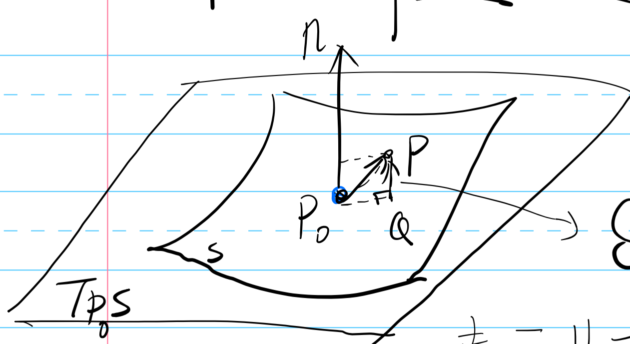
§第二基本形式

1. 点P_0的邻近点与T_pS的"距离"(离差)



$\delta(P, T_{P_0}S) = \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}$

大小表示曲面远离切平面的程度

对于 $P_0(u, v)$ $P(u+\Delta u, v+\Delta v)$

$\overrightarrow{P_0P} = r(u+\Delta u, v+\Delta v) - r(u, v) = \Delta r$

泰勒 $= dr + \frac{1}{2}d^2r + o(\Delta u^2 + \Delta v^2)$

$\approx dr + \frac{1}{2}d^2r$ 都是向量.

$\Rightarrow \delta = \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2}d^2r \cdot n$

$= \frac{1}{2} \cdot (r_{uu}du^2 + 2r_{uv}\,du\,dv + r_{vv}dv^2) \cdot n$ → 关于 du dv 的二次型.

定义 曲面 $S: r=r(u,v)$ 上的二次微分形

$$d^2r\cdot n=(r_{uu}\cdot n)du^2+2(r_{uv}\cdot n)du\,dv+(r_{vv}\cdot n)dv^2$$ 称为曲面 S 的第二基本形式 记为 II

系数 $L=r_{uu}\cdot n \quad M=r_{uv}\cdot n \quad N=r_{vv}\cdot n$

第二基本量 → 数量

即：$\mathrm{II}=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$

又因 $dr\cdot n=0$. $r_u\cdot n=0=r_v\cdot n$

微分 ↓

另一种表达

$$\begin{cases} d^2r\cdot n+dr\cdot dn=0 \\ \mathrm{II}=-dr\cdot dn=d^2r\cdot n \\ L=r_{uu}\cdot n=-r_u\cdot n_u \\ M=r_{uv}\cdot n=-r_u\cdot n_v=-r_v\cdot n_u \\ N=r_{vv}\cdot n=-r_v\cdot n_v \end{cases}$$

矩阵形式 $\Rightarrow$ $$\mathrm{II}=(du,dv)\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}$$

一种映射：

$x, y \in T_pS$

$$\mathrm{II}(x,y)=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$ 双线性映射

$$\mathrm{II}=\mathrm{II}(dr,dr)$$

不变性 定理：II 在保持定向的参数变换及合同变换是不变的

否则改变符号（不保持定向）

参数变换：$(u,v)\to(\bar{u},\bar{v})$

$$r_{\bar{u}}\times r_{\bar{v}}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}r_u\times r_v$$

合同 $\bar{P}=PR+P_0$

计算 $L = r_{uu}\cdot n = \dfrac{(r_u, r_v, r_{uu})}{|r_u \times r_v|} = \dfrac{(r_u, r_v, r_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}}$ → 混合积 （拉格朗日恒等式）

$M = \dfrac{(r_u, r_v, r_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}}$，$N = \dfrac{(r_u, r_v, r_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}}$

例：$r = (u, v, 0)$ $\mathrm{II} = 0$ （平面）

$r = (a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta)$（球面）

$\mathrm{I} = a^2(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2)$

$\Rightarrow \sqrt{EG-F^2} = \sqrt{a^4\cos^2\theta} = a^2\cos\theta$ $\left(\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\Rightarrow r_\theta = (-a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$

$r_\varphi = (-a\cos\theta\sin\varphi, +a\cos\theta\cos\varphi, 0)$

$r_{\theta\theta} = (-a\cos\theta\cos\varphi, -a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta)$

$r_{\varphi\varphi} = ($

$L = \dfrac{1}{a^2\cos\theta}\begin{vmatrix} r_{\theta x} & r_{\theta y} & r_{\theta z} \\ r_{\varphi x} & r_{\varphi y} & r_{\varphi z} \\ r_{\theta\theta x} & r_{\theta\theta y} & r_{\theta\theta z} \end{vmatrix} = a$

$\Rightarrow \mathrm{II} = a(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2) = \dfrac{1}{a}\mathrm{I}$

如果 $\mathrm{II} = \lambda \mathrm{I}$ 时，这种曲面叫全齐曲面。

是球面 or 平面.