

1. (10 分) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{10^n}$$

的收敛域。

2. (10 分) 在  $(-1, 1)$  上展开函数

$$\arctan x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

为幂级数。

3. (10 分) 求瑕积分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}} dx$$

的值 (本题可用 B 函数和  $\Gamma$  函数)。

4. (10 分) 判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin(2n)}{n + \frac{1}{n}} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

的敛散性。

5. (10 分) 设  $E$  为实数。

- (1) (5 分) 求出所有的实数  $E$  使得

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} \right) dx$$

收敛。

- (2) (5 分) 求出所有的实数  $E$  使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \left( \frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} \right) dx$$

收敛 (本小题可用  $\Gamma$  函数)。

6. (10 分) 对于每个  $x \in [0, 1]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 定义

$$f_1(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4} dt$$
$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

证明  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[0, 1]$  上一致收敛。

7. (15 分) 设  $b$  是实数。

(1) (5 分) 证明含参变量  $b$  的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x \cos(2bx) dx$$

在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛。

(2) (10 分) 证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^b e^{-t^2} dt$$

8. (15 分)

(1) (10 分) 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是周期为  $2\pi$  的函数,  $f(x)$  在  $(-\pi, \pi]$  上等于  $e^x$ , 求出  $f(x)$  的傅里叶级数, 并且求出  $f(x)$  的傅里叶级数在  $x = \pi$  处的和。

(2) (5 分) 求出级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$  的和。

9. (10 分) 设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  收敛, 每项  $a_n > 0$ ,  $T$  是序列  $\{a_n\}$  中的最大项。对于每个实数  $x > 0$ , 定义  $L(x)$  是序列  $\{a_n\}$  中大于  $x$  的项的个数。

(1) (2 分) 证明: 0 是  $L(x)$  的瑕点。

(2) (8 分) 证明: 瑕积分  $\int_0^T L(x) dx$  收敛, 并且

$$\int_0^T L(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$