

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρονικής και Υπολογιστών



Διπλωματική Εργασία

Αναγνώριση μη-γραμμικών συστημάτων μέσω ελέγχου προδιαγεγραμμένης απόκρισης

Ζήσης Κωνσταντίνος

Επιβλέπων Καθηγητής
Ροβιθάκης Γεώργιος

Θεσσαλονίκη, Μάιος 2018

todo

Σύνοψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της αναγνώρισης μη-γραμμικών χρονοαμετάβλητων δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου, σε ένα υποσύνολο του χώρου λειτουργίας τους. Η δυσκολία του εν λόγω προβλήματος οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο πρόβλημα της ικανοποίησης της συνθήκης της *επιμένουσας διέγερσης*. Ενώ πολλές δημοσιευμένες εργασίες έχουν ασχοληθεί με το πρόβλημα της αναγνώρισης μη-γραμμικών συστημάτων, ελάχιστες είναι αυτές που ασχολούνται με την ικανοποίηση της συνθήκης της *επιμένουσας διέγερσης* εκ των προτέρων, το οποίο αποτελεί τον στόχο της παρούσας μελέτης.

Βάση αυτής της εργασίας αποτελεί η έρευνα των *Kurdila, Narcowich και Ward* [1], η οποία παρουσιάζει κάποιες απαραίτητες προϋποθέσεις για την ικανοποίηση της συνθήκης *επιμένουσας διέγερσης* για την κλάση των μαθηματικών μοντέλων *RBF*.

Απαραίτητα δομικά στοιχεία αυτής της εργασίας είναι αφενός τα *τεχνητά νευρωνικά δίκτυα RBF*, τα οποία λόγω των προσεγγιστικών τους ιδιοτήτων [2] αποτελούν ένα άριστο μαθηματικό μοντέλο για το πρόβλημα της τοπικής αναγνώρισης συναρτήσεων, και αφετέρου ο *έλεγχος προδιαγεγραμμένης απόκρισης* [3] ο οποίος μας επιτρέπει την παρακολούθηση μιας επιθυμητής τροχιάς ακόμα και υπό την πλήρη έλλειψη γνώσεων για το ελεγχόμενο σύστημα.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω εργαλεία, παρουσιάζουμε ένα σχήμα αναγνώρισης το οποίο εξασφαλίζει την ικανοποίηση της συνθήκης της *επιμένουσας διέγερσης* και κατά συνέπεια την επιτυχή αναγνώριση της δυναμικής του άγνωστου συστήματος σε μια προκαθορισμένη περιοχή του χώρου λειτουργίας του δοθέντος συστήματος.

Τέλος, τόσο με την χρήση μαθηματικών επιχειρημάτων όπως οι συναρτήσεις *Lyapunov* αλλά όσο και με την χρήση προσομοιώσεων, αποδεικνύεται η ορθότητα της προαναφερθείσας μεθοδολογίας.

Abstract

The objective of this thesis is the problem of nonlinear, time invariant, continuous time system identification in a certain area of interest. The difficulty of the aftermentioned problem lies in the satisfaction of the *Persistency of Excitation* condition. While there are many studies on nonlinear system identification, only a few consider the a priori satisfaction of the *Persistency of Excitation* condition, which is the main goal of this study.

The results of *Kurdila, Narcowich* and *Ward* in [1] provide the necessary conditions for the satisfaction of the *Persistency of Excitation* when using *Radial Basis Function (RBF) Approximants*. This work provides the fundamental theoretical background for the development of the proposed identification scheme.

The basic components of this study consist of the *RBF Neural Networks*, which are an ideal mathematical model for universal nonlinear function approximation due to their approximation capabilities [2], as well as the *Prescribed Performance Control* methodology [3] which enables trajectory tracking even under complete lack of knowledge on the controlled system.

Based on the after mentioned results, we present an identification scheme capable of *a priori* guaranteeing the satisfaction of the *Persistency of Excitation* condition, thus achieving identification of the underlying nonlinear dynamics of the given system in a predefined area of interest.

Finally, using mathematical arguments such as *Lyapunov* stability theory as well as computer simulations of real world systems, we provide satisfactory results to demonstrate the effectiveness of the proposed scheme.

Ευχαριστίες

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Εισαγωγικές Έννοιες	1
1.1.1	Μαθηματικά Μοντέλα	1
1.1.2	Εκτίμηση Παραμέτρων	3
1.2	Εφαρμογές της Αναγνώρισης Συστημάτων	3
1.3	Ιστορική Αναδρομή	4
1.3.1	Αρχικές Προσπάθειες	5
1.3.2	Επιμένουσα Διέγερση για Μη-Γραμμικά Συστήματα	5
1.3.3	Πρόσφατη Βιβλιογραφία	6
1.4	Δομή της Διπλωματικής Εργασίας	7
2	Μαθηματικά Εργαλεία	9
2.1	Νευρωνικά Δίκτυα RBF	9
2.1.1	Αρχιτεκτονική	10
2.1.2	Προσεγγιστικές Ιδιότητες	12
2.2	Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης	13
2.2.1	Παράδειγμα 1: Μη ικανοποίηση της Σ.Ε.Δ	14
2.2.2	Παράδειγμα 2: Σ.Ε.Δ και ποιότητα εκτίμησης	17
2.2.3	ΣΕΔ για RBF νευρωνικά δίκτυα	19
2.3	Έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης	19
2.3.1	Ορισμός του προβλήματος	20
2.3.2	Μετασχηματισμός σε πρόβλημα σταθεροποίησης	22
2.4	Σύστημα Αναφοράς	23
2.4.1	Μαθηματική Ανάλυση	24
2.4.2	Μορφή κλειστού βρόγχου	26
2.4.3	Παραδείγματα χρήσης	27
2.5	Δυναμικά Συστήματα	27
3	Σχήμα Αναγνώρισης	29
3.1	Ορισμός του Προβλήματος	29
3.1.1	Δομή του συστήματος	29
3.1.2	Υποθέσεις	30
3.1.3	Διατύπωση του προβλήματος αναγνώρισης	30
3.2	Γενική Ιδέα του Σχήματος Αναγνώρισης	31
3.3	Σχεδίαση Κλειστού βρόγχου	32
3.3.1	Προσέγγιση με Νευρωνικά Δίκτυα	32
3.3.2	Βήματα Σχεδίασης	34
3.4	Μαθηματική Ανάλυση	35

3.4.1	Πρόβλημα παρακολούθησης τροχιάς	36
3.4.2	Παραμετροποίηση του Συστήματος Αναφοράς	41
3.4.3	Επιμένουσα Διέγερση	42
4	Πειραματικά Αποτελέσματα	45
4.1	Αναγνώριση αθροισμάτων γκαουσιανών	45
4.1.1	Συστήματα MEME	45
4.1.2	Συστήματα ΠΕΠΕ	48
4.2	Πραγματικά Συστήματα	51
4.2.1	Φαινόμενο Wing Rock	51
4.2.2	Ταλαντωτής <i>Van der Pol</i>	53
4.2.3	Βραχίονας δυο βαθμών ελευθερίας	57
4.2.4	Ρομποτικός βραχίονας	57
4.3	Παρατηρήσεις	60
5	Συμπεράσματα και Βελτιώσεις	63
5.1	Βελτιώσεις στο Σχήμα	63
5.1.1	Αρχική Προσέγγιση	63
5.1.2	Επέκταση του πλέγματος αναγνώρισης	65
5.1.3	Σειρά προσπέλασης κέντρων	66
5.1.4	Συμπέρασμα	68
5.2	Αξιολόγηση Συστημάτων	68
5.2.1	Επιλογή του $u(t)$	69
5.2.2	Αποτελέσματα Αξιολόγησης	70
6	Βιβλιογραφία	75

Κατάλογος σχημάτων

2.1	Αρχιτεκτονική Νευρωνικού Δικτύου RBF	10
2.2	Γκαουσιανή συνάρτηση ενεργοποίησης. Το κέντρο c είναι το σημείο στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει την μέγιστη τιμή, ενώ η διασπορά σ καθορίζει τον ρυθμό που η συνάρτηση μειώνεται όσο το x απομακρύνεται από το c	11
2.3	Προσέγγιση της $f(x) = 1 + x$ από ένα απλό RBF νευρωνικό δίκτυο.	12
2.4	Προσέγγιση με πυκνότερο δίκτυο	13
2.5	Προσέγγιση της \sqrt{x} από ράμπες	15
2.6	Γεωμετρικός τόπος του $\Phi(x)$ στο Ω	16
2.7	18
2.8	Προσέγγιση της $f(x)$ του Παραδείγματος 2.	18
2.9	Μαθηματική περιγραφή της Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης	21
2.10	Συνάρτηση Μετασχηματισμού	23
2.11	Τροχιές αναφοράς που διέρχονται από τα επιθυμητά κέντρα c	27
4.1	Χρονική εξέλιξη των βαρών $\hat{W}_\varphi(t)$ (αριστερά) και $\hat{W}_\gamma(t)$ (δεξιά) συναρτήσει του χρόνου για το Πείραμα 4.1.1.	47
4.2	Τροχιά $x(t)$ στο επίπεδο καταστάσεων $x_1 - x_2$ του Πειράματος 4.1.1.	47
4.3	Τροχιά $x(t)$ και κέντρα RBF στο Πείραμα 4.1.2	49
4.4	Χρονική εξέλιξη των βαρών $\hat{W}_{\varphi_1}(t)$ (αριστερά) και $\hat{W}_{\varphi_2}(t)$ (δεξιά) για το πείραμα 4.1.2	50
4.5	Χρονική εξέλιξη των βαρών $\hat{W}_{\gamma_{11}}(t)$ (αριστερά) και $\hat{W}_{\gamma_{12}}(t)$ (δεξιά) για το πείραμα 4.1.2	50
4.6	Χρονική εξέλιξη των βαρών $\hat{W}_{\gamma_{21}}(t)$ (αριστερά) και $\hat{W}_{\gamma_{22}}(t)$ (δεξιά) για το πείραμα 4.1.2	50
4.7	Χρονική εξέλιξη των βαρών $\hat{W}_\varphi(t)$ (αριστερά) και της σταθεράς $\hat{w}_{\gamma_0}(t)$ (δεξιά) συναρτήσει του χρόνου.	52
4.8	Προσέγγιση της συνάρτησης $\varphi(x)$ (αριστερά) και το σφάλμα $\tilde{\varphi}(x)$ (δεξιά) στο πείραμα <i>Wing Rock</i>	53
4.9	Χρονική εξέλιξη των βαρών $\hat{W}_\varphi(t)$ (αριστερά) και της σταθεράς $\hat{W}_\gamma(t)$ (δεξιά) συναρτήσει του χρόνου για το Πείραμα 4.2.2	54
4.10	Σύγκριση των συναρτήσεων $\varphi(x)$ (αριστερά) και $\gamma(x)$ (δεξιά) με τις προσεγγίσεις τους $\hat{\varphi}(x)$ και $\hat{\gamma}(x)$ αντίστοιχα για το πείραμα αναγνώρισης του ταλαντωτή <i>Van Der Pol</i> . Με γκρι (transparent) απεικονίζονται οι πραγματικές συναρτήσεις ενώ οι χρωματισμένες επιφάνειες είναι οι προσεγγίσεις αυτών.	55
4.11	Σφάλμα $\tilde{\varphi}(x)$ στο σύνολο Ω_x	56
4.12	Σφάλμα $\tilde{\gamma}(x)$ στο σύνολο Ω_x	57

4.13	Χρονική εξέλιξη επιλεγμένων βαρών των προσεγγίσεων $\hat{\varphi}_1(x)$ και $\hat{\gamma}_{11}(x)$	59
4.14	Σύγκριση των συναρτήσεων $\gamma_{11}(x)$ (αριστερά) και $\gamma_{12}(x)$ (δεξιά) με τις προσεγγίσεις τους $\hat{\gamma}_{11}(x)$ και $\hat{\gamma}_{12}(x)$ αντίστοιχα. Με γκρι (transparent) απεικονίζονται οι πραγματικές συναρτήσεις ενώ οι χρωματισμένες επιφάνειες είναι οι προσεγγίσεις αυτών.	61
4.15	Σύγκριση των συναρτήσεων $\gamma_{21}(x)$ (αριστερά) και $\gamma_{22}(x)$ (δεξιά) με τις προσεγγίσεις τους $\hat{\gamma}_{21}(x)$ και $\hat{\gamma}_{22}(x)$ αντίστοιχα. Με γκρι (transparent) απεικονίζονται οι πραγματικές συναρτήσεις ενώ οι χρωματισμένες επιφάνειες είναι οι προσεγγίσεις αυτών.	61
5.1	Χρονική εξέλιξη επιλεγμένων βαρών των προσεγγίσεων $\hat{\varphi}_1(x)$ και $\hat{\gamma}(x)$	64
5.2	Προσεγγίσεις των συναρτήσεων $\varphi(x)$ (αριστερά) και $\gamma(x)$ (δεξιά) στο παράδειγμα 5.1.1	65
5.3	Επαυξημένο πλέγμα. Τα αρχικά κέντρα συμβολίζονται με κόκκινο, ενώ τα νέα με μπλε.	65
5.4	Χρονική εξέλιξη επιλεγμένων βαρών των προσεγγίσεων $\hat{\varphi}(x)$ και $\hat{\gamma}(x)$ στην περίπτωση επαυξημένου πλέγματος	66
5.5	Προσεγγίσεις των συναρτήσεων $\varphi(x)$ (αριστερά) και $\gamma(x)$ (δεξιά) στο παράδειγμα 5.1.2	66
5.6	Χρονική εξέλιξη επιλεγμένων βαρών των προσεγγίσεων $\hat{\varphi}(x)$ και $\hat{\gamma}(x)$ στην περίπτωση επαυξημένου πλέγματος και διαφορετικής σειράς προσπέλασης	67
5.7	Προσεγγίσεις των συναρτήσεων $\varphi(x)$ (αριστερά) και $\gamma(x)$ (δεξιά) στο παράδειγμα 5.1.3	67
5.8	Αρχιτεκτονική αξιολόγησης δευτεροβάθμιου συστήματος	68
5.9	Ελλειψοειδής τροχιά του πραγματικού συστήματος για $\nu(t)$ της εξίσωσης (5.9)	71
5.10	Σφάλμα παρακολούθησης κατά την αξιολόγηση του συστήματος <i>Wing Rock</i>	71
5.11	Σφάλμα παρακολούθησης κατά την αξιολόγηση του συστήματος <i>Van Der Pol</i>	72
5.12	Σφάλματα παρακολούθησης της τροχιάς του πραγματικού συστήματος κατά την αξιολόγηση της μοντελοποίησης του ρομποτικού βραχίονα.	73

Κατάλογος πινάκων

4.1	Κέρδη σχήματος αναγνώρισης για το Πείραμα 4.1.1	46
4.2	$W_{\varphi_i}^*$ και $W_{\gamma_{ij}}^*$ του Πειράματος 4.1.2.	49
4.3	Παράμετροι σχήματος αναγνώρισης για το Πείραμα 4.1.2	49
4.4	Σταθερές θ_i της εξίσωσης (4.5)	51
4.5	Παράμετροι σχήματος αναγνώρισης για το φαινόμενο <i>Wing Rock</i> . . .	52
4.6	Στατιστικά στοιχεία προσεγγίσεων για το φαινόμενο <i>Wing Rock</i>	53
4.7	Παράμετροι σχήματος αναγνώρισης για τον ταλαντωτή <i>Van Der Pol</i> . .	54
4.8	Στατιστικά στοιχεία προσεγγίσεων για τον ταλαντωτή <i>Van Der Pol</i> . . .	56
4.9	Παράμετροι του συστήματος για το παράδειγμα 4.2.4	58
4.10	Παράμετροι σχήματος αναγνώρισης για τον ρομποτικό βραχίονα	59
4.11	Στατιστικά στοιχεία προσεγγίσεων για τον ρομποτικό βραχίονα	60
5.1	Παράμετροι σχήματος αναγνώρισης	64

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Από την πρώτη της εμφάνισης του πάνω στη γη, ο άνθρωπος κυριαρχείται από μια εναγώνια προσπάθεια κατάκτησης γνώσεων. Ορίζοντας ως σύστημα κάθε αντικείμενο ή ομάδα αντικειμένων τις ιδιότητες των οποίων θέλουμε να μελετήσουμε, με τον όρο *αναγνώριση συστημάτων* αναφερόμαστε στην διαδικασία εξαγωγής ενός μαθηματικού μοντέλου του πραγματικού συστήματος με βάση πειραματικά δεδομένα.

Το πρόβλημα της αναγνώρισης συστημάτων απασχολεί την επιστημονική κοινότητα για πάνω από μισό αιώνα. Το βασικό κίνητρο είναι πως ένα "καλό" μοντέλο του πραγματικού συστήματος είναι απαραίτητο για μια πληθώρα εφαρμογών. Έτσι λοιπόν ο σχεδιασμός κατάλληλων πειραμάτων, η επιλογή μαθηματικών μοντέλων καθώς και η ανάπτυξη αλγορίθμων εκτίμησης παραμέτρων αποτελούν μέχρι και σήμερα πεδίο διαρκούς έρευνας.

1.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των βασικών εννοιών της θεωρίας *Αναγνώρισης Συστημάτων*. Με αυτό τον τρόπο ελπίζουμε αφενός να γίνει πλήρως κατανοητός ο σκοπός της παρούσης εργασίας και αφετέρου να αποσαφηνισθούν οι διαφορές με άλλες κλασσικές μεθόδους αναγνώρισης συστημάτων.

1.1.1 Μαθηματικά Μοντέλα

Όπως είπαμε, το αποτέλεσμα της αναγνώρισης συστημάτων στα πλαίσια που την μελετάμε ονομάζεται *μοντέλο*. Υπάρχουν πολλές κατηγορίες μοντέλων όπως τα λεκτικά, μαθηματικά, φυσικά και άλλα, ωστόσο στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα εργαστούμε με τα μαθηματικά μοντέλα συστημάτων.

Στην περίπτωση μας λοιπόν, ένα μοντέλο είναι μια μαθηματική σχέση μεταξύ μεταβλητών εισόδου και εξόδου που περιέχει ελεύθερες παραμέτρους. Παραδείγματα μαθηματικών μοντέλων αποτελούν οι συναρτήσεις μεταφοράς με μεταβλητά μηδενικά και πόλους, οι εξισώσεις κατάστασης με άγνωστους πίνακες καταστάσεων καθώς και οι παραμετροποιημένες μη-γραμμικές συναρτήσεις.

Για παράδειγμα, η παρακάτω διαφορική εξίσωση αποτελεί ένα απλό μαθηματικό μοντέλο:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t)$$

όπου οι μεταβλητές a και b είναι οι ελεύθεροι παράμετροι του μοντέλου. Η πολυπλοκότητα του επιλεγμένου μοντέλου θα πρέπει να εξυπηρετεί της απαιτήσεις της εκάστοτε εφαρμογής αναγνώρισης.

Λόγω της πληθώρας και της ιδιαιτερότητας των συστημάτων, έχουν προταθεί διάφορα μαθηματικά μοντέλα με χαρακτηριστικά που εξαρτώνται από τις ιδιότητες του προς μελέτη συστήματος. Παρακάτω αναφέρουμε κάποιες βασικές υποκατηγορίες μαθηματικών μοντέλων.

- **Ντετερμινιστικά - Στοχαστικά.** Ένα μοντέλο ονομάζεται ντετερμινιστικό, αν περιγράφεται από μια πλήρως προσδιορισμένη σχέση μεταξύ των μεταβλητών του. Αντιθέτως θα λέγεται στοχαστικό, αν εκφράζεται μέσω πιθανοθεωρίας.
- **Στατικά - Δυναμικά.** Εάν η σχέση (μοντέλο) που συνδέει τις μεταβλητές ενός συστήματος δεν εξαρτάται από παρελθοντικές τιμές των μεταβλητών θα λέμε ότι το σύστημα, άρα και το μοντέλο, είναι στατικό. Στην αντίθετη περίπτωση θα λέγεται δυναμικό. Ένα παράδειγμα στατικού συστήματος είναι αυτό που περιγράφεται από αλγεβρικές εξισώσεις, ενώ συνήθως τα δυναμικά συστήματα - μοντέλα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών.
- **Συνεχούς - Διακριτού Χρόνου.** Η ιδιότητα αυτή ορίζει τον τρόπο με τον οποίο η μεταβλητή του χρόνου επιδρά στο μοντέλο. Διακριτού χρόνου ονομάζονται τα μοντέλα τα οποία εκφράζουν την σχέση που συνδέει τις μεταβλητές του συστήματος σε διακριτές χρονικές στιγμές. Εν αντιθέσει, τα συστήματα στα οποία ο χρόνος είναι συνεχής μεταβλητή ονομάζονται συστήματα συνεχούς χρόνου. Τα μοντέλα διακριτού χρόνου περιγράφονται συνήθως από εξισώσεις διαφορών ενώ τα συστήματα συνεχούς χρόνου από διαφορικές εξισώσεις.
- **Χρονομεταβλητά - Χρονοαμετάβλητα.** Χρονομεταβλητά ονομάζονται τα συστήματα (και τα μοντέλα συστημάτων) στα οποία οι εξισώσεις που περιγράφουν την λειτουργία του συστήματος έχουν άμεση εξάρτηση από τον χρόνο. Κατά συνέπεια, σε αυτά τα συστήματα είναι πιθανό η ίδια είσοδος σε διαφορετικές χρονικές στιγμές να οδηγήσει σε διαφορετική απόκριση του συστήματος. Έν αντιθέσει, χρονοαμετάβλητα είναι τα συστήματα στα οποία η εξάρτηση με τον χρόνο εκφράζεται μόνο έμμεσα μέσω των εσωτερικών καταστάσεων ή της συνάρτησης εισόδου του συστήματος.

Τα συστήματα που θα μελετήσουμε σε αυτή την εργασία περιγράφονται από μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις όπου οι μη-γραμμικές συναρτήσεις που διέπουν την λειτουργία τους εξαρτώνται μόνο από τις καταστάσεις και την είσοδο ελέγχου. Με βάση την παραπάνω κατηγοριοποίηση λοιπόν, τα συστήματα (και τα αντίστοιχα μοντέλα) που μελετάμε είναι μη-γραμμικά, χρονοαμετάβλητα δυναμικά συστήματα συνεχούς χρόνου.

1.1.2 Εκτίμηση Παραμέτρων

Στην αναγνώριση συστημάτων, αφού επιλέξουμε ένα μαθηματικό μοντέλο με την ικανότητα να περιγράψει επαρκώς την λειτουργία του συστήματος, το επόμενο στάδιο είναι ο προσδιορισμός των ελεύθερων του παραμέτρων. Η διαδικασία αυτή στην βιβλιογραφία ονομάζεται *εκτίμηση παραμέτρων* (parameter estimation).

Σε αυτό το στάδιο, είναι απαραίτητος ο σχεδιασμός ενός πειράματος με σκοπό την συλλογή δεδομένων για το σύστημα που μελετάται. Στην συνέχεια, τα δεδομένα χρησιμοποιούνται από κάποιον αλγόριθμο με σκοπό τον προσδιορισμό των ελεύθερων παραμέτρων του μοντέλου που έχει επιλεγεί. Η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου εκτίμησης παραμέτρων είναι άμεση συνάρτηση των δεδομένων που θα χρησιμοποιηθούν, συνεπώς απαιτείται προσοχή κατά τον σχεδιασμό του πειράματος συλλογής δεδομένων.

Διακρίνονται δύο μεγάλες οικογένειες αλγορίθμων εκτίμησης παραμέτρων:

- **Offline:** Οι *offline* αλγόριθμοι απαιτούν την εκ των προτέρων συλλογή δεδομένων για το διαθέσιμο σύστημα. Στην συνέχεια τα δεδομένα αυτά επεξεργάζονται από κάποιον αλγόριθμο εκτίμησης παραμέτρων με σκοπό την προσαρμογή ενός υποψηφίου μοντέλου του συστήματος. Το μεγάλο πλεονέκτημα των *offline* αλγορίθμων είναι το γεγονός ότι δεν υπάρχει φραγμός ως προς την υπολογιστική τους πολυπλοκότητα, συνεπώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν σύνθετοι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης που καθιστούν εφικτή την προσαρμογή ακόμα και πολύ σύνθετων μοντέλων όπως τα *πολυεπίπεδα νευρωνικά δίκτυα* (Deep Neural Networks). Ένα κλασσικό παράδειγμα τέτοιου αλγορίθμου είναι η *Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων*.
- **Online:** Αντίθετα με τους *offline* αλγορίθμους οι *online* αλγόριθμοι πραγματοποιούν εκτίμηση παραμέτρων σε πραγματικό χρόνο χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που συλλέγονται κατά την διάρκεια λειτουργίας του πραγματικού συστήματος. Το γεγονός αυτό επιβάλλει σε αυτούς τους αλγορίθμους να είναι υπολογιστικά απλοί, καθώς οι υπολογισμοί δεν μπορούν να διαρκούν περισσότερο από τον κύκλο λειτουργίας του συστήματος.

Ωστόσο, το πλεονέκτημα που προσφέρουν είναι ότι το μοντέλο είναι διαθέσιμο κατά την διάρκεια λειτουργίας του συστήματος, ιδιότητα που τους καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμους σε εφαρμογές όπως ο *προσαρμοστικός έλεγχος* (adaptive control) και η *διάγνωση βλαβών* (fault detection). Ένας κλασσικός *online* αλγόριθμος εκτίμησης παραμέτρων είναι η *Αναδρομική Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων*.

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας η μέθοδος εκτίμησης που θα αναπτυχθεί πρόκειται για μια *online* μέθοδο.

1.2 Εφαρμογές της Αναγνώρισης Συστημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρουμε ενδεικτικά κάποιες από τις τυπικές εφαρμογές της Αναγνώρισης Συστημάτων.

- **Πρόβλεψη.** Η ιδέα είναι ότι αν καταλήξουμε σε μια πολύ καλή μαθηματική περιγραφή του συστήματος, τότε μπορούμε να το επιλύσουμε για μελλοντικές χρο-

νικές στιγμές, προβλέποντας με τον τρόπο αυτό την απόκριση του πραγματικού συστήματος σε κάποιο βάθος χρόνου που ονομάζεται χρονικός ορίζοντας (time horizon). Εδώ αξίζει να σημειωθεί πως η συγκεκριμένη εφαρμογή απαιτεί μοντέλα πολύ υψηλής ακρίβειας όσο ο χρονικός ορίζοντας μεγαλώνει.

- **Έλεγχος Συστημάτων.** Παρόλο που στην βιβλιογραφία υπάρχουν ελεγκτές που μπορούν να ελέγχουν συστήματα ακόμα και υπό την έλλειψη γνώσης του μοντέλου τους, η γνώση μιας μαθηματικής περιγραφής του συστήματος επιτρέπει την σχεδίαση πολύ πιο αποτελεσματικών ελεγκτών. Τα μοντέλα που απαιτούνται για τέτοιες εφαρμογές συνήθως είναι πιο απλά έτσι ώστε να είναι εύκολη η χρήση τους στον βρόγχο ελέγχου.
- **Εκτίμηση Καταστάσεων.** Υπάρχουν περιπτώσεις, όπου δεν είναι διαθέσιμες προς μέτρηση όλες οι καταστάσεις ενός συστήματος, είτε λόγω κόστους, είτε λόγω έλλειψης αξιόπιστης μεθόδου μέτρησης τους. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η ύπαρξη ενός μοντέλου του συστήματος μπορεί να οδηγήσει στην έμμεση μέτρηση ή διαφορετικά στην εκτίμηση των καταστάσεων. Η ποιότητα της εκτίμησης είναι άμεση συνάρτηση της ποιότητας του μοντέλου.
- **Προσομοίωση.** Είναι η αριθμητική επίλυση του μοντέλου. Χρησιμοποιείται σε κάθε πρόβλημα σχεδίασης ως μέσο εκτίμησης της απόδοσης του αναπτυσσόμενου συστήματος, στην εκπαίδευση των χειριστών του συστήματος, αλλά και στην υποβοήθηση του ελέγχου καλής λειτουργίας και στην λήψη αποφάσεων.
- **Βελτιστοποίηση.** Όλα τα μαθηματικά εργαλεία που εγγυώνται την βέλτιστη λειτουργία ενός συστήματος στηρίζονται στην ύπαρξη ενός μοντέλου. Επειδή η λύση που προσδιορίζεται είναι κάθε φορά βέλτιστη για το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος, και όχι το ίδιο το σύστημα, είναι προφανές πως και η εγκυρότητα της λύσης για το πραγματικό σύστημα είναι ανάλογη της ποιότητας του μοντέλου του.
- **Διάγνωση Βλαβών.** Η κεντρική ιδέα της χρήσης αναλυτικών μοντέλων στην διάγνωση βλαβών είναι η εξής: Κατασκευάζουμε ένα μοντέλο ώστε να περιγράφει το σύστημα στην κατάσταση φυσιολογικής λειτουργίας του. Ομοίως κατασκευάζουμε μοντέλα για κάθε πιθανή βλάβη που μπορεί να υποστεί το σύστημα. Συγκρίνοντας τις εξόδους των μοντέλων με αυτή του πραγματικού συστήματος κατά την διάρκεια λειτουργίας του, μπορούμε να αποφανθούμε εάν πάσχει από κάποια από τις μοντελοποιημένες βλάβες.

1.3 Ιστορική Αναδρομή

Το πρόβλημα της *online* αναγνώρισης συστημάτων είναι ένα θέμα το οποίο έχει μελετηθεί εκτεταμένα στην βιβλιογραφία του Αυτομάτου Ελέγχου. Οι αρχικές προσπάθειες έγιναν πάνω στα γραμμικά συστήματα, και η συνήθης προσέγγιση ήταν διέγερση του εκάστοτε συστήματος από μια σειρά δοκιμαστικών εισόδων, καταγραφή της απόκρισης του συστήματος και στην συνέχεια προσαρμογή μοντέλων με χρήση διάφορων αλγορίθμων που είχαν αναπτυχθεί. Παρόλο που αρκετές τέτοιες προσπάθειες πέτυχαν κάποια αποτελέσματα, το πρόβλημα αυτής της μεθοδολογίας είναι ότι δεν διεγείρει το σύστημα

με κάποιον συστηματικό τρόπο, με αποτέλεσμα σε πολλές περιπτώσεις να μην αναδεικνύεται ολόκληρη η δυναμική του συστήματος.

Περαιτέρω έρευνες μελέτησαν το πρόβλημα της επαρκούς διέγερσης συστημάτων και απέδειξαν πως οι ιδιότητες σύγκλισης και ευρωστίας των αλγορίθμων αναγνώρισης συστημάτων και ελέγχου συνδέονται με την ικανοποίηση μιας συνθήκης που στην βιβλιογραφία ονομάζεται *Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης* [4]. Ενώ για την περίπτωση των γραμμικών συστημάτων βρέθηκε πώς η συνθήκη της Επιμένουσας Διέγερσης σχετίζεται άμεσα με το συχνотικό περιεχόμενο των σημάτων διέγερσης, στην περίπτωση της αναγνώρισης μη-γραμμικών συστημάτων δεν έχει σημειωθεί μεγάλη πρόοδος.

Παρακάτω ακολουθεί μια σύντομη ιστορική αναφορά στην πρόοδο που έχει σημειωθεί στον τομέα της αναγνώρισης των μη-γραμμικών συστημάτων, ενώ πιο λεπτομερείς περιγραφές για πολλά από τα αποτελέσματα και τις έννοιες που παρουσιάζονται θα δοθούν στα επόμενα κεφάλαια.

1.3.1 Αρχικές Προσπάθειες

Οι περισσότερες εργασίες που ασχολούνται με το πρόβλημα, μέχρι και σήμερα χρησιμοποιούν ως μοντέλα τα Νευρωνικά Δίκτυα που λόγω των προσεγγιστικών τους ιδιοτήτων είναι ιδανικά για προσέγγιση μη γραμμικών συναρτήσεων. Στην εργασία [5] οι συγγραφείς χρησιμοποιούν τα νευρωνικά δίκτυα για αναγνώριση και παρακολούθηση τροχιάς ενός ρομποτικού βραχίονα, μια εφαρμογή αναγνώρισης για αυτόματο έλεγχο. Το πρόβλημα εδώ είναι η άγνωστη αντίστροφη δυναμική του βραχίονα που είναι απαραίτητη για την αποσύμπλεξη των εισόδων ελέγχου. Η ιδέα αυτής της εργασίας είναι η χρήση ενός νευρωνικού δικτύου για την προσέγγιση της δυναμικής αυτής και η εκπαίδευση του μέσω της ελαχιστοποίησης των ροπών που παράγονται από έναν PID ελεγκτή κατά τον έλεγχο του συστήματος. Παρόλο που η εφαρμογή δεν απαιτεί την ακριβή εκμάθηση της άγνωστης δυναμικής, η απόδοση του σχήματος ελέγχου βελτιώθηκε σημαντικά μετά από τα πρώτα 30 λεπτά της εκμάθησης.

Άλλες σημαντικές εργασίες είναι αυτές των *Sanner* και *Slotine* [6] όπου παρουσιάστηκε ένας αναδρομικός αλγόριθμος για την αναγνώριση μη γραμμικών συστημάτων τόσο στην συνεχή όσο και στην διακριτή περίπτωση, καθώς και των *Lu* και *Basar* [7] όπου συγκρίνονται οι αρχιτεκτονικές δικτύων RBF (radial basis functions) και MFN (multilayer feedforward networks) καθώς και διάφοροι αλγόριθμοι εκμάθησης όπως η βαθμωτή κατάβαση (gradient descent), οι γενετικοί αλγόριθμοι καθώς και ο κλασσικός αλγόριθμος back-propagation. Και στις δυο αυτές εργασίες μελετώνται οι επιπτώσεις της συνθήκης της επιμένουσας διέγερσης. Στην εργασία [6] δίνεται μια συνθήκη ικανοποίησης της επιμένουσας διέγερσης εμπνευσμένη από την περίπτωση των διακριτών συστημάτων, ενώ στην εργασία [7] δείχνεται πως ανάλογα με τον αλγόριθμο και την αρχιτεκτονική αναγνώρισης που χρησιμοποιείται μπορεί η συνθήκη να έχει διαφορετικές προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται.

1.3.2 Επιμένουσα Διέγερση για Μη-Γραμμικά Συστήματα

Το πρόβλημα της Επιμένουσας Διέγερσης για τις αρχιτεκτονικές δικτύων RBF μελετήθηκε συστηματικά στην εργασία [1]. Συγκεκριμένα, οι *Kurdila*, *Narcowich* και *Ward*

απέδειξαν πως όταν το διάνυσμα οπισθοδρομιτών (regressor vector) αποτελείται από ακτινικές συναρτήσεις βάσης (Radial Basis Functions), τότε αρκεί η τροχιά του συστήματος να πληρεί μια συνθήκη εργοδικότητας. Με πιο απλά λόγια, αυτό θα πει πως όταν χρησιμοποιείται ένα νευρωνικό δίκτυο RBF ως το μαθηματικό μοντέλο περιγραφής του συστήματος, για να πληρείται η συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης αρκεί η τροχιά να διέρχεται απ' όλα τα κέντρα των συναρτήσεων βάσης του δικτύου με έναν περιοδικό τρόπο.

Η ακριβής επίπτωση των επιπέδων διέγερσης στην σύγκλιση ενός αλγορίθμου μελετήθηκε για πρώτη φορά το 2011 στην εργασία [8], ενώ στην εργασία [9] δόθηκαν οι μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν ποσοτικά τα επίπεδα διέγερσης a_1 και a_2 με την αρχιτεκτονική του εκάστοτε δικτύου RBF καθώς και τις ιδιότητες της περιοδικής τροχιάς του συστήματος κλειστού βρόγχου.

