1

Kepler Elements to perifocal Frame:

$$\boldsymbol{r_f} = \begin{pmatrix} a \cdot (\cos E - e) \\ a \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot \sin E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\dot{r}_f} = \frac{n_a}{1 - a \cdot \cos E} \begin{pmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1-e^2} \cos E \\ 0 \end{pmatrix}$$

To ecef

$$\boldsymbol{r_e} = R_3(-\Omega) R_1(-I) R_3(-\omega) \boldsymbol{r_f}$$
$$\boldsymbol{\dot{r}_e} = R_3(-\Omega) R_1(-I) R_3(-\omega) \boldsymbol{\dot{r}_f}$$

Frage: ist folgende Gleichung gültig in ecef?

$$d \begin{pmatrix} \boldsymbol{r_e} \\ \boldsymbol{\dot{r}_e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\dot{r}_e} \\ -\frac{GM}{r^3} \cdot \boldsymbol{r_e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{f_e} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Da $\boldsymbol{r_e}$ vorhanden ist, kann man Länge, Breite und Höhe berechnen, mit den kriegt man die Atmosphäre Dichte ρ. Dann kann man aus ρ und $\boldsymbol{\dot{r}_e}$ die Atmosphärische Widerstand $\boldsymbol{f_e}$ berechnen mit Gleichung 2 Formen(Angenommen, die Geschwindigkeit von Atmosphäre ist 0):

$$\boldsymbol{f_e} = -\frac{1}{2} \cdot C_d \cdot \rho \cdot \frac{A}{m} \cdot \boldsymbol{\dot{r}_e} \cdot |\boldsymbol{\dot{r}_e}| \tag{2}$$

Wenn Gleichung 1 gültig ist, kann man die Koordinaten in ecef mit Runge-Kutta (ode45 Funktion in matlab) integrieren. Am Ende transformiert man die Koordinaten zurück in Kepler Element.

2

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left(e \sin\nu f_3 + \frac{p}{r} f_1 \right) \\
\dot{e} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left(\sin\nu f_3 + (\cos E + \cos\nu) f_1 \right) \\
\dot{I} &= \frac{r}{nab} \cos(\omega + \nu) f_2 \\
\dot{\Omega} &= \frac{r}{nab \sin I} \sin(\omega + \nu) f_2 \\
\dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left(-\cos\nu f_3 + \left(\frac{r}{p} + 1 \right) \sin\nu f_1 \right) - \cos I \, \dot{\Omega} \\
\dot{M} &= n - \frac{1}{na} \left(\frac{2r}{a} - \frac{1-e^2}{e} \cos\nu \right) f_3 - \frac{1-e^2}{nae} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin\nu f_1
\end{aligned}$$

Abbildung 1

Vereinfachung ($e = 0$):

$$
\begin{aligned}
\dot{a} &= \frac{2}{n} f_1 \\
\dot{e} &= \frac{1}{na} (\sin\nu f_3 + 2\cos\nu f_1) \\
\dot{I} &= \frac{1}{na} \cos u f_2 \\
\dot{\Omega} &= \frac{1}{na\sin I} \sin u f_2 \\
\dot{\omega} + \dot{M} &= n - \frac{e}{na} f_3 - \cos I \dot{\Omega}
\end{aligned}
$$

NB: drag // $\nu \neq$ along-track

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_t &= R_2(\kappa) \boldsymbol{f}_H \\
R_2(\kappa) &= \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos\nu}} \begin{pmatrix} 1 + e\cos\nu & 0 & -e\sin\nu \\ 0 & \sqrt{1 + e^2 + 2e\cos\nu} & 0 \\ e\sin\nu & 0 & 1 + e\cos\nu \end{pmatrix} \\
\text{with } \tan\kappa &= \frac{e\sin\nu}{1 + e\cos\nu}
\end{aligned}
$$

Abbildung 2

Das heißt, man kann direkt auf Kepler Element integrieren, aber f muss man zuerst in t-frame transformieren.