

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης  
Πολυτεχνική Σχολή  
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών  
Τομέας Ηλεκτρονικής και Υπολογιστών



Διπλωματική Εργασία

# **Αναγνώριση μη-γραμμικών συστημάτων μέσω ελέγχου προδιαγεγραμμένης απόκρισης**

*Ζήσης Κωνσταντίνος*

Επιβλέπων Καθηγητής  
Ροβιθάκης Γεώργιος

Θεσσαλονίκη, Μάιος 2018

*todo*

# Σύνοψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της αναγνώρισης μη-γραμμικών χρονοαμετάβλητων δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου, σε ένα υποσύνολο του χώρου λειτουργίας τους. Η δυσκολία του εν λόγω προβλήματος οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο πρόβλημα της ικανοποίησης της συνθήκης της *επιμένουσας διέγερσης*. Ενώ πολλές δημοσιευμένες εργασίες έχουν ασχοληθεί με το πρόβλημα της αναγνώρισης μη-γραμμικών συστημάτων, ελάχιστες είναι αυτές που ασχολούνται με την ικανοποίηση της συνθήκης της *επιμένουσας διέγερσης* εκ των προτέρων, το οποίο αποτελεί τον στόχο της παρούσας μελέτης.

Βάση αυτής της εργασίας αποτελεί η έρευνα των *Kurdila, Narcowich και Ward* [1], η οποία παρουσιάζει κάποιες απαραίτητες προϋποθέσεις για την ικανοποίηση της συνθήκης *επιμένουσας διέγερσης* για την κλάση των μαθηματικών μοντέλων *RBF*.

Απαραίτητα δομικά στοιχεία αυτής της εργασίας είναι αφενός τα *τεχνητά νευρωνικά δίκτυα RBF*, τα οποία λόγω των προσεγγιστικών τους ιδιοτήτων [2] αποτελούν ένα άριστο μαθηματικό μοντέλο για το πρόβλημα της τοπικής αναγνώρισης συναρτήσεων, και αφετέρου ο *έλεγχος προδιαγεγραμμένης απόκρισης* [3] ο οποίος μας επιτρέπει την παρακολούθηση μιας επιθυμητής τροχιάς ακόμα και υπό την πλήρη έλλειψη γνώσεων για το ελεγχόμενο σύστημα.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω εργαλεία, παρουσιάζουμε ένα σχήμα αναγνώρισης το οποίο εξασφαλίζει την ικανοποίηση της συνθήκης της *επιμένουσας διέγερσης* και κατά συνέπεια την επιτυχή αναγνώριση της δυναμικής του άγνωστου συστήματος σε μια προκαθορισμένη περιοχή του χώρου λειτουργίας του δοθέντος συστήματος.

Τέλος, τόσο με την χρήση μαθηματικών επιχειρημάτων όπως οι συναρτήσεις *Lyapunov* αλλά όσο και με την χρήση προσομοιώσεων, αποδεικνύεται η ορθότητα της προαναφερθείσας μεθοδολογίας.

# Abstract

The objective of this thesis is the problem of nonlinear, time invariant, continuous time system identification in a certain area of interest. The difficulty of the aftermentioned problem lies in the satisfaction of the *Persistency of Excitation* condition. While there are many studies on nonlinear system identification, only a few consider the a priori satisfaction of the *Persistency of Excitation* condition, which is the main goal of this study.

The results of *Kurdila*, *Narcowich* and *Ward* in [1] provide the necessary conditions for the satisfaction of the *Persistency of Excitation* when using *Radial Basis Function (RBF) Approximants*. This work provides the fundamental theoretical background for the development of the proposed identification scheme.

The basic components of this study consist of the *RBF Neural Networks*, which are an ideal mathematical model for universal nonlinear function approximation due to their approximation capabilities [2], as well as the *Prescribed Performance Control* methodology [3] which enables trajectory tracking even under complete lack of knowledge on the controlled system.

Based on the after mentioned results, we present an identification scheme capable of *a priori* guaranteeing the satisfaction of the *Persistency of Excitation* condition, thus achieving identification of the underlying nonlinear dynamics of the given system in a predefined area of interest.

Finally, using mathematical arguments such as *Lyapunov* stability theory as well as computer simulations of real world systems, we provide satisfactory results to demonstrate the effectiveness of the proposed scheme.