Καθώς η ικανοποίηση της ΣΕΔ είναι ένα πολύ σημαντικό κομμάτι για στην αναγνώριση συστημάτων, ένα μεγάλο κομμάτι των εργασιών που ασχολούνται με το πρόβλημα βασίστηκε στα αποτελέσματα της εργασίας [1]. Στις εργασίες [10–21] οι συγγραφείς προτείνουν αλγορίθμους αναγνώρισης διαφόρων ειδών συστημάτων όπως τα strict-feedback και pure-feedback, συστήματα σε κανονική μορφή, καθώς και περιπτώσεις συστημάτων με γνωστό κέρδος εισόδου. Όλες οι παραπάνω εργασίες είναι βασισμένες σε ένα κοινό αποτέλεσμα που είναι εμπνευσμένο από την εργασία [1], το οποίο ονομάζεται στην βιβλιογραφία *Μερική Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης* (*Partial Persistency of Excitation condition*). Η ιδέα είναι πως στην περίπτωση που έχω μια τροχιά με περιοδικό χαρακτήρα, μπορώ να χρησιμοποιήσω ένα νευρωνικό δίκτυο RBF με ομοιόμορφα κατανομημένα κέντρα σε ένα σύνολο που να περιλαμβάνει την τροχιά αυτή. Παρόλο που δεν μπορώ να εξασφαλίσω την ΣΕΔ για την δυναμική του συστήματος σε ολόκληρο το σύνολο Ω , μπορώ να εγγυηθώ μερική σύγκλιση του δικτύου για τα κέντρα που βρίσκονται κοντά στην περιοδική τροχιά, επιτυγχάνοντας έτσι τοπική αναγνώριση του άγνωστου συστήματος.

Ενώ η παραπάνω μεθοδολογία είναι βάσιμη και έχει πετύχει κάποια πολύ σημαντικά αποτελέσματα στην βιβλιογραφία, διακρίνονται τα εξής μειονεκτήματα. Αρχικά η αναγνώριση δεν λαμβάνει χώρο σε ολόκληρο το σύνολο ενδιαφέροντος, παρά μόνο γύρω από μια κλειστή τροχιά. Κατά δεύτερον, ακόμα και σε αυτή την περίπτωση, επιτυγχάνεται αναγνώριση της δυναμικής του συστήματος κλειστού βρόγχου, και κατά συνέπεια τα αποτελέσματα είναι χρήσιμα κυρίως για εφαρμογές ελέγχου και είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθούν για εφαρμογές πρόβλεψης ή προσομοίωσης.

1.3.3 Πρόσφατη Βιβλιογραφία

Σχετικά με τις πιο πρόσφατες εξελίξεις στον κλάδο της αναγνώρισης μη γραμμικών συστημάτων, η εργασία [22] προσπαθεί να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της ραγδαίας αύξησης υπολογιστικών απαιτήσεων στα strict feedback συστήματα μεγάλης τάξης. Μέσω ενός προτεινόμενου μετασχηματισμού, το σύστημα μετατρέπεται σε σύστημα κανονικής μορφής (normal form), και στην συνέχεια μέσω της χρήσης ενός παρατηρητή υψηλού κέρδους (High Gain Observer) καθώς και ενός ελεγκτή προδιαγεγραμμένης απόκρισης (Prescribed Performance Controller) πραγματοποιείται εκτίμηση των άγνωστων μετασχηματισμένων καταστάσεων καθώς και παρακολούθηση της επιθυμητής τροχιάς. Το αποτέλεσμα της παραπάνω προσπάθειας είναι η εκμάθηση της δυναμικής κλειστού

βρόγχου του μετασχηματισμένου συστήματος, η οποία στην συνέχεια χρησιμοποιείται για αποτελεσματικότερο έλεγχο.

Στην εργασία [23], οι συγγραφείς προτείνουν μια παραλλαγή του αλγορίθμου *Βαθμωτής Κατάβασης (Gradient Descent)* σε συνδυασμό με ένα σχήμα ελέγχου που στην βιβλιογραφία ονομάζεται *Fast Terminal Sliding Mode Control*. Τα επιτεύγματα της εν λόγω εργασίας είναι η βελτίωση του ρυθμού σύγκλισης των παραμέτρων καθώς και η μείωση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ρίζας. Η μέθοδος σχεδιάστηκε για συστήματα με μοναδιαίο κέρδος ελέγχου και τα αποτελέσματα της επιβεβαιώνονται πειραματικά χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα μια παραμετροποιημένη έκδοχή του ταλαντωτή *Duffing (Duffing Oscillator)* έτσι ώστε να παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά.

Στην εργασία [24] παρουσιάζεται ένα γενικότερο πλαίσιο ελέγχου, βασισμένο στην θεωρία Αναγνώρισης Προτύπων καθώς και στην Αναγνώριση Συστημάτων, το οποίο μιμείται την ανθρώπινη συμπεριφορά. Πιο συγκεκριμένα, η ιδέα εδώ είναι πως χρησιμοποιώντας την θεωρία αναγνώρισης δυναμικών συστημάτων που παρουσιάστηκε στις προηγούμενες παραγράφους, μπορεί κανείς να εκπαιδεύσει νευρωνικά δίκτυα για διάφορες καταστάσεις ελέγχου, φυσιολογικές ή μη. Στην συνέχεια μέσω της αναγνώρισης προτύπων, ο ελεγκτής είναι ικανός να αναγνωρίσει σε ποια κατάσταση βρίσκεται το σύστημα, και χρησιμοποιώντας την καταχωρημένη γνώση να το ελέγξει πολύ αποδοτικά. Έτσι λοιπόν η προτεινόμενη αρχιτεκτονική μιμείται την ανθρώπινη συμπεριφορά με την έννοια πως είναι ικανή να μαθαίνει και να εκτελεί αποδοτικά σύνθετους στόχους ελέγχου, καθώς και να αναγνωρίζει την κατάσταση στην οποία βρίσκεται, όπως ο άνθρωπος.

Τέλος, εκτός από τις εξελίξεις πάνω στην θεωρητική θεμελίωση της Αναγνώρισης Συστημάτων, υπάρχουν πάρα πολλές εργασίες με εφαρμογές πάνω σε σχεδόν οποιοδήποτε κλάδο της επιστήμης και της μηχανικής. Κάποιες από τις τελευταίες περιλαμβάνουν αναγνώριση ρομποτικών βραχιόνων [25], εκμάθηση δυναμικής θαλάσσιων σκαφών με σκοπό την επίτευξη αυστηρών στόχων ελέγχου [26], και ακόμα και ποιοτική σύγκριση δυναμικών συστημάτων [27].

1.4 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Το υπόλοιπο κομμάτι της διπλωματικής εργασίας αποτελείται από 5 ενότητες, που αντιστοιχούν με τα Κεφάλαια 2-6, με την τρέχουσα εισαγωγή να αποτελεί το Κεφάλαιο 1.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια εισαγωγή στις έννοιες και στα μαθηματικά εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν σε όλη την έκταση αυτής της εργασίας.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται αναλυτικά η μέθοδος αναγνώρισης που αναπτύσσεται στα πλαίσια της εργασίας. Αρχικά παρουσιάζονται τα βήματα σχεδίασης που απαιτούνται για την εφαρμογή της μεθόδου σε ένα πραγματικό πρόβλημα, και στην συνέχεια αναλύεται μέσω μαθηματικών επιχειρημάτων η ορθότητα λειτουργίας της.

Στο Κεφάλαιο 4 ακολουθούν κάποια παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου, τόσο σε πραγματικά όσο και σε τεχνητά συστήματα. Μέσω των παραδειγμάτων αυτών γίνεται εμφανής η ικανότητα του σχήματος να αναγνωρίσει την δυναμική άγνωστων συστημάτων, αλλά προκύπτουν και κάποια χρήσιμα συμπεράσματα για την λειτουργία καθώς

και τα όρια του.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε κάποιες πιθανές επεκτάσεις που ενδέχεται να βελτιώσουν την ποιότητα των αποτελεσμάτων αναγνώρισης που επιφέρει η μέθοδος. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένας τρόπος αξιολόγησης των αποτελεσμάτων για περιπτώσεις πραγματικών συστημάτων στις οποίες είναι αδύνατη η σύγκριση των αποτελεσμάτων με τις εσωτερικές μη γραμμικές συναρτήσεις του συστήματος.

Στο Κεφάλαιο 8 θα παρουσιαστεί η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας, και στην οποία θα γίνονται αναφορές σε διάφορα σημεία του παρόντος εγγράφου.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικά Εργαλεία

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται εισαγωγή των μαθηματικών εργαλείων και βασικών εννοιών στα οποία βασίζεται η διπλωματική εργασία. Σκοπός του κεφαλαίου είναι η συμφιλίωση του αναγνώστη με αυτές τις έννοιες, έτσι ώστε να γίνει ομαλή η μετάβαση στα αποτελέσματα της διπλωματικής εργασίας στα κεφάλαια που ακολουθούν.

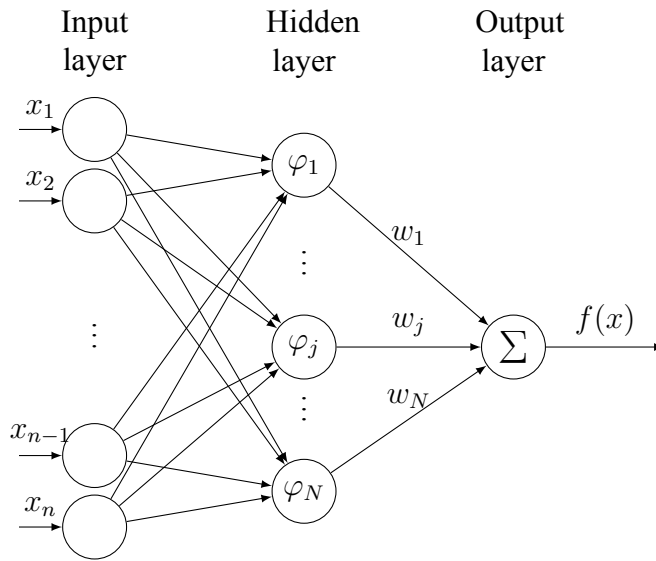
Συνοπτικά, τρία είναι τα εργαλεία που θα παρουσιαστούν. Αρχικά θα γίνει μια εισαγωγή στα νευρωνικά δίκτυα RBF με έμφαση στην αρχιτεκτονική τους, στον τρόπο που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές αναγνώρισης και ελέγχου, καθώς και τις προσεγγιστικές τους ιδιότητες. Στην συνέχεια θα παρουσιαστεί ο Έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης, ο σκοπός που χρησιμοποιείται σε αυτή την εργασία καθώς και επιχειρήματα που αποδεικνύουν την εγκυρότητα του, τόσο σε μαθηματικό επίπεδο όσο και με την χρήση προσομοιώσεων. Τέλος, θα γίνει μια συνοπτική εισαγωγή στην αρχιτεκτονική του υποσυστήματος που παράγει τα σήματα αναφοράς του σχήματος, καθώς και ποιοι είναι οι λόγοι που χρησιμοποιείται αυτή η μεθοδολογία και όχι κάποια άλλη.

Τέλος, θα αφιερώσουμε μια επιπλέον παράγραφο στην παρουσίαση και μελέτη της Συνθήκης Επιμένουσας Διέγερσης, καθώς μεγάλο τμήμα αυτής της εργασίας ασχολείται με την ικανοποίηση της.

2.1 Νευρωνικά Δίκτυα RBF

Με τον όρο *Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα* (Artificial Neural Networks) αναφερόμαστε σε μια κατηγορία μαθηματικών μοντέλων τα οποία προέκυψαν την δεκαετία του 1940 και είναι εμπνευσμένα από τα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα τα οποία απαντώνται στους εγκεφάλους των ανθρώπων και των ζώων. Το κύριο χαρακτηριστικό των νευρωνικών δικτύων είναι η εγγενής ικανότητα μάθησης. Ως μάθηση μπορεί να οριστεί η σταδιακή βελτίωση της ικανότητας του δικτύου να επιλύει κάποιο πρόβλημα (π.χ. η σταδιακή προσέγγιση μίας συνάρτησης). Η μάθηση επιτυγχάνεται μέσω της εκπαίδευσης, μίας επαναληπτικής διαδικασίας σταδιακής προσαρμογής των παραμέτρων του δικτύου σε τιμές κατάλληλες ώστε να επιλύεται με επαρκή επιτυχία το προς εξέταση πρόβλημα.

Υπάρχουν πολλές κατηγορίες νευρωνικών δικτύων όπως τα Συνελκτικά Νευρωνικά Δίκτυα (Convolutional Neural Networks), τα Αναδρομικά Νευρωνικά Δίκτυα (Recurrent



Σχήμα 2.1: Αρχιτεκτονική Νευρωνικού Δικτύου RBF

Neural Networks), τα Ακτινικά Νευρωνικά Δίκτυα (Radial Basis Networks), τα Πιθανο-
 τικά Νευρωνικά Δίκτυα (Probabilistic Neural Networks) και άλλα, κάθε ένα κατάλληλο
 για διαφορετικό τύπο εφαρμογών. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τα ακτινικά νευρωνικά
 δίκτυα τα οποία από εδώ και στο εξής θα αναφέρουμε ως *δίκτυα RBF* καθώς είναι τα
 καταλληλότερα για προσέγγιση συναρτήσεων.

2.1.1 Αρχιτεκτονική

Η αρχιτεκτονική ενός RBF νευρωνικού δικτύου παρουσιάζεται στο σχήμα (2.1). Ένα RBF νευρωνικό δίκτυο αποτελείται από τρία επίπεδα, το επίπεδο εισόδου, το ενδιάμεσο ή κρυφό επίπεδο, και το επίπεδο εξόδου.

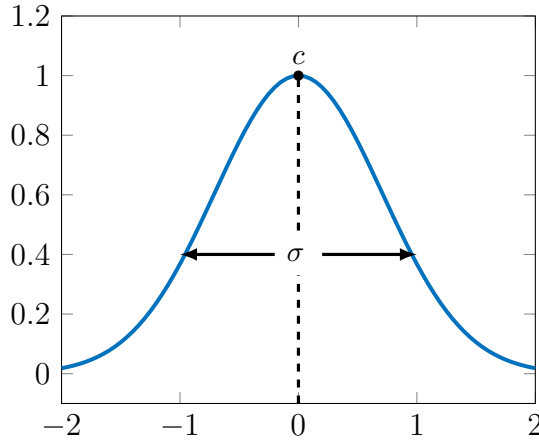
Επίπεδο Εισόδου: Η είσοδος ενός δικτύου RBF είναι ένα διάνυσμα $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. Στα νευρωνικά δίκτυα αυτής της κατηγορίας το επίπεδο εισόδου είναι υπεύθυνο για την μετάδοση των επιμέρους ορισμάτων x_i σε κάθε νευρώνα και όχι για κάποια περαιτέρω προεπεξεργασία δεδομένων.

Κρυφό Επίπεδο: Στο κρυφό επίπεδο λαμβάνει χώρα ο υπολογισμός των συναρτήσεων $\varphi_i(x)$ οι οποίες ονομάζονται *συναρτήσεις βάσης* ή *συναρτήσεις ενεργοποίησης*. Σε άλλους τύπους δικτύων μπορεί να υπάρχουν πάνω από ένα κρυφά επίπεδα, αλλά στα RBF δίκτυα που μελετάμε υπάρχει μόνο ένα.

Κάθε συνάρτηση βάσης είναι μια πραγματική συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, και αντιστοιχεί σε ένα σημείο του χώρου $c \in \mathbb{R}^n$. Οι συναρτήσεις φ είναι ακτινικές συναρτήσεις, που σημαίνει πως το αποτέλεσμα τους εξαρτάται από την απόσταση της εισόδου x από το σημείο c , ή αλλιώς μαθηματικά:

$$\varphi(x, c) = \varphi(\|x - c\|)$$

και από εκεί προκύπτει και η ονομασία Ακτινικά Νευρωνικά Δίκτυα. Τυπικές ακτινικές συναρτήσεις είναι η γκαουσιανή, η τετραγωνική, η αντίστροφη τετραγωνική και



Σχήμα 2.2: Γκαουσιανή συνάρτηση ενεργοποίησης. Το κέντρο c είναι το σημείο στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει την μέγιστη τιμή, ενώ η διασπορά σ καθορίζει τον ρυθμό που η συνάρτηση μειώνεται όσο το x απομακρύνεται από το c .

άλλες [28], ωστόσο σε αυτήν την εργασία θα χρησιμοποιήσουμε τις γκαουσιανές συναρτήσεις οι οποίες έχουν την μορφή

$$\varphi(x) = \exp\left(-\left\|\frac{x-c}{\sigma}\right\|^2\right)$$

Το σημείο c ονομάζεται *κέντρο* ενώ η ποσότητα σ ονομάζεται *διασπορά*. Στην εφαρμογή μας, και τα δυο αυτά μεγέθη επιλέγονται εκ των προτέρων και παραμένουν σταθερά κατά την διάρκεια των πειραμάτων. Ένα παράδειγμα μιας μονοδιάστατης γκαουσιανής συνάρτησης φαίνεται στο σχήμα (2.2).

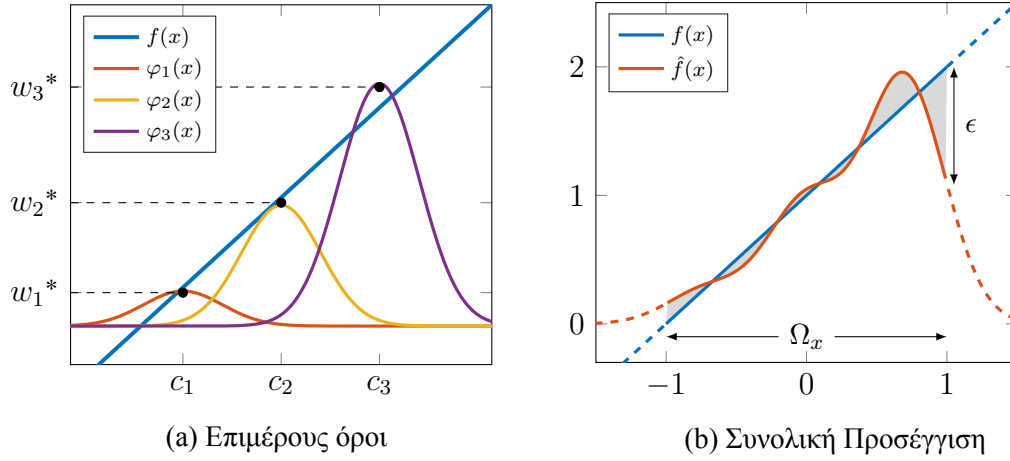
Επίπεδο Εξόδου: Η έξοδος ενός RBF νευρωνικού δικτύου είναι μια βαθμωτή συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Η έξοδος αυτή υπολογίζεται στο επίπεδο εξόδου ως το σταθμισμένο άθροισμα:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(x)$$

Τα βάρη w_i ονομάζονται *συναπτικά βάρη*, και αποτελούν τις ελεύθερες παραμέτρους του δικτύου. Καθώς οι συναρτήσεις βάσης $\varphi_i(x)$ είναι προεπιλεγμένες και σταθερές, λέμε ότι το μοντέλο είναι *γραμμικά παραμετροποιημένο* που θα πει ότι η έξοδος του είναι γραμμικός συνδυασμός των ελεύθερων παραμέτρων αυτού. Τέλος, η έξοδος του μοντέλου μπορεί να γραφτεί και διανυσματικά ως:

$$f(x) = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix} = W^T \cdot \Phi(x)$$

Το διάνυσμα W ονομάζεται *διάνυσμα βαρών* ενώ το διάνυσμα $\Phi(x)$ ονομάζεται *διάνυσμα οπισθοδρομητών* στην βιβλιογραφία της αναγνώρισης συστημάτων. Η γραμμικότητα ως προς τις ελεύθερες παραμέτρους αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα στα προβλήματα αναγνώρισης, για αυτό και τα γραμμικά παραμετροποιημένα μοντέλα προτιμούνται σε τέτοιου είδους εφαρμογές.



Σχήμα 2.3: Προσέγγιση της $f(x) = 1 + x$ από ένα απλό RBF νευρωνικό δίκτυο.

2.1.2 Προσεγγιστικές Ιδιότητες

Τα ακτινικά νευρωνικά δίκτυα είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στην αναγνώριση μη γραμμικών συστημάτων. Ο λόγος είναι πως η παραπάνω δομή μπορεί να προσεγγίσει ικανοποιητικά καλά μια οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση όπως αναφέρεται στην ακόλουθη ιδιότητα [2].

Θεώρημα 1 (Ιδιότητα Προσέγγισης). Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και κάθε θετική σταθερά $\epsilon > 0$ υπάρχουν ακέραιος αριθμός q , βέλτιστα βάρη $W^* \in \mathbb{R}^q$ και διανυσματικό πεδίο βάσης $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, τέτοια ώστε:

$$\max_{x \in \Omega_x} \|f(x) - W^{*T} \Phi(x)\| \leq \epsilon$$

όπου Ω_x είναι ένα συμπαγές σύνολο προσέγγισης.

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα αν το μέγεθος του διανυσματικού πεδίου βάσης q είναι αρκούντως μεγάλο και οι συναρτήσεις που περιλαμβάνει είναι κατάλληλα επιλεγμένες τότε υπάρχουν βέλτιστα βάρη W^* τέτοια ώστε η έξοδος του νευρωνικού δικτύου να προσεγγίζει οσοδήποτε καλά την άγνωστη συνάρτηση $f(x)$ μέσα στο σύνολο Ω_x . Ως εκ τούτου, μπορούμε να αντικαταστήσουμε, χωρίς βλάβη γενικότητας, την άγνωστη συνάρτηση $f(x)$ με ένα RBF νευρωνικό δίκτυο ως εξής:

$$f(x) = W^{*T} \Phi(x) + \epsilon_f(x)$$

Η ποσότητα $\epsilon_f(x)$ ονομάζεται *σφάλμα μοντελοποίησης*, και εξαρτάται από την αρχιτεκτονική του νευρωνικού δικτύου, δηλαδή το πλήθος και την διάταξη των συναρτήσεων βάσης και αντίστοιχα των κέντρων και των διασπορών του νευρωνικού δικτύου.

Παράδειγμα

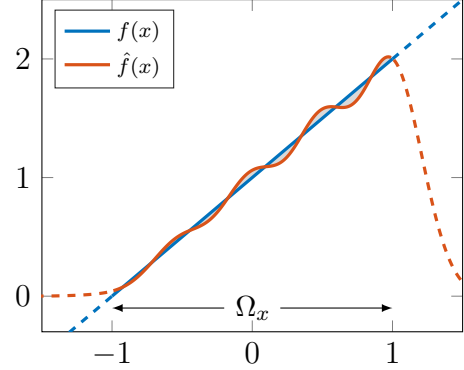
Στο παράδειγμα που ακολουθεί, θα γίνει μια επίδειξη των προσεγγιστικών ικανοτήτων ενός RBF νευρωνικού δικτύου. Για λόγους απλότητας θα προσεγγίσουμε την μονοδιάστατη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 1 + x$$

στο συμπαγές σύνολο $\Omega_x = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Για την προσέγγιση θα χρησιμοποιήσουμε ένα νευρωνικό δίκτυο RBF με τρία κέντρα κατανεμημένα στο Ω_x . Τα κέντρα αυτά θα είναι τα $c = [-0.7 \ 0.0 \ 0.7]$ και η διασπορά σ είναι 0.4.

Τα αποτελέσματα της προσέγγισης φαίνονται στο σχήμα (2.3). Αρχικά στο σχήμα (2.3.a) φαίνονται τα βέλτιστα βάρη για κάθε μια από τις συναρτήσεις βάσης, και το άθροισμα τους το οποίο αποτελεί την προσέγγιση $\hat{f}(x)$ φαίνεται στο σχήμα (2.3.b).

Όπως φαίνεται λοιπόν από το σχήμα (2.3.b), το εκπαιδευμένο νευρωνικό δίκτυο καταφέρνει να προσεγγίσει ικανοποιητικά την άγνωστη συνάρτηση στην περιοχή ενδιαφέροντος Ω_x . Το σφάλμα μοντελοποίησης $\epsilon_f(x)$ είναι η σκιαγραφημένη περιοχή, ενώ στο σχήμα φαίνεται και το μέγιστο σφάλμα ϵ . Καθώς αυτό το σφάλμα είναι το ελάχιστο δυνατό για την δεδομένη αρχιτεκτονική που έχουμε επιλέξει, στην περίπτωση που απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια, πρέπει να αυξήσουμε τον αριθμό των συναρτήσεων βάσης. Μια προσέγγιση με την χρήση ενός πυκνότερου δικτύου φαίνεται στο σχήμα (2.4)



Σχήμα 2.4: Προσέγγιση με πυκνότερο δίκτυο

Τέλος, είναι σημαντικό να σημειωθεί πως το θεώρημα μας εξασφαλίζει πως το σφάλμα $\epsilon_f(x)$ φράσσεται από το ϵ μόνο εντός του Ω_x . Όπως φαίνεται και στο σχήμα (2.3.b), όσο απομακρυνόμαστε από το Ω_x το σφάλμα μεγαλώνει ανεξέλεγκτα.

2.2 Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2.1, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μαθηματικό μοντέλο των νευρωνικών δικτύων *RBF* για να προσεγγίσουμε αρκούντως καλά μια συνεχή μη-γραμμική συνάρτηση σε ένα πεδίο ενδιαφέροντος Ω_x . Πώς όμως εξασφαλίζεται ότι τα βάρη W θα συγκλίνουν στα βέλτιστα βάρη W^* κατά την εκτίμηση παραμέτρων;

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα δίνεται από την *Συνθήκη της Επιμένουσας Διέγερσης* (*Persistancy of Excitation Condition*), η οποία δίνεται παρακάτω:

Ορισμός 1 (Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης). Έστω μ ένα θετικό Σ -πεπερασμένο μέτρο Borel στο διάστημα $[0, \infty)$. Μια συνεχής, ομοιόμορφα φραγμένη διανυσματική συνάρτηση $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^q$ ικανοποιεί την συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης εάν υπάρχουν θετικές σταθερές a_1, a_2 και T έτσι ώστε:

$$a_1 \|W\|^2 \leq \int_{t_0}^{t_0+T} |W^T \Phi(\tau)|^2 d\mu(\tau) \leq a_2 \|W\|^2, \quad \forall t_0 \geq 0, \quad \forall W \in \mathbb{R}^q \quad (2.1)$$

Διαισθητικά το παραπάνω θεώρημα θα πει πως η συνθήκη επιμένουσας διέγερσης ικανοποιείται όταν η τροχιά του συστήματος εξερευνεί πλήρως τον χώρο ελεύθερων παραμέτρων. Η παρακάτω έννοια θα εξηγηθεί και στην συνέχεια με παραδείγματα.

Παρατήρηση 1. Στην παραπάνω εξίσωση, οι σταθερές a_1 και a_2 ονομάζονται επίπεδα διέγερσης, και οι τιμές τους είναι καθοριστικές για την απόδοση των αλγορίθμων αναγνώρισης (ρυθμός σύγκλισης, άνω φράγματα σφαλμάτων). Ωστόσο, το παραπάνω Θεώρημα είναι θεώρημα ύπαρξης αυτών των τιμών, και όχι υπολογισμού τους.

Παρατήρηση 2. Ο λόγος που το διάνυσμα οπισθοδρομητών $\Phi(x)$ εμφανίζεται στην παραπάνω εξίσωση ως συνάρτηση του χρόνου t είναι επειδή στην πράξη, το διάνυσμα καταστάσεων $x(t)$ είναι μια καμπύλη $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Η ικανοποίηση της ΣΕΔ στις εφαρμογές *online* αναγνώρισης συστημάτων ανάγεται ακριβώς στο πρόβλημα της σχεδίασης ενός ελεγκτή που επιτυγχάνει την παρακολούθηση μιας τροχιάς η οποία διεγείρει επαρκώς την δυναμική συστήματος.

Παρατήρηση 3. Η ισχύς του παραπάνω θεωρήματος είναι γενική και δεν ισχύει μόνο για το μοντέλο των RBF νευρωνικών δικτύων. Εν αντιθέσει, το θεώρημα δεν θέτει κανέναν περιορισμό για την δομή του διανύσματος οπισθοδρομητών $\Phi(\tau)$, συνεπώς οποιαδήποτε επιλογή μοντέλου και σετ δεδομένων $x(t)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Παρατήρηση 4. Είναι σημαντικό να τονίσουμε πως η ΣΕΔ το μόνο που εξασφαλίζει είναι ότι τα βέλτιστα βάρη για το επιλεγμένο μοντέλο μπορούν να βρεθούν. Αυτό δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι το μοντέλο αυτό είναι ικανό να προσεγγίσει επαρκώς την δυναμική του συστήματος (Παράδειγμα 2).

2.2.1 Παράδειγμα 1: Μη ικανοποίηση της Σ.Ε.Δ

Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε την άγνωστη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο κλειστό σύνολο $\Omega_x = [0, 2]$. Για τον σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε δυο συναρτήσεις ράμπα τοποθετημένες στο $x = 0$ και στο $x = 1$. Καθώς η συνάρτηση ράμπα περιγράφεται από τον παρακάτω τύπο

$$R_i(x) = \begin{cases} x - i & , x \geq i \\ 0 & , x < i \end{cases}$$

το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε είναι το:

$$y = aR_0(x) + bR_1(x) \quad (2.2)$$

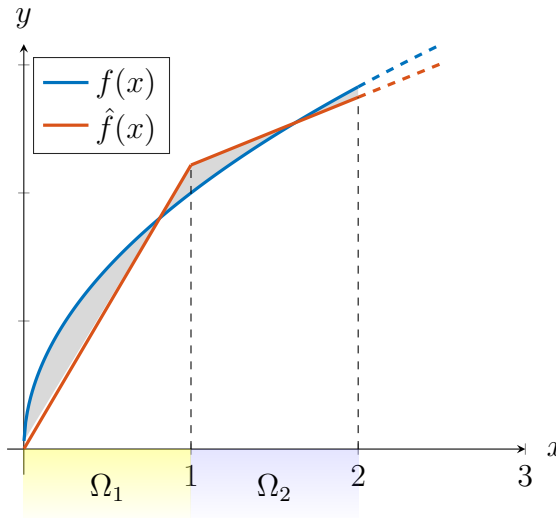
όπου a και b οι ελεύθεροι παράμετροι. Χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο, η βέλτιστη δυνατή προσέγγιση φαίνεται στο σχήμα (2.5).

Διαισθητική Ερμηνεία

Με την φράση “η τροχιά του συστήματος εξερευνεί πλήρως τον χώρο ελεύθερων παραμέτρων” εννοούμε πως κατά την διάρκεια συλλογής δεδομένων, ανεξαρτήτως του αν ο αλγόριθμος είναι *online* ή *offline*, πρέπει η τροχιά $x(t)$ να διεγείρει όλες τις συνιστώσες του διανύσματος οπισθοδρομητών.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το διάνυσμα οπισθοδρομητών είναι το

$$\Phi(x(t)) = \begin{bmatrix} R_0(x(t)) \\ R_1(x(t)) \end{bmatrix}$$

Σχήμα 2.5: Προσέγγιση της \sqrt{x} από ράμπες

Εάν κατά την διάρκεια εκτέλεσης ενός πειράματος αναγνώρισης, η τροχιά $x(t)$ ανήκει εξολοκλήρου στο σύνολο Ω_1 (σχήμα 2.5), τότε η εκτίμηση $\hat{f}(x)$ εκφυλίζεται σε:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0(x) \\ R_1(x) \end{bmatrix} \xrightarrow{x \in \Omega_1} \\ &= aR_0(x)\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια η παράμετρος b δεν επηρεάζει καθόλου το αποτέλεσμα. Συνεπώς, κανένας αλγόριθμος εκτίμησης παραμέτρων δεν μπορεί να εκτιμήσει σωστά αυτή την παράμετρο με αποτέλεσμα την αποτυχία του πειράματος αναγνώρισης.

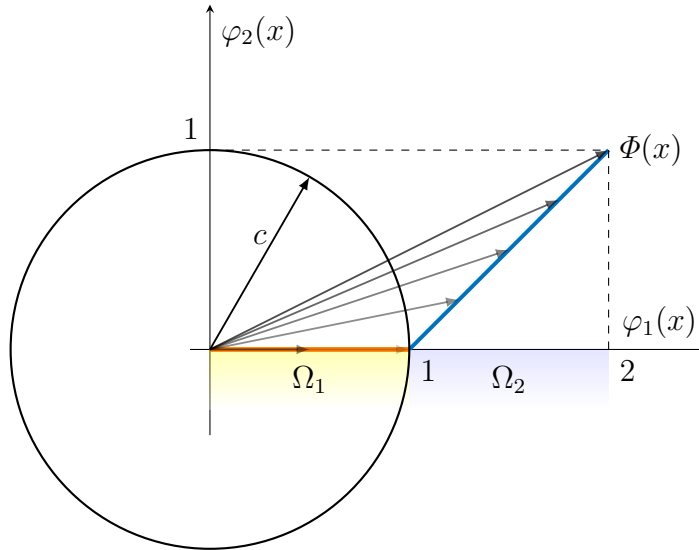
Μαθηματική Απόδειξη

Αρχικά, ας εξετάσουμε την σχέση (2.1). Χρησιμοποιώντας τον γεωμετρικό ορισμό του εσωτερικού γινομένου για τον όρο $W^T \Phi(x(t))$ έχουμε

$$\begin{aligned}a_1 \|W\|^2 &\leq \int_{t_0}^{t_0+T} |W^T \Phi(\tau)|^2 d\mu(\tau) \leq a_2 \|W\|^2 \xrightarrow{a^T \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta} \\ a_1 \|W\|^2 &\leq \|W\|^2 \int_{t_0}^{t_0+T} \|\Phi(\tau)\|^2 \cos^2(\theta) d\mu(\tau) \leq a_2 \|W\|^2 \Rightarrow \\ a_1 &\leq \int_{t_0}^{t_0+T} \|\Phi(\tau)\|^2 \cos^2(\theta) d\mu(\tau) \leq a_2, \quad \text{όπου } \theta = \angle(W, \Phi(\tau))\end{aligned}$$

Καθώς το διάνυσμα W μπορεί να είναι οποιοδήποτε διάνυσμα του χώρου \mathbb{R}^q , η γωνία θ της παραπάνω εξίσωσης πρακτικά είναι η γωνία του διανύσματος οπισθοδρομητών $\Phi(x(t))$ με οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα c στον χώρο \mathbb{R}^q . Συνεπώς, η παραπάνω σχέση γράφεται αλλιώς και ως:

$$a_1 \leq \int_{t_0}^{t_0+T} \|c^T \Phi(\tau)\|^2 d\mu(\tau) \leq a_2, \quad \forall t_0 \geq 0, \quad \|c\| = 1 \quad (2.3)$$

Σχήμα 2.6: Γεωμετρικός τόπος του $\Phi(x)$ στο Ω

για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα του χώρου \mathbb{R}^q . Η εξίσωση (2.3) αποτελεί μια ισοδύναμη έκφραση της Συνθήκης Επιμένουσας Διέγερσης, η οποία σε αυτό το παράδειγμα διευκολύνει την ανάλυση.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα μας, έστω ότι έχουμε βρει έναν μηχανισμό ελέγχου που εξαναγκάζει την τροχιά $x(t)$ του συστήματος να εκτελέσει την περιοδική κίνηση

$$x(t) = 0.5(1 + \cos(t))$$

συνεπώς ισχύει η ανίσωση: $0 \leq x(t) \leq 1$, και άρα $x(t) \in \Omega_1$.

Καθώς η συνάρτηση $x(t)$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , έτσι και η συνάρτηση $c^T \Phi(x(t))$ της εξίσωσης (2.3), ως σύνθεση με περιοδική συνάρτηση είναι επίσης περιοδική. Έτσι, επιλέγοντας στην εξίσωση (2.1) την σταθερά T ίση με την περίοδο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ιδιότητα των περιοδικών συναρτήσεων:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

για να απλοποιήσουμε περαιτέρω το ολοκλήρωμα της ΣΕΔ ως εξής:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |c^T \Phi(x(\tau))|^2 d\tau = \int_0^T |c^T \Phi(x(\tau))|^2 d\tau, \quad \forall t_0$$

Από την παραπάνω σχέση, είναι ευκολότερο να αντιληφθεί κανείς την φυσική σημασία της ΣΕΔ. Πρέπει, κατά μήκος μιας περιόδου το διάνυσμα $\Phi(x(t))$ να εξερευνεί κάθε κατεύθυνση c του χώρου ελεύθερων παραμέτρων. Όσο πιο αποτελεσματική είναι η διέγερση αυτή, τότε τόσο αυξάνεται το κάτω φράγμα a_1 το οποίο ονομάζεται και *επίπεδο διέγερσης*.

