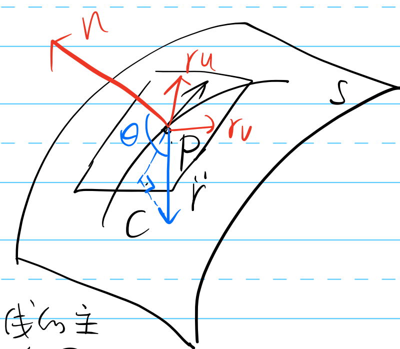
§ 法曲率和 Weingarten 变换

一、法曲率

1. 曲面上曲线的法曲率



$C: r = r(u(s), v(s))$

曲率向量：$\ddot{r} = k \cdot N$ 曲线的主法向量

$\ddot{r}$ 有可能在 T_pS 外.

在活动标架上分解. $\ddot{r} = kN = \underbrace{\lambda r_u + \mu r_v}_{\text{切向部分}} + \underbrace{\nu n}_{\text{法向部分}}$

$= (\ddot{r})^{T} + (\ddot{r})^{\perp}$

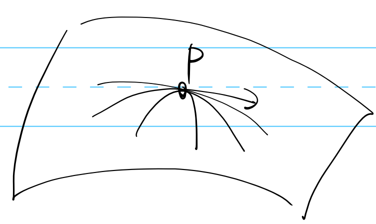
测地曲率部分. 内蕴几何

法曲率

定义：法曲率：$(\nu =)\ k_n := \ddot{r} \cdot n = k\, N \cdot n = k\cos\theta$

其中 $\theta = \angle(N, n)$

$k_n = \frac{d^2 r}{ds^2} \cdot n = \frac{d^2 r \cdot n}{ds^2} =$ 第二基本形式



$s = \int_{t_0}^{t} |r'| dt \Rightarrow ds = r' dt = \left|\frac{dr}{dt}\right| dt$

$= |dr|$

$ds^2 = dr^2 = \mathrm{I}$

$$\Rightarrow k_n = \frac{\mathrm{II}(dr,dr)}{\mathrm{I}(dr,dr)}$$

命题（梅尼埃定理）曲面上两条相切的曲线在切点上有相同法曲率

故法曲率是反映曲面的弯曲程度

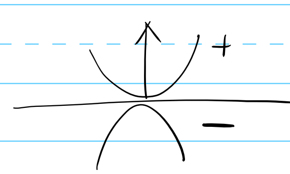
2、曲面上法曲率

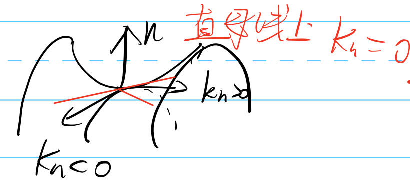
$$k_n(X) = \frac{\mathrm{II}(X,X)}{\mathrm{I}(X,X)} = k_n(\lambda X) \quad \text{(与长度无关)}$$

若X为单位向量，$k_n(X)=\mathrm{II}(X,X)$

3、法曲率的几何意义

$k_n(X)$ 描述了曲面上一点沿X的弯曲程度与弯曲方向





对于球面 $k_n=\pm\frac{1}{a}$