# Ευχαριστίες

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Εισαγωγικές Έννοιες . . . . .	1
1.1.1	Μαθηματικά Μοντέλα . . . . .	1
1.1.2	Εκτίμηση Παραμέτρων . . . . .	3
1.2	Εφαρμογές της Αναγνώρισης Συστημάτων . . . . .	3
1.3	Ιστορική Αναδρομή . . . . .	4
1.3.1	Αρχικές Προσπάθειες . . . . .	5
1.3.2	Επιμένουσα Διέγερση για Μη-Γραμμικά Συστήματα . . . . .	5
1.3.3	Πρόσφατη Βιβλιογραφία . . . . .	6
1.4	Δομή της Διπλωματικής Εργασίας . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Μαθηματικά Εργαλεία</b>	<b>8</b>
2.1	Νευρωνικά Δίκτυα RBF . . . . .	8
2.1.1	Αρχιτεκτονική . . . . .	9
2.1.2	Προσεγγιστικές Ιδιότητες . . . . .	11
2.2	Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης . . . . .	12
2.2.1	Παράδειγμα 1: Μη ικανοποίηση της Σ.Ε.Δ . . . . .	13
2.2.2	Παράδειγμα 2: Σ.Ε.Δ και ποιότητα εκτίμησης . . . . .	16
2.2.3	ΣΕΔ για RBF νευρωνικά δίκτυα . . . . .	18
2.3	Έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης . . . . .	18
2.3.1	Ορισμός του προβλήματος . . . . .	19
2.3.2	Μετασχηματισμός σε πρόβλημα σταθεροποίησης . . . . .	21
2.4	Σύστημα Αναφοράς . . . . .	23
2.4.1	Μαθηματική Ανάλυση . . . . .	23
2.4.2	Μορφή κλειστού βρόγχου . . . . .	25
2.4.3	Παραδείγματα χρήσης . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Σχήμα Αναγνώρισης</b>	<b>27</b>
3.1	Ορισμός του Προβλήματος . . . . .	27
3.1.1	Δομή του συστήματος . . . . .	27
3.1.2	Υποθέσεις . . . . .	28
3.1.3	Διατύπωση του προβλήματος αναγνώρισης . . . . .	28
3.2	Υποσυστήματα . . . . .	29
3.2.1	Προσέγγιση με Νευρωνικά Δίκτυα . . . . .	29
3.2.2	Σύστημα Αναφοράς . . . . .	31
3.2.3	Έλεγχος του συστήματος . . . . .	32
3.3	Μαθηματική Ανάλυση . . . . .	34
3.3.1	Πρόβλημα παρακολούθησης τροχιάς . . . . .	34

3.3.2	Παραμετροποίηση του Συστήματος Αναφοράς . . . . .	39
3.3.3	Επιμένουσα Διέγερση . . . . .	39
3.4	Παρατηρήσεις . . . . .	40
<b>4</b>	<b>(τίτλος κεφαλαίου 2)</b>	<b>41</b>
4.1	(τίτλος ενότητας 2.1) . . . . .	41
4.1.1	(τίτλος υποενότητας 2.1.1) . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>42</b>

## Κατάλογος σχημάτων

2.1	Αρχιτεκτονική Νευρωνικού Δικτύου RBF . . . . .	9
2.2	Γκαουσιανή συνάρτηση ενεργοποίησης. Το κέντρο $c$ είναι το σημείο στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει την μέγιστη τιμή, ενώ η διασπορά $\sigma$ καθορίζει τον ρυθμό που η συνάρτηση μειώνεται όσο το $x$ απομακρύνεται από το $c$ . . . . .	10
2.3	Προσέγγιση της $f(x) = 1 + x$ από ένα απλό RBF νευρωνικό δίκτυο. .	11
2.4	Προσέγγιση με πυκνότερο δίκτυο . . . . .	12
2.5	Προσέγγιση της $\sqrt{x}$ από ράμπες . . . . .	13
2.6	Γεωμετρικός τύπος του $\Phi(x)$ στο $\Omega$ . . . . .	14
2.7	. . . . .	17
2.8	Προσέγγιση της $f(x)$ του Παραδείγματος 2. . . . .	17
2.9	Μαθηματική περιγραφή της Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης . . . . .	20
2.10	Συνάρτηση Μετασχηματισμού . . . . .	22
2.11	Τροχιές αναφοράς που διέρχονται από τα επιθυμητά κέντρα $c$ . . . . .	26



# **Κατάλογος πινάκων**

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Από την πρώτη της εμφάνισης του πάνω στη γη, ο άνθρωπος κυριαρχείται από μια εναγώνια προσπάθεια κατάκτησης γνώσεων. Ορίζοντας ως σύστημα κάθε αντικείμενο ή ομάδα αντικειμένων τις ιδιότητες των οποίων θέλουμε να μελετήσουμε, με τον όρο *αναγνώριση συστημάτων* αναφερόμαστε στην διαδικασία εξαγωγής ενός μαθηματικού μοντέλου του πραγματικού συστήματος με βάση πειραματικά δεδομένα.

Το πρόβλημα της αναγνώρισης συστημάτων απασχολεί την επιστημονική κοινότητα για πάνω από μισό αιώνα. Το βασικό κίνητρο είναι πως ένα "καλό" μοντέλο του πραγματικού συστήματος είναι απαραίτητο για μια πληθώρα εφαρμογών. Έτσι λοιπόν ο σχεδιασμός κατάλληλων πειραμάτων, η επιλογή μαθηματικών μοντέλων καθώς και η ανάπτυξη αλγορίθμων εκτίμησης παραμέτρων αποτελούν μέχρι και σήμερα πεδίο διαρκούς έρευνας.