Για να επιδείξουμε το παραπάνω συμπέρασμα, στο σχήμα (2.6) μελετάμε την γεωμετρική συμπεριφορά του διανύσματος $\Phi(x(t))$ συναρτήσει της τροχιάς $x(t)$. Καθότι έχουμε συναρτήσεις ράμπας, το διάνυσμα γράφεται ως:

$$\Phi(x) = \begin{cases} [x, 0]^T & , x \in \Omega_1 \\ [x, x-1]^T & , x \in \Omega_2 \end{cases}$$

Όταν η τροχιά $x(t) \in \Omega_1$, τότε το διάνυσμα Φ κινείται πάνω στο πορτοκαλί ευθύγραμμο τμήμα. Σε αυτή την περίπτωση όμως, είναι πάντα κάθετο στο μοναδιαίο διάνυσμα $c = [1 \ 0]^T$, συνεπώς το εσωτερικό γινόμενο $c^T \Phi(x(\tau))$ είναι 0 καθ' όλη την διάρκεια της περιόδου.

Μέσω αυτού του αντιπαραδείγματος βλέπουμε πως δεν υπάρχει θετικό a_1 που να ικανοποιεί την παρακάτω σχέση.

$$0 < a_1 \leq \int_0^T |c^T \Phi(x(\tau))|^2 d\tau \quad \forall c \in \{c \mid c \in \mathbb{R}^2, \|c\| = 1\}$$

συνεπώς η διανυσματική συνάρτηση Φ δεν ικανοποιεί την συνθήκη επιμένουσας διέγερσης.

Αντιθέτως, μέσω του σχήματος (2.6) βλέπουμε πως εάν επιλέξουμε μια τροχιά $x(t)$ που να επισκέπτεται και τα δύο σύνολα Ω_1 και Ω_2 , τότε το διάνυσμα Φ κινείται πάνω στα δύο ευθύγραμμα τμήματα (πορτοκαλί και μπλέ). Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει διάνυσμα c του μοναδιαίου κύκλου που να είναι κάθετο σε όλη την διάρκεια της περιόδου T , συνεπώς ικανοποιείται η συνθήκη επιμένουσας διέγερσης.

Παρόλα αυτά, ακόμα και σε αυτό το απλό παράδειγμα είναι αρκετά δύσκολος ο αναλυτικός υπολογισμός του επιπέδου διέγερσης a_1 .

2.2.2 Παράδειγμα 2: Σ.Ε.Δ και ποιότητα εκτίμησης

Σε αυτό το δεύτερο παράδειγμα το ζητούμενο μας είναι η προσέγγιση της άγνωστης συνάρτησης $f(x) = 1 + 0.3 \cos(5x)$ με την χρήση του μοντέλου

$$y = a \cos(x) + b \sin(x)$$

Όπως και πριν, έτσι και εδώ θα υποθέσουμε πως έχουμε βρει έναν μηχανισμό ελέγχου που εξαναγκάζει την τροχιά $x(t)$ του συστήματος να εκτελέσει την κίνηση $x(t) = t$. Παρόλο που η κίνηση δεν είναι περιοδική όπως πριν, αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα αφού τόσο η άγνωστη συνάρτηση f , όσο και το διάνυσμα οπισθοδρομητών Φ είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου.

Μαθηματική Ανάλυση

Ας εξετάσουμε την ΣΕΔ για το συγκεκριμένο παράδειγμα χρησιμοποιώντας τον ορισμό της εξίσωσης (2.3). Ομοίως με πριν, το διάνυσμα οπισθοδρομητών είναι περιοδικό με περίοδο 2π , συνεπώς ο υπολογισμός της ΣΕΔ ανάγεται στην μελέτη του ολοκληρώματος

$$\int_0^T |c^T \Phi(x(\tau))|^2 d\tau, \quad \forall c \in \{c \mid c \in \mathbb{R}^2, \|c\| = 1\}$$

Αναλύοντας το εσωτερικό γινόμενο $c^T \Phi(x(\tau))$ περαιτέρω, προκύπτει

$$\int_0^T |c^T \Phi(x(\tau))|^2 d\tau = \int_0^T \|c\|^2 \|\Phi(x(\tau))\|^2 \cos^2(\theta) d\tau, \quad \text{όπου } \theta = \angle(c, \Phi(\tau)) \quad (2.4)$$

Καθώς όμως, το c είναι μοναδιαίο, το μέτρο του είναι 1. Επίσης, το διάνυσμα οπισθοδρομητών είναι το

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{bmatrix}$$

το μέτρο $\|\Phi(x(\tau))\|$ είναι επίσης 1 για κάθε x . Συνεπώς το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.4) απλοποιείται ακόμα περισσότερο και τελικά καταλήγουμε στην τελική μορφή:

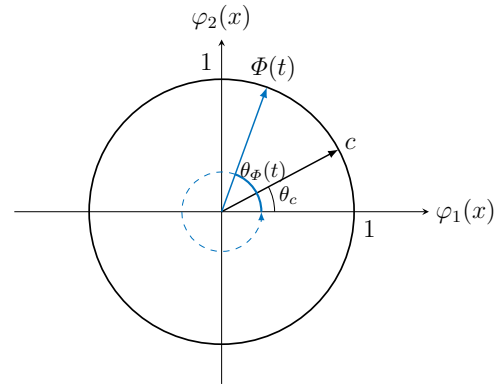
$$\int_0^T \cos^2(\theta(t)) d\tau$$

όπου η γωνία $\theta(t)$ δίνεται από την σχέση

$$\theta(t) = \theta_\Phi(t) - \theta_c, \quad \theta_c \in [0, 2\pi]$$

με τα θ_Φ και θ_c να φαίνονται στο σχήμα (2.7). Λόγω της συμμετρίας του σχήματος, το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο για κάθε γωνία θ_c , και συνεπώς η αριθμητική τιμή του ολοκληρώματος της ΣΕΔ είναι τελικά

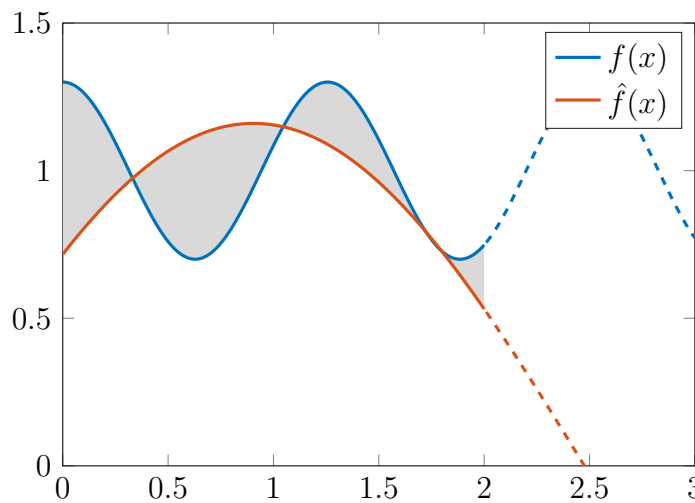
$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\tau) d\tau = \pi = a_1 = a_2$$



Σχήμα 2.7

Όπως μπορούμε να δούμε η απλότητα του παραδείγματος μας επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό των επιπέδων διέγερσης και ως εκ τούτου την μαθηματική επαλήθευση της ΣΕΔ.

Παρόλα αυτά, χρησιμοποιώντας το παραπάνω μοντέλο για να προσεγγίσουμε την άγνωστη $f(x)$ στο πεδίο ενδιαφέροντος, καταλήγουμε στην προσέγγιση του σχήματος (2.8) η οποία δεν είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική.



Σχήμα 2.8: Προσέγγιση της $f(x)$ του Παραδείγματος 2.

Το συμπέρασμα που προσπαθούμε να καταλήξουμε μέσω αυτού του παραδείγματος είναι πως ακόμα και αν η ΣΕΔ ικανοποιείται, αυτό δεν συνεπάγεται υποχρεωτικά στην επιτυχία της εφαρμογής αναγνώρισης. Πρέπει και το μοντέλο που χρησιμοποιείται να είναι ικανό να προσεγγίσει την ικανοποιητικά την άγνωστη συνάρτηση.

2.2.3 ΣΕΔ για RBF νευρωνικά δίκτυα

Όπως είδαμε, η μαθηματική εξασφάλιση της ικανοποίησης της Συνθήκης Επιμένουσας Διέγερσης είναι αρκετά πολύπλοκη, ακόμα και σε πολύ απλές εφαρμογές όπως αυτές των Παραδειγμάτων 1 και 2.

Καθώς στην εργασία αυτή χρησιμοποιούμε ως μοντέλα τα RBF νευρωνικά δίκτυα, σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε ένα αποτέλεσμα που μας επιτρέπει να εγγυηθούμε την ικανοποίηση της ΣΕΔ σε ένα τόσο σύνθετο πρόβλημα.

Θεώρημα 2 (ΣΕΔ για δίκτυα RBF). Έστω το σύνολο $I = [t_0, t_0 + T]$, όπου t_0 και T θετικές σταθερές, και τα σύνολα $I_i = \{t \in I : \|x(t) - c_i\| \leq \epsilon, i = 1, \dots, q \text{ με το } \epsilon \leq \frac{1}{2} \min_{i \neq j} \{\|c_i - c_j\|\}\}$. Εάν υπάρχει σταθερά T έτσι ώστε τα μέτρα $\mu(I_i)$ να είναι κάτω φραγμένο από μια σταθερά τ_0 που είναι ανεξάρτητη του t_0 και του i , τότε το διάνυσμα οπισθοδρομητών $\Phi(x(t))$ ικανοποιεί την συνθήκη επιμένουσας διέγερσης της εξίσωσης (2.1).

Φυσική Σημασία

Η ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος είναι η εξής: Εάν εντός μιας περιόδου T , για κάθε κέντρο c_i υπάρχει ένα χρονικό διάστημα I_i στο οποίο η τροχιά $x(t)$ διέρχεται αρκούντως κοντά από αυτό, και ο χρόνος $\mu(I_i)$ που παραμένει αρκούντως κοντά είναι πάντα μεγαλύτερος από μια σταθερά τ_0 , τότε το διανυσματικό πεδίο $\Phi(x(t))$ ικανοποιεί την ΣΕΔ της εξίσωσης (2.1).

Με αυτόν τον τρόπο, κάθε συνάρτηση ενεργοποίησης $\varphi_i(x(t))$ φτάνει κοντά στην μέγιστη τιμή της τουλάχιστον μια φορά εντός κάθε περιόδου, διεγείροντας έτσι την αντίστοιχη μοναδιαία κατεύθυνση c του χώρου ελεύθερων παραμέτρων \mathbb{R}^q .

2.3 Έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης

Ο Έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης (Prescribed Performance Control) είναι μια μεθοδολογία ελέγχου που μας επιτρέπει να ελέγξουμε ένα συνεχές δυναμικό σύστημα, εφόσον αυτό ικανοποιεί κάποιες συνθήκες που θα διατυπωθούν παρακάτω. Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της μεθοδολογίας είναι ότι εγγυάται πως το σφάλμα παρακολούθησης εξόδου θα συγκλίνει σε μια προαποφασισμένη και οσοδήποτε μικρή περιοχή του μηδενός με προεπιλεγμένη ταχύτητα και υπερύψωση.

Ο έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης εισήχθη στην εργασία [3] το 2008, και τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί εκτεταμένα. Παρόλο που στις εργασίες αυτές έχουν

αναπτυχθεί πολλές παραλλαγές που να εξασφαλίζουν προδιαγεγραμμένη απόκριση εξόδου σε strict feedback συστήματα [29], pure feedback συστήματα [30] και άλλα, σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την βασική ιδέα της μεθόδου. Στο κεφάλαιο 3 θα εμβαθύνουμε παρουσιάζοντας έναν συγκεκριμένο τρόπο εφαρμογής της που να εξυπηρετεί τις ανάγκες του προβλήματος μας, και θα αποδείξουμε μαθηματικά την ορθότητα του.

2.3.1 Ορισμός του προβλήματος

Έστω ένα γενικό μη γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.5}$$

όπου $x \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα καταστάσεων, $u \in \mathbb{R}^m$ το διάνυσμα εισόδων ελέγχου και $y \in \mathbb{R}^p$ είναι η έξοδος του συστήματος. Τα διανυσματικά πεδία $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ είναι τοπικά Lipschitz συνεχή στα ορίσματά τους. Έστω επίσης και η αρκούντως ομαλή και φραγμένη τροχιά παρακολούθησης

$$y_d(t) = [y_{d1}(t) \ y_{d2}(t) \ \cdots \ y_{dp}(t)]^T$$

καθώς και τα αντίστοιχα σφάλματα εξόδου:

$$e_i(t) = y_i(t) - y_{di}(t), \quad i = 1, \dots, p$$

Αυτό που επιδιώκουμε είναι η σύγκλιση των σφαλμάτων e_i σε μια προαποφασισμένη και οσοδήποτε μικρή περιοχή του μηδενός με προεπιλεγμένη ταχύτητα σύγκλισης και υπερύψωση.

Το πρώτο βήμα είναι η μαθηματική περιγραφή των εννοιών αυτών. Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε τις συναρτήσεις επίδοσης:

Ορισμός 2 (Συνάρτηση Επίδοσης). Μια συνάρτηση $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ καλείται συνάρτηση επίδοσης εάν είναι φραγμένη, θετική, γνησίως φθίνουσα και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) > 0$$

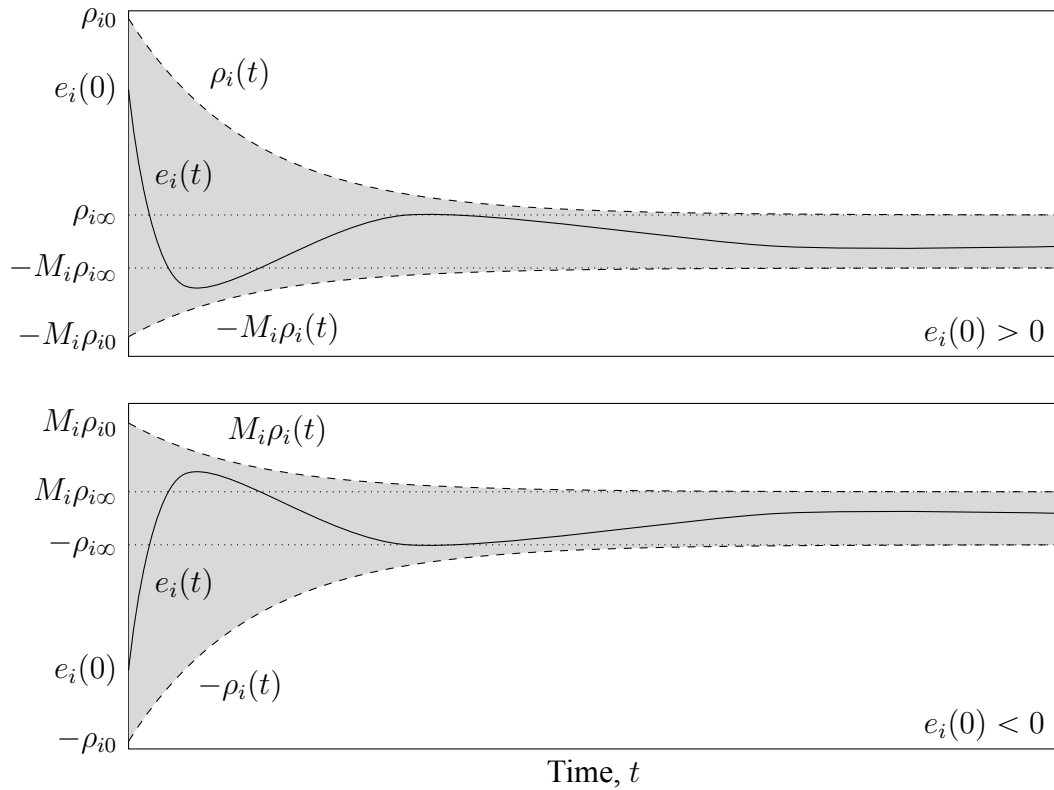
Μια τυπική επιλογή συνάρτησης συμμετοχής είναι η συνάρτηση

$$\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t} + \rho_\infty\tag{2.6}$$

Ο λόγος είναι πως η παραπάνω επιλογή μας επιτρέπει να διαμορφώσουμε το σφάλμα σταθερής κατάστασης επιλέγοντας το ρ_∞ , το αρχικό σφάλμα επιλέγοντας το ρ_0 και τον ρυθμό σύγκλισης επιλέγοντας το λ .

Στην συνέχεια, για να μοντελοποιήσουμε την υπερύψωση, ορίζουμε τους αριθμούς \overline{M}_i και \underline{M}_i ως

$$(\underline{M}_i, \overline{M}_i) = \begin{cases} (-M_i, 1) & \text{όταν } e_i(0) > 0 \\ (-1, M_i) & \text{όταν } e_i(0) < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, p\tag{2.7}$$



Σχήμα 2.9: Μαθηματική περιγραφή της Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης

και το συνολικό πρόβλημα της Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης Εξόδου (ΠΑΕ) περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\underline{M}_i \rho_i(t) < e_i(t) < \overline{M}_i \rho_i(t), \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.8)$$

Η ανίσωση (2.8) περιγράφεται σχηματικά στην γραφική παράσταση (2.9). Όπως μπορούμε να δούμε το πλάτος της τελικής ζώνης σύγκλισης καθορίζεται από την σταθερά $\rho_{i\infty}$ της εξίσωσης (2.6) ενώ ο ρυθμός σύγκλισης σε αυτή την ζώνη από την αντίστοιχη σταθερά λ_i .

Ο λόγος που τα όρια \overline{M}_i και \underline{M}_i καθορίζονται με βάση την εξίσωση (2.7) είναι επειδή όταν το αρχικό σφάλμα e_i είναι θετικό, περιμένουμε υπερύψωση στα αρνητικά και αντίστοιχα στα θετικά στην περίπτωση που το e_i είναι αρνητικό. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο άκρα με την σταθερά M_i το μόνο που επιτυγχάνεται είναι η κλιμάκωση (scale) της συνάρτησης επίδοσης, ενώ χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.7) μπορούμε να επιβάλουμε μέγιστη υπερύψωση ίση με $M_i \rho_{i0}$. Μάλιστα, εάν επιλέξουμε $M_i = 0$ είναι εφικτή και η περιγραφή της μηδενικής υπερύψωσης.

Τέλος, είναι πολύ σημαντικό να τονίσουμε πως για να ισχύει η εξίσωση (2.8) για κάθε $t \geq 0$ πρέπει η τιμή ρ_{i0} να είναι μεγαλύτερη από το πλάτος του αρχικού σφάλματος $|e_i(0)|$ αλλιώς για $t = 0$ το σφάλμα βρίσκεται έξω από την ζώνη.

Με βάση τα παραπάνω λοιπόν, το πρόβλημα της Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης Εξόδου (ΠΑΕ) ορίζεται ως εξής:

Πρόβλημα ΠΑΕ: Να σχεδιαστεί μια συνεχής είσοδος ελέγχου u για το σύστημα (2.5) έτσι ώστε όλα τα σήματα κλειστού βρόχου να διατηρούνται φραγμένα και τα σφάλματα

εξόδου $e_i(t)$, $i = 1, \dots, p$ να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\underline{M}'_i \rho_i(t) \leq e_i(t) \leq \overline{M}'_i \rho_i(t), \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.9)$$

για κάποιες σταθερές \underline{M}'_i και \overline{M}'_i για τις οποίες ισχύουν:

$$\underline{M}_i < \underline{M}'_i \leq \overline{M}'_i < \overline{M}_i, \quad i = 1, \dots, p$$

με τα \underline{M}_i και \overline{M}_i να ορίζονται από την σχέση (2.7) και $\rho_i(t)$, $i = 1, \dots, p$ κατάλληλα επιλεγμένες συναρτήσεις επίδοσης.

2.3.2 Μετασχηματισμός σε πρόβλημα σταθεροποίησης

Καθώς το πρόβλημα ΠΑΕ στην μορφή της εξίσωσης (2.9) είναι αρκετά δύσκολο να αντιμετωπιστεί, παρακάτω θα παρουσιαστεί ένας μετασχηματισμός των σφαλμάτων εξόδου, ο οποίος τα διαμορφώνει αναφορικά με τα χαρακτηριστικά απόκρισης της εξίσωσης (2.8) με σκοπό την διευκόλυνση της ανάλυσης. Ο μετασχηματισμός αυτός έχει την μορφή:

$$\varepsilon_i(t) = T_i \left(\frac{e_i(t)}{\rho_i(t)} \right), \quad i = 1, \dots, p \quad (2.10)$$

όπου οι ποσότητες $\varepsilon_i(t)$ ονομάζονται μετασχηματισμένα σφάλματα, και οι συναρτήσεις μετασχηματισμού $T_i(\cdot)$ είναι θετικές, γνησίως αύξουσες που ορίζουν απεικονίσεις της μορφής:

$$T_i : (\underline{M}_i, \overline{M}_i) \rightarrow (-\infty, \infty), \quad i = 1, \dots, p$$

όπου τα \underline{M}_i και \overline{M}_i δίνονται από την εξίσωση (2.7). Η ποσότητα $e_i(t)/\rho_i(t)$ ονομάζεται αλλιώς και κανονικοποιημένο σφάλμα, και συμβολίζεται ως $\xi_i(t)$.

Μια τέτοια συνάρτηση μετασχηματισμού είναι η

$$T_i \left(\frac{e_i(t)}{\rho_i(t)} \right) = T_i(\xi_i(t)) = \ln \left(\frac{-\underline{M}_i + \xi_i(t)}{\overline{M}_i - \xi_i(t)} \right) \quad (2.11)$$

η οποία αναπαρίσταται γραφικά και στο σχήμα (2.10). Χρησιμοποιώντας αυτό το εργαλείο, μπορούμε να επαναπροσδιορίσουμε το πρόβλημα της ΠΑΕ χρησιμοποιώντας την ακόλουθη πρόταση:

Ισοδύναμο Πρόβλημα ΠΑΕ: Εάν τα μετασχηματισμένα σφάλματα $\varepsilon_i(t)$, $i = 1, \dots, p$ της εξίσωσης (2.10) διατηρηθούν φραγμένα, τότε ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις:

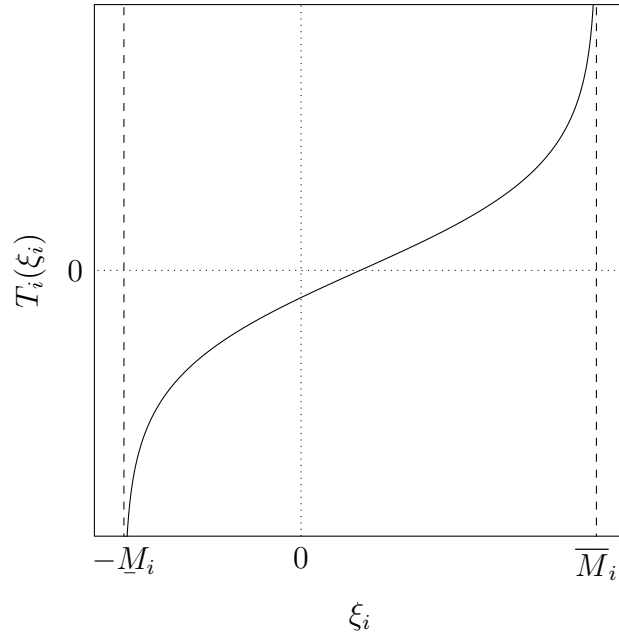
$$\underline{M}_i \rho_i(t) < \underline{M}'_i \rho_i(t) \leq e_i(t) \leq \rho_i(t) \overline{M}'_i < \rho_i(t) \overline{M}_i, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, p$$

για κάποιες σταθερές \underline{M}'_i και \overline{M}'_i για τις οποίες ισχύουν:

$$\underline{M}_i < \underline{M}'_i \leq \overline{M}'_i < \overline{M}_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.12)$$

Απόδειξη Καθώς τα $\varepsilon_i(t)$, $i = 1, \dots, p$ είναι φραγμένα, τότε θα υπάρχουν τα κάτω φράγματα $\underline{\varepsilon}_i$ και τα άνω φράγματα $\overline{\varepsilon}_i$ για κάθε i . Αντικαθιστώντας το $\varepsilon_i(t)$ από την εξίσωση (2.10), θα ισχύει η παρακάτω ανίσωση:

$$\underline{\varepsilon}_i \leq T_i \left(\frac{e_i(t)}{\rho_i(t)} \right) \leq \overline{\varepsilon}_i, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, p$$



Σχήμα 2.10: Συνάρτηση Μετασχηματισμού

Καθώς οι συναρτήσεις μετασχηματισμού $T_i(\cdot)$ είναι ένα προς ένα και γνησίως αύξουσες, χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό έχουμε:

$$T^{-1}(\underline{\varepsilon}_i) \leq \frac{e_i(t)}{\rho_i(t)} \leq T^{-1}(\bar{\varepsilon}_i), \quad \forall t \geq 0, i = 1, \dots, p$$

και καθώς οι συναρτήσεις επίδοσης $\rho_i(t)$ είναι θετικές, τελικά καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$T^{-1}(\underline{\varepsilon}_i)\rho_i(t) \leq e_i(t) \leq T^{-1}(\bar{\varepsilon}_i)\rho_i(t), \quad \forall t \geq 0, i = 1, \dots, p$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη ορίζοντας της ποσότητες:

$$\underline{M}'_i = T^{-1}(\underline{\varepsilon}_i) \quad \text{και} \quad \overline{M}'_i = T^{-1}(\bar{\varepsilon}_i), \quad i = 1, \dots, p$$

οι οποίες σημειώνουμε πως ικανοποιούν την σχέση (2.12), καθώς οι ποσότητες \underline{M}_i και \overline{M}_i είναι τα όρια του αντίστροφου μετασχηματισμού $T^{-1}(\cdot)$ στο $-\infty$ και $+\infty$ αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση, καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$\underline{M}_i\rho_i(t) < \underline{M}'_i\rho_i(t) \leq e_i(t) \leq \rho_i(t)\overline{M}'_i < \rho_i(t)\overline{M}_i, \quad \forall t \geq 0, i = 1, \dots, p$$

□

2.4 Σύστημα Αναφοράς

Τέλος, σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε στον μηχανισμό που παράγει τα σήματα αναφοράς τα οποία χρησιμοποιούνται στο σχήμα αναγνώρισης που αναπτύσσεται στα πλαίσια αυτής της εργασίας. Το ζητούμενο ενός τέτοιου συστήματος περιγράφεται παρακάτω.

Περιγραφή Προβλήματος: Έστω ένα δυναμικό σύστημα τάξης n σε κανονική ελέγξιμη μορφή:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f(x, u, t)\end{aligned}\tag{2.13}$$

όπου $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, τοπικά *Lipschitz* συνεχής συνάρτηση. Να σχεδιαστεί σύστημα που θα παράγει τα σήματα αναφοράς $x_{1d}(t), x_{2d}(t), \dots, x_{nd}(t)$ για μεταβάσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t_0 + \Delta T) \\ x_2(t_0 + \Delta T) \\ \vdots \\ x_n(t_0 + \Delta T) \end{bmatrix}\tag{2.14}$$

για κάθε αρχικό διάνυσμα $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ προς κάθε τελικό διάνυσμα $x(t_0 + \Delta T) \in \mathbb{R}^n$ για ένα επιθυμητό χρονικό διάστημα μετάβασης ΔT . Τέλος, θα πρέπει δυο διαδοχικές μεταβάσεις $x(t_0) \rightarrow x(t_0 + \Delta T) \rightarrow x(t_0 + 2\Delta T)$ να σχηματίζουν μια ομαλή καμπύλη στον χώρο \mathbb{R}^n .

Ο λόγος που διατυπώνουμε το πρόβλημα με την παραπάνω μορφή συνδέεται με την Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης για RBF δίκτυα που περιγράφεται στην παράγραφο 2.2.3. Οι μεταβάσεις $x(t_0) \rightarrow x(t_0 + \Delta T)$ στην ουσία περιγράφουν την μετάβαση από ένα κέντρο c_i του RBF νευρωνικού δικτύου σε ένα κέντρο c_j , και η διάρκεια μετάβασης ΔT συνδέεται με τον χρόνο παραμονής της επιθυμητής τροχιάς $x_d(t)$ στην γειτονία του κάθε κέντρου c_i .

2.4.1 Μαθηματική Ανάλυση

Συνοριακές Συνθήκες

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να λάβει κανείς υπόψιν στην σχεδίαση είναι η μορφή της εξίσωσης (2.13). Η εξίσωση αυτή επιβάλλει τον περιορισμό:

$$\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, n-1$$

ο οποίος προφανώς θα πρέπει να ισχύει και για τα σήματα αναφοράς $x_{di}(t)$.

Στην συνέχεια, μελετώντας κανείς το παραπάνω πρόβλημα από την οπτική γωνία των Διαφορικών Εξισώσεων διαπιστώνει πως πρόκειται για ένα πρόβλημα συνοριακών συνθηκών, για το οποίο έχουμε $2n + 2$ συνοριακές συνθήκες. Οι πρώτες $2n$ συνθήκες περιγράφονται από την εξίσωση (2.13) και είναι οι αρχικές και οι τελικές τιμές του διανύσματος καταστάσεων.

Οι άλλες 2 προκύπτουν από την τελευταία απαίτηση η οποία αναφέρεται στην διατήρηση της ομαλότητας της καμπύλης μεταξύ δυο μεταβάσεων. Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζεται από την συνέχεια των παραγώγων των καταστάσεων η οποία διατυπώνεται ως εξής:

$$\dot{x}_i(t_0^-) = \dot{x}_i(t_0^+), \quad i = 1, \dots, n\tag{2.15}$$

Καθώς το σύστημα βρίσκεται σε κανονική μορφή, οι πρώτες $n-1$ εξισώσεις της σχέσης (2.15) αναφέρονται στην συνέχεια των καταστάσεων $x_2(t), \dots, x_n(t)$, $i = 1, \dots, n$ και συνεπώς έχουν συμπεριληφθεί ήδη στην σχεδίαση από την εξίσωση (2.14).

Εν αντιθέσει, η συνθήκη $\dot{x}_n(t_0^-) = \dot{x}_n(t_0^+)$ δεν ικανοποιείται απαραίτητα όταν οι υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες της σχέσης (2.14) ικανοποιούνται, και συνεπώς εισάγει δυο επιπλέον συνοριακές συνθήκες, μια για το $\dot{x}_n(t_0)$ και μια για το $\dot{x}_n(t_0 + \Delta T)$.

Επιλογή λύσης

Αρχικά θα θεωρήσω πως για κάθε ζητούμενη μετάβαση, η κατάσταση $x_1(t)$ περιγράφεται από το πολυώνυμο του χρόνου t ως εξής:

$$x_1(t) = y(t) = \sum_{j=1}^{2n+2} \alpha_j \cdot t^{j-1}, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta T] \quad (2.16)$$

Ο βαθμός του πολυωνύμου επιλέγεται ίσος με $2n+1$ έτσι ώστε με κατάλληλη επιλογή των συντελεστών του πολυωνύμου a_i να μπορούν να ικανοποιηθούν όλες οι συνοριακές συνθήκες. Παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.16) $n+1$ φορές, προκύπτουν οι υπόλοιπες καταστάσεις συναρτήσεως του χρόνου t , καθώς και η παράγωγος της n -οστής κατάστασης για $n+1$:

$$x_i(t) = \sum_{j=i}^{2n+2} \alpha_j \cdot \prod_{k=1}^{i-1} (j-k) \cdot t^{j-i}, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta T], \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (2.17)$$

Ορίζω ως τον συντελεστή του όρου a_j για την κατάσταση x_i ως την συνάρτηση

$$b_{i,j}(t) = \begin{cases} \left(\prod_{k=1}^{i-1} (j-k) \right) \cdot t^{j-i} & , j \geq i \\ 0 & , j < i \end{cases} \quad (2.18)$$

και με αυτόν τον τρόπο μπορώ να ξαναγράψω την εξίσωση (2.17) στην γραμμική ως προς τους όρους μορφή:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{2n+2} b_{i,j}(t) \cdot \alpha_k, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta T], \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (2.19)$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό, μπορούμε να γράψουμε τις συνοριακές συνθήκες για την χρονική στιγμή t_0 στην πιο συμπαγή μορφή:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \\ \dot{x}_n(t_0) \end{bmatrix}}_{Y(t_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1,1}(t_0) & b_{1,2}(t_0) & \dots & b_{1,2n+2}(t_0) \\ b_{2,1}(t_0) & b_{2,2}(t_0) & \dots & b_{2,2n+2}(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1}(t_0) & b_{n,2}(t_0) & \dots & b_{n,2n+2}(t_0) \\ b_{n+1,1}(t_0) & b_{n+1,2}(t_0) & \dots & b_{n+1,2n+2}(t_0) \end{bmatrix}}_{R(t_0)} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n+2} \end{bmatrix}$$

όπου $R(t_0)$ είναι γνωστός $n+1 \times 2(n+1)$ πίνακας και $Y(t_0)$ το $n+1 \times 1$ διάνυσμα συνοριακών συνθηκών. Γράφοντας σε αντίστοιχη μορφή τις συνοριακές συνθήκες για την

χρονική στιγμή $t_0 + \Delta T$, μπορούμε να εκφράσουμε το συνολικό πρόβλημα συνοριακών συνθηκών χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} Y(t_0) \\ Y(t_0 + \Delta T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(t_0) \\ R(t_0 + \Delta T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n+2} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Το αλγεβρικό σύστημα της εξίσωσης (2.20) είναι ένα σύστημα $2n + 2$ εξισώσεων και $2n + 2$ αγνώστων, και καθώς ο πίνακας R είναι καλώς ορισμένος, το πρόβλημα έχει μια μόνο λύση η οποία υπολογίζεται ως:

$$\alpha = R^{-1}Y \quad (2.21)$$

2.4.2 Μορφή κλειστού βρόγχου

Η μαθηματική ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου αναφέρεται στην επιλογή και την παραμετροποίηση μιας ισοδύναμης Διαφορικής Εξίσωσης που να ικανοποιεί της ζητούμενες συνοριακές συνθήκες. Για να χρησιμοποιηθεί αυτό το αποτέλεσμα εντός ενός κλειστού βρόγχου, απαιτείται να το μετασχηματίσουμε σε μορφή εξισώσεων κατάστασης. Ξεκινώντας από την λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$x_{1d}(t) = y(t)$$

πραγωγίζουμε n φορές και έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d}(t) &= \dot{y}(t) \\ \dot{x}_{2d}(t) &= \ddot{y}(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{nd}(t) &= y^{(n)}(t) \end{aligned}$$

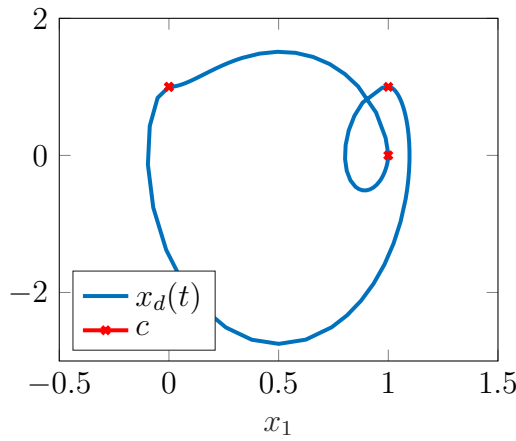
Με βάση τα παραπάνω, χρησιμοποιώντας την σχέση $y^{(i)}(t) = x_{(i+1)d}(t)$ και ορίζοντας την παράγωγο n -οστή παράγωγο $y^{(n)}(t)$ ως $\nu(t)$ τελικά καταλήγουμε στις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος αναφοράς:

$$\Sigma_{ref} \begin{cases} \dot{x}_{1d}(t) &= x_{2d}(t) \\ \dot{x}_{2d}(t) &= x_{3d}(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{nd}(t) &= \nu(t) \end{cases} \quad (2.22)$$

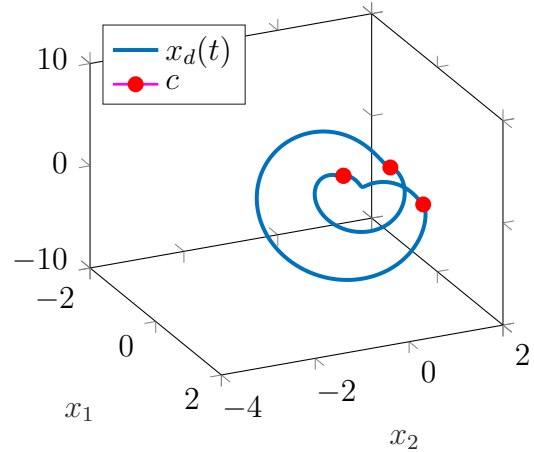
Η είσοδος ελέγχου του συστήματος αναφοράς ορίζεται με την βοήθεια της σχέσης (2.18) ως:

$$\nu(t) = y^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{2n+2} b_{n+1,j}(t) \cdot \alpha_j, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta T]$$

όπου τα βάρη a_j υπολογίζονται για κάθε μετάβαση με την βοήθεια της σχέσης (2.20).



