一、第一基本形式

$S: r = r(u,v)$ ，$(u,v) \in D$

$X = \lambda r_u + \mu r_v \in T_p S$

$dr = r_u du + r_v dv$ → 切向量

度量：$dr^2 = r_u^2 du^2 + r_v^2 dv^2 + 2 r_u r_v du dv$

定义：为曲面的第一基本形式 记为 I

系数 $E = r_u^2$ ，$F = r_u r_v$ ，$G = r_v^2$，称为第一基本量

即：$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$　　$E > 0$，$G > 0$

$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 = r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2 = (r_u \times r_v)^2 > 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 为正定矩阵

$\Rightarrow I = (du\ dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ → 正定二次型 → $(du, dv) \neq 0$

$\Rightarrow$ 代入 $I > 0$

二、度量矩阵

$(e_1, e_2, e_3 \cdots e_n)$ 基 度量矩阵 $(\langle e_i \cdot e_j \rangle)$

$e_1 = r_u,\ e_2 = r_v \Rightarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = (\langle e_i, e_j \rangle)$

定义出曲面内积，诱导度量，$x, y \in T_pS$.

$I(x,y) = \langle x, y \rangle = x y^T$

$x = x_1 r_u + x_2 r_v = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}$　　$y = y_1 r_u + y_2 r_v$

$\Rightarrow x \cdot y^T = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

意义：不需要知道在三维空间的形式就可求内积

内积可导出 ① 弧长：求 $C: \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ 的弧长

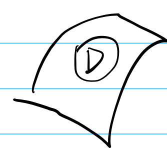
$$S = \int_{t_1}^{t_2} |r'(t)|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{I(r'(t), r'(t))}\,dt$$

可省略外部信息.

即用内蕴的量就可知曲面的信息.

② 夹角

③ 面积 $\sigma_D = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$



命题：曲面上参数曲线网为正交网 $\Leftrightarrow F = 0$ $(r_u \cdot r_v = 0)$

三、第一基本条件的不变性

定理一 I是参数变化下的不变量。
但度量矩阵的参数不是不变的

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J^T, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \quad \left(\text{因为} \begin{pmatrix} r_{\tilde{u}} \\ r_{\tilde{v}} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} \right)$$

定理2 I与度量矩阵均为合同变换的不变量.

设 $\sigma : R^3 \to R^3$ 合同变换
点 $P \to PR + P_0$ 　 R：正交矩阵，$P_0 \in R^3$.

令 $\tilde{r} = rR + P_0$
$\tilde{r}_u = r_u R$
$\tilde{r}_v = r_v R$
$\to$ $\tilde{E} = E$, $\tilde{F} = F$, $\tilde{G} = G$, $\tilde{I} = I$

四：曲线族和曲线网的微分方程.

曲线族 $Adu + Bdv = 0$ 　 $A(u,v)$, $B(u,v)$ 　 $(A, B \neq 0)$ 不同时为

假设 $A \neq 0$ 　 $u = \varphi(v, c)$ → 积分常数

切向量的关系式

曲线网 $Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 = 0$. 且 $B^2 - AC > 0$.

两组不同解. $du : dv$ 　 $\delta u\ \delta v$ 　 正规曲线网
若 $B^2 - AC > 0$ 则有两组, 称为网线网 全规

27节

此时：u曲线：$dv=0$

　　　v曲线：$du=0$

　　　参数网：$dudv=0$

正交性：$\begin{cases} Adu+Bdv=0 \\ Cdu+Ddv=0 \end{cases}$ 两族网线正交

$\Longleftrightarrow (-B,A)$ 与 $(-D,C)$ 正交

　　　　$du:dv$　　　$du:dv$

$\Longleftrightarrow (-B\ \ A)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -D \\ C \end{pmatrix}=0$

命题　一个曲线网 $Adu^2+2Bdudv+Cdv^2=0$ 是一个正交曲线网

$\Longleftrightarrow AE-2FB+CQ=0$.

命题　曲面上任一个正规曲线网 都可取为参数曲线网

命题　曲面上任点P，都∃邻域D，使在D上总可取到正交坐标网

令 $\begin{cases} dv=0. \\ Gdu+Fdv=0. \end{cases}$

u曲线

坐标变换

v曲线