### 1.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των βασικών εννοιών της θεωρίας *Αναγνώρισης Συστημάτων*. Με αυτό τον τρόπο ελπίζουμε αφενός να γίνει πλήρως κατανοητός ο σκοπός της παρούσης εργασίας και αφετέρου να αποσαφηνισθούν οι διαφορές με άλλες κλασσικές μεθόδους αναγνώρισης συστημάτων.

#### 1.1.1 Μαθηματικά Μοντέλα

Όπως είπαμε, το αποτέλεσμα της αναγνώρισης συστημάτων στα πλαίσια που την μελετάμε ονομάζεται *μοντέλο*. Υπάρχουν πολλές κατηγορίες μοντέλων όπως τα λεκτικά, μαθηματικά, φυσικά και άλλα, ωστόσο στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα εργαστούμε με τα μαθηματικά μοντέλα συστημάτων.

Στην περίπτωση μας λοιπόν, ένα μοντέλο είναι μια μαθηματική σχέση μεταξύ μεταβλητών εισόδου και εξόδου που περιέχει ελεύθερες παραμέτρους. Παραδείγματα μαθηματικών μοντέλων αποτελούν οι συναρτήσεις μεταφοράς με μεταβλητά μηδενικά και πόλους, οι εξισώσεις κατάστασης με άγνωστους πίνακες καταστάσεων καθώς και οι παραμετροποιημένες μη-γραμμικές συναρτήσεις.

Για παράδειγμα, η παρακάτω διαφορική εξίσωση αποτελεί ένα απλό μαθηματικό μοντέλο:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t)$$

όπου οι μεταβλητές  $a$  και  $b$  είναι οι ελεύθεροι παράμετροι του μοντέλου. Η πολυπλοκότητα του επιλεγμένου μοντέλου θα πρέπει να εξυπηρετεί της απαιτήσεις της εκάστοτε εφαρμογής αναγνώρισης.

Λόγω της πληθώρας και της ιδιαιτερότητας των συστημάτων, έχουν προταθεί διάφορα μαθηματικά μοντέλα με χαρακτηριστικά που εξαρτώνται από τις ιδιότητες του προς μελέτη συστήματος. Παρακάτω αναφέρουμε κάποιες βασικές υποκατηγορίες μαθηματικών μοντέλων.

- **Ντετερμινιστικά - Στοχαστικά.** Ένα μοντέλο ονομάζεται ντετερμινιστικό, αν περιγράφεται από μια πλήρως προσδιορισμένη σχέση μεταξύ των μεταβλητών του. Αντιθέτως θα λέγεται στοχαστικό, αν εκφράζεται μέσω πιθανοθεωρίας.
- **Στατικά - Δυναμικά.** Εάν η σχέση (μοντέλο) που συνδέει τις μεταβλητές ενός συστήματος δεν εξαρτάται από παρελθοντικές τιμές των μεταβλητών θα λέμε ότι το σύστημα, άρα και το μοντέλο, είναι στατικό. Στην αντίθετη περίπτωση θα λέγεται δυναμικό. Ένα παράδειγμα στατικού συστήματος είναι αυτό που περιγράφεται από αλγεβρικές εξισώσεις, ενώ συνήθως τα δυναμικά συστήματα - μοντέλα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών.
- **Συνεχούς - Διακριτού Χρόνου.** Η ιδιότητα αυτή ορίζει τον τρόπο με τον οποίο η μεταβλητή του χρόνου επιδρά στο μοντέλο. Διακριτού χρόνου ονομάζονται τα μοντέλα τα οποία εκφράζουν την σχέση που συνδέει τις μεταβλητές του συστήματος σε διακριτές χρονικές στιγμές. Εν αντιθέσει, τα συστήματα στα οποία ο χρόνος είναι συνεχής μεταβλητή ονομάζονται συστήματα συνεχούς χρόνου. Τα μοντέλα διακριτού χρόνου περιγράφονται συνήθως από εξισώσεις διαφορών ενώ τα συστήματα συνεχούς χρόνου από διαφορικές εξισώσεις.
- **Χρονομεταβλητά - Χρονοαμετάβλητα.** Χρονομεταβλητά ονομάζονται τα συστήματα (και τα μοντέλα συστημάτων) στα οποία οι εξισώσεις που περιγράφουν την λειτουργία του συστήματος έχουν άμεση εξάρτηση από τον χρόνο. Κατά συνέπεια, σε αυτά τα συστήματα είναι πιθανό η ίδια είσοδος σε διαφορετικές χρονικές στιγμές να οδηγήσει σε διαφορετική απόκριση του συστήματος. Έν αντιθέσει, χρονοαμετάβλητα είναι τα συστήματα στα οποία η εξάρτηση με τον χρόνο εκφράζεται μόνο έμμεσα μέσω των εσωτερικών καταστάσεων ή της συνάρτησης εισόδου του συστήματος.

Τα συστήματα που θα μελετήσουμε σε αυτή την εργασία περιγράφονται από μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις όπου οι μη-γραμμικές συναρτήσεις που διέπουν την λειτουργία τους εξαρτώνται μόνο από τις καταστάσεις και την είσοδο