(α) Δευτεροβάθμιο Σύστημα



(β) Τριτοβάθμιο Σύστημα

Σχήμα 2.11: Τροχιές αναφοράς που διέρχονται από τα επιθυμητά κέντρα c

2.4.3 Παραδείγματα χρήσης

Τέλος για να δείξουμε πως το προτεινόμενο σύστημα αναφοράς ικανοποιεί τις απαιτήσεις, παραθέτουμε δυο παραδείγματα στα οποία σκοπός είναι ο σχηματισμός μιας κλειστής ομαλής τροχιάς που να διέρχεται από κάποια επιθυμητά σημεία του χώρου \mathbb{R}^2 και \mathbb{R}^3 αντίστοιχα.

Το παραπάνω σενάριο είναι ακριβώς ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζεται η θεωρία που αναπτύξαμε σε αυτή την παράγραφο και στο πραγματικό πρόβλημα, όπου το ζητούμενο είναι να σχεδιαστεί μια περιοδική τροχιά αναφοράς που να διέρχεται από όλα τα κέντρα ενός πλέγματος από γκαουσιανές συναρτήσεις βάσης, όπως επιτάσσει η ΣΕΔ για νευρωνικά δίκτυα RBF.

Στο σχήμα (2.11) φαίνεται πως πράγματι, και στις δυο περιπτώσεις, το προσομοιωμένο σύστημα αναφοράς της εξίσωσης (2.22) παράγει μια κλειστή και ομαλή τροχιά που να διέρχεται από όλα τα επιθυμητά σημεία.

2.5 Δυναμικά Συστήματα

Τέλος, σε αυτό το Κεφάλαιο παραθέτουμε κάποια χρήσιμα αποτελέσματα από την θεωρία δυναμικών συστημάτων τα οποία χρησιμοποιούνται κατά την μαθηματική απόδειξη της ορθότητας του προτεινόμενου σχήματος αναγνώρισης.

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\dot{\psi} = H(t, \psi), \quad \psi(0) = \psi_0 \in \Omega_\psi \quad (2.23)$$

όπου $H : \mathbb{R}^+ \times \Omega_\psi \rightarrow \mathbb{R}^n$ ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο και $\Omega_\psi \subset \mathbb{R}^n$ ένα μη κενό και ανοιχτό σύνολο.

Ορισμός 3. [31] Μια λύση $\psi(t)$ για $t \in [0, \tau_f)$ του προβλήματος αρχικών τιμών της εξίσωσης (2.23) θα ονομάζεται *μέγιστα επεκτεταμένη (maximal solution)*, αν δεν υπάρχει

κανονική επέκταση της για $t \geq \tau_f$ που να αποτελεί επίσης λύση του ίδιου προβλήματος αρχικών τιμών.

Θεώρημα 3. [31] Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών της εξίσωσης (2.23) με το διανυσματικό πεδίο $H(t, \psi)$ να είναι:

1. τοπικά Lipschitz συνεχές ως προς το όρισμα ψ για κάθε $t \geq 0$
2. τμηματικά συνεχής ως προς τον χρόνο t για κάθε σταθερό $\psi \in \Omega_\psi$
3. τοπικά ολοκληρώσιμο ως προς τον χρόνο t για κάθε σταθερό $\psi \in \Omega_\psi$

Τότε θα υπάρχει μια μοναδική μέγιστα επεκτεταμένη λύση $\psi(t)$ για το πρόβλημα αρχικών τιμών, έτσι ώστε $\psi(t) \in \Omega_\psi$ για κάθε $t \in [0, \tau_f)$ με $\tau_f > 0$.

Πρόταση 1. [31] Έστω ότι οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3 ισχύουν. Θεωρήστε την μέγιστα επεκτεταμένη λύση $\psi(t)$ στο χρονικό διάστημα $[0, \tau_f)$ όπου $\tau_f < \infty$. Τότε, για οποιοδήποτε συμπαγές σύνολο Ω'_ψ το οποίο είναι υποσύνολο του Ω_ψ θα υπάρχει μια χρονική στιγμή $t' \in [0, \tau_f)$ έτσι ώστε $\psi(t') \notin \Omega'_\psi$.

Κεφάλαιο 3

Σχήμα Αναγνώρισης

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα σχήμα αναγνώρισης για μη-γραμμικά συστήματα ΠΕΠΕ (πολλαπλών εισόδων, πολλαπλών εξόδων) σε κανονική μορφή, βασισμένο στα νευρωνικά δίκτυα RBF καθώς και στον έλεγχο προδιαγεγραμμένης απόκρισης.

3.1 Ορισμός του Προβλήματος

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι η παρουσίαση του προβλήματος που ασχολείται η παρούσα εργασία. Για τον σκοπό αυτό, ακολουθεί μια μαθηματική περιγραφή της κλάσης των συστημάτων που μελετάμε, η παρουσίαση των βασικών υποθέσεων που γίνονται για τα συστήματα αυτά και τέλος η επίσημη διατύπωση του προβλήματος.

3.1.1 Δομή του συστήματος

Έστω ένα μη-γραμμικό συνεχές χρονοαμετάβλητο σύστημα ΠΕΠΕ m εισόδων και m εξόδων σε κανονική μορφή το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}x_1^{(n_1)} &= f_1(x) + g_{11}(x)u_1 + \dots + g_{1m}(x)u_m \\&\vdots \\x_m^{(n_m)} &= f_m(x) + g_{m1}(x)u_1 + \dots + g_{mm}(x)u_m\end{aligned}\tag{3.1}$$

με

$$\begin{aligned}x_i^{(n_i)} &:= \frac{d^{n_i} x_i}{dt^{n_i}} \\x &:= \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_1^{(n_1-1)} & \dots & x_m & \dots & x_m^{(n_m-1)} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n \\n &= n_1 + \dots + n_m \\y &= \begin{bmatrix} x_1(t) & \dots & x_m(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m\end{aligned}$$

όπου $x \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα καταστάσεων, n η συνολική τάξη του συστήματος, m ο αριθμός υποσυστημάτων $u \in \mathbb{R}^m$ το διάνυσμα των εισόδων ελέγχου, και $y \in \mathbb{R}^m$ το

διάνυσμα εξόδων. Το σύστημα της εξίσωσης (3.1) μπορεί να γραφτεί στην πιο συμπαγή μορφή:

$$x^{(n)} = f(x) + G(x)u \quad (3.2)$$

ορίζοντας το διάνυσμα $f(x)$ και τον πίνακα $G(x)$ ως:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad G(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & \cdots & g_{1m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(x) & \cdots & g_{mm}(x) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

και το διάνυσμα $x^{(n)}$ ως:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1^{(n_1)} & \cdots & x_m^{(n_m)} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m$$

3.1.2 Υποθέσεις

Σε αυτό το σημείο περιγράφονται κάποιες υποθέσεις που θα θεωρήσουμε ότι πληρούνται από το σύστημα που εξετάζεται. Οι υποθέσεις αυτές είναι θεμελιώδους σημασίας για την μαθηματική ανάλυση που ακολουθεί, και για συστήματα στα οποία δεν ισχύουν, ενδέχεται η εφαρμογή της μεθόδου που περιγράφει το κεφάλαιο να μην επιφέρει τα αποτελέσματα που εξασφαλίζει η μαθηματική ανάλυση.

Υπόθεση 1. Ο πίνακας $G(x)$ είναι θετικά ορισμένος εντός ενός κλειστού και συμπαγούς συνόλου $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, δηλαδή η μικρότερη ιδιοτιμή του συμμετρικού του πίνακα είναι μεγαλύτερη από μια θετική σταθερά λ^* όπως περιγράφει η παρακάτω εξίσωση.

$$\lambda_{\min} \left(\frac{G(x) + G^T(x)}{2} \right) \geq \lambda^* > 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Υπόθεση 2. Το εξεταζόμενο σύστημα είναι τύπου Euler–Lagrange, δηλαδή ο πίνακας $G(x)$ δεν είναι συνάρτηση του διανύσματος $x^{(n)}$, ή μαθηματικά:

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x^{(n_i-1)}} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

Υπόθεση 3. Το πλήρες διάνυσμα καταστάσεων $x \in \mathbb{R}^n$ είναι διαθέσιμο προς μέτρηση σε κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$.

Υπόθεση 4. Ο πίνακας $G(x)$ είναι τοπικά Lipschitz συνεχής στο σύνολο \mathcal{X} της Υπόθεσης 1.

Υπόθεση 5. Οι τροχιές αναφοράς $x_{d_i}(t)$, $i = 1, \dots, m$ είναι γνωστές, φραγμένες συναρτήσεις του χρόνου με γνωστές και φραγμένες παραγώγους μέχρι τάξης n_i .

3.1.3 Διατύπωση του προβλήματος αναγνώρισης

Τέλος, έχοντας ορίσει τόσο την δομή των συστημάτων που μελετάμε, όσο και τις υποθέσεις που πρέπει αυτά τα συστήματα να ικανοποιούν, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το πρόβλημα με το οποίο ασχολείται η παρούσα εργασία.

Πρόβλημα (Αναγνώριση μη-γραμμικού ΠΕΠΕ):

Έστω ένα σύστημα ΠΕΠΕ της εξίσωσης (3.1) το οποίο ικανοποιεί τις υποθέσεις της παραγράφου 3.1.2. Το πρόβλημα αποτελείται από τα εξής δυο μέρη:

1. Να σχεδιαστεί σχήμα αναγνώρισης που να προσεγγίζει αρκούντως καλά τις άγνωστες συναρτήσεις

$$\Phi(x) := G^{-1}(x)f(x) \quad \text{και} \quad \Gamma(x) := G^{-1}(x)$$

ενός εντός κλειστού και συμπαγούς συνόλου Ω_x .

2. Να σχεδιαστεί η είσοδος ελέγχου $u(t)$ έτσι ώστε να επιτυγχάνεται παρακολούθηση μιας γνωστής τροχιάς $x_d(t)$ που να ικανοποιεί την Υπόθεση 5, και ταυτόχρονα να εξασφαλίζεται πως όλα τα σήματα κλειστού βρόγχου θα παραμένουν φραγμένα για κάθε $t \geq 0$.

3.2 Γενική Ιδέα του Σχήματος Αναγνώρισης

Πριν παρουσιαστεί η αναλυτική μορφή του προτεινόμενου σχήματος αναγνώρισης, αφιερώνουμε αυτή την Ενότητα στην περιγραφή της ιδέας που προσπαθούμε να υλοποιήσουμε μέσω της σχεδίασης του.

Σκοπός λοιπόν είναι η χρήση των RBF νευρωνικών δικτύων για την προσέγγιση των άγνωστων συναρτήσεων $\Phi(x)$ και $\Gamma(x)$. Η εκτίμηση των βαρών των νευρωνικών δικτύων θα αποτελείται από μια online διαδικασία εκμάθησης, κατά την οποία χρησιμοποιούμε τις προσεγγίσεις $\hat{\Phi}(x)$ και $\hat{\Gamma}(x)$ για να εξουδετερώσουμε την επίδραση των μη γραμμικών συναρτήσεων $f(x)$ και $G(x)$ κατά την διαδικασία ελέγχου του πραγματικού συστήματος. Όπως είναι προφανές, όσο πιο αποτελεσματική είναι αυτή η εξουδετέρωση, τόσο καλύτερα είναι τα αποτελέσματα προσέγγισης των $\Phi(x)$ και $\Gamma(x)$.

Όπως αναφέρουμε στο Κεφάλαιο 2, για την σωστή εκτίμηση των ελεύθερων παραμέτρων των νευρωνικών δικτύων, πρέπει να ικανοποιείται η Συνθήκη Επιμέρους Διέγερσης που παρουσιάζεται στην Υποενότητα 2.2.3. Σύμφωνα με την συνθήκη αυτή, απαιτείται η τροχιά του πραγματικού συστήματος $x(t)$ να είναι μια περιοδική τροχιά η οποία διέρχεται αρκούντως κοντά από όλα τα κέντρα των νευρωνικών δικτύων RBF.

Προς την επίτευξη του παραπάνω στόχου, η ιδέα που υλοποιείται είναι η εξής: Αρχικά σχεδιάζουμε μια κλειστή περιοδική τροχιά $x_d(t)$ η οποία διέρχεται από όλα τα κέντρα των νευρωνικών, χρησιμοποιώντας την θεωρία που παρουσιάζεται στην Υποενότητα 2.4. Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον Έλεγχο Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα παρακολούθησης της τροχιάς αυτής και μάλιστα να καθορίσουμε το σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση, επιλέγοντας κατάλληλα την σταθερά ρ_∞ . Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εγγυηθούμε ότι η τροχιά $x(t)$ του πραγματικού συστήματος θα διέρχεται αρκούντως κοντά από τα κέντρα του νευρωνικού δικτύου στην μόνιμη κατάσταση, ικανοποιώντας την Σ.Ε.Δ. για τα νευρωνικά δίκτυα των προσεγγίσεων $\hat{\Phi}(x)$ και $\hat{\Gamma}(x)$ με αποτέλεσμα την λύση του προβλήματος εκτίμησης των ελεύθερων παραμέτρων τους.

3.3 Σχεδίαση Κλειστού βρόγχου

Σε αυτή την παράγραφο, προτείνουμε ένα σχήμα αναγνώρισης το οποίο επιλύει το πρόβλημα *Αναγνώριση μη-γραμμικού ΠΕΠΕ* που διατυπώθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Αρχικά θα παρουσιάσουμε μια αρχιτεκτονική αναγνώρισης η οποία βασίζεται στα νευρωνικά δίκτυα RBF της Παραγράφου 2.1, και στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα βήματα σχεδίασης ενός σχήματος αναγνώρισης κλειστού βρόγχου που λύνει το πρόβλημα της εκτίμησης παραμέτρων για την επιλεγμένη αρχιτεκτονική.

3.3.1 Προσέγγιση με Νευρωνικά Δίκτυα

Καθώς το ζητούμενο είναι η αναγνώριση της άγνωστης δυναμικής του συστήματος, η οποία περιγράφεται από τις άγνωστες συναρτήσεις $f(x)$ και $G(x)$ εντός ενός κλειστού και συμπαγούς συνόλου Ω_x , θα χρησιμοποιηθούν τα νευρωνικά δίκτυα RBF, τα οποία όπως έχουμε δείξει στο Κεφάλαιο 2, έχουν την δυνατότητα να προσεγγίσουν οποιαδήποτε μη-γραμμική συνάρτηση.

Για λόγους που δεν είναι εμφανείς ακόμα, αλλά θα αποσαφηνισθούν κατά την μαθηματική ανάλυση, μέσω των δικτύων RBF θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε τις συναρτήσεις:

$$\Phi(x) := G^{-1}(x)f(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad (3.5)$$

και

$$\Gamma(x) := G^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(x) & \cdots & \gamma_{1m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1}(x) & \cdots & \gamma_{mm}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (3.6)$$

Καθώς το διάνυσμα $f(x)$ είναι συνάρτηση του πλήρους διανύσματος καταστάσεων $x \in \mathbb{R}^n$, ενώ ο πίνακας $G(x)$ είναι συνάρτηση μόνο των πρώτων $n_i - 1$ καταστάσεων κάθε υποσυστήματος i , θα χρησιμοποιηθεί διαφορετικό διάνυσμα οπισθοδρομητών για τις δυο αυτές περιπτώσεις, αφού αντίθετα εισάγεται περιττή πολυπλοκότητα στην προσέγγιση της $\Gamma(x)$. Συνεπώς, συμβολίζουμε με $Z_\Phi(x)$ το διάνυσμα οπισθοδρομητών για την προσέγγιση του διανύσματος $\Phi(x)$ και με $Z_\Gamma(x)$ το διάνυσμα οπισθοδρομητών της προσέγγισης της $\Gamma(x)$.

Χρησιμοποιώντας την Ιδιότητα Προσέγγισης της Παραγράφου 2.1.2, χωρίς βλάβη γενικότητας αντικαθιστούμε κάθε συνάρτηση $\varphi_i(x)$ και $\gamma_{ij}(x)$ των $\Phi(x)$ και $\Gamma(x)$ με τις προσεγγίσεις τους:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= w_{\varphi_i}^{*T} Z_\Phi(x) + \epsilon_{\varphi_i}(x), \quad \forall x \in \Omega_x \\ \gamma_{ij}(x) &= w_{\gamma_{ij}}^{*T} Z_\Gamma(x) + \epsilon_{\gamma_{ij}}(x), \quad \forall x \in \Omega_x \end{aligned} \quad (3.7)$$

όπου $w_{\varphi_i}^* \in \mathbb{R}^{q_\Phi}$ και $w_{\gamma_{ij}}^* \in \mathbb{R}^{q_\Gamma}$ τα βέλτιστα βάρη των νευρωνικών δικτύων της αντίστοιχης συνάρτησης, q_Φ και q_Γ το μέγεθος του κάθε νευρωνικού δικτύου και $\epsilon_{\varphi_i}(x)$ και $\epsilon_{\gamma_{ij}}(x)$ τα σφάλματα μοντελοποίησης, τα οποία έχουν ένα άγνωστο άνω φράγμα που

περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} |\epsilon_{\varphi_i}(x)| &\leq \bar{\epsilon}_{\varphi_i}, \quad \forall x \in \Omega_x, \quad i = 1, \dots, m \\ |\epsilon_{\gamma_{ij}}(x)| &\leq \bar{\epsilon}_{\gamma_{ij}}, \quad \forall x \in \Omega_x, \quad i, j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.8)$$

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να τονίσουμε πως στην προσπάθεια ελέγχου του συστήματος, το διάνυσμα $x(t)$ ενδέχεται να μη παραμένει πάντα εντός του συνόλου Ω_x . Για να αντιμετωπιστεί αυτή η δυσκολία, παρατηρούμε πως, αφού οι συναρτήσεις $\Phi(x)$ και $\Gamma(x)$ είναι συνεχείς, και τα διάνυσμα οπισθοδρομητών $Z_\Phi(x)$ και $Z_\Gamma(x)$ είναι επίσης συνεχή, τότε και τα σφάλμα μοντελοποίησης:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\varphi_i}(x) &= \varphi_i(x) - w_{\varphi_i}^{*T} Z_\Phi(x), \quad \forall x \in \mathcal{X} \\ \epsilon_{\gamma_{ij}}(x) &= \gamma_{ij}(x) - w_{\gamma_{ij}}^{*T} Z_\Gamma(x), \quad \forall x \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (3.9)$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις στο \mathcal{X} . Παρόλο που όταν το $x(t)$ βρίσκεται εκτός του Ω_x , δεν μπορούμε να εγγυηθούμε πως τα σφάλματα μοντελοποίησης φράζονται από την σχέση (3.8), η παραπάνω παρατήρηση μας επιτρέπει να συνεχίσουμε την ανάλυση.

Τέλος, ορίζουμε κάποια σήματα τα οποία θα χρειαστούν στην μαθηματική ανάλυση. Αρχικά, ορίζουμε τις προσεγγίσεις $\hat{\Phi}(x)$ και $\hat{\Gamma}(x)$ ως:

$$\hat{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1(x) \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{w}_{\varphi_1}^T Z_\Phi(x) \\ \vdots \\ \hat{w}_{\varphi_m}^T Z_\Phi(x) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

και

$$\hat{\Gamma}(x) = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{11}(x) & \cdots & \hat{\gamma}_{1m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\gamma}_{m1}(x) & \cdots & \hat{\gamma}_{mm}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{w}_{\gamma_{11}}^T Z_\Gamma(x) & \cdots & \hat{w}_{\gamma_{1m}}^T Z_\Gamma(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{w}_{\gamma_{m1}}^T Z_\Gamma(x) & \cdots & \hat{w}_{\gamma_{mm}}^T Z_\Gamma(x) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Κατά δεύτερον, ορίζουμε τα σφάλματα προσέγγισης ως:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{\varphi_i}(t) &= w_{\varphi_i}^* - \hat{w}_{\varphi_i}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \tilde{w}_{\gamma_{ij}}(t) &= w_{\gamma_{ij}}^* - \hat{w}_{\gamma_{ij}}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.12)$$

και συνεπώς μπορούμε να εκφράσουμε τα συνολικά σφάλμα προσέγγισης των συναρτήσεων ως:

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) - \hat{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{\varphi_1}^T Z_\Phi(x) \\ \vdots \\ \tilde{w}_{\varphi_m}^T Z_\Phi(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{\varphi_1}(x) \\ \vdots \\ \epsilon_{\varphi_m}(x) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

και

$$\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x) - \hat{\Gamma}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{\gamma_{11}}^T Z_\Gamma(x) & \cdots & \tilde{w}_{\gamma_{1m}}^T Z_\Gamma(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{w}_{\gamma_{m1}}^T Z_\Gamma(x) & \cdots & \tilde{w}_{\gamma_{mm}}^T Z_\Gamma(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{\gamma_{11}}(x) & \cdots & \epsilon_{\gamma_{1m}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{\gamma_{m1}}(x) & \cdots & \epsilon_{\gamma_{mm}}(x) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Τέλος, παραγωγίζοντας τις εξισώσεις (3.12) έχουμε τις παραγώγους των παραμετρικών σφαλμάτων, οι οποίες εμφανίζονται κατά την μαθηματική ανάλυση:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{w}}_{\varphi_i}(t) &= -\dot{\hat{w}}_{\varphi_i}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{\tilde{w}}_{\gamma_{ij}}(t) &= -\dot{\hat{w}}_{\gamma_{ij}}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.3.2 Βήματα Σχεδίασης

Καθώς έχουμε επιλέξει μια αρχιτεκτονική αναγνώρισης ικανή να αναγνωρίσει την δυναμική του άγνωστου συστήματος, είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε την διαδικασία σχεδίασης του σχήματος αναγνώρισης κλειστού βρόγχου. Η διαδικασία αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

- I. Σχεδιάστε μια περιοδική τροχιά $x_d(t)$ η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 5 και ταυτόχρονα ικανοποιεί την Συνθήκη Επιμέρους Διέγερσης για νευρωνικά δίκτυα RBF, όπως αυτή διατυπώνεται στην Παράγραφο 2.2.3. Συμβολίζουμε την περιοδική τροχιά ως:

$$x_d(t) = \begin{bmatrix} x_{1d} & \cdots & x_{1d}^{(n_1-1)} & \cdots & x_{md} & \cdots & x_{md}^{(n_m-1)} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n \quad (3.16)$$

και της παραγώγους της τάξης n_i ως:

$$x_d^{(n)} = \begin{bmatrix} x_{1d}^{(n_1)} & \cdots & x_{md}^{(n_m)} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m \quad (3.17)$$

Το βήμα αυτό παρουσιάζεται πιο αναλυτικά στην Ενότητα 3.4.2.

- II. Για κάθε ένα από τα m υποσυστήματα, ορίστε τα γενικευμένα σφάλματα $s_i(t)$ ως:

$$s_i(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{(n_i-1)} e_i(t) = \sum_{j=0}^{n_i-1} \binom{n_i-1}{j} \lambda^j e_i^{(n_i-j)}(t), \quad i = 1, \dots, m$$

όπου λ είναι μια θετική σταθερά σχεδίασης, και $e_i(t) = x_i(t) - x_{id}(t)$, $i = 1, \dots, m$ είναι τα σφάλματα παρακολούθησης της εξόδου.

- III. Θεωρήστε την συνάρτηση επίδοσης $\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-lt} + \rho_\infty$. Επιλέγουμε τις παραμέτρους της έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \rho_0 &> \max_{i=1, \dots, m} \{|s_i(0)|\} \\ \rho_\infty &< \frac{\frac{1}{2} \min_{k \neq w} \{\|c_k - c_w\|\}}{2 \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-1} \left(\frac{2^{j-1}}{\lambda^{n_i-j}} \right)^2}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

για κάθε κέντρο των νευρωνικών δικτύων $k, w = 1, \dots, q_\Phi$. Επιπλέον, επιλέξτε την σταθερά εκθετικής απόσβεσης l έτσι ώστε να είναι μεγαλύτερη από την σταθερά λ των γενικευμένων σφαλμάτων.

- IV. Για κάθε υποσύστημα i , ορίστε το κανονικοποιημένο σφάλμα $\xi_i(t)$ ως:

$$\xi_i(t) = \frac{s_i(t)}{\rho(t)}, \quad i = 1, \dots, m$$

και το διάνυσμα κανονικοποιημένων σφαλμάτων ως $\xi(t) = [\xi_1(t) \cdots \xi_m(t)]^T$. Επιπλέον, καταχρηστικά ορίζουμε το διάνυσμα μετασχηματισμένων σφαλμάτων $T(\xi(t))$ ως:

$$T(\xi(t)) = [T(\xi_1(t)) \cdots T(\xi_m(t))]^T \in \mathbb{R}^m$$

V. Χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις $\hat{\Phi}(x)$ και $\hat{\Gamma}(x)$ των εξισώσεων (3.10) και (3.11), ορίστε την είσοδο ελέγχου $u = [u_1 \cdots u_m]^T$ ως:

$$u(t) = -kT(\xi(t)) - \hat{\Phi}(x) - \hat{\Gamma}(x) (d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) \in \mathbb{R}^m \quad (3.19)$$

όπου $d(x) = [d_1(x) \cdots d_m(x)]^T$ ένα διάνυσμα βοηθητικών, γνωστών και συνεχών στο \mathcal{X} σημάτων, ορισμένα ως:

$$d_i(x) = -x_{id}^{(n_i)} + \sum_{j=1}^{n_i-1} \binom{n_i-1}{j} \lambda^j e_i^{(n_i-j+1)}(t)$$

για κάθε $i = 1, \dots, m$.

VI. Τέλος, ορίζουμε τους νόμους προσαρμογής \hat{w}_{φ_i} και $\hat{w}_{\gamma_{ij}}$ των ελεύθερων παραμέτρων των συναρτήσεων (3.10) και (3.11), ως:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}}_{\varphi_i}(t) &= \beta_{\varphi_i} \frac{\xi_i(t)}{\rho(t)} Z_{\Phi}(x) \in \mathbb{R}^{q_{\Phi}}, & i &= 1, \dots, m \\ \dot{\hat{w}}_{\gamma_{ij}}(t) &= \beta_{\gamma_{ij}} \frac{\xi_i(t)}{\rho(t)} (d_j(t) - \xi_j(t)\dot{\rho}(t)) Z_{\Gamma}(x) \in \mathbb{R}^{q_{\Gamma}}, & i, j &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.20)$$

για κάθε $i, j = 1, \dots, m$.

Παρατήρηση 5. Το σχήμα αναγνώρισης που παρουσιάζεται έχει ως κυρίαρχο σκοπό την παρακολούθηση της τροχιάς αναφοράς $x_d(t)$ η οποία σχεδιάζεται ανεξάρτητα με σκοπό να ικανοποιεί την Σ.Ε.Δ. της Παραγράφου 2.2.3, στην μόνιμη κατάσταση. Για να αποφύγουμε την εισαγωγή περιττής πολυπλοκότητας στο σχήμα αναγνώρισης, χρησιμοποιούμε μια κοινή συνάρτηση επίδοσης $\rho(t)$ και αποφεύγουμε να εισάγουμε προδιαγραφές στην υπερύψωση, οι οποίες θα περιέπλεκαν χωρίς λόγο το προτεινόμενο σχήμα.

Παρατήρηση 6. Παρόλο που τα κέντρα των νευρωνικών δικτύων RBF βρίσκονται εντός του κλειστού και συμπαγούς συνόλου Ω_x , ο ορισμός όλων των σημάτων γίνεται σε ένα σύνολο \mathcal{X} ο σκοπός του οποίου ακόμα δεν είναι ξεκάθαρος. Σε αυτό το σημείο τονίζουμε πως ορίζοντας τα σήματα κλειστού βρόγχου με αυτόν τον τρόπο, μας δίνεται η δυνατότητα να σχεδιάσουμε την τροχιά αναφοράς $x_d(t)$ εκτός του συνόλου Ω_x , διευκολύνοντας σημαντικά με αυτόν τον τρόπο την διαδικασία επιλογής της, η οποία παρουσιάζεται στην Ενότητα 3.4.2.

3.4 Μαθηματική Ανάλυση

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε μια ανάλυση του σχήματος ελέγχου που παρουσιάστηκε στην Υποενότητα 3.3.2. Η ανάλυση που ακολουθεί αποτελείται από τρία μέρη. Αρχικά εξασφαλίζουμε το πρόβλημα παρακολούθησης της γνωστής τροχιάς $x_d(t)$ στην μόνιμη κατάσταση ανεξαρτήτως της ποιότητας των εκτιμήσεων $\hat{\Phi}(x)$ και $\hat{\Gamma}(x)$. Στην συνέχεια παρουσιάζουμε μια μεθοδολογία σχεδίασης της τροχιάς $x_d(t)$ έτσι ώστε να ικανοποιεί τόσο την Υπόθεση 5 όσο και στην Σ.Ε.Δ. . Τέλος, αποδεικνύουμε πως ικανοποίηση των προαναφερθέντων στόχων εξασφαλίζει την ικανοποίηση της Σ.Ε.Δ. για τα

RBF νευρωνικά δίκτυα που παρουσιάζονται στην Υποενότητα 3.3.1, και κατά συνέπεια εξασφαλίζει πως το σχήμα αναγνώρισης λύνει το πρόβλημα της εκτίμησης παραμέτρων για την επιλεγμένη αρχιτεκτονική αναγνώρισης.

3.4.1 Πρόβλημα παρακολούθησης τροχιάς

Η δυσκολία του προβλήματος παρακολούθησης τροχιάς οφείλεται σε δυο παράγοντες. Ο πρώτος παράγοντας είναι η έλλειψη γνώσης για τις μη γραμμικότητες $f(x)$ και $G(x)$ του συστήματος (3.1). Το δεύτερο πρόβλημα είναι πως τα σφάλματα μοντελοποίησης $\tilde{\Phi} = \Phi - \hat{\Phi}$ και $\tilde{\Gamma} = \Gamma - \hat{\Gamma}$, κατά τα πρώτα στάδια της αναγνώρισης επιδρούν ως θόρυβος στο ελεγχόμενο σύστημα. Προς την αντιμετώπιση των παραπάνω δυσκολιών θα χρησιμοποιήσουμε την μεθοδολογία ελέγχου Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης η οποία εγγυάται την λύση του προβλήματος παρακολούθησης της άγνωστης τροχιάς $x_d(t)$ ακόμα και υπό την παρουσία αυτών των αβέβαιων όρων.

Για τον σκοπό αυτό, έστω τα σφάλματα παρακολούθησης τροχιάς $e_i(t)$, και οι παράγωγοι τους μέχρι τάξης $n_i - 1$:

$$\begin{aligned} e_i(t) &= x_i(t) - x_{di}(t), \quad i = 1, \dots, m \\ e_i^{(j)}(t) &= x_i^{(j)}(t) - x_{di}^{(j)}(t), \quad j = 1, \dots, n_i - 1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

και επιπλέον ορίζουμε το διάνυσμα σφάλματος παρακολούθησης τροχιάς $e(t)$ και την συμπαγή του μορφή ως:

$$\begin{aligned} e(t) &= \begin{bmatrix} e_1(t) \cdots e_1^{(n_1-1)}(t) & \cdots & e_m(t) \cdots e_m^{(n_m-1)}(t) \end{bmatrix}^T \\ e^{(n)}(t) &= \begin{bmatrix} e_1^{(n_1)}(t) & \cdots & e_m^{(n_m)}(t) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.22)$$

Όπως ορίζει το Βήμα II, θεωρούμε τα γενικευμένα σφάλματα $s(t) = [s_1(t) \cdots s_m(t)]^T$, με κάθε $s_i(t)$ να ορίζεται ως:

$$s_i(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{(n_i-1)} e_i(t) = \sum_{j=0}^{n_i-1} \binom{n_i-1}{j} \lambda^j e_i^{(n_i-j)}(t), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.23)$$

Παραγωγίζοντας αυτούς τους όρους προκύπτει:

$$\dot{s}_i(t) = x_i^{(n_i)} - x_{di}^{(n_i)} + \sum_{j=1}^{n_i-1} \binom{n_i-1}{j} \lambda^j e_i^{(n_i-j+1)}(t) \quad (3.24)$$

και με αυτόν τον τρόπο εμφανίζονται τα σήματα $d_i(x)$ του Βήματος V. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του διανύσματος $d(x)$, μπορούμε να γράψουμε την παράγωγο $\dot{s}(t)$ στην συμπαγή μορφή:

$$\dot{s}(t) = x^{(n)}(t) + d(x)$$

όπου το $x^{(n)}(t)$ ορίζεται στην εξίσωση (3.2).

Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση επίδοσης $\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-lt} + \rho_\infty$ παραμετροποιημένη όπως ορίζει το Βήμα III. Με την χρήση της, είμαστε σε θέση να ορίσουμε το διάνυσμα κανονικοποιημένων σφαλμάτων $\xi(t)$ ως:

$$\xi(t) = [\xi_1(t) \cdots \xi_m(t)]^T$$

όπου $\xi_i(t) = s_i(t)/\rho(t)$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Αυτοί οι όροι αντικατοπτρίζουν την εξέλιξη των γενικευμένων σφαλμάτων $s_i(t)$ ως προς τα χαρακτηριστικά επίδοσης που επιβάλλει η συνάρτηση $\rho(t)$. Διατήρηση των σφαλμάτων $\xi_i(t)$ φραγμένων στο εσωτερικό το συνόλου $(-1, 1)$ συνεπάγεται με ικανοποίηση των χαρακτηριστικών της Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης.

Παραγωγίζοντας τα κανονικοποιημένα σφάλματα, και με την χρήση της εξίσωσης (3.2) μετά από κάποιες πράξεις έχουμε:

$$\dot{\xi}(t) = \frac{1}{\rho(t)} (f(x) + G(x)u(t) + d(x) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) \quad (3.25)$$

Ως τελευταίο βήμα, αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.25) την είσοδο ελέγχου $u(t)$ του Βήματος V, και έτσι προκύπτει η δυναμική κλειστού βρόγχου του διανύσματος $\xi(t)$:

$$\dot{\xi}(t) = \frac{G(x)}{\rho(t)} \left(-kT(\xi) + \tilde{\Phi}(x) + \tilde{\Gamma}(x)(d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) \right) \quad (3.26)$$

Λήμμα 1. [32] Έστω το διάνυσμα σφαλμάτων παρακολούθησης τροχιάς $e(t)$ του συστήματος (3.1), όπως ορίζεται στην εξίσωση (3.22), καθώς και τα γενικευμένα σφάλματα $s_i(t)$ για κάθε υποσύστημα $i = 1, \dots, m$ υπό τις προδιαγραφές προδιαγεγραμμένης απόκρισης που ορίζει η συνάρτηση επίδοσης $\rho(t)$ του Βήματος III της Υποενότητας III. Εάν τα γενικευμένα σφάλματα διατηρούνται φραγμένα ως $|s_i(t)| < \rho(t)$ για κάθε $t \geq 0$, τότε θα υπάρχουν θετικές σταθερές \bar{e}_{ij} , έτσι ώστε:

$$|e_i^{(j)}(t)| \leq \bar{e}_{ij} \exp(-lt) + \frac{2^{j-1}\rho_\infty}{\lambda^{n_i-j}},$$

για κάθε $t \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 0, \dots, n_i - 1$.

Στην συνέχεια, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα που λύνει το πρόβλημα παρακολούθησης τροχιάς για το σύστημα (3.1).

