§曲面的定义

一、正则曲面：设 $D \subset \mathbb{R}^2$（平面一区域）

映射 $r: D \to \mathbb{R}^3$

满足 (1) $r(u,v) \in C^k(D)$ → k阶连续可微

(2) $r_u \times r_v \neq 0$，在 $\forall (u,v) \in D$.

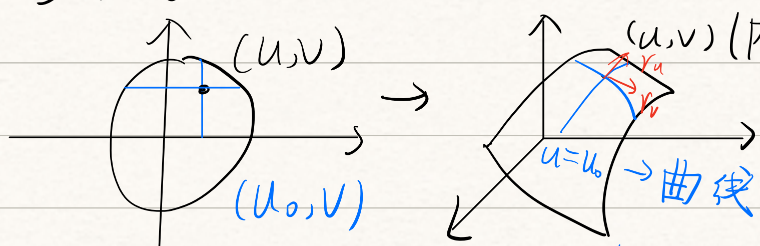
偏导不平行

→ 保证局部一一对应连续

则 r 为 C^k 曲面（片区域）

映射　$k \to \infty$　光滑曲面

参数表示：S（像）　$r = r(u,v)$，$(u,v) \in D$

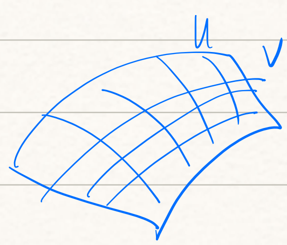


$r = r(u_0, v)$ → v的一元函数.曲线

坐标曲线 $\begin{cases} v\text{-曲线　表示为 } u=u_0 \\ u\text{-曲线} \end{cases}$

r_u：u曲线切向量.　坐标切向量.

r_v：~~~~~~



坐标曲线网（参数网）

在任一点 r_u, r_v 不相切

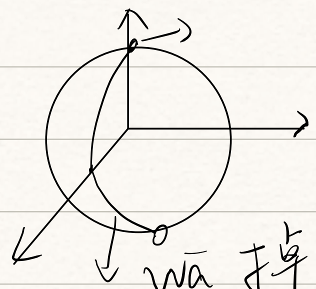
不平行.

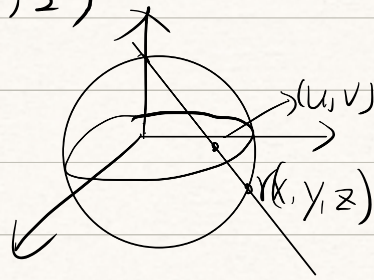
例 $r=r_0+u\vec{a}+v\vec{b}$. $r_u\times r_v=a\times b$

$a\times b$

球：$r=(a\cos v\cos u,\ a\cos v\sin u,\ a\sin v)$

$u\in(0,2\pi)$ $v\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$





（全息投影）

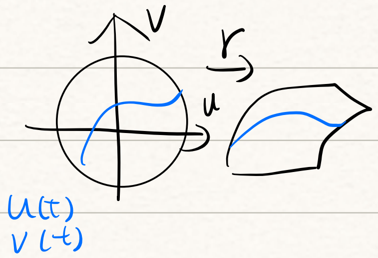
显式 $z=f(x,y)$ 也是正则. $r=(u,v,f(u,v))$

$r_{\cancel{x}}=(0,1,f_v)$

$r_u=(1,0,f_u)$

二、切平面与法线

1、曲面上曲线 $\begin{cases}u=u(t)\\ v=v(t)\end{cases}$



2、切向量

$r=r(u(t),v(t))$

$r'=r_uu'+r_vv'$

$=u'\vec{r_u}+v'\vec{r_v}$

$\underbrace{\text{曲面上的切向量}}_{\text{(曲线)}}$：$\underbrace{\text{切向量 切向量}}_{\text{线性组合}}$

3、切平面：r_u,r_v确定的切平面

T_pS（S在P点上的切平面）

$T_pS:\ r_0+\lambda r_u+\mu r_v$

单位法向量：$n=\frac{r_u\times r_v}{|r_u\times r_v|}$

$T_pS:\ (\rho-r)\cdot n=0$

点法式方程

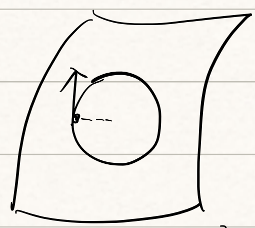
$(\rho-r,\ r_u,\ r_v)=0$

点位式

法线 $\rho(\lambda) = r + \lambda \cdot n$ 一点的法线

$r \to u,v$　　$n \to u,v$

4、曲面定向：单位法向量沿任意曲线转1周方向重合



可定向曲面 方向 由r_u, r_v确定

反例 莫比乌丝带.

三、可允许的参数变换

设变换 $\sigma: D \to \tilde{D}$

$(u,v) \to (\tilde{u}, \tilde{v})$

满足 (1) σ 是一一映射

(2) σ, σ^{-1} 为 C^k

(3) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} \neq 0 \Rightarrow$ 保证正则

$$r_{\tilde{u}} \times r_{\tilde{v}} = \underline{\underline{\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}}} \cdot r_u \times r_v$$

雅克比行列式：$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix}$

(4) 定向不变 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} > 0$

命题2. 曲面的切平面在参数变换下不变