierte Inverse von N mit minimaler Teilspur für p Koordinaten und minimaler Norm für p Koordinaten.

$$N^{-1} = (N + G_i G_i^T)^{-1} - G(G_i^T G)^{-1} (G^T G_i)^{-1} G^T$$

Übergang zur Gesamtspurminimierung

Es gilt $G^T G = I$ und es wird $E_i = I$ und $G_i = G$

$$\begin{aligned} N^- &= (N + GG^T)^{-1} - G(G^T G)^{-1} (G^T G)^{-1} G^T \\ &= (N + GG^T)^{-1} - GG^T \\ &= N^+ \end{aligned}$$

Übergang zur zwangsfreien Netz mit $p = d \rightarrow N^- = N^+ \rightarrow \hat{x}^T \hat{x}$ wird Null.

1.6 Datumstransformationen

6-a Allgemeines

6-b Kombination von terrestrischen und GNSS messungen

Generelle Vorgehensweise 3D Datumsübergang.

- \mathbf{x} : Koordinatensystem "GNSS" (WGS 84)
- $\bar{\mathbf{x}}$: Landeskoordinatensystem(ETRS 89)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (1 + m)\mathbf{R}\bar{\mathbf{x}} \quad \text{Transformationsgleichung}$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad \text{Translationen}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rotationsmatrix mit den Rotationen } \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$$

m : Massstab

$\Rightarrow 7$ Parametern: $m, x_0, y_0, z_0, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$

Bestimmung der Datumparameter.

für Punkt i :

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + (1 + m)(\bar{x}_i + \varepsilon_z \cdot \bar{y}_i - \varepsilon_y \cdot \bar{z}_i) \\ y_i &= x_0 + (1 + m)(-\varepsilon_z \cdot \bar{x}_i + \bar{y}_i + \varepsilon_x \cdot \bar{z}_i) \\ z_i &= x_0 + (1 + m)(\varepsilon_y \cdot \bar{x}_i - \varepsilon_x \cdot \bar{y}_i + \bar{z}_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + \bar{x}_i + \varepsilon_z \cdot \bar{y}_i - \varepsilon_y \cdot \bar{z}_i + m \cdot \bar{x}_i + m \cdot (\varepsilon_z \cdot \bar{y}_i - \varepsilon_y \cdot \bar{z}_i) \\ &\approx x_0 + \bar{x}_i + \varepsilon_z \cdot \bar{y}_i - \varepsilon_y \cdot \bar{z}_i + m \cdot \bar{x}_i \quad (\text{für kleine Drehwinkel}) \end{aligned}$$

\Rightarrow Gauß-Markov-Modell einsetzen!

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= (x_i - \bar{x}_i) = x_0 + \varepsilon_z \bar{y}_i - \varepsilon_y \bar{z}_i + m \bar{x}_i \\ \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta z_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \\ \Delta y_m \\ \Delta z_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{x}_1 & 0 & -\bar{z}_1 & \bar{y}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \bar{y}_1 & \bar{z}_1 & 0 & -\bar{x}_1 \\ 0 & 0 & 1 & \bar{z}_1 & -\bar{y}_1 & \bar{x}_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \bar{x}_m & 0 & -\bar{z}_m & \bar{y}_m \\ 0 & 1 & 0 & \bar{y}_m & \bar{z}_m & 0 & -\bar{x}_m \\ 0 & 0 & 1 & \bar{z}_m & -\bar{y}_m & \bar{x}_m & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ m \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Häufiges Problem:

Stochastisches Modell

$$\sum_{\Delta x \Delta x} = \sum_{xx} + \sum_{\bar{x}\bar{x}}$$

- \sum_{xx} häufig optimistisch, oft nicht 100% verfügbar.
- $\sum_{\bar{x}\bar{x}}$ aus historische Gründe oft nicht komplett vorhanden. (Abschätzung erforderlich!)