Θεώρημα 4. Έστω το σύστημα (3.1) υπό τις υποθέσεις 1, 2 και 3 για το οποίο χρησιμοποιούμε την αρχιτεκτονική αναγνώρισης με νευρωνικά δίκτυα RBF της Υποενότητας 3.3.1, σχηματίζοντας τις προσεγγίσεις $\hat{\Phi}(x)$ και $\hat{\Gamma}(x)$ των σχέσεων (3.10) και (3.11). Επιπλέον, έστω μια επιθυμητή τροχιά αναφοράς $x_d(t)$ η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 5. Η είσοδος ελέγχου (3.19) με τις παραμέτρους της επιλεγμένες όπως καθορίζουν τα βήματα σχεδίασης II - V σε συνδυασμό με τους νόμους προσαρμογής της εξίσωσης $\dot{\hat{\omega}}_{\varphi_i}(t)$ και $\dot{\hat{\omega}}_{\gamma_{ij}}(t)$ διασφαλίζουν πως: 1) όλα τα σήματα κλειστού βρόγχου θα διατηρούνται φραγμένα για κάθε $t \geq 0$ και 2) τα σφάλματα του διανύσματος $e(t)$ θα συγκλίνουν με εκθετικό ρυθμό σύγκλισης στα σύνολα:

$$E_{i,j} = \left\{ e_i^{(j)} \in \mathbb{R} : |e_i^{(j)}(t)| \leq \frac{2^{j-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t)}{\lambda^{n_i-j}} \right\} \quad (3.27)$$

εξασφαλίζοντας έτσι την παρακολούθηση της τροχιάς αναφοράς $x_d(t)$.

Απόδειξη

Έστω η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x, t) = \frac{\xi^T(t)G^{-1}(x)\xi(t)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\beta_{\varphi_i}} \tilde{w}_{\varphi_i}^T \dot{w}_{\varphi_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{\beta_{\gamma_{ij}}} \tilde{w}_{\varphi_{\gamma_{ij}}}^T \dot{w}_{\varphi_{\gamma_{ij}}} \quad (3.28)$$

η οποία είναι θετικά ορισμένη αφού ο πίνακας $G(x)$ είναι θετικά ορισμένος, και κατά συνέπεια και ο αντίστροφος πίνακας $G^{-1}(x)$ είναι επίσης θετικά ορισμένος.

Παραγωγίζοντας την σχέση (3.28) έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &= \xi^T(t)G^{-1}(x)\dot{\xi}(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{\partial G^{-1}(x)}{\partial x_i^{(j)}} \frac{\partial}{\partial t} x_i^{(j)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\beta_{\varphi_i}} \tilde{w}_{\varphi_i}^T \dot{w}_{\varphi_i} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{\beta_{\gamma_{ij}}} \tilde{w}_{\varphi_{\gamma_{ij}}}^T \dot{w}_{\varphi_{\gamma_{ij}}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Καθώς υποθέτουμε συστήματα *Euler-Lagrange*, επεκτείνοντας την Υπόθεση 2 για τις μερικές παραγώγους της $G^{-1}(x)$ (εξίσωση (3.4)) προκύπτει:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{\partial G^{-1}(x)}{\partial x_i^{(j)}} \frac{\partial}{\partial t} x_i^{(j)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-2} \frac{\partial G^{-1}(x)}{\partial x_i^{(j)}} x_i^{(j+1)}$$

Ο λόγος που η Υπόθεση 2 είναι τόσο σημαντική είναι ακριβώς επειδή μας επιτρέπει αυτή την απλοποίηση, χωρίς την οποία θα εμφανιζόταν στην ανάλυση μας οι είσοδοι $u_i(t)$ με αγνώστους συντελεστές, καθιστώντας την ανάλυση μη εφικτή.

Στην συνέχεια, αντικαθιστώντας την σχέση (3.25) έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &= \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} G^{-1}(x) (f(x) + G(x)u(t) + d(x) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-2} \frac{\partial G^{-1}(x)}{\partial x_i^{(j)}} x_i^{(j+1)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\beta_{\varphi_i}} \tilde{w}_{\varphi_i}^T \dot{w}_{\varphi_i} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{\beta_{\gamma_{ij}}} \tilde{w}_{\varphi_{\gamma_{ij}}}^T \dot{w}_{\varphi_{\gamma_{ij}}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Συνεχίζοντας με την ανάλυση του πρώτου όρου, αντικαθιστούμε την είσοδο ελέγχου $u(t)$ από την εξίσωση (3.19):

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x) &:= \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} G^{-1}(x) \left(F(x) + G(x)u(t) + d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t) \right) \\ &= \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} \left(\Phi(x) + u(t) + \Gamma(x)(d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) \right) \\ &= \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} \left(-kT(\xi(t)) + \tilde{\Phi}(x) + \tilde{\Gamma}(x)(d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) \right) \end{aligned}$$

Για το σφάλμα προσέγγισης $\tilde{\Phi}(x)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\xi^T(t)\tilde{\Phi}(x) &= [\xi_1(t) \quad \dots \quad \xi_m(t)]^T \cdot \left(\begin{bmatrix} \tilde{w}_{\varphi_1}^T Z_{\Phi}(x) \\ \vdots \\ \tilde{w}_{\varphi_m}^T Z_{\Phi}(x) \end{bmatrix} + \epsilon_{\varphi}(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \xi_i(t) \tilde{w}_{\varphi_i}^T Z_{\Phi}(x) + \xi^T(t) \epsilon_{\varphi}(x)\end{aligned}\quad (3.31)$$

Ομοίως για το σφάλμα $\tilde{\Gamma}(x)$, προκύπτει:

$$\begin{aligned}\xi^T(t)\tilde{\Gamma}(x)(d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i(t)(d_j(t) - \xi_j(t)\dot{\rho}(t)) \tilde{w}_{\varphi_{ij}}^T Z_{\Gamma}(x) \\ &\quad + \xi^T(t) \epsilon_{\Gamma}(x)(d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t))\end{aligned}\quad (3.32)$$

Για το επόμενο βήμα, αρχικά αντικαθιστώνται τα σφάλματα προσέγγισης των εξισώσεων (3.31) και (3.32) στην παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov (εξίσωση (3.30)). Στην συνέχεια αντικαθιστώνται οι νόμοι προσαρμογής της εξίσωσης (3.20) με αποτέλεσμα την απλοποίηση της εξίσωσης ως εξής:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, t) &= \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} \left(-kT(\xi(t)) + \epsilon_{\varphi}(x) + \epsilon_{\Gamma}(x)(d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-2} \frac{\partial G^{-1}(x)}{\partial x_i^{(j)}} x_i^{(j+1)}\end{aligned}\quad (3.33)$$

Σε αυτό το σημείο, είμαστε σε θέση να μελετήσουμε την χρονική εξέλιξη της δυναμικής του συστήματος κλειστού βρόγχου ως προς τον χρόνο. Αρχικά, η δυναμική κλειστού βρόγχου κάθε υποσυστήματος περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned}e^{(n)} &= G(e + x_d(t)) \left(-kT(\xi) + \tilde{\Phi}(e + x_d(t)) - \hat{\Gamma}(e + x_d(t))(d(e + x_d(t)) - \xi\dot{\rho}(t)) \right. \\ &\quad \left. - \Gamma(e + x_d(t))x_d^{(n)}(t) \right) \\ \dot{\xi} &= \frac{G(e + x_d(t))}{\rho(t)} \left(-kT(\xi) + \tilde{\Phi}(e + x_d(t)) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\Gamma}(e + x_d(t))(d(e + x_d(t)) - \xi\dot{\rho}(t)) \right)\end{aligned}\quad (3.34)$$

Ορίζοντας το διάνυσμα $\Xi(t) := [e^T \quad \xi^T]^T$, η δυναμική κλειστού βρόγχου του συνολικού συστήματος γράφεται ως:

$$\dot{\Xi} = H(t, \Xi) \quad (3.35)$$

και είναι συνεχής ως προς τον χρόνο t και το διάνυσμα Ξ . Επιπλέον, ορίζουμε το σύνολο \mathcal{X}_0 ως:

$$\mathcal{X}_0 = \mathbb{R}^n \times (-1, 1)^m \quad (3.36)$$

Αρχικά, γνωρίζουμε από τον ορισμό του προβλήματος τις τιμές των $x(0)$ και $x_d(0)$. Συνεπώς, καθώς η σταθερά $|\rho(0)|$ επιλέγεται κατά την σχεδίαση του ελεγκτή, μπορούμε να την επιλέξουμε με τέτοιο τρόπο ώστε:

$$\xi_i(0) \in (-1, 1), \quad i = 1, \dots, m$$

Συνεπώς, την χρονική στιγμή $t = 0$, το διάνυσμα $\Xi(0)$ ανήκει στο σύνολο \mathcal{X}_0 . Εάν επικαλεστούμε το Θεώρημα 3 της Ενότητας 2.5 για το δυναμικό σύστημα (3.35), προκύπτει πως θα υπάρχει μια μέγιστη (ή μη-επεκτάσιμη) λύση στο χρονικό διάστημα $[0, \tau_{max})$ η οποία είναι μοναδική και ανήκει εξ ολοκλήρου στο σύνολο \mathcal{X}_0 για κάθε $t \in [0, \tau_{max})$.

Στο χρονικό διάστημα αυτό, αφού τα κανονικοποιημένα σφάλματα $|\xi_i(t)| < 1$, επαληθεύεται η εξίσωση $s_i(t) < \rho(t)$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1, προκύπτει πως τα σφάλματα $e_i^{(j)}(t)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 0, \dots, n_i - 1$ θα παραμένουν φραγμένα στα συμπαγή σύνολα $E_{i,j}^0$ τα οποία ορίζονται ως:

$$E_{i,j}^0 = \left\{ e_i^{(j)} \in \mathbb{R} : |e_i^{(j)}(t)| \leq \bar{e}_{ij} + \frac{2^{j-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t)}{\lambda^{n_i-j}} \right\}$$

για κάθε $t \in [0, \tau_{max})$. Κατά συνέπεια, το διάνυσμα $e(t)$ θα παραμένει φραγμένο εντός του συμπαγούς συνόλου

$$\Omega_e = \prod_{i=1}^m \prod_{j=0}^{n_i-1} E_{i,j}^0$$

για κάθε $t \in [0, \tau_{max})$. Κατά συνέπεια, και οι καταστάσεις του συστήματος $x_i^{(j)}(t)$ είναι επίσης φραγμένες, αφού ισχύει:

$$x_i^{(j)}(t) = e_i^{(j)}(t) + x_{di}^{(j)}(t), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n_i - 1$$

και η τροχιά $x_d(t)$ είναι φραγμένη εξ υποθέσεως.

Με βάση τα παραπάνω, η τροχιά $x(t)$ θα είναι φραγμένη σε ένα κλειστό σύνολο \mathcal{X} η μορφή του οποίου εξαρτάται από το σύνολο \mathcal{X}_d στο οποίο ανήκει η τροχιά αναφοράς και από τα σύνολα $E_{i,j}^0$ στα οποία ανήκουν τα σφάλματα παρακολούθησης. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης τιμής, συμπεραίνουμε πως οι συνεχείς συναρτήσεις $\epsilon_{\varphi_i}(x)$, $\epsilon_{\gamma_{ij}}(x)$ και $d_i(x)$ θα έχουν ένα άγνωστο άνω φράγμα σε αυτό το σύνολο \mathcal{X} .

Στην συνέχεια, ορίζουμε ως $\pi(t)$ το διάνυσμα:

$$\pi(t) := \epsilon_{\varphi}(x(t)) + \epsilon_{\Gamma}(x(t))(d(x) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) \in \mathbb{R}^m \quad (3.37)$$

Εφόσον, οι συναρτήσεις $\rho(t)$ και $\dot{\rho}(t)$ είναι φραγμένες εκ κατασκευής και οι υπόλοιποι όροι του $\pi(t)$ είναι φραγμένοι, έτσι και το μέτρο του διανύσματος $\pi(t)$ θα έχει ένα άνω φράγμα $\bar{\pi}$ στο διάστημα $[0, \tau_{max})$.

Ορίζουμε το βαθμωτό όρο $\delta(t)$ ως:

$$\delta(t) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-2} \frac{\partial G^{-1}(x)}{\partial x_i^{(j)}} x_i^{(j+1)} \in \mathbb{R} \quad (3.38)$$

Εξ υποθέσεως η $G(x)$, συνεπώς και η $G^{-1}(x)$ είναι Lipschitz συνεχής στο \mathcal{X} , συνεπώς οι μερικοί παράγωγοι της παραπάνω σχέσης θα είναι φραγμένοι σε αυτό το \mathcal{X} . Έτσι συμπεραίνουμε πως ο όρος $\delta(t)$ έχει ένα άγνωστο άνω φράγμα $\bar{\delta}$ στο $[0, \tau_{max})$.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.37) και (3.38) στην παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov (εξίσωση (3.33)) έχουμε:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, t) &= -k \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} (T(\xi(t)) + \pi(t)) + \delta(t) \\ &\leq -k \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} T(\xi(t)) + \|\xi(t)\| \cdot \|\pi(t)\| + |\delta(t)| \\ &\leq -k \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} T(\xi(t)) + \|\xi(t)\| \bar{\pi} + \bar{\delta}\end{aligned}\quad (3.39)$$

Τέλος, αφού στο διάστημα $[0, \tau_{max})$ τα $\xi_i(t)$ είναι φραγμένα στο διάστημα $(-1, 1)$, το μέτρο του διανύσματος $\|\xi(t)\|$ είναι μικρότερο του \sqrt{m} , και έτσι καταλήγουμε στην ανίσωση:

$$\dot{V}(x, t) \leq -\frac{k}{\rho(t)} \sum_{i=1}^m \xi_i(t) \ln \left(\frac{1 + \xi_i(t)}{1 - \xi_i(t)} \right) + \sqrt{m} \bar{\pi} + \bar{\delta}$$

Καθώς όλοι οι όροι του αθροίσματος $\xi_i(t) T(\xi_i(t))$ είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του μηδενός, από την εξίσωση (3.4.1) βγαίνει το συμπέρασμα:

$$\exists \bar{\xi}_i \in (0, 1) : |\xi_i(t)| > \bar{\xi}_i \implies \dot{V} < 0, \quad i = 1, \dots, m \quad \forall t \in [0, \tau_{max})$$

Συνεπώς, έχουμε δείξει πως το σύστημα εξισώσεων (3.35), για $t = 0$ ανήκει στο σύνολο \mathcal{X}_0 της εξίσωσης (3.36), και για $\forall t \in [0, \tau_{max})$ παραμένει φραγμένο εντός του συνόλου:

$$\mathcal{X}_f = \Omega_e \times \prod_{i=1}^m (-\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_i)$$

το οποίο είναι υποσύνολο του \mathcal{X}_0 . Έτσι, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1 της Ενότητας 2.5, συμπεραίνουμε πως το τ_{max} μπορεί να επεκταθεί στο ∞ .

Με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύεται ότι τα κανονικοποιημένα σφάλματα $\xi_i(t)$ παραμένουν φραγμένα στο σύνολο $(-1, 1) \quad \forall t \geq 0$, εξασφαλίζοντας έτσι πως τα σφάλματα $e_{i,j}$ συγκλίνουν στα σύνολα $E_{i,j}$, διασφαλίζοντας το πρόβλημα παρακολούθησης της τροχιάς $x_d(t)$ για το σύστημα 3.1.

□

Μέχρι στιγμής, το μόνο που έχει αποδειχθεί είναι η ικανότητα του προτεινόμενου σχήματος να λύνει το πρόβλημα παρακολούθησης τροχιάς για το σύστημα 3.1, χωρίς να έχει γίνει κάποια αναφορά στην σύγκλιση των παραμετρικών σφαλμάτων $\tilde{w}_{\varphi_i}(t)$ και $\tilde{w}_{\gamma_{ij}}(t)$.

3.4.2 Παραμετροποίηση του Συστήματος Αναφοράς

Για την επιτυχία της αναγνώρισης των συναρτήσεων $\Phi(x)$ και $\Gamma(x)$, πρέπει να σχεδιαστεί μια τροχιά $x_d(t)$ η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις της Υποπαραγράφου (3.1.2), και ταυτόχρονα ικανοποιεί την Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης για το μοντέλο προσέγγισης που έχουμε επιλέξει.

Προς αυτή την κατεύθυνση, χρησιμοποιείται η θεωρία που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 2.4, για τον σχεδιασμό των υποσυστημάτων αναφοράς Σ_i . Σύμφωνα με την παράγραφο 2.4 λοιπόν, η είσοδος $\nu_i(t)$ κάθε υποσυστήματος επιλέγεται ως:

$$\nu_i(t) = \sum_{k=n_i+1}^{2(n_i+1)} \prod_{l=1}^{n_i} (k-l) \alpha_k t^{k-n_i-1} \quad (3.40)$$

Κατά την διάρκεια της κλειστής περιοδικής τροχιάς, είναι επιθυμητό η τροχιά αναφοράς $x_d(t)$ να επισκέπτεται όλα τα κέντρα των διανυσμάτων οπισθοδρομητών $Z_\Phi(x)$ και $Z_\Gamma(x)$.

Λύνοντας την εξίσωση (2.21) της παραγράφου 2.4, μπορούμε κάθε φορά να παραμετροποιήσουμε τις εισόδους αναφοράς $\nu_i(t)$, έτσι ώστε η τροχιά $x_d(t)$ να υλοποιεί μια επιθυμητή μετάβαση $c_i \rightarrow c_j$ (όπου c_i και c_j κέντρα του νευρωνικού δικτύου) μέσα σε έναν επιθυμητό χρόνο ΔT . Έτσι η κλειστή περιοδική τροχιά σχηματίζεται ως μια σειρά μεταβάσεων, που τελικά διέρχεται από όλα τα κέντρα των νευρωνικών δικτύων.

Τέλος, σημειώνεται πως με κατάλληλη επιλογή των συνοριακών συνθηκών $x_{di}^{(n_i)}(t)$ και $x_{di}^{(n_i)}(t + \Delta T)$, μπορεί κανείς να εγγυηθεί την χρονική συνέχεια των εισόδων αναφοράς $\nu_i(t)$, το οποίο είναι απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύει η μαθηματική ανάλυση του σχήματος.

3.4.3 Επιμένουσα Διέγερση

Έχοντας σχεδιάσει μια κλειστή περιοδική τροχιά $x_d(t)$ που διέρχεται από όλα τα κέντρα, μένει να δείξουμε πως με κατάλληλη επιλογή των κερδών του ελεγκτή, μπορούμε να εγγυηθούμε ικανοποίηση της ΣΕΔ για το προτεινόμενο σχήμα αναγνώρισης.

Θεώρημα 5. Έστω η περιοδική, φραγμένη και ομαλή τροχιά αναφοράς $x_d : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{X}_d$ επιλεγμένη όπως περιγράφεται στην Υποενότητα 3.4.2. Εάν επιλεχθεί η συνάρτηση επίδοσης $\rho(t)$ και το κέρδος λ έτσι ώστε να ικανοποιείται η ανίσωση:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) < \frac{\frac{1}{2} \min_{k \neq w} \{\|c_k - c_w\|\}}{2 \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-1} \left(\frac{2^{j-1}}{\lambda^{n_i-j}} \right)^2}} \quad (3.41)$$

για κάθε $k, w = 1, \dots, q_\Phi$, τότε ο νόμος ελέγχου (3.19) και οι νόμοι προσαρμογής $\dot{w}_{\varphi_i}(t)$ και $\dot{w}_{\gamma_{ij}}(t)$ των εξισώσεων (3.20) εξασφαλίζουν πως τα διανύσματα οπισθοδρομητών $Z_\Phi(x(t))$ και $Z_\Gamma(x(t))$ ικανοποιούν την Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης της εξίσωσης (2.1).

Απόδειξη Έστω το μέτρο του διανύσματος σφαλμάτων $e(t)$, το οποίο χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4 εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι φραγμένο από την ποσότητα:

$$\bar{e} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-1} \left(\frac{2^{j-1} \rho_\infty}{\lambda^{n_i-j}} \right)^2}$$

Στην συνέχεια, ορίζουμε την σταθερά $h := \frac{1}{2} \min_{k \neq w} \{\|c_k - c_w\|\}$, και το σφαιρικό σύνολο $B_t(x_d(t), \frac{h}{2}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_d(t)\| \leq \frac{h}{2}\}$. Επιλογή των ρ_∞ και λ όπως υποδεικνύει η σχέση (3.41), είναι εύκολο να δείξουμε ότι $\bar{e} < h/2$, και κατά συνέπεια ότι θα

υπάρχει κάποια χρονική σταθερά T_0 για την οποία θα ισχύει:

$$x(t) \in B_t \left(x_d(t), \frac{h}{2} \right), \quad \forall t \geq T_0$$

Στην συνέχεια, ορίζουμε την h -γειτονιά των κέντρων c_i των RBF νευρωνικών δικτύων ως:

$$B_i(c_i, h) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - c_i\| \leq h\}, \quad i = 1, \dots, q_\Phi$$

οι οποίες δεν επικαλύπτονται μεταξύ τους. Σχεδιάζοντας την τροχιά $x_d(t)$ όπως υποδεικνύει η Υποενότητα 3.4.2, τότε η τροχιά αυτή θα είναι ομαλή, περιοδική και θα επισκέπτεται κάθε κέντρο c_i κατά την διάρκεια της περιόδου T . Με άλλα λόγια, θα υπάρχουν χρονικές σταθερές t_{ci} έτσι ώστε $x_d(t_{ci} + mT) = c_i$ για κάθε $i = 1, \dots, q_\Phi$ όπου $m \in \mathbb{N}$.

Κατά συνέπεια, θα υπάρχει επίσης μια χρονική σταθερά δt έτσι ώστε $B_t(x_d(t), \frac{h}{2}) \subset B_i(c_i, h)$, $t \in [t_{ci} + mT - \frac{\delta t}{2}, t_{ci} + mT + \frac{\delta t}{2}]$ για κάθε $i = 1, \dots, q_\Phi$ όπου $m \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς, αφού η τροχιά $x(t)$ ανήκει στο σύνολο $B_t(x_d(t), \frac{h}{2})$ για κάθε $t \geq T_0$ προκύπτει πως:

$$x(t) \in B_i(c_i, h), \quad \forall t \in [t_{ci} + mT - \frac{\delta t}{2}, t_{ci} + mT + \frac{\delta t}{2}] \cap [T_0, \infty)$$

για κάθε $i = 1, \dots, q_\Phi$ και $m \in \mathbb{N}$. Κατά συνέπεια η τροχιά $x(t)$ ικανοποιεί την ΣΕΔ για νευρωνικά δίκτυα RBF της Παραγράφου 2.2.3, και έτσι η απόδειξη ολοκληρώνεται.

□

Κεφάλαιο 4

Πειραματικά Αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια πειράματα αναγνώρισης που πραγματοποιήθηκαν με σκοπό, τόσο να αποδείξουν την εγκυρότητα της μεθόδου, αλλά και να αποκαλύψουν τις αδυναμίες και τους πιθανούς κινδύνους που κρύβει η εφαρμογή της. Σε όλα τα πειράματα, ακολουθείται η διαδικασία σχεδίασης που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3. Τέλος, στην Ενότητα 4.3 παρουσιάζουμε κάποια συμπεράσματα για την απόδοση και τις αδυναμίες της μεθόδου.

4.1 Αναγνώριση αθροισμάτων γκαουσιανών

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι ο σχεδιασμός κάποιων απλών πειραμάτων με σκοπό την επαλήθευση της εγκυρότητας της μεθόδου. Προς τον σκοπό αυτό, επιλέγονται συστήματα των οποίων οι μη γραμμικότητες δίνονται από αθροίσματα γκαουσιανών συναρτήσεων RBF, και κατά συνέπεια είναι εφικτή η ακριβής προσέγγιση τους από νευρωνικά δίκτυα RBF της μορφής της Παραγράφου 2.1. Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζονται δυο πειράματα, ένα για συστήματα μιας εισόδου μιας εξόδου (MEME), και ένα για συστήματα πολλαπλών εισόδων, πολλαπλών εξόδων (ΠΕΠΕ).

4.1.1 Συστήματα MEME

Έστω το δευτεροβάθμιο μη γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u(t)\end{aligned}$$

όπου $x = [x_1 \ x_2]^T$ το διάνυσμα καταστάσεων και $f(x)$ και $g(x)$ μη γραμμικές συναρτήσεις που ορίζονται ως $f(x) = \varphi(x)/\gamma(x)$ και $g(x) = 1/\gamma(x)$ αντίστοιχα. Οι $\varphi(x)$ και $\gamma(x)$ δίνονται ως:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{i=1}^4 w_{\phi_i}^* z_{\phi_i}(x) = W_{\phi}^{*T} Z_{\phi}(x) \\ \gamma(x) &= w_{\gamma 0} + \sum_{i=1}^2 w_{\gamma_i}^* z_{\gamma_i}(x) = W_{\gamma}^{*T} Z_{\gamma}(x)\end{aligned}$$

όπου $W_\varphi^* = [1, 2, 3, 4]^T$ και $W_\gamma^* = [0.5, 1, 2]^T$ διανύσματα προεπιλεγμένων σταθερών, και $Z_\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ και $Z_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ διανυσματικά πεδία αποτελούμενα από RBF όρους της μορφής:

$$z_{\varphi_i}(x) = z_{\varphi_i}(\|x - c_{\varphi_i}\|) = \exp\left(-\left\|\frac{x - c_{\varphi_i}}{\sigma}\right\|^2\right)$$

και

$$z_{\gamma_i}(x) = z_{\gamma_i}(|x_1 - c_{\gamma_i}|) = \exp\left(-\left|\frac{x_1 - c_{\gamma_i}}{\sigma}\right|^2\right)$$

Τα κέντρα c_{φ_i} , $i = 1, \dots, 4$ των RBF συναρτήσεων $z_{\varphi_i}(x)$ είναι τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ και $(1, 1)$ ενώ τα κέντρα c_{γ_i} , $i = 1, 2$ των RBF συναρτήσεων $z_{\gamma_i}(x)$ είναι τα 0 και 1. Οι διασπορές σ επιλέγονται ίσες με 0.5, για κάθε γκαουσιανή $z_{\varphi_i}(x)$ και $z_{\gamma_i}(x)$. Τέλος σημειώνεται ότι το διάνυσμα $Z_\gamma(x)$ εκτός από RBF όρους περιέχει και έναν μοναδιαίο όρο που είναι συντελεστής της σταθεράς w_{γ_0} και στον οποίο αναφερόμαστε ως πόλωση (*bias*).

Σχήμα Αναγνώρισης

Για την αναγνώριση των άγνωστων συναρτήσεων του παραπάνω συστήματος, θα χρησιμοποιηθούν δυο νευρωνικά δίκτυα RBF με διανύσματα οπισθοδρομητών ίδιας δομής με αυτά των Z_φ και Z_γ . Έτσι λοιπόν, σχηματίζουμε τις προσεγγίσεις:

$$\hat{\varphi}(x, t) = \hat{W}_\varphi^T(t) Z_\varphi(x) \quad \text{και} \quad \hat{\gamma}(x, t) = \hat{W}_\gamma^T(t) Z_\gamma(x)$$

όπου $\hat{W}_\varphi \in \mathbb{R}^4$ και $\hat{W}_\gamma \in \mathbb{R}^3$ οι ελεύθεροι παράμετροι των μοντέλων. Όπως είναι προφανές, σύγκλιση των βαρών \hat{W}_φ και \hat{W}_γ στα W_φ^* και W_γ^* συνεπάγεται σε επιτυχία του πειράματος αναγνώρισης.

Για την εκτίμηση των παραμέτρων \hat{W}_φ και \hat{W}_γ θα ακολουθήσουμε την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην Παράγραφο 3.3.2. Ακολουθώντας τα βήματα της σχεδίασης, επιλέγουμε την είσοδο ελέγχου ως:

$$u(t) = -kT(\xi(t)) - \hat{\varphi}(x, t) - \hat{\gamma}(x, t) (d(x) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

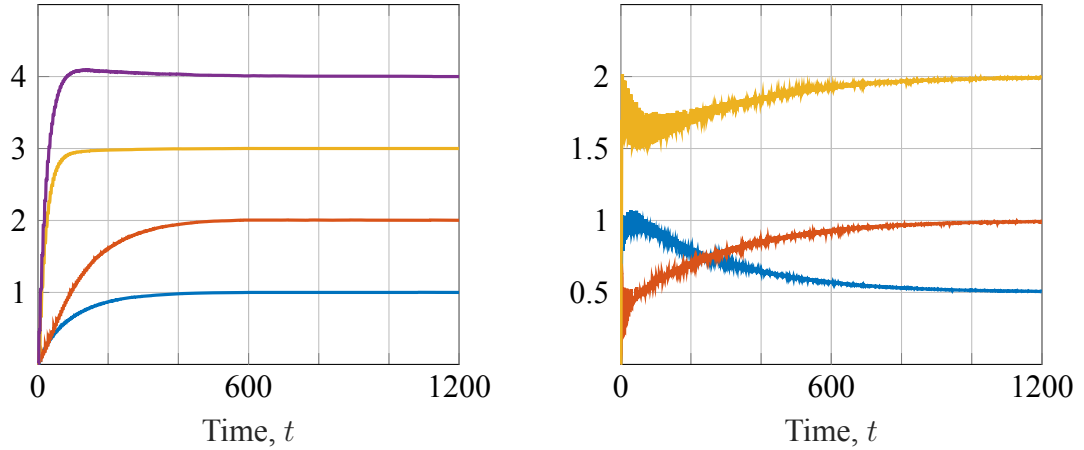
και τους νόμους προσαρμογής ως:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}}_\varphi(t) &= \beta_\varphi \frac{\xi(t)}{\rho(t)} Z_\varphi(x) \in \mathbb{R}^{q_\varphi} \\ \dot{\hat{W}}_\gamma(t) &= \beta_\gamma \frac{\xi(t)}{\rho(t)} (d(x) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) Z_\gamma(x) \in \mathbb{R}^{q_\gamma} \end{aligned} \quad (4.2)$$

όπου $\xi(t) = s(x)/\rho(t)$ με $s(x) = e_2(x) + \lambda e_1(x)$ όπως ορίζουν τα βήματα (1,2) και $\rho(t)$ η συνάρτηση επίδοσης. Οι παράμετροι του σχήματος ελέγχου απεικονίζονται στον Πίνακα 4.1. Τέλος, το σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιείται για την παραγωγή της τροχιάς αναφοράς $x_d(t)$ αναπτύσσεται με βάση την μεθοδολογία της Ενότητας 2.4.

Πίνακας 4.1: Κέρδη σχήματος αναγνώρισης για το Πείραμα 4.1.1

Parameter	Value
k	10
λ	1
β_φ (gaussian)	0.08
β_γ (bias)	0.05
β_γ (gaussian)	0.12
ρ_0	2
ρ_∞	0.01
l	2
ΔT	1

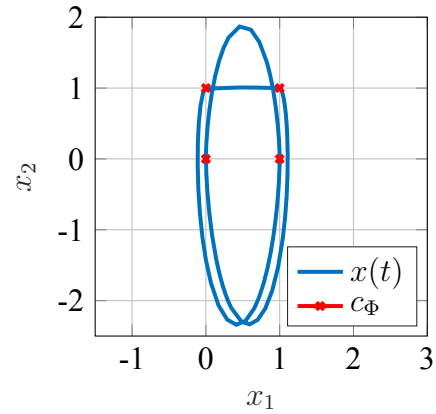


Σχήμα 4.1: Χρονική εξέλιξη των βαρών $\hat{W}_\varphi(t)$ (αριστερά) και $\hat{W}_\gamma(t)$ (δεξιά) συναρτήσεων του χρόνου για το Πείραμα 4.1.1.

Αποτελέσματα

Το σύστημα κλειστού βρόγχου που περιγράφεται στην προηγούμενη παράγραφο προσομοιώνεται για 300 περιόδους. Στο Σχήμα 4.1 παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη των βαρών $\hat{W}_\varphi(t)$ και $\hat{W}_\gamma(t)$ ενώ στο Σχήμα 4.2 απεικονίζεται η τροχιά $x(t)$ του συστήματος στο φασικό πορτραίτο x_1-x_2 .

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.1 τα βάρη των προσεγγίσεων συγκλίνουν στις τιμές των άγνωστων διανυσμάτων W_φ^* και W_γ^* , συνεπώς το σχήμα αναγνώρισης πράγματι εκτιμά σωστά τις συναρτήσεις $\varphi(x)$ και $\gamma(x)$. Παρατηρούμε επίσης πως δεν έχουν όλα τα βάρη την ίδια ταχύτητα σύγκλισης, αφού τα βάρη $\hat{W}_\gamma(t)$ (δεξιά) συγκλίνουν πιο αργά από αυτά τα $\hat{W}_\varphi(t)$ (αριστερά).



Σχήμα 4.2: Τροχιά $x(t)$ στο επίπεδο καταστάσεων x_1-x_2 του Πειράματος 4.1.1.

Στο Σχήμα 4.2, είναι φανερό ότι η τροχιά $x(t)$ διέρχεται από τα κέντρα c_Φ του διανύσματος οπισθοδρομητών $Z_\varphi(x)$, γεγονός που εξασφαλίζει την ικανοποίηση της Συνθήκης Επιμένουσας Διέγερσης. Παρομοίως, η ΣΕΔ επαληθεύεται και για το διάνυσμα οπισθοδρομητών $Z_\gamma(x)$ αφού τα κέντρα c_γ αποτελούν την προβολή των κέντρων c_φ στον \mathbb{R} .

Αξίζει να σημειωθεί πως σε αυτή την περίπτωση, καθώς η αρχιτεκτονική των δικτύων RBF που χρησιμοποιούνται στην αναγνώριση ταυτίζεται με τις μη γραμμικότητες του συστήματος, το αποτέλεσμα της προσέγγισης μπορεί να επεκταθεί σε ολόκληρο τον χώρο \mathbb{R}^2 . Αν ωστόσο μελετούσαμε ένα πραγματικό σύστημα όπου οι μη γραμμικές του συναρτήσεις δεν δίνονται από αθροίσματα γκαουσιανών, τότε η προσέγγιση είναι τοπική και ισχύει μόνο σε μια γειτονιά των κέντρων των νευρωνικών δικτύων την οποία στην απόδειξη ορίζουμε ως Ω_x . Παρόλα αυτά, όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.2, η περιοδική τροχιά $x(t)$ δεν βρίσκεται καθ' όλη την διάρκεια κοντά στα κέντρα του νευρωνικού δικτύου και κατά συνέπεια εντός αυτού του συμπαγούς συνόλου Ω_x . Αυτός είναι και

ο λόγος που στην απόδειξη του Κεφαλαίου 3, διαχωρίζονται αυτά τα δυο σύνολα και μέσω υποθέσεων θεωρούμε πως ενώ οι προσεγγίσεις είναι τοπικές και ισχύουν μόνο για $x \in \Omega_x$, η τροχιά $x(t)$ είναι φραγμένη σε ένα συμπαγές σύνολο \mathcal{X} το οποίο είναι υπεрсύνολο του Ω_x .

4.1.2 Συστήματα ΠΕΠΕ

Επεκτείνοντας το παραπάνω αποτέλεσμα για συστήματα ΠΕΠΕ, θεωρούμε το μη γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_1(x) + g_{11}(x)u_1(t) + g_{12}(x)u_2(t) \\ \dot{x}_3 &= f_2(x) + g_{21}(x)u_1(t) + g_{22}(x)u_2(t)\end{aligned}$$

όπου $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ το διάνυσμα καταστάσεων και $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ και $g_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μη ομαλές συναρτήσεις που ικανοποιούν τις υποθέσεις του Κεφαλαίου 3.

Όμοια με πριν, αρχικά ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma(x) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(x) & \gamma_{12}(x) \\ \gamma_{21}(x) & \gamma_{22}(x) \end{bmatrix}$$

όπου κάθε μια αποτελείται από τα άθροισμα γκαουσιανών των εξισώσεων (4.3) - (4.4), και στην συνέχεια ορίζουμε τις συναρτήσεις $f(x)$ και $G(x)$ ως

$$f(x) = \Gamma^{-1}(x)\Phi(x) \quad \text{και} \quad G(x) = \Gamma^{-1}(x)$$

όπου $f(x)$ και $G(x)$ ο συμβολισμός συμπαγής μορφής που χρησιμοποιείται και στην εξίσωση (3.2) του Κεφαλαίου 3.

$$\varphi_i(x) = \sum_{k=1}^3 w_{\phi_{ik}}^* z_{\phi_k}(x) = W_{\varphi_i}^{*T} Z_{\varphi}(x), \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

$$\gamma_{ij}(x) = \sum_{k=1}^3 w_{\gamma_{ijk}}^* z_{\gamma_k}(x) = W_{\gamma_{ij}}^{*T} Z_{\gamma}(x), \quad i, j = 1, 2 \quad (4.4)$$

Τα διανύσματα $Z_{\Phi}(x)$ και $Z_{\Gamma}(x)$ αποτελούνται από γκαουσιανές συναρτήσεις με κέντρα τα σημεία:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad c_3 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.4 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

και διασπορές $\sigma = 0.3$. Όπως και πριν, καθώς το σύστημα είναι τύπου *Euler Lagrange* οι συναρτήσεις $z_{\phi_k}(x)$ είναι συνάρτηση της ποσότητας $\|x - c_k\|$, δηλαδή του πλήρους διανύσματος καταστάσεων ενώ αντίθετα οι συναρτήσεις $z_{\gamma_k}(x)$ είναι συνάρτηση του $|x_1 - c_{kx}|$, δηλαδή μόνο του x_1 . Τέλος, τα βάρη κάθε $W_{\varphi_i}^*$ και $W_{\gamma_{ij}}^*$ κάθε συνάρτησης δίνονται στον Πίνακα 4.2.

