北京大学数学科学学院 23-24(2) 高等数学 B（二）期末试题

姓名: ________________ **学号**: ________________ **共 9 道大题**

1.（10 分）求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{10^n}$$

的收敛域。

2.（10 分）在 $(-1,1)$ 上展开函数

$$\arctan x + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

为幂级数。

3.（10 分）求瑕积分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\mathrm{d}x$$

的值（本题可用 B 函数和 Γ 函数）。

4.（10 分）判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(2n)}{n+\frac{1}{n}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

的敛散性。

5.（10 分）设 E 为实数。

（1）（5 分）求出所有的实数 E 使得

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(Ex)^n}{n!}e^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

收敛。

（2）（5 分）求出所有的实数 E 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{(Ex)^n}{n!}e^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

收敛（本小题可用 Γ 函数）。

6.（10 分）对于每个 $x \in [0,1]$，$n = 1, 2, \cdots$，定义

$$f_1(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t$$
$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$$

证明 $\int_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

7.（15 分）设 b 是实数。

（1）（5 分）证明含参变量 b 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x \cos(2bx)\mathrm{d}x$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。

（2）（10 分）证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2bx)\, dx = e^{-b^2} \int_0^b e^{t^2} dt$$

8.（15 分）

（1）（10 分）设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数，$f(x)$ 在 $(-\pi, \pi]$ 上等于 e^x，求出 $f(x)$ 的傅里叶级数，并且求出 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = \pi$ 处的和。

（2）（5 分）求出级数 $\int_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ 的和。

9.（10 分）设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，每项 $a_n > 0$，T 是序列 $\{a_n\}$ 中的最大项。对于每个实数 $x > 0$，定义 $L(x)$ 是序列 $\{a_n\}$ 中大于 x 的项的个数。

（1）（2 分）证明：0 是 $L(x)$ 的瑕点。

（2）（8 分）证明：瑕积分 $\int_0^T L(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并且

$$\int_0^T L(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$