Συνάρτηση	w_{c_1}	w_{c_2}	w_{c_3}
$\varphi_1(x)$	1	2	3
$\varphi_2(x)$	4	5	6
$\gamma_{11}(x)$	3	0	5
$\gamma_{12}(x)$	1	2	3
$\gamma_{21}(x)$	-1	-2	-3
$\gamma_{22}(x)$	6	7	8

Πίνακας 4.2: $W_{\varphi_i}^*$ και $W_{\gamma_{ij}}^*$ του Πειράματος 4.1.2.

Σχήμα Αναγνώρισης

Για την αναγνώριση των άγνωστων συναρτήσεων, όπως και στο προηγούμενο πείραμα θα χρησιμοποιηθούν νευρωνικά δίκτυα RBF ίδιας δομής με αυτά των Z_Φ και Z_Γ . Έτσι λοιπόν, σχηματίζουμε τις προσεγγίσεις:

$$\hat{\Phi}(x, t) = \begin{bmatrix} \hat{w}_{\varphi_1}(t)^T Z_\Phi(x) \\ \hat{w}_{\varphi_2}(t)^T Z_\Phi(x) \end{bmatrix}$$

και

$$\hat{\Gamma}(x, t) = \begin{bmatrix} \hat{w}_{\gamma_{11}}(t)^T Z_\Gamma(x) & \hat{w}_{\gamma_{12}}(t)^T Z_\Gamma(x) \\ \hat{w}_{\gamma_{21}}(t)^T Z_\Gamma(x) & \hat{w}_{\gamma_{22}}(t)^T Z_\Gamma(x) \end{bmatrix}$$

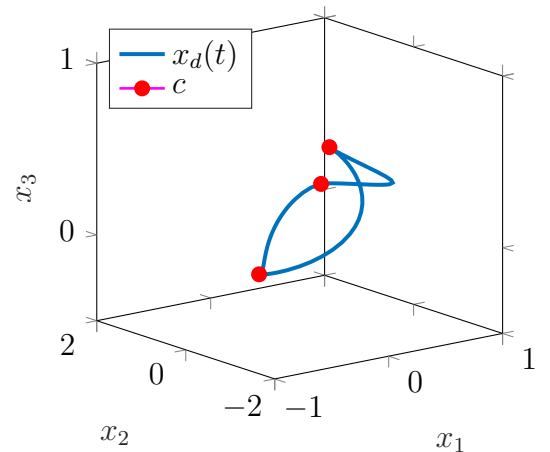
Αντίστοιχα με το Πείραμα 4.1.1, σύγκλιση των βαρών $\hat{w}_{\varphi_i}(t)$ και $\hat{w}_{\gamma_{ij}}(t)$, $i, j = 1, 2$ στις αντίστοιχες τιμές του Πίνακα 4.3 συνεπάγεται σε επιτυχή αναγνώριση των άγνωστων συναρτήσεων του συστήματος. Τέλος, οι παράμετροι του σχήματος αναγνώρισης απεικονίζονται στον Πίνακα 4.3.

Πίνακας 4.3: Παράμετροι σχήματος αναγνώρισης για το Πείραμα 4.1.2

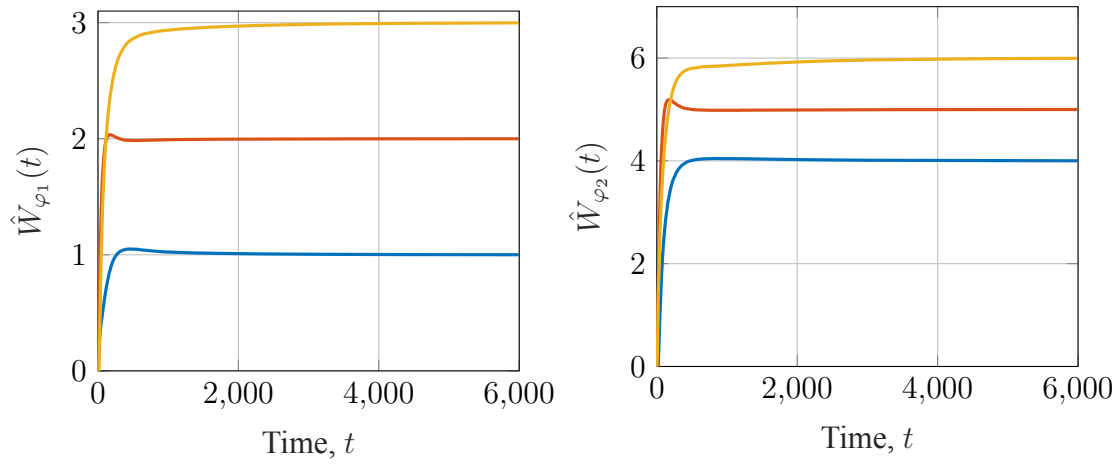
Parameter	Value
k	30
λ	1
β_φ	0.4
β_γ	0.2
ρ_0	4
ρ_∞	0.02
l	2
ΔT	1

Αποτελέσματα

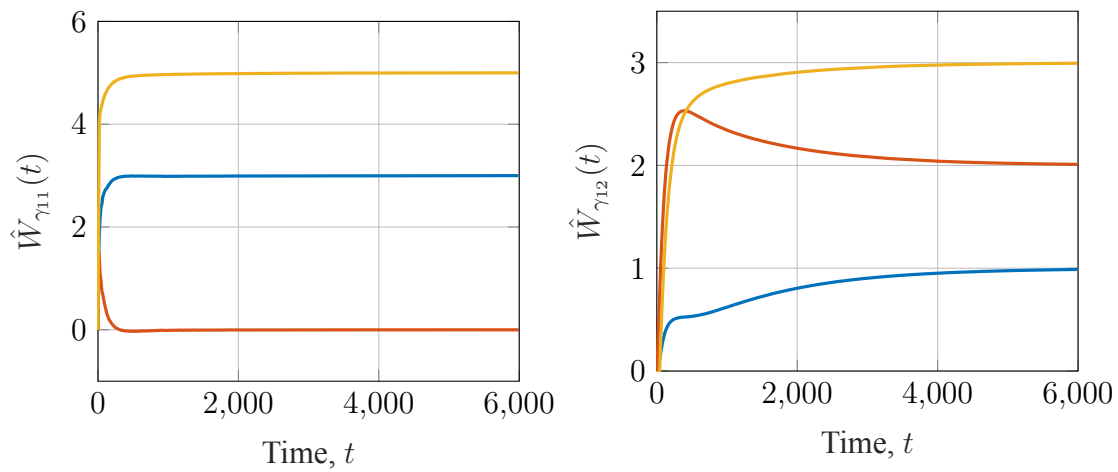
Το σύστημα προσομοιώθηκε για 2000 περιόδους, και στα Σχήματα 4.4, 4.5 και 4.6 απεικονίζεται η εξέλιξη των βαρών κάθε RBF νευρωνικού δικτύου στον χρόνο. Συγκρίνοντας τις γραφικές αυτές με τον Πίνακα 4.2, εύκολα επαληθεύεται πως τα βάρη συγκλίνουν στις σωστές τιμές. Τέλος, στο Σχήμα 4.3 φαίνεται η τρισδιάστατη τροχιά $x(t)$ στον \mathbb{R}^3 καθώς και τα κέντρα c . Από το σχήμα φαίνεται πως η τροχιά διέρχεται και από τα τρία κέντρα των οπισθοδρομητών και κατά συνέπεια ικανοποιεί την ΣΕΔ της Παραγράφου 2.2.3.



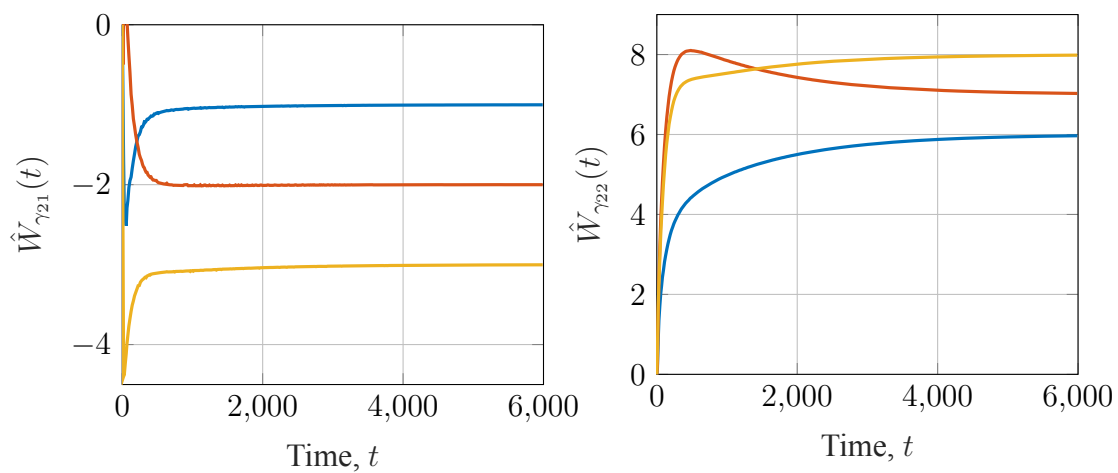
Σχήμα 4.3: Τροχιά $x(t)$ και κέντρα RBF στο Πείραμα 4.1.2



Σχήμα 4.4: Χρονική εξέλιξη των βαρών $\hat{W}_{\varphi_1}(t)$ (αριστερά) και $\hat{W}_{\varphi_2}(t)$ (δεξιά) για το πείραμα 4.1.2



Σχήμα 4.5: Χρονική εξέλιξη των βαρών $\hat{W}_{\gamma_{11}}(t)$ (αριστερά) και $\hat{W}_{\gamma_{12}}(t)$ (δεξιά) για το πείραμα 4.1.2



Σχήμα 4.6: Χρονική εξέλιξη των βαρών $\hat{W}_{\gamma_{21}}(t)$ (αριστερά) και $\hat{W}_{\gamma_{22}}(t)$ (δεξιά) για το πείραμα 4.1.2

4.2 Πραγματικά Συστήματα

Σε αυτό το σημείο, είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε το σχήμα αναγνώρισης της Ενότητας 3 σε πραγματικά συστήματα. Για τον σκοπό αυτό, επιλέγονται τα εξής τρία δοκιμαστικά συστήματα:

- ένα απλοποιημένο μοντέλο του φαινομένου *Wing Rock* το οποίο παρουσιάζεται στα αεροσκάφη τύπου *Delta Wing*. Το σύστημα αυτό πρόκειται για ένα δευτεροβάθμιο σύστημα όπου η $f(x)$ είναι συνάρτηση και των δυο καταστάσεων ενώ η $g(x)$ είναι μια σταθερά.
- ένα οδηγούμενο ταλαντωτή *Van Der Pol*, το οποίο είναι ένα σύστημα δευτέρου βαθμού. Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συναρτήσεις και των δυο καταστάσεων x_1, x_2 συνεπώς αυτό το σύστημα δεν εμπίπτει στην κατηγορία συστημάτων *Euler Lagrange* που μελετάμε.
- ένα βραχίονα δυο βαθμών ελευθερίας. Το σύστημα αυτό είναι σύστημα ΠΕΠΕ και εμπίπτει στην κατηγορία *Euler Lagrange* αφού ο πίνακας αδράνειας είναι συνάρτηση μόνο των θέσεων των αρθρώσεων και όχι των ταχυτήτων.

4.2.1 Φαινόμενο Wing Rock

Το σύστημα που θα μελετήσουμε αποτελεί μια μοντελοποίηση του φαινομένου *Wing Rock*. Το φαινόμενο αυτό αναφέρεται την αστάθεια ανοικτού βρόγχου στην γωνία roll, που παρατηρείται στα αεροπλάνα τύπου *Delta Wing* όταν έχουν μεγάλη γωνία προσβολής (*Angle of Attack*). Το μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί για αυτό το πείραμα μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο [33].

Το σύστημα αποτελείται από δυο καταστάσεις, την γωνία roll του αεροσκάφους την οποία συμβολίζουμε με x_1 και την αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα την οποία συμβολίζουμε με x_2 . Έτσι λοιπόν, το σύστημα περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεων:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \underbrace{\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + (\theta_3 |x_1| + \theta_4 |x_2|)x_2 + \theta_5 x_1^3}_{f(x)} + \underbrace{\theta_6}_{g(x)} u(t)\end{aligned}\quad (4.5)$$

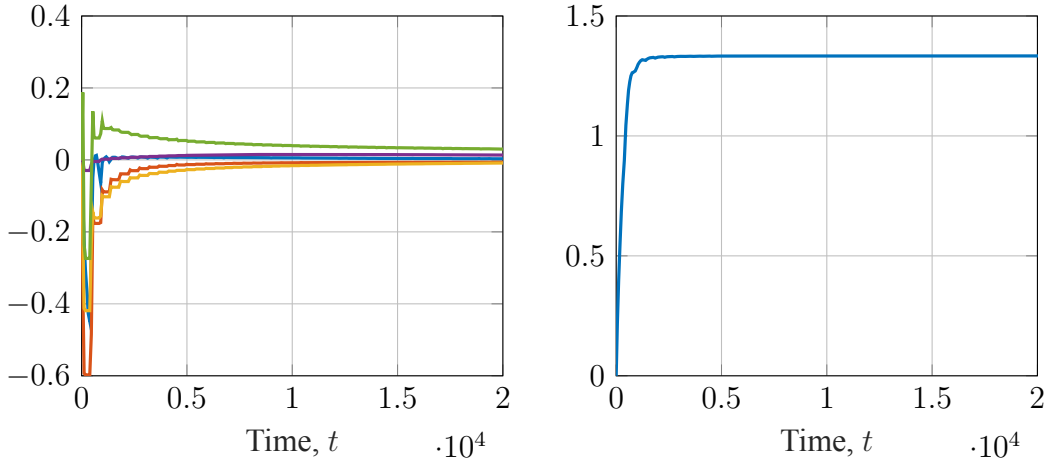
όπου $u(t)$ είναι η είσοδος ελέγχου και τα θ_i σταθερές που δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
-0.018	0.015	-0.062	0.009	0.021	0.75

Πίνακας 4.4: Σταθερές θ_i της εξίσωσης (4.5)

Σχήμα Αναγνώρισης

Για την αναγνώριση του παραπάνω συστήματος θα εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο που εργαστήκαμε στα πειράματα του προηγούμενου κεφαλαίου, με την διαφορά ότι καθώς



Σχήμα 4.7: Χρονική εξέλιξη των βαρών $\hat{W}_\varphi(t)$ (αριστερά) και της σταθεράς $\hat{w}_{\gamma_0}(t)$ (δεξιά) συναρτήσει του χρόνου.

η $g(x)$ είναι άγνωστη σταθερά, για την εκτίμηση της θα χρησιμοποιήσουμε μια σταθερά έναντι ενός νευρωνικού δικτύου που θα εισήγαγε περιττή πολυπλοκότητα. Έτσι, σχηματίζουμε τις προσεγγίσεις:

$$\hat{\varphi}(x, t) = \hat{W}_\varphi^T(t) Z_\varphi(x) \quad \text{και} \quad \hat{\gamma}(t) = w_{\gamma_0}(t)$$

Σχετικά με την επιλογή του συνόλου αναγνώρισης, ορίζουμε το εύρος της γωνίας x_1 ως το σύνολο $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, το οποίο φαίνεται λογική τιμή δεδομένου ότι πρόκειται για την γωνία *roll* ενός αεροσκάφους. Αντίθετα, για το σύνολο τιμών δεν γνωρίζουμε ποιο θεωρείται ένα αποδεκτό εύρος και κατά συνέπεια επιλέγεται και εδώ το σύνολο $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ για λόγους συμμετρίας του συνόλου αναγνώρισης. Έτσι, το σύνολο Ω_x επιλέγεται ως:

$$\Omega_x = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$$

Τα κέντρα του νευρωνικού δικτύου RBF για την αναγνώριση της $\varphi(x)$ επιλέγονται ως ένα πλέγμα που καλύπτει ομοιόμορφα το Ω_x και αποτελείται από 225 κέντρα. Τα σημεία του πλέγματος δίνονται παρακάτω:

$$C = \{0 \pm \frac{\pi}{28}k, \quad k \in [0, 1, \dots, 7]\} \times \{0 \pm \frac{\pi}{28}k, \quad k \in [0, 1, \dots, 7]\}$$

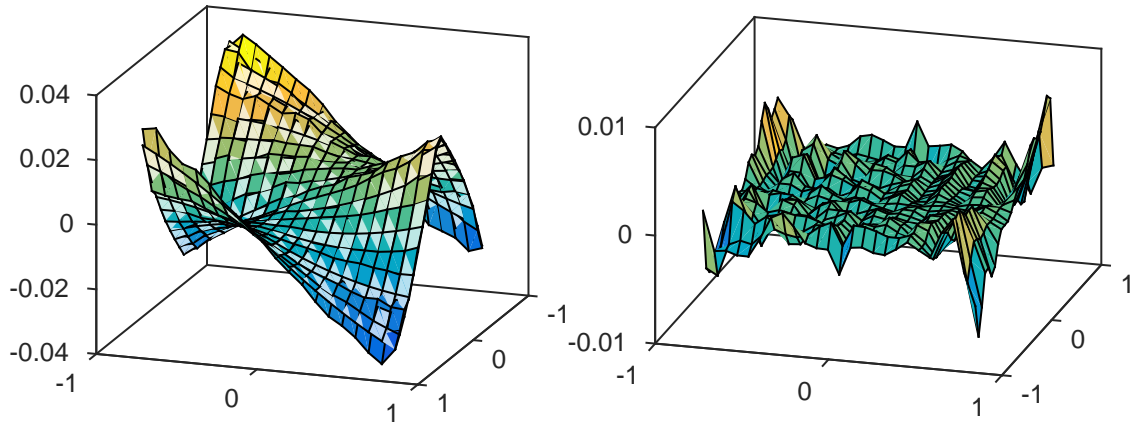
Τέλος, χρησιμοποιούμε τους νόμους ελέγχου και την μεθοδολογία σχεδίασης που παρουσιάζεται στην Υποενότητα 3.3.2, με τις σχεδιαστικές παραμέτρους να δίνονται στον Πίνακα 4.5.

Αποτελέσματα

Μετά από προσομοίωση του συστήματος κλειστού βρόγχου για 50 περιόδους, στο Σχήμα 4.7 παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη κάποιων βαρών $\hat{w}_{\varphi i}$ και της σταθεράς $\hat{w}_{\gamma_0}(t)$ συ-

Πίνακας 4.5: Παράμετροι σχήματος αναγνώρισης για το φαινόμενο *Wing Rock*

Parameter	Value
k	30
λ	1
β_φ (bias)	1
β_φ (gaussian)	10
β_γ	0.3
ρ_0	4
ρ_∞	0.02
l	2
ΔT	2



Σχήμα 4.8: Προσέγγιση της συνάρτησης $\varphi(x)$ (αριστερά) και το σφάλμα $\tilde{\varphi}(x)$ (δεξιά) στο πείραμα *Wing Rock*.

	$\min_{x \in \Omega_x}$	$\max_{x \in \Omega_x}$	Εύρος Τιμών	$\max(\tilde{\varphi}(x))$	Σχετικό Σφάλμα
$\varphi(x)$	-0.0325	0.0332	0.0657	0.0084	12.79%

Πίνακας 4.6: Στατιστικά στοιχεία προσεγγίσεων για το φαινόμενο *Wing Rock*

ναρτήσει του χρόνου. Από το σχήμα είναι προφανές πως ο χρόνος εκπαίδευσης ήταν αρκετός για να συγκλίνουν τα βάρη του νευρωνικού δικτύου καθώς και η σταθερά $\hat{w}_{\gamma 0}(t)$ που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της $\gamma(x)$.

Στο Σχήμα 4.8 παρουσιάζεται η προσέγγιση της συνάρτησης $\hat{\varphi}(x)$ καθώς και το σφάλμα $\tilde{\varphi}(x)$. Όπως φαίνεται από τις δυο αυτές γραφικές παραστάσεις, το αποτέλεσμα της διαδικασίας αναγνώρισης της $\varphi(x)$ είναι πολύ ικανοποιητικό. Τέλος, παραθέτουμε έναν πίνακα (Πίνακας 4.6) με κάποια χαρακτηριστικά του σφάλματος προσέγγισης καθώς και της συνάρτησης $\varphi(x)$ εντός του συνόλου Ω_x , έτσι ώστε να διευκολύνουμε την εξαγωγή συμπερασμάτων για την ποιότητα της προσέγγισης.

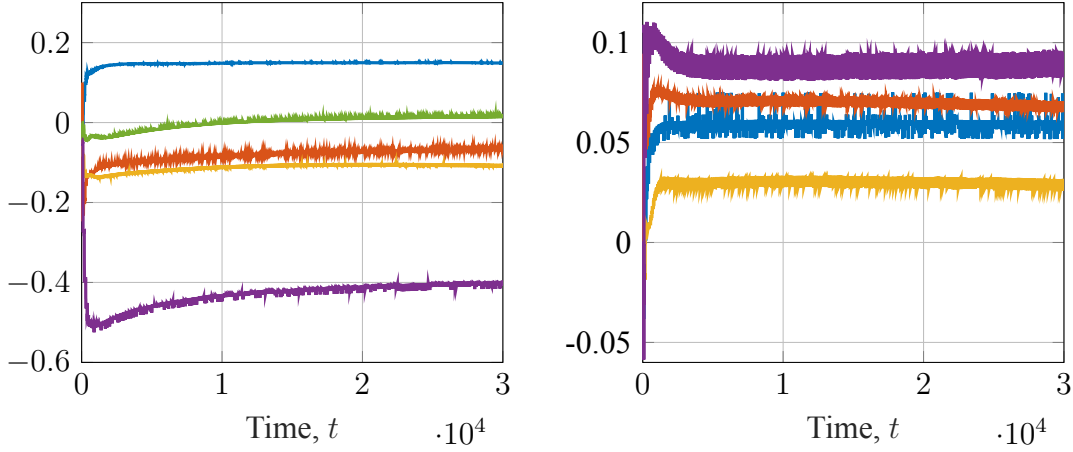
Όπως μπορούμε να δούμε και από τον Πίνακα 4.6, το μέγιστο ποσοστιαίο ή σχετικό σφάλμα προσέγγισης εντός του Ω_x είναι 12.79%, γεγονός που επιβεβαιώνει πως τα αποτελέσματα είναι πολύ ικανοποιητικά.

Σχετικά με την ποιότητα προσέγγισης της $\gamma(x)$ η πραγματική τιμή της είναι ίση με $1/\theta_6 = 1.3333$ ενώ το βάθος $w_{\gamma 0}(t)$ συγκλίνει στην τιμή 1.3335, που σημαίνει ότι και σε αυτή την περίπτωση το σχήμα αναγνωρίζει επιτυχώς την άγνωστη συνάρτηση.

4.2.2 Ταλαντωτής *Van der Pol*

Το δεύτερο πραγματικό σύστημα που θα μελετήσουμε είναι ένας οδηγούμενος ταλαντωτής *Van der Pol*, το οποίο είναι ένα αρκετά κλασσικό σύστημα στην βιβλιογραφία του αυτομάτου ελέγχου.

Το σύστημα αυτό είναι ένα μη-γραμμικό σύστημα δευτέρου βαθμού και περιγράφεται



Σχήμα 4.9: Χρονική εξέλιξη των βαρών $\hat{W}_\varphi(t)$ (αριστερά) και της σταθεράς $\hat{W}_\gamma(t)$ (δεξιά) συναρτήσεων του χρόνου για το Πείραμα 4.2.2

από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 + 1 + x_1^2 + x_2^2)u(t)\end{aligned}\quad (4.6)$$

όπου μ θετική σταθερά. Στο πείραμα μας θεωρούμε πως $\mu = 1$. Όπως μπορούμε να δούμε η $g(x)$ σε αυτή την περίπτωση είναι συνάρτηση και των δυο καταστάσεων, συνεπώς το σύστημα δεν είναι τύπου *Euler Lagrange*.

Σχήμα Αναγνώρισης

Για την αναγνώριση του παραπάνω συστήματος θα χρησιμοποιήσουμε δυο νευρωνικά δίκτυα RBF, ένα για την αναγνώριση της $\varphi(x)$ και ένα για την αναγνώριση της $\gamma(x)$. Καθώς και οι δυο άγνωστες συναρτήσεις εξαρτώνται από το πλήρες διάνυσμα καταστάσεων $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$, θα χρησιμοποιηθεί το ίδιο διάνυσμα οπισθοδρομητών για τις προσεγγίσεις $\hat{\varphi}(x)$ και $\hat{\gamma}(x)$ όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\hat{\varphi}(x, t) = \hat{W}_\varphi^T(t)Z(x) \quad \text{και} \quad \hat{\gamma}(x, t) = \hat{W}_\gamma^T(t)Z(x)$$

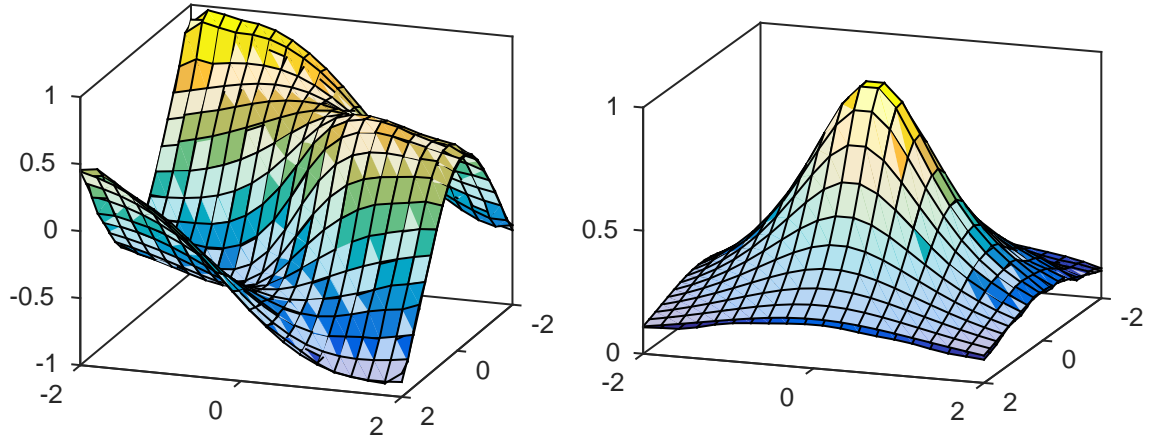
Σκοπός είναι η προσέγγιση του συστήματος στο σύνολο $\Omega_x = [-2, 2] \times [-2, 2]$. Για τον σκοπό αυτό, τα κέντρα c_i των RBF συναρτήσεων του δικτύου $Z(x)$, επιλέγονται ως:

$$C = \bigtimes_{i=1}^2 \left\{ -2 + \frac{4}{9}k, \quad k \in [0, 1, \dots, 9] \right\}$$

δηλαδή είναι το καρτεσιανό γινόμενο 10 ομοιόμορφα κατανεμημένων σημείων στο διάστημα $[-2, 2]$, σχηματίζοντας έτσι ένα πλέγμα που καλύπτει ομοιόμορφα το Ω_x . Οι υπόλοιποι παράμετροι του σχήματος προσομοίωσης φαίνονται στον Πίνακα 4.7.

Πίνακας 4.7: Παράμετροι σχήματος αναγνώρισης για τον ταλαντωτή *Van Der Pol*

Parameter	Value
k	30
λ	1
β_φ (bias)	10
β_φ (gaussian)	50
β_γ (bias)	5
β_γ (gaussian)	20
ρ_0	4
ρ_∞	0.02
l	2
ΔT	1



Σχήμα 4.10: Σύγκριση των συναρτήσεων $\varphi(x)$ (αριστερά) και $\gamma(x)$ (δεξιά) με τις προσεγγίσεις τους $\hat{\varphi}(x)$ και $\hat{\gamma}(x)$ αντίστοιχα για το πείραμα αναγνώρισης του ταλαντωτή *Van Der Pol*. Με γκρι (transparent) απεικονίζονται οι πραγματικές συναρτήσεις ενώ οι χρωματισμένες επιφάνειες είναι οι προσεγγίσεις αυτών.

Αποτελέσματα

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω παραμέτρους, έγινε προσομοίωση του συστήματος κλειστού βρόγχου για 300 περιόδους. Στο Σχήμα 4.7 παρουσιάζεται η εξέλιξη κάποιων παραμέτρων των δυο νευρωνικών δικτύων. Από τα σχήματα αυτά φαίνεται πως ο χρόνος προσομοίωσης ήταν αρκετός για να σταθεροποιηθούν τα βάρη. Βλέπουμε επίσης, πως ενώ τα βάρη της $\hat{\varphi}(x)$ συγκλίνουν σε κάποιες τιμές χωρίς μεγάλες διακυμάνσεις, τα βάρη της $\hat{\gamma}(x)$ εκτελούν ταλάντωση - διαφορετικού πλάτους το κάθε ένα από αυτά - γύρω από κάποιες τιμές. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στην επιλογή μεγάλων κερδών $\beta_{\gamma_{ij}}$ και μπορεί να βελτιωθεί μειώνοντας τα αντίστοιχα κέρδη. Στην προκειμένη περίπτωση ωστόσο, για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό, εξάγουμε τα βάρη $w_{\gamma i}$ ως:

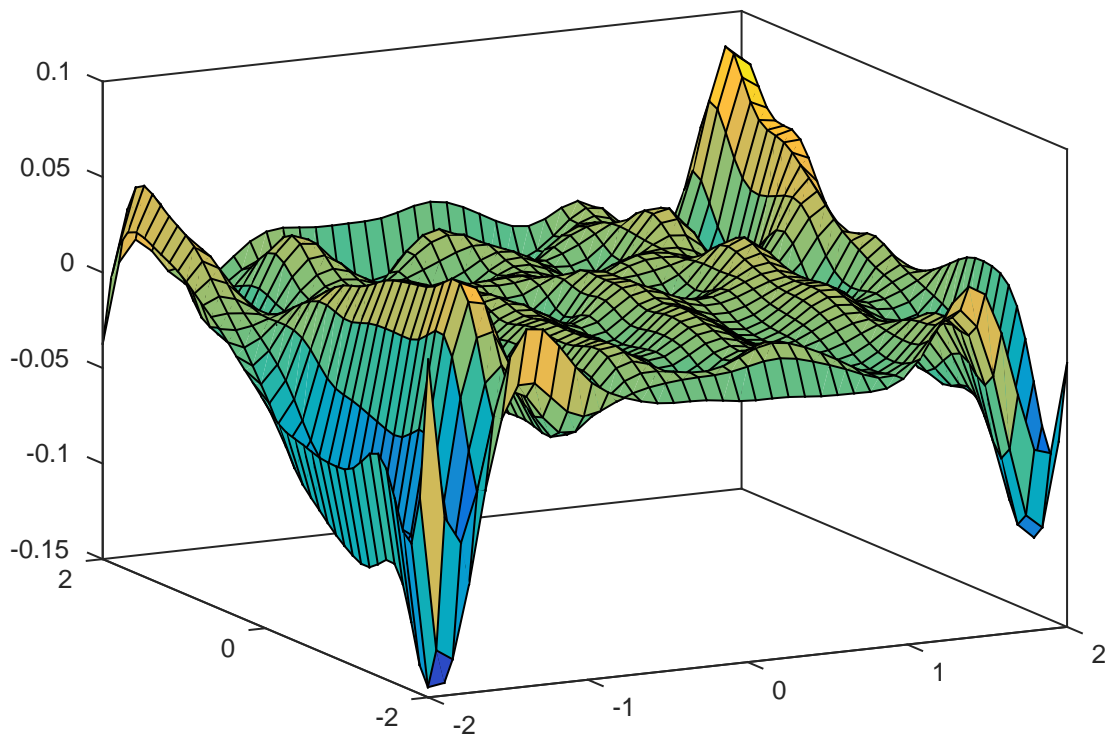
$$\bar{w}_{\gamma i} = \text{mean}_{t \in [t_a, t_b]} \{w_{\gamma i}(t)\}$$

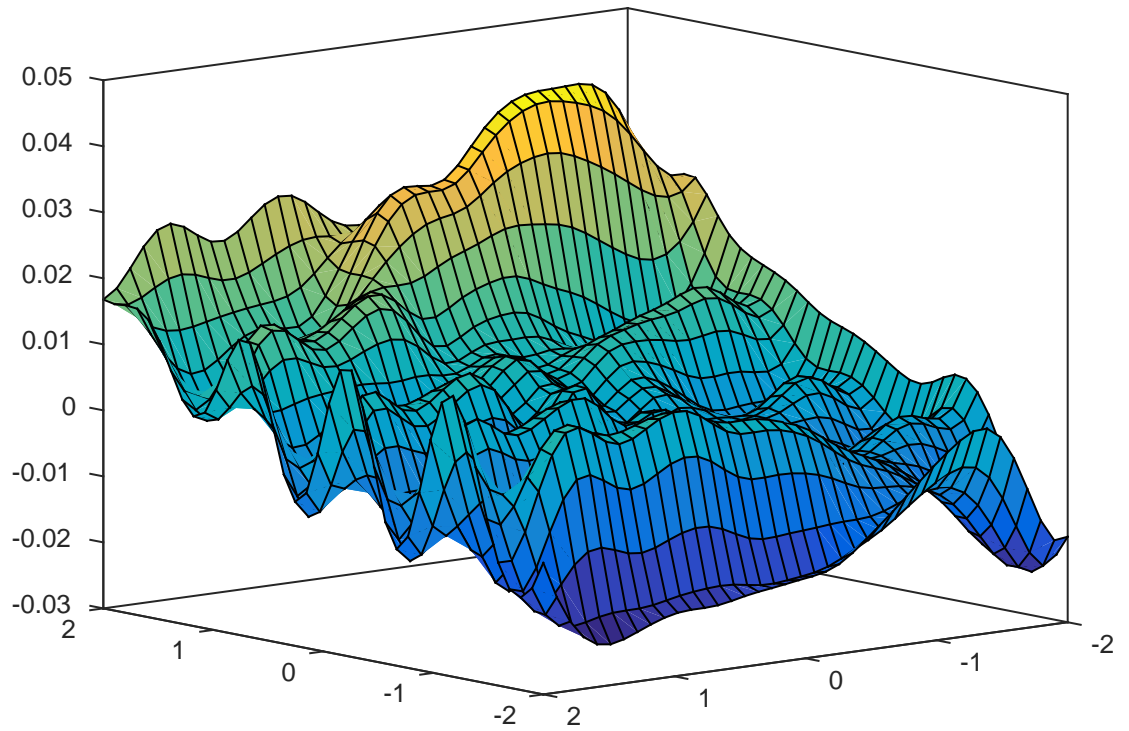
όπου $[t_a, t_b]$ ένα επιλεγμένο χρονικό διάστημα στο οποίο τα βάρη κινούνται γύρω από μια σταθερή μέση τιμή. Στο συγκεκριμένο πείραμα χρησιμοποιείται ο μέσος όρος κατά τις δυο τελευταίες περιόδους της προσομοίωσης.

Σχετικά με την ποιότητα της προσέγγισης, στο Σχήμα 4.10 απεικονίζονται οι προσεγγίσεις των συναρτήσεων σε σύγκριση με τις πραγματικές, ενώ στα Σχήματα 4.11 και 4.12 παρουσιάζουμε το σφάλματα $\tilde{\varphi}(x_1, x_2)$ και $\tilde{\gamma}(x_1, x_2)$ αντίστοιχα. Τέλος, στον Πίνακα 4.8 δίνουμε κάποια στατιστικά χαρακτηριστικά των προσεγγίσεων καθώς και της πραγματικής συνάρτησης έτσι ώστε να διευκολύνουμε την διαδικασία της αξιολόγησης αποτελεσμάτων.

Από τα παραπάνω στοιχεία οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως το σχήμα αναγνώρισης καταφέρνει να αναγνωρίσει επιτυχώς τις μη γραμμικότητες του ταλαντωτή *Van der Pol* παρόλο που δεν ανήκει στην κλάση συστημάτων *Euler Lagrange* που μελετάμε. Κατά δεύτερον αξίζει να σημειωθεί πως μελετώντας τις γραφικές παραστάσεις 4.11 και 4.12, παρατηρούμε πως ενώ η ποιότητα των προσεγγίσεων είναι πολύ καλή στο εσωτερικό

	$\min_{x \in \Omega_x}$	$\max_{x \in \Omega_x}$	Έυρος Τιμών	$\max(\tilde{e})$	Σχετικό Σφάλμα
$\varphi(x)$	-0.8999	0.8999	1.7997	0.1496	8.31%
$\gamma(x)$	0.1111	1.0	0.8889	0.0417	4.69%

Πίνακας 4.8: Στατιστικά στοιχεία προσεγγίσεων για τον ταλαντωτή *Van Der Pol*Σχήμα 4.11: Σφάλμα $\tilde{\varphi}(x)$ στο σύνολο Ω_x



Σχήμα 4.12: Σφάλμα $\tilde{\gamma}(x)$ στο σύνολο Ω_x

του Ω_x , στο σύνορο φαίνεται πως η ποιότητα χειροτερεύει. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αρκετά λογικό, αφού στο εσωτερικό του χώρου Ω_x υπάρχει επαρκής κάλυψη από γκαουσιανές ενώ αντίθετα τα σημεία που βρίσκονται στο σύνορο προσεγγίζονται από ένα λιγότερο πυκνό πλέγμα γκαουσιανών.

4.2.3 Βραχίονας δυο βαθμών ελευθερίας

Σε αυτό το τελευταίο πείραμα θα προσπαθήσουμε να αναγνωρίζουμε το δυναμικό σύστημα που περιγράφει την λειτουργία ενός βραχίονα δυο βαθμών ελευθερίας. Αρχικά παρουσιάζουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν την λειτουργία του:

4.2.4 Ρομποτικός βραχίονας

Το τελευταίο σύστημα που θα εξετάσουμε είναι ο βραχίονας δύο βαθμών ελευθερίας, όπως παρουσιάστηκε στην εργασία [3], ο οποίος περιγράφεται από την ακόλουθη δυναμική:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau,$$

όπου $q = [q_1, q_2]$ είναι οι γωνιακές θέσεις [rad], \dot{q} οι γωνιακές ταχύτητες [rad/s], και \ddot{q} οι γωνιακές επιταχύνσεις [rad/s²]. Ο θετικά ορισμένος πίνακας αδράνειας $M(q)$ ορίζεται

Πίνακας 4.9: Παράμετροι του συστήματος για το παράδειγμα 4.2.4

i	m_i	I_{Z_i}	ℓ_i
1	3.2	0.96	0.5
2	2.0	0.81	0.4

ως:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

με

$$\begin{aligned} M_{11} &= I_{Z_1} + I_{Z_2} + 0.25m_1\ell_1^2 + m_2(\ell_1^2 + 0.25\ell_2^2 + \ell_1\ell_2c_2), \\ M_{12} &= M_{21} = I_{Z_2} + m_2(0.25\ell_2^2 + 0.5\ell_1\ell_2c_2), \\ M_{22} &= I_{Z_2} + 0.25m_2\ell_2^2, \end{aligned}$$

όπου I_{Z_1}, I_{Z_2} αναπαριστούν τις ροπές αδράνειας των συνδέσμων $[\text{kgm}^2]$, ℓ_1, ℓ_2 είναι τα μήκη τους $[\text{m}]$, και m_1, m_2 οι μάζες τους $[\text{kg}]$. Επιπλέον, χρησιμοποιείται ο παρακάτω συμβολισμός χάριν συντομίας:

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos(q_1) & c_{12} &= \cos(q_1 + q_2) \\ s_2 &= \sin(q_2) & c_2 &= \cos(q_2) \end{aligned}$$

Ακόμη, ως $C(q, \dot{q})$ συμβολίζουμε τον πίνακα που περιέχει τις δυνάμεις *Coriolis*:

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} -c\dot{q}_2 + & -c(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ c\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Με τον όρο c , συμβολίζουμε τον όρο $c = 0.5m_2\ell_1\ell_2s_2$ για συντομία. Επιπροσθέτως, $g(q)$ είναι το διάνυσμα των βαρυτικών ροπών:

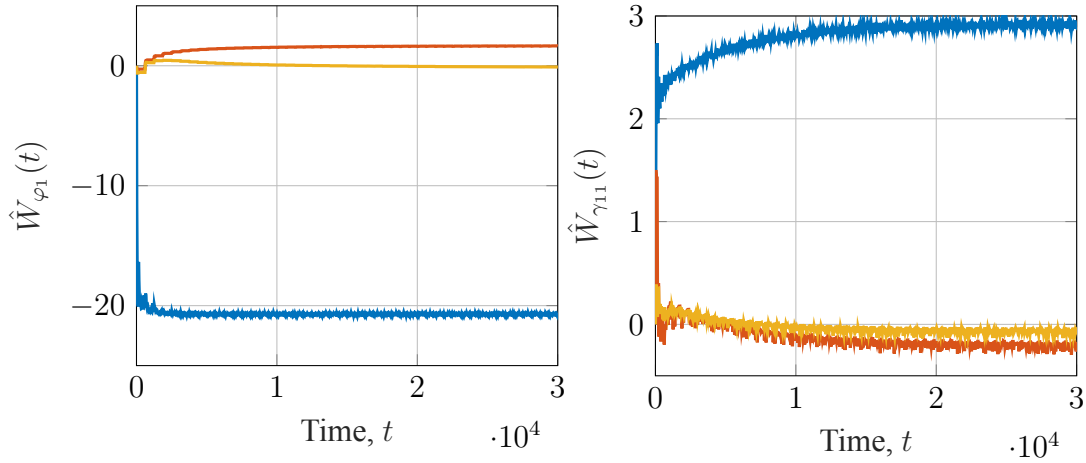
$$g(q) = \begin{bmatrix} 0.5m_1g\ell_1c_1 + m_2g(\ell_1c_1 + 0.5\ell_2c_{12}) \\ 0.5m_2g\ell_2c_{12} \end{bmatrix}$$

όπου $g = 9.81\text{m/s}^2$ είναι η βαρυτική σταθερά επιτάχυνσης. Τέλος, $\tau = [\tau_1, \tau_2]$ είναι οι ροπές $[\text{N m}]$ οι οποίες δρουν ως είσοδοι ελέγχου. Οι ακριβείς τιμές των παραμέτρων του συστήματος αναγράφονται στον Πίνακα 4.9.

Το σύστημα μπορεί εύκολα να έρθει στη μορφή (3.1) πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον θετικά ορισμένο πίνακα $M^{-1}(q)$, καταλήγοντας στο ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\ddot{q} = -M^{-1}(q)(C(q, \dot{q}), \dot{q} + g(q)) + M^{-1}(q)u$$

Παρατηρώντας τις παραπάνω εξισώσεις εύκολα επαληθεύεται ότι το σύστημα ανήκει στην κλάση συστημάτων που μελετάμε αφού ο πίνακας $M^{-1}(q)$ αφενός είναι θετικά ορισμένος, και αφετέρου είναι συνάρτηση μόνο των θέσεων q_1, q_2 και όχι των γωνιακών ταχυτήτων.



Σχήμα 4.13: Χρονική εξέλιξη επιλεγμένων βαρών των προσεγγίσεων $\hat{\varphi}_1(x)$ και $\hat{\gamma}_{11}(x)$

Σχήμα Αναγνώρισης

Ορίζοντας το διάνυσμα καταστάσεων $x = [q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2]^T$, σκοπός της παρούσας εφαρμογής, είναι η αναγνώριση των άγνωστων συναρτήσεων

$$\Phi(x) = G^{-1}(x)f(x) = -(C(q, \dot{q}), \dot{q} + g(q))$$

και

$$\Gamma(x_1, x_3) = G^{-1}(x_1, x_3) = M(q)$$

στο συμπαγές και κλειστό σύνολο $\Omega_x = [-0.5, 0.5]^4$. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε νευρωνικά δίκτυα RBF με τα διανύσματα οπισθοδρομητών $Z_\varphi(x)$ για την αναγνώριση των συναρτήσεων του $\Phi(x)$ και $Z_\gamma(x)$ για τις συναρτήσεις του $\Gamma(x)$. Ομοίως με τα Παραδείγματα 4.2.1 και 4.2.2 τα κέντρα των οπισθοδρομητών επιλέγονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να καλύψουν ομοιόμορφα το σύνολο Ω_x . Έτσι λοιπόν, τα κέντρα των οπισθοδρομητών $Z_\Phi(x)$ και $Z_\Gamma(x)$ τοποθετούνται στα πλέγματα

$$C_\Phi = \bigtimes_{i=1}^4 \{0 \pm 0.25k, \quad k = 1, 2\} \quad \text{και} \quad C_\Gamma = \bigtimes_{i=1}^2 \{0 \pm 0.25k, \quad k = 1, 2\}$$

αντίστοιχα. Στην συνέχεια επιλέγουμε τις διασπορές σ έτσι ώστε δυο γειτονικές γκαουσιανές συναρτήσεις RBF να έχουν 75% επικάλυψη, καταλήγοντας έτσι στην τιμή $\sigma = 0.2331$. Τέλος, σε κάθε προσέγγιση θα χρησιμοποιηθεί και ένας επιπλέον όρος πόλωσης (bias term). Οι υπόλοιποι παράμετροι του σχήματος αναγνώρισης παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.10.

Αποτελέσματα

Μετά από προσομοίωση του παραπάνω συστήματος για 50 περιόδους, τα βάρη των RBF νευρωνικών δικτύων έχουν συγκλίνει σε κάποιες σταθερές τιμές όπως φαίνεται

Πίνακας 4.10: Παράμετροι σχήματος αναγνώρισης για τον ρομποτικό βραχίονα

Parameter	Value
k	30
λ	1
β_φ (bias)	0.2
β_φ (gaussian)	1
β_γ (bias)	0.1
β_γ (gaussian)	0.2
ρ_0	4
ρ_∞	0.02
l	2
ΔT	1

	$\min_{x \in \Omega_x}$	$\max_{x \in \Omega_x}$	Ευρος Τιμών	$\max(\ \tilde{f}\)$	$mean(\ \tilde{f}\)$
$\varphi_1(x)$	-21.5815	-17.6966	3.8849	0.69248	0.11108
$\varphi_2(x)$	-3.9339	-2.2117	1.7221	0.35229	0.064058
$\gamma_{11}(x)$	2.901	2.95	0.048958	0.37797	0.081334
$\gamma_{12}(x)$	1.0655	1.09	0.024479	0.23919	0.030296
$\gamma_{21}(x)$	1.0655	1.09	0.024479	0.14734	0.040506
$\gamma_{22}(x)$	0.89	0.89	0.0	0.12042	0.017375

Πίνακας 4.11: Στατιστικά στοιχεία προσεγγίσεων για τον ρομποτικό βραχίονα

στο Σχήμα 4.13. Παρόλο που στο συγκεκριμένο σχήμα απεικονίζονται τα βάρη μόνο δυο προσεγγίσεων, σημειώνουμε πως και για τις υπόλοιπες συναρτήσεις τα βάρη των νευρωνικών δικτύων έχουν σταθεροποιηθεί.

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα πειράματα που το ζητούμενο ήταν η προσέγγιση συναρτήσεων δυο διαστάσεων, στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι αρκετά δυσκολότερη η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων καθώς η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από συναρτήσεις τεσσάρων μεταβλητών, καθιστώντας την οπτική αξιολόγηση ανέφικτη. Για τον λόγο αυτό, στον Πίνακα 4.11 παραθέτουμε κάποια στατιστικά χαρακτηριστικά τόσο των άγνωστων συναρτήσεων όσο και του σφάλματος προσέγγισης.

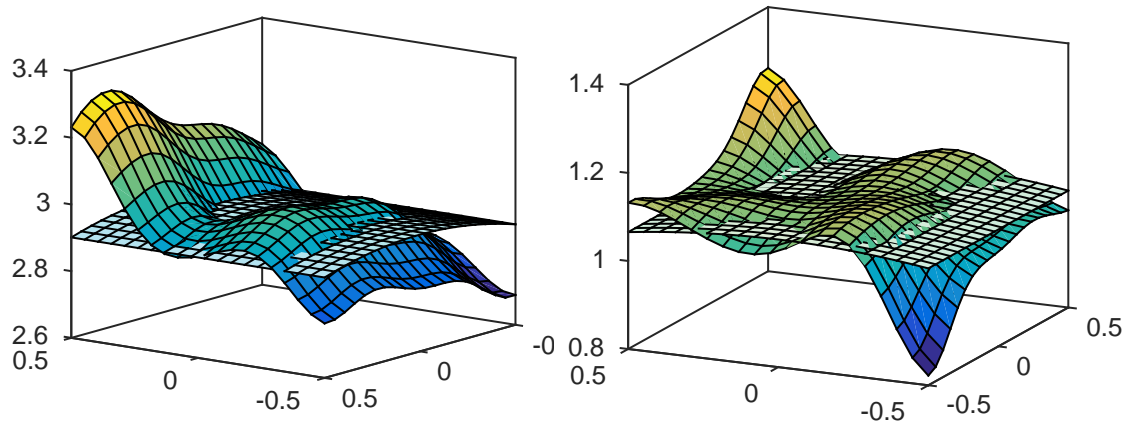
Όπως μπορούμε να δούμε από τον Πίνακα 4.11, η μέθοδος καταφέρνει να προσεγγίσει ικανοποιητικά τις συναρτήσεις $\varphi_i(x)$ κατά μέση τιμή, αφού το μέσο σφάλμα προσέγγισης είναι πολύ μικρότερο από τις τιμές της συνάρτησης εντός του Ω_x . Ωστόσο, εξετάζοντας το μέγιστο σφάλμα $\max(\|\tilde{\varphi}_i\|)$ συμπεράνουμε πως θα υπάρχει μια περιοχή του Ω_x όπου η προσέγγιση δεν είναι και τόσο καλή.

Σχετικά με την ποιότητα των προσεγγίσεων $\hat{\gamma}_{ij}(x)$, βλέπουμε πως η μέση τιμή των σφαλμάτων $\tilde{\gamma}_{ij}(x)$ είναι αρκετά μικρότερη από τις τιμές την συνάρτησης που αναγνωρίζεται, για κάθε περίπτωση. Παρόλα αυτά, συγκρίνοντας το εύρος τιμών των συναρτήσεων με την αντίστοιχη μέση τιμή κάθε σφάλματος, διαπιστώνουμε πως η προσέγγιση αποτυγχάνει σημαντικά στην αναγνώριση των μεταβολών κάθε συνάρτησης. Με άλλα λόγια, το σχήμα είναι ικανό να αναγνωρίσει ικανοποιητικά την μέση τιμή των $\gamma_{ij}(x)$ αλλά αδυνατεί να αναγνωρίσει την δομή της. Τέλος βλέπουμε πως και εδώ, η μέγιστη τιμή των σφαλμάτων αναγνώρισης είναι αρκετά μεγάλη.

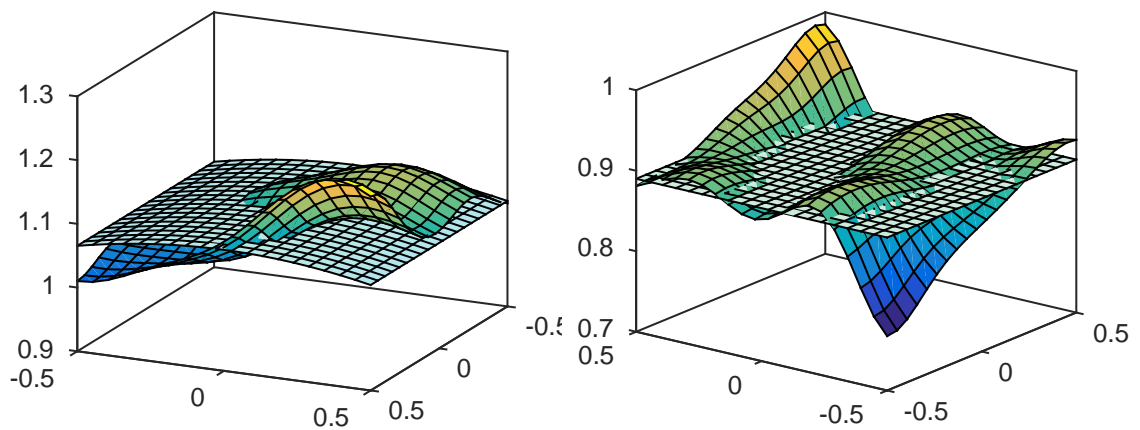
Καθώς οι $\gamma_{ij}(x)$ είναι συναρτήσεις δυο μεταβλητών, είναι εφικτή η γραφική τους αναπαράσταση. Έτσι, στα Σχήματα 4.14 και 4.15, συγκρίνουμε τις προσεγγίσεις $\hat{\gamma}_{ij}(x)$ με τις αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις. Από τα Σχήματα αυτά επαληθεύονται οι παρατηρήσεις που βασίζονται στις στατιστικές μετρικές του Πίνακα 4.11. Επίσης παρατηρείται και εδώ πως οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων αναγνώρισης βρίσκονται στο σύνολο του Ω_x .

4.3 Παρατηρήσεις

Τέλος, σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται κάποιες παρατηρήσεις με βάση τα πειράματα που παρουσιάστηκαν στις Ενότητες 4.1 και 4.2.



Σχήμα 4.14: Σύγκριση των συναρτήσεων $\gamma_{11}(x)$ (αριστερά) και $\gamma_{12}(x)$ (δεξιά) με τις προσεγγίσεις τους $\hat{\gamma}_{11}(x)$ και $\hat{\gamma}_{12}(x)$ αντίστοιχα. Με γκρι (transparent) απεικονίζονται οι πραγματικές συναρτήσεις ενώ οι χρωματισμένες επιφάνειες είναι οι προσεγγίσεις αυτών.



Σχήμα 4.15: Σύγκριση των συναρτήσεων $\gamma_{21}(x)$ (αριστερά) και $\gamma_{22}(x)$ (δεξιά) με τις προσεγγίσεις τους $\hat{\gamma}_{21}(x)$ και $\hat{\gamma}_{22}(x)$ αντίστοιχα. Με γκρι (transparent) απεικονίζονται οι πραγματικές συναρτήσεις ενώ οι χρωματισμένες επιφάνειες είναι οι προσεγγίσεις αυτών.

Παρατήρηση 7. Ο ρυθμός και η τελική ζώνη σύγκλισης των παραμετρικών σφαλμάτων $\tilde{W}(t)$ είναι άγνωστος και εξαρτάται από τις τιμές τόσο των κερδών β_i όσο και από τα άγνωστα επίπεδα διέγερσης a_1 και a_2 . Η βελτιστοποίηση αυτών των χαρακτηριστικών της διαδικασίας εκμάθησης μέσω ρύθμισης των παραμέτρων του σχήματος αναγνώρισης είναι μια δύσκολη διαδικασία καθώς δεν είναι ξεκάθαρο με ποιόν τρόπο επιδρά η κάθε παράμετρος στα άγνωστα επίπεδα διέγερσης.

Για παράδειγμα, στο Πείραμα 4.2.4 φαίνεται πως τα βάρη δεν συγκλίνουν στις ακριβείς τιμές τους αλλά σε μια περιοχή αυτών, και ως αποτέλεσμα οι προσεγγίσεις των συναρτήσεων $\gamma_{ij}(x)$ καταφέρνουν να προσεγγίσουν τις άγνωστες συναρτήσεις μόνο κατά μέση τιμή. Καθώς το πλάτος της περιοχής σύγκλισης εξαρτάται από τα άγνωστα επίπεδα διέγερσης, είναι δύσκολη η εύρεση παραμέτρων που θα επιφέρουν καλύτερα αποτελέσματα.

Παρατήρηση 8. Το σχήμα αναγνώρισης είναι αρκετά απαιτητικό από υπολογιστικής άποψης. Το γεγονός αυτό, γίνεται εμφανές εάν θεωρήσει κανείς την διαδικασία αναγνώρισης ενός συστήματος ΠΕΠΕ.

Για παράδειγμα, στο Πείραμα 4.2.4 προσεγγίζουμε τις άγνωστες συναρτήσεις με RBF δίκτυα τα οποία έχουν κέντρα σε ένα πλέγμα, όπου σε κάθε διάσταση τοποθετούνται 5 κέντρα. Ως αποτέλεσμα, για την αναγνώριση κάθε συνάρτησης $\varphi(x)$ χρειαζόμαστε 5^4 βάρη, τα οποία υπολογίζονται κατά την διάρκεια του πειράματος μέσω αριθμητικής επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων που ορίζουν οι νόμοι προσαρμογής. Μόνο για το διάνυσμα Φ , απαιτείται η επίλυση 1250 τέτοιων διαφορικών εξισώσεων. Επιπλέον, το μέγεθος της περιόδου είναι αρκετά μεγάλο, καθώς σε κάθε περίοδο πρέπει να επισκεφθούμε κάθε ένα από αυτά τα 650 κέντρα.

Αν ωστόσο προσπαθούσαμε να προσεγγίσουμε με την ίδια στρατηγική έναν βραχίονα τριών βαθμών ελευθερίας το οποίο είναι ένα σύστημα έξι καταστάσεων, τότε μόνο για την αναγνώριση του διανύσματος $\Phi(x)$ θα απαιτούταν $3 \cdot 5^6 = 46875$ βάρη. Επίσης η περίοδος θα μεγάλωνε σε διάρκεια 25 φορές, αφού πλέον θα πρέπει να επισκεφθούμε ακόμα περισσότερα κέντρα.

Όπως είναι προφανές από τον παραπάνω συνειρμό, η εφαρμογή του σχήματος ελέγχου σε συστήματα μεγάλων διαστάσεων απαιτεί τεράστιους υπολογιστικούς πόρους.

Παρατήρηση 9. Ενώ το σχήμα αναγνώρισης συνήθως παράγει αρκετά καλές εκτιμήσεις στο εσωτερικό του Ω_x , οι προσεγγίσεις των συναρτήσεων φαίνεται να χάνουν ακρίβεια στο σύνορο του Ω_x . Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται τόσο στο Πείραμα 4.2.2 (ταλαντωτής *Van Der Pol*) όσο και στο Πείραμα 4.2.4 (ρομποτικός βραχίονας). Σχετικά με αυτό το πρόβλημα παρουσιάζεται μια λύση στο Κεφάλαιο 5.

Παρατήρηση 10. Από το Πείραμα 4.2.2 φαίνεται πως το σχήμα αναγνώρισης είναι ικανό να αναγνωρίσει συστήματα που δεν εμπίπτουν στην κατηγορία *Euler Lagrange*. Ωστόσο, καθώς το πείραμα αυτό αποτελεί μεμονωμένο παράδειγμα, δεν μπορούμε να προχωρήσουμε στο συμπέρασμα ότι το σχήμα είναι ικανό να αναγνωρίσει κάθε τέτοιο σύστημα, συνεπώς απαιτείται επιπλέον έρευνα για την συγκεκριμένη υπόθεση.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα και Βελτιώσεις

Σε αυτό το τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποια συμπεράσματα και παρατηρήσεις πάνω στα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 4. Το Κεφάλαιο αυτό αποτελείται από ένα πείραμα στο οποίο βγαίνουν κάποια συμπεράσματα σχετικά με την Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης στην μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3, καθώς και από μια μέθοδο αξιολόγησης για πραγματικά συστήματα.

5.1 Βελτιώσεις στο Σχήμα

Σε αυτή την ενότητα, σκοπός είναι η μελέτη ενός συστήματος παρόμοιας δομής με αυτή του πειράματος αναγνώρισης του ρομποτικού βραχίονα που παρουσιάζεται στην Ενότητα 4.2.4. Όπως είδαμε, στο σύστημα αυτό παρουσιάζεται το πρόβλημα ότι οι διακυμάνσεις των συναρτήσεων $\gamma_{ij}(x)$ είναι πολύ μικρές, με αποτέλεσμα η εκτίμηση να αποτελεί στην ουσία προσέγγιση της μέσης τιμής, αποτυγχάνοντας να εκτιμήσει τις μεταβολές των $\gamma_{ij}(x)$.

Αρχικά παρουσιάζουμε ένα σύστημα με συναρτήσεις παρόμοιας δομής με αυτές του συστήματος 4.2.4. Το σύστημα αυτό περιγράφεται από τις εξισώσεις:

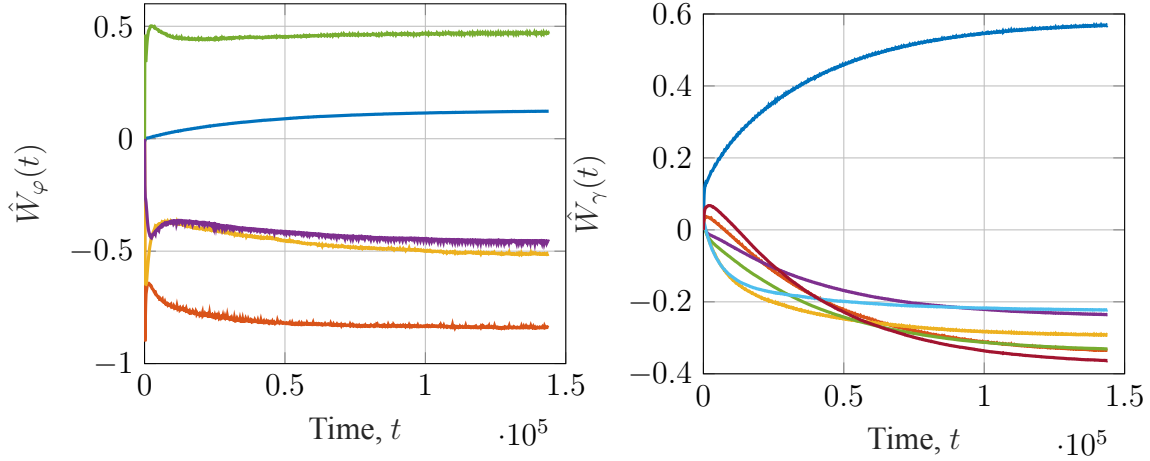
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \gamma^{-1}(x)\varphi(x) + \gamma^{-1}(x)u(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

όπου

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{\sin(x_1 + x_2)}{2} + 2.1 \sin(x_1) \\ \gamma(x) &= 0.03 \cos(x_1) + 0.075\end{aligned}$$

Ζητούμενο μας είναι η αναγνώριση των άγνωστων συναρτήσεων $\varphi(x)$ και $\gamma(x)$, στο σύνολο $\Omega = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^2$. Το πρόβλημα εδώ είναι ότι η συνάρτηση $\gamma(x)$ έχει πολύ μικρό εύρος τιμών, και είναι μια τάξη μικρότερη από την συνάρτηση $\varphi(x)$, συνεπώς και εδώ περιμένουμε να εμφανιστεί ένα παρόμοιο πρόβλημα με αυτό της Υποενότητας 4.2.4.

5.1.1 Αρχική Προσέγγιση



Σχήμα 5.1: Χρονική εξέλιξη επιλεγμένων βαρών των προσεγγίσεων $\hat{\varphi}_1(x)$ και $\hat{\gamma}(x)$

Για τον σκοπό αυτό ακολουθούμε την κλασσική μεθοδολογία της Ενότητας 3.3.2. Αρχικά, σχηματίζουμε τις προσεγγίσεις:

$$\hat{\varphi}(x, t) = \hat{W}_\varphi^T(t) Z_\varphi(x) \quad \text{και} \quad \hat{\gamma}(x, t) = \hat{W}_\gamma^T(t) Z_\gamma(x)$$

Τα κέντρα c_Φ των γκαουσιανών του διανύσματος οπισθοδρομητών Z_Φ ανήκουν στο σύνολο

$$\mathcal{C}_\Phi = \bigtimes_{i=1}^2 \left\{ -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}k, \quad k = 0, 1, \dots, 5 \right\}$$

ενώ τα κέντρα c_γ των οπισθοδρομητών Z_γ ανήκουν στο σύνολο

$$\mathcal{C}_\gamma = \left\{ -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}k, \quad k = 0, 1, \dots, 5 \right\}$$

σχηματίζοντας έτσι ένα πλέγμα που καλύπτει ομοιόμορφα τον χώρο Ω_x . Οι υπόλοιποι παράμετροι του σχήματος αναγνώρισης δίνονται στον Πίνακα 5.1.

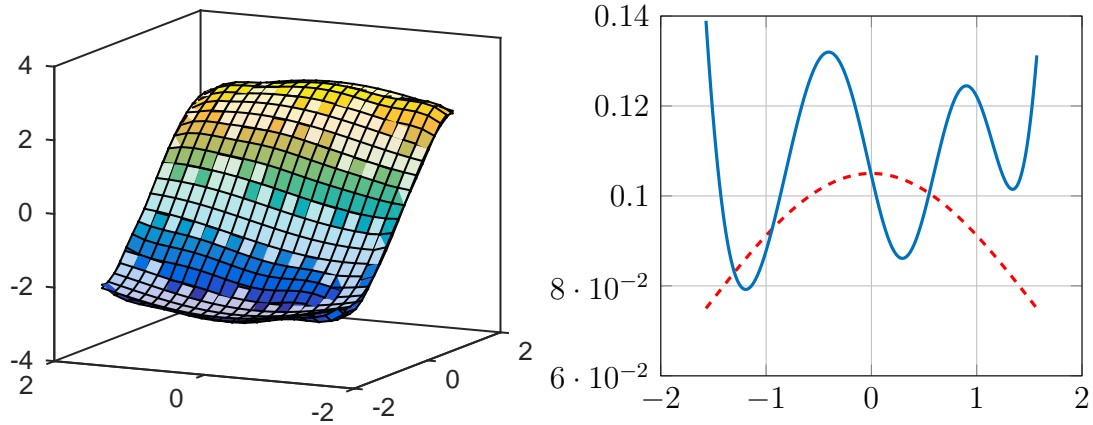
Πίνακας 5.1: Παράμετροι σχήματος αναγνώρισης

Parameter	Value
k	30
λ	1
γ_f (bias)	0.05
γ_f (gaussian)	6
γ_g (bias)	0.05
γ_g (gaussian)	0.06
ρ_0	4
ρ_∞	0.02
l	2
ΔT	2

Αποτελέσματα

Το σύστημα αναγνώρισης κλειστού βρόγχου προσομοιώθηκε για 2000 περιόδους, και στο Σχήμα 5.1 βλέπουμε την χρονική εξέλιξη των βαρών του όπου και είναι προφανές πως τα βάρη των νευρωνικών δικτύων έχουν συγκλίνει σε κάποιες σταθερές τιμές.

Στην συνέχεια, στο Σχήμα 5.2 συγκρίνουμε τις προσεγγίσεις $\hat{\varphi}(x)$ και $\hat{\gamma}(x)$ με τις πραγματικές συναρτήσεις. Όπως φαίνεται ενώ το σχήμα αναγνωρίζει επιτυχώς την $\varphi(x)$, η προσέγγιση της $\gamma(x)$ δεν είναι καθόλου καλή, δηλαδή έχουμε παρόμοια συμπεριφορά με το Πείραμα 4.2.4.



Σχήμα 5.2: Προσεγγίσεις των συναρτήσεων $\varphi(x)$ (αριστερά) και $\gamma(x)$ (δεξιά) στο παράδειγμα 5.1.1

5.1.2 Επέκταση του πλέγματος αναγνώρισης

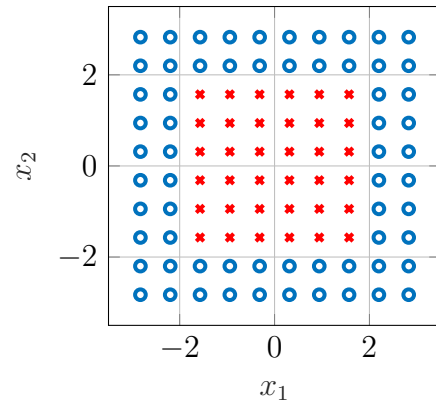
Προς την βελτίωση των παραπάνω αποτελεσμάτων, το πλέγμα επαυξάνεται προσθέτοντας γκαουσιανές εκτός του συνόλου Ω_x , σύμφωνα με την Παρατήρηση 9. Τα νέα κέντρα c_Φ και c_γ θα ανήκουν στα σύνολα:

$$C_\Phi = \bigtimes_{i=1}^2 \left\{ -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{5}k, \quad k = 0, 1, \dots, 9 \right\}$$

και

$$C_\Gamma = \left\{ -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{5}k, \quad k = 0, 1, \dots, 9 \right\}$$

δηλαδή θα προσεγγίσουμε τις άγνωστες συναρτήσεις στο χωρίο $D = \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]^2$ το οποίο είναι υπερσύνολο του Ω_x . Το νέο επαυξημένο πλέγμα φαίνεται στο Σχήμα 5.3. Τα κέρδη του νέου σχήματος αναγνώρισης επιλέγονται ίσα με αυτά του αρχικού σχήματος, και δίνονται στον Πίνακα 5.1.

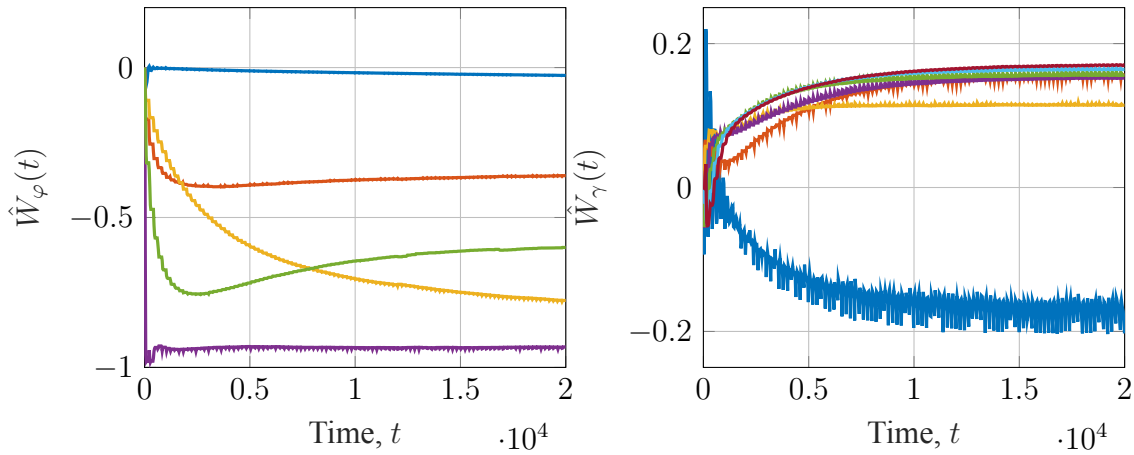


Σχήμα 5.3: Επαυξημένο πλέγμα. Τα αρχικά κέντρα συμβολίζονται με κόκκινο, ενώ τα νέα με μπλε.

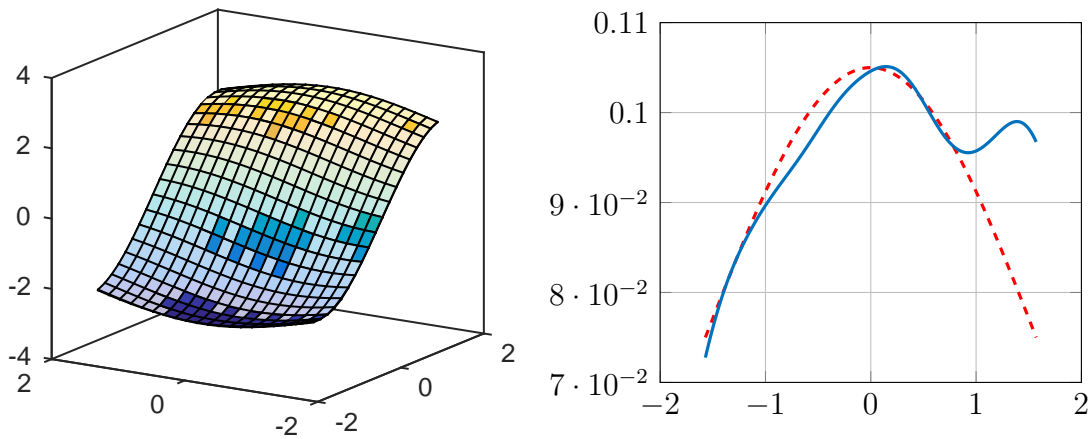
Αποτελέσματα

Το σύστημα κλειστού βρόγχου με τα επαυξημένα νευρωνικά δίκτυα RBF προσομοιώθηκε για 100 επαναλήψεις. Στο Σχήμα 5.4 δίνεται η χρονική εξέλιξη κάποιων βαρών $\hat{\varphi}(t)$ και $\hat{\gamma}(t)$, απ' όπου είναι προφανές πως τα βάρη έχουν σταθεροποιηθεί. Αρχικά σημειώνουμε πως σε αυτό το πείραμα τα βάρη σταθεροποιούνται πολύ πιο γρήγορα από το προηγούμενο πείραμα, και καθώς τα κέρδη β_φ και β_γ είναι τα ίδια, συμπεραίνουμε πως αυτό οφείλεται σε μεγαλύτερα επίπεδα διέγερσης.

Στην συνέχεια, στο Σχήμα 5.5 φαίνονται οι προσεγγίσεις των συναρτήσεων στο σύνολο Ω_x . Όπως φαίνεται λοιπόν οι τροποποιήσεις που εφαρμόσαμε πράγματι είχαν αποτελέσματα. Ενώ η προσέγγιση της $\varphi(x)$ είναι και στις δυο περιπτώσεις πολύ ικανοποιητική,



Σχήμα 5.4: Χρονική εξέλιξη επιλεγμένων βαρών των προσεγγίσεων $\hat{\varphi}(x)$ και $\hat{\gamma}(x)$ στην περίπτωση επαυξημένου πλέγματος

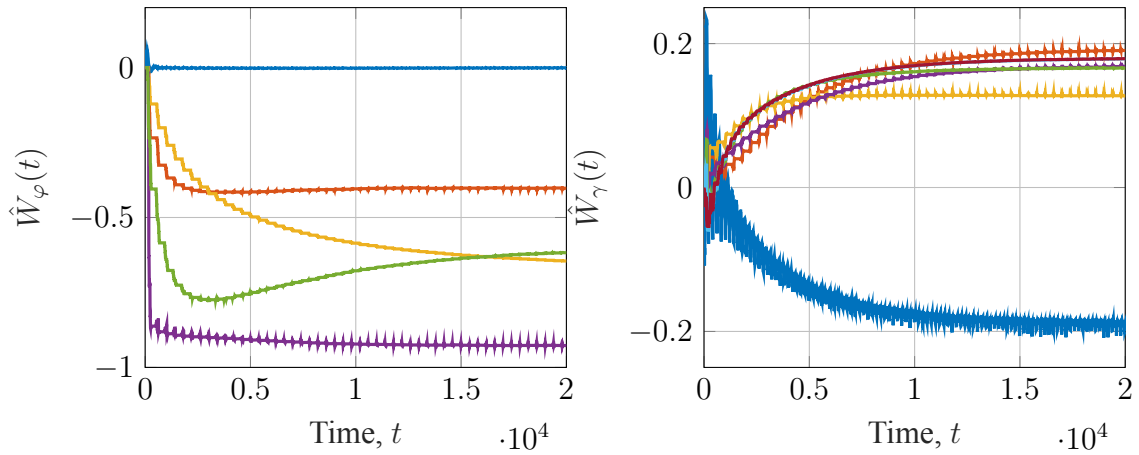


Σχήμα 5.5: Προσεγγίσεις των συναρτήσεων $\varphi(x)$ (αριστερά) και $\gamma(x)$ (δεξιά) στο παράδειγμα 5.1.2

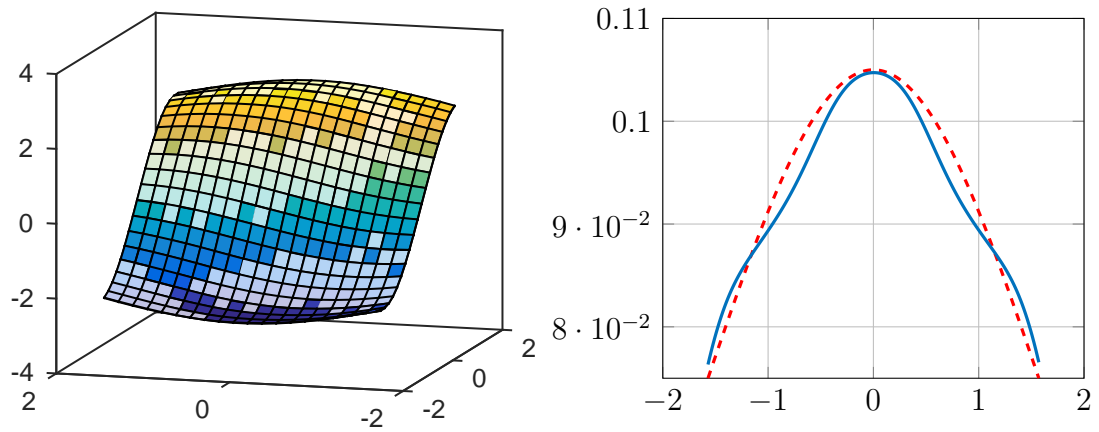
στο νέο επαυξημένο σχήμα τα αποτελέσματα αναγνώρισης της $\gamma(x)$ είναι πολύ καλύτερα. Φυσικά από το σχήμα φαίνεται πως τα αποτελέσματα για $x_1 > 1$ επιδέχονται βελτίωση, αλλά και πάλι τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν τεράστια βελτίωση σε σύγκριση με τα αποτελέσματα της Ενότητας 5.1.1.

5.1.3 Σειρά προσπέλασης κέντρων

Σε αυτό το τελευταίο πείραμα δοκιμάζουμε να τροποποιήσουμε την σειρά με την οποία η τροχιά $x(t)$ επισκέπτεται τα κέντρα του νευρωνικού δικτύου με σκοπό να εξετάσουμε τι επιπτώσεις έχει αυτό στην ποιότητα αναγνώρισης. Αρχικά σημειώνουμε πως σε όλα τα πειράματα μέχρι στιγμής, η τροχιά $x(t)$ επισκέπτεται πρώτα το κέντρο c_Φ με την μικρότερη συνιστώσα x_1 και την μικρότερη συνιστώσα x_2 . Στην συνέχεια επισκέπτεται όλα τα κέντρα με το ίδιο x_1 αλλά μεγαλύτερα x_2 κατά αύξουσα σειρά, και με αυτόν τον τρόπο επισκέπτεται όλα τα κέντρα της πρώτης στήλης. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε επόμενη στήλη, και με αυτόν τον τρόπο η τροχιά $x(t)$ επισκέπτεται



Σχήμα 5.6: Χρονική εξέλιξη επιλεγμένων βαρών των προσεγγίσεων $\hat{\varphi}(x)$ και $\hat{\gamma}(x)$ στην περίπτωση επαυξημένου πλέγματος και διαφορετικής σειράς προσπέλασης



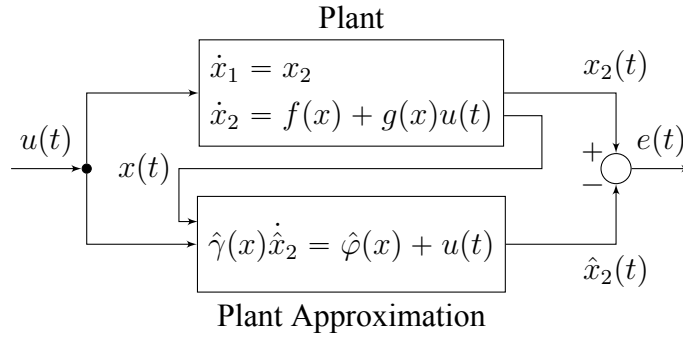
Σχήμα 5.7: Προσεγγίσεις των συναρτήσεων $\varphi(x)$ (αριστερά) και $\gamma(x)$ (δεξιά) στο παράδειγμα 5.1.3

όλα τα κέντρα του νευρωνικού δικτύου. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση ενός επίπεδου πλέγματος όπως στο Σχήμα 5.3 η τροχιά επισκέπτεται τα κέντρα από κάτω προς τα πάνω και από αριστερά προς δεξιά.

Σε αυτό το πείραμα, επαυξάνουμε την τροχιά ως εξής: Κατά την πρώτη μισή περίοδο της τροχιάς επισκεπτόμαστε όλα τα κέντρα όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, και κατά την υπόλοιπη μισή επισκεπτόμαστε όλα τα κέντρα με τον αντίθετο τρόπο, δηλαδή από πάνω προς τα κάτω και από δεξιά προς αριστερά, με αποτέλεσμα η συνολική διάρκεια της περιόδου να διπλασιάζεται. Τα κέρδη και οι υπόλοιποι παράμετροι του συστήματος παραμένουν ίδια με αυτά του Πειράματος 5.1.2. Τέλος, και σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε επαυξημένα δίκτυα RBF, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.3.

Αποτελέσματα

Το σύστημα κλειστού βρόγχου με την τροχιά αναφοράς που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο προσομοιώθηκε για 100 επαναλήψεις. Στο Σχήμα 5.6 δίνεται η



Σχήμα 5.8: Αρχιτεκτονική αξιολόγησης δευτεροβάθμιου συστήματος

χρονική εξέλιξη κάποιων βαρών $\hat{\varphi}(t)$ και $\hat{\gamma}(t)$, απ' όπου είναι προφανές πως και εδώ, 100 περίοδοι είναι αρκετές έτσι ώστε τα βάρη να σταθεροποιηθούν.

Τα αποτελέσματα των προσεγγίσεων παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.7. Όπως φαίνεται λοιπόν, σε αυτή την περίπτωση το σχήμα αναγνώρισης καταφέρνει να προσεγγίσει ικανοποιητικά και τις δυο άγνωστες συναρτήσεις $\varphi(x)$ και $\gamma(x)$ σε όλο το σύνολο αναγνώρισης Ω_x .

5.1.4 Συμπέρασμα

Το συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε από τα παραπάνω πειράματα είναι πως το πρόβλημα οφείλεται στα επίπεδα διέγερσης α_0 και α_1 . Παρόλο που και στις τρεις περιπτώσεις πειραμάτων ικανοποιείται η ΣΕΔ της Ενότητας 2.2.3, μέσω αυτών των πειραμάτων επαληθεύεται πως η ικανοποίηση της συνθήκης δεν εξασφαλίζει πως τα βάρη των νευρωνικών δικτύων θα συγκλίνουν στο βέλτιστο αποτέλεσμα, αλλά σε μια περιοχή αυτού, το πλάτος της οποίας εξαρτάται από τα επίπεδα διέγερσης. Δυστυχώς η διατύπωση της συνθήκης αυτής είναι πολύ αφηρημένη για να υποδεικνύει τι προδιαγραφές πρέπει να πληρεί μια τροχιά αναφοράς για να επιτυγχάνει υψηλά επίπεδα διέγερσης.

5.2 Αξιολόγηση Συστημάτων

Μέχρι στιγμής, σε όλα τα πειράματα του Κεφαλαίου 4 η αξιολόγηση των προσεγγίσεων που παρήγαγε το σχήμα αναγνώριση γινόταν μέσω απευθείας σύγκρισης των προσεγγίσεων με τις πραγματικές συναρτήσεις. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή στην πραγματικότητα δεν είναι εφικτή αφού οι άγνωστες συναρτήσεις δεν είναι διαθέσιμες προς μέτρηση, αλλά εκφράζονται μέσω της δυναμικής του συστήματος προς αναγνώριση.

Σε αυτή την Ενότητα παρουσιάζουμε έναν τρόπο αξιολόγησης των εκτιμήσεων, που δεν χρησιμοποιεί γνώσεις των συναρτήσεων του συστήματος αλλά βασίζεται στην δημιουργία ενός μοντέλου αυτού με βάση τις εκτιμήσεις.

Η λογική που ακολουθείται απεικονίζεται στο Σχήμα 5.8 για την αξιολόγηση ενός δευτεροβάθμιου συστήματος. Όπως φαίνεται, χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις $\hat{\varphi}(x)$ και

$\hat{\gamma}(x)$ κατασκευάζουμε την διαφορική εξίσωση:

$$\hat{\gamma}(x)\dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{\varphi}(x) + u(t), \quad x \in \Omega_x \quad (5.2)$$

, όπου x το διάνυσμα των πραγματικών καταστάσεων το οποίο είναι μετρήσιμο. Εάν οι προσεγγίσεις βρίσκονται κοντά στις πραγματικές συναρτήσεις, τότε η συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος (5.2) θα είναι πολύ παρόμοια με αυτή του πραγματικού δυναμικού συστήματος

5.2.1 Επιλογή του $u(t)$

Ένα από τα προβλήματα της παρούσας μεθοδολογίας είναι η επιλογή της εισόδου ελέγχου $u(t)$. Συγκεκριμένα το πρόβλημα οφείλεται στο γεγονός ότι μια αυθαίρετη επιλογή της εισόδου ελέγχου ενδέχεται να οδηγήσει πολύ σύντομα την τροχιά $x(t)$ εκτός του συνόλου αναγνώρισης Ω_x , έξω από το οποίο δεν έχει νόημα η διαδικασία αξιολόγησης του συστήματος. Παρακάτω παρουσιάζουμε δυο πιθανές επιλογές της εισόδου ελέγχου οι οποίες αντιμετωπίζουν το πρόβλημα που προαναφέρθηκε

Γραμμικοποίηση του συστήματος μέσω ανάδρασης

Η πρώτη λύση είναι η επιλογή του $u(t)$ έτσι ώστε να γραμμικοποιεί το πραγματικό σύστημα. Μια τέτοια είσοδος είναι η

$$u(t) = \frac{-f(x) + \nu(t)}{g(x)} \quad (5.3)$$

όπου $\nu(t)$ μια νέα είσοδος αναφοράς η οποία σχεδιάζεται με βάση την επιθυμητή τροχιά του γραμμικοποιημένου συστήματος. Αντικαθιστώντας την εξίσωση 5.3 στο μοντέλο αναφοράς 5.2 προκύπτει:

$$\hat{\gamma}(x)\dot{\hat{x}}_2(t) = -\tilde{\varphi}(x) + \gamma(x)\nu(t) \quad (5.4)$$

ενώ με αντικατάσταση της ίδιας εισόδου στο πραγματικό σύστημα έχουμε:

$$\dot{x}_2(t) = \nu(t) \quad (5.5)$$

Τέλος, ορίζοντας το σφάλμα παρακολούθησης των δυο καταστάσεων ως $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$, μπορούμε να γράψουμε την δυναμική του σφάλματος ως:

$$\hat{\gamma}(x)\dot{\tilde{x}} = -\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\gamma}(x)\nu(t) \quad (5.6)$$

Καθώς γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες του πραγματικού συστήματος, και είμαστε σε θέση να επιλέξουμε τις αρχικές συνθήκες του συστήματος αναφοράς, μπορούμε να επιλέξουμε το $\hat{x}_2(0) = x_2(0)$ επιτυγχάνοντας έτσι $\tilde{x}_2(0) = 0$. Όπως είναι προφανές, εάν τα παραμετρικά σφάλματα $\tilde{\varphi}(x)$ και $\tilde{\gamma}(x)$ είναι ίσα με το 0, τότε το σφάλμα \tilde{x} θα παραμείνει ίσο με το 0 καθ' όλη την διάρκεια της διαδικασίας αξιολόγησης.

Παρατήρηση 11. Παρατηρώντας την εξίσωση 5.3, φαίνεται πως και εδώ κάνουμε χρήση των άγνωστων συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$. Η λογική πίσω από αυτή την επιλογή είναι ότι ένα πραγματικό σύστημα το οποίο μας είναι άγνωστο, συνήθως συνοδεύεται από κάποιον ελεγκτή ο οποίος μπορεί να το οδηγήσει σε επιθυμητές τροχιές. Ωστόσο, καθώς τα συστήματα που μελετάμε είναι ακαδημαϊκά και δεν υπάρχει κάποιος τέτοιος μηχανισμός, επιλέγουμε καταχρηστικά την είσοδο ελέγχου της εξίσωσης 5.3. Σε μια πραγματική εφαρμογή θα χρησιμοποιούσαμε το σήμα ελέγχου του ελεγκτή που συνοδεύει το σύστημα.

Χρήση των εκτιμήσεων για γραμμικοποίηση

Η δεύτερη εναλλακτική είναι η επιλογή μιας εισόδου ελέγχου που να χρησιμοποιεί τις εκτιμήσεις $\hat{\varphi}(x)$ και $\hat{\gamma}(x)$ για να γραμμικοποιήσει το άγνωστο σύστημα. Κατά συνέπεια, επιλέγουμε την είσοδο ελέγχου ως:

$$u(t) = -\hat{\varphi}(x) + \hat{\gamma}(x)\nu(t) \quad (5.7)$$

Ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία με πριν, αντικαθιστώντας την εξίσωση 5.7 στο μοντελοποιημένο και στο πραγματικό σύστημα καταλήγουμε την διαφορική εξίσωση του σφάλματος \tilde{x} :

$$\dot{\tilde{x}} = g(x) (\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\gamma}(x)\nu(t)) \quad (5.8)$$

η οποία επίσης προσφέρει την ιδιότητα να αυξάνεται ανάλογα με την ποσότητα των παραμετρικών σφαλμάτων $\tilde{\varphi}(x)$ και $\tilde{\gamma}(x)$. Συγκρίνοντας τις εξισώσεις 5.6 και 5.8 παρατηρούμε ότι η δομή τους είναι πολύ παρόμοια, συνεπώς ακόμα και στην περίπτωση που δεν μπορούμε να διατηρεί την τροχιά του πραγματικού συστήματος εντός του Ω_x , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εναλλακτική είσοδο αναφοράς που παρουσιάζεται σε αυτή την υποενότητα. Εάν η τροχιά $x(t)$ οδηγηθεί σε σύντομο χρονικό διάστημα εκτός του Ω_x τότε μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα πως η αναγνώριση δεν είναι επαρκής.

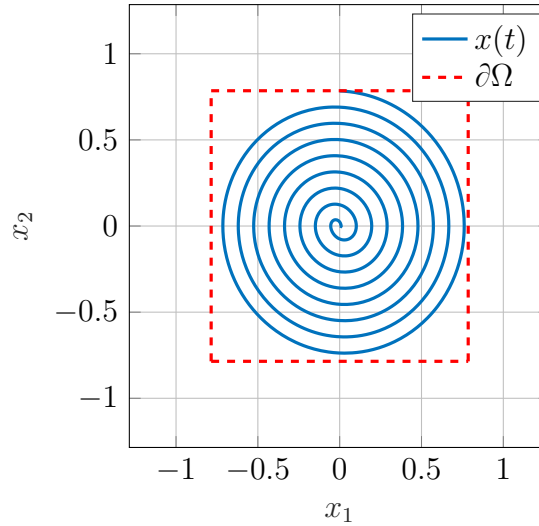
5.2.2 Αποτελέσματα Αξιολόγησης

Στην παρούσα ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε το σύστημα αναγνώρισης που παρουσιάστηκε για να αξιολογήσουμε τα αποτελέσματα αναγνώρισης πραγματικών συστημάτων που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4. Σε όλα τα πειράματα θα χρησιμοποιήσουμε την αρχιτεκτονική αξιολόγησης του σχήματος 5.8 και θα επιλέξουμε την είσοδο ελέγχου της εξίσωσης (5.3), δηλαδή της εισόδου που γραμμικοποιεί το πραγματικό σύστημα.

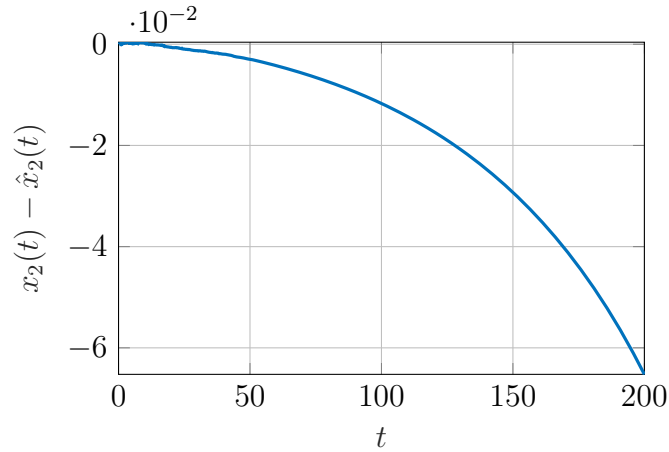
Φαινόμενο Wing Rock

Για την αξιολόγηση των προσεγγίσεων $\hat{\varphi}(x)$ και $\hat{\gamma}(x)$ πρέπει αρχικά να σχεδιάσουμε την είσοδο του γραμμικοποιημένου συστήματος $\nu(t)$ έτσι ώστε να εξερευνεί επαρκώς το σύνολο αναγνώρισης Ω_x . Στο συγκεκριμένο πρόβλημα το Ω_x επιλέγεται ως το σύνολο $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Επιλέγουμε την είσοδο ελέγχου $\nu(t)$ ως

$$\nu(t) = -(b/a)^2 x_1(t) - K \frac{x_2(t)}{\|x(t)\|} \quad (5.9)$$



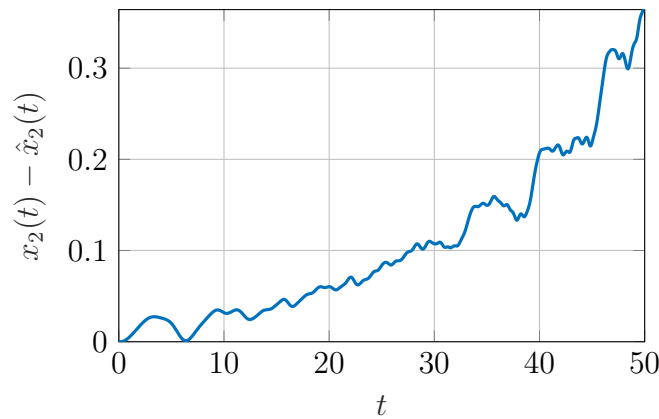
Σχήμα 5.9: Ελλειψοειδής τροχιά του πραγματικού συστήματος για $\nu(t)$ της εξίσωσης (5.9)



Σχήμα 5.10: Σφάλμα παρακολούθησης κατά την αξιολόγηση του συστήματος *Wing Rock*

όπου b, a θετικές σταθερές. Η σταθερά K μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν. Με κατάλληλη επιλογή των σταθερών αυτών, καθώς και των αρχικών συνθηκών του πραγματικού συστήματος, η επιλογή της εξίσωσης (5.9) παράγει μια ελλειψοειδή τροχιά η οποία παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.9. Για θετικές τιμές του K το βήμα της έλλειψης είναι αρνητικό, δηλαδή η ακτίνα μειώνεται συναρτήσει του χρόνου, ενώ για αρνητικές τιμές το βήμα είναι θετικό. Τέλος, για επιλογή του $K = 0$ η τροχιά του συστήματος αναφοράς θα είναι μια κλειστή έλλειψη. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε επιλέξει $a = b = 1$ και $K = 0.03$, αλλά η ίδια είσοδος αναφοράς μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να καλύψει οποιοδήποτε τετραγωνικό σύνολο αναγνώρισης.

Στο Σχήμα 5.10 φαίνεται η εξέλιξη του σφάλματος $\tilde{x}(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ για χρόνο προσομοίωσης ίσο με 200 δευτερόλεπτα. Όπως φαίνεται από το σχήμα λοιπόν, χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις $\hat{\varphi}(x)$ και $\hat{\gamma}(x)$ μπορούμε να παρακολουθήσουμε την κατάσταση $x_2(t)$ του πραγματικού συστήματος με μέγιστο σφάλμα ίσο με 0.06, γεγονός που αποδεικνύει ότι πράγματι το σχήμα αναγνώρισης αναγνωρίζει ικανοποιητικά το



Σχήμα 5.11: Σφάλμα παρακολούθησης κατά την αξιολόγηση του συστήματος *Van Der Pol*

άγνωστο σύστημα.

Ταλαντωτής *Van Der Pol*

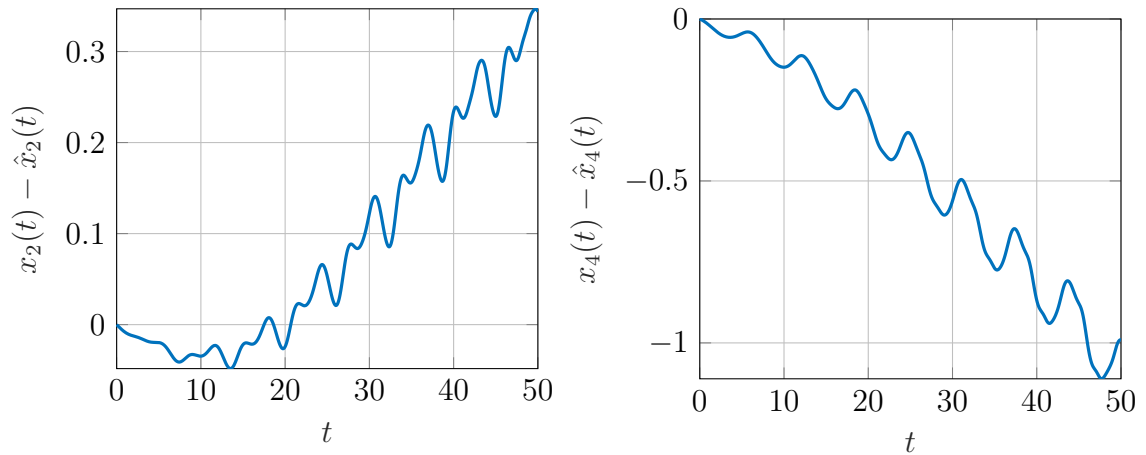
Το επόμενο σύστημα που θα αξιολογήσουμε με αυτή την μέθοδο είναι ο ταλαντωτής *Van Der Pol*. Η διαδικασία αξιολόγησης είναι παρόμοια με αυτή του φαινομένου *Wing Rock*. Η διαφορά εδώ είναι ότι η τροχιά αξιολόγησης ξεκινά κοντά στην αρχή των αξόνων, και η ακτίνα της ελλειψοειδούς τροχιάς αυξάνεται, με σκοπό να εξερευνήσει όλο το σύνολο $\Omega_x = [-2, 2] \times [-2, 2]$ στο οποίο πραγματοποιείται η αναγνώρισης της δυναμικής του άγνωστου συστήματος.

Η διαδικασία αξιολόγησης διαρκεί 50 δευτερόλεπτα. Στο Σχήμα 5.11 φαίνεται το σφάλμα παρακολούθησης $\tilde{x}(t)$ συναρτήσει του χρόνου κατά την διάρκεια της αξιολόγησης. Όπως μπορούμε να δούμε σε αυτή την περίπτωση το σφάλμα αυξάνεται πολύ πιο γρήγορα σε σύγκριση με την προηγούμενη περίπτωση, και μετά από 50 δευτερόλεπτα έχουμε και την μέγιστη τιμή του που είναι ίση με 0.36425. Η διαδικασία αξιολόγησης σε αυτή την περίπτωση μας δείχνει πως παρόλο που τα αποτελέσματα αναγνώρισης που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 4 φαίνονται ικανοποιητικά, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο που προέκυψε για να προβλέψουμε την συμπεριφορά του συστήματος σε μεγάλο χρονικό ορίζοντα.

Ρομποτικός Βραχίονας

Τέλος, σχεδιάζουμε ένα πείραμα αξιολόγησης των αποτελεσμάτων αναγνώρισης για το σύστημα ρομποτικού βραχίονα της Παραγράφου 4.2.4. Παρόλο που το συγκεκριμένο σύστημα είναι πολλαπλών εισόδων, πολλαπλών εξόδων, η μεθοδολογία που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ακριβώς η ίδια. Αρχικά επιλέγουμε την είσοδο του συστήματος $u(t)$ ως:

$$u(t) = (C(q, \dot{q}), \dot{q} + g(q)) + M(q)\nu(t) \quad (5.10)$$



Σχήμα 5.12: Σφάλματα παρακολούθησης της τροχιάς του πραγματικού συστήματος κατά την αξιολόγηση της μοντελοποίησης του ρομποτικού βραχίονα.

όπου $\nu(t) = [v_1(t) \ v_2(t)]^T$ το διάνυσμα των εισόδων του γραμμικοποιημένου συστήματος. Με αυτή την επιλογή εισόδου, το σύστημα έρχεται στην γραμμική μορφή:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \nu_1(t) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \nu_2(t)\end{aligned}\tag{5.11}$$

όπου $x = [q_1 \ \dot{q}_1 \ q_2 \ \dot{q}_2]^T$ το διάνυσμα καταστάσεων του συστήματος. Στην εξίσωση (5.11), έχουμε διαχωρίσει πλήρως την δυναμική των καταστάσεων της πρώτης άρθρωσης με της δεύτερης, συνεπώς οι είσοδοι αναφοράς $\nu_1(t)$ και $\nu_2(t)$ επιλέγονται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.9), έτσι ώστε η τροχιά κάθε υποσυστήματος να είναι μια έλλειψη με αύξουσα ακτίνα, που καλύπτει σταδιακά όλο τον χώρο ενδιαφέροντος $\Omega_x = [-0.5, 0.5]^4$.

Το μοντελοποιημένο σύστημα αποτελείται από τις εξισώσεις:

$$\hat{\Gamma}(x) \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{bmatrix} = \hat{\Phi}(x) + u(t)\tag{5.12}$$

όπου $\hat{\Gamma}(x)$ και $\hat{\Phi}(x)$ οι εκτιμήσεις των άγνωστων συναρτήσεων.

Στο Σχήμα 5.12 παρουσιάζονται τα σφάλματα $\tilde{x}(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ και $\tilde{x}(t) = x_4(t) - \hat{x}_4(t)$ για χρόνο προσομοίωσης ίσο με 50 δευτερόλεπτα. Όπως είναι εμφανές, και σε αυτή την περίπτωση το σφάλμα παρακολούθησης της τροχιάς μετά από 50 δευτερόλεπτα είναι αρκετά μεγάλο, γεγονός που υποδεικνύει πως ενώ οι προσεγγίσεις είναι αρκετά στις πραγματικές τιμές, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 4, το μοντέλο που προέκυψε από την αναγνώριση αδυνατεί να προβλέψει την συμπεριφορά του συστήματος για μεγάλα χρονικά διαστήματα.

Κεφάλαιο 6

Βιβλιογραφία

- [1] AJ Kurdila, Francis J Narcowich, and Joseph D Ward. Persistency of excitation in identification using radial basis function approximants. *SIAM journal on control and optimization*, 33(2):625–642, 1995.
- [2] Jooyoung Park and Irwin W Sandberg. Universal approximation using radial-basis-function networks. *Neural computation*, 3(2):246–257, 1991.
- [3] Charalampos P Bechlioulis and George A Rovithakis. Robust adaptive control of feedback linearizable mimo nonlinear systems with prescribed performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(9):2090–2099, 2008.
- [4] Michael Green and John B Moore. Persistence of excitation in linear systems. In *American Control Conference, 1985*, pages 412–417. IEEE, 1985.
- [5] Hiroyuki Miyamoto, Mitsuo Kawato, Tohru Setoyama, and Ryoji Suzuki. Feedback-error-learning neural network for trajectory control of a robotic manipulator. *Neural networks*, 1(3):251–265, 1988.
- [6] Robert M Sanner and Jean-Jacques E Slotine. Stable recursive identification using radial basis function networks. In *American Control Conference, 1992*, pages 1829–1833. IEEE, 1992.
- [7] Songwu Lu and Tamer Basar. Robust nonlinear system identification using neural-network models. *IEEE Transactions on Neural networks*, 9(3):407–429, 1998.
- [8] Chengzhi Yuan and Cong Wang. Persistency of excitation and performance of deterministic learning. *Systems & Control Letters*, 60(12):952–959, 2011.
- [9] Tongjia Zheng and Cong Wang. Relationship between persistent excitation levels and rbf network structures, with application to performance analysis of deterministic learning. *IEEE transactions on cybernetics*, 47(10):3380–3392, 2017.
- [10] Cong Wang, David J Hill, and Guanrong Chen. Deterministic learning of nonlinear dynamical systems. In *Intelligent Control. 2003 IEEE International Symposium on*, pages 87–92. IEEE, 2003.
- [11] Cong Wang and David J Hill. Learning from direct adaptive neural control. In *Control Conference, 2004. 5th Asian*, volume 1, pages 674–681. IEEE, 2004.

- [12] Cong Wang and David J Hill. Learning from neural control. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17(1):130–146, 2006.
- [13] Tengfei Liu and Cong Wang. Learning from neural control of general brunovsky systems. In *Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control, 2006 IEEE*, pages 2366–2371. IEEE, 2006.
- [14] Tengfei Liu and Cong Wang. Learning from neural control of strict-feedback systems. In *Control and Automation, 2007. ICCA 2007. IEEE International Conference on*, pages 636–641. IEEE, 2007.
- [15] Tengfei Liu, Cong Wang, and David J Hill. Learning from neural control of nonlinear systems in normal form. *Systems & Control Letters*, 58(9):633–638, 2009.
- [16] Cong Wang, Min Wang, Tengfei Liu, and David J Hill. Learning from iss-modular adaptive nn control of nonlinear strict-feedback systems. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 23(10):1539–1550, 2012.
- [17] Min Wang and Cong Wang. Learning from adaptive neural control for a class of pure-feedback systems. In *Control Automation Robotics & Vision (ICARCV), 2012 12th International Conference on*, pages 76–81. IEEE, 2012.
- [18] Min Wang and Cong Wang. Identification and learning control of strict-feedback systems using adaptive neural dynamic surface control. In *Control and Decision Conference (CCDC), 2013 25th Chinese*, pages 25–30. IEEE, 2013.
- [19] Shi-Lu Dai, Cong Wang, and Min Wang. Dynamic learning from adaptive neural network control of a class of nonaffine nonlinear systems. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 25(1):111–123, 2014.
- [20] Min Wang, Cong Wang, and Xiaoping Liu. Dynamic learning from adaptive neural control with predefined performance for a class of nonlinear systems. *Information Sciences*, 279:874–888, 2014.
- [21] Min Wang and Cong Wang. Learning from adaptive neural dynamic surface control of strict-feedback systems. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 26(6):1247–1259, 2015.
- [22] Min Wang, Cong Wang, Peng Shi, and Xiaoping Liu. Dynamic learning from neural control for strict-feedback systems with guaranteed predefined performance. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 27(12):2564–2576, 2016.
- [23] Mohammad Khazaei, Hossein Sadat-Hosseini, Ali Marjaninejad, and Sabalan Daneshvar. A radial basis function neural network approximator with fast terminal sliding mode-based learning algorithm and its application in control systems. In *Electrical Engineering (ICEE), 2017 Iranian Conference on*, pages 812–816. IEEE, 2017.
- [24] Feifei Yang and Cong Wang. Pattern-based nn control of a class of uncertain nonlinear systems. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 2017.

- [25] Min Wang and Anle Yang. Dynamic learning from adaptive neural control of robot manipulators with prescribed performance. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 47(8):2244–2255, 2017.
- [26] Shi-Lu Dai, Min Wang, and Cong Wang. Neural learning control of marine surface vessels with guaranteed transient tracking performance. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(3):1717–1727, 2016.
- [27] Danfeng CHEN Cong WANG Xunde DONG. Modeling of nonlinear dynamical systems based on deterministic learning and structural stability. *Science*, 9:008, 2016.
- [28] Wikipedia contributors. Radial basis function — Wikipedia, the free encyclopedia, 2018. [Online; accessed 17-April-2018].
- [29] Charalampos P Bechlioulis and George A Rovithakis. Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems. *Automatica*, 45(2):532–538, 2009.
- [30] Charalampos P Bechlioulis and George A Rovithakis. A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems. *Automatica*, 50(4):1217–1226, 2014.
- [31] Eduardo D. Sontag. *Mathematical Control Theory*, volume 6. Springer Berlin Heidelberg, 2nd edition, 1998.
- [32] Charalampos P Bechlioulis, Achilles Theodorakopoulos, and George A Rovithakis. Output feedback stabilization with prescribed performance for uncertain nonlinear systems in canonical form. In *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*, pages 5084–5089. IEEE, 2013.
- [33] Lavretsky Eugene, Wise Kevin, and D Howe. Robust and adaptive control with aerospace applications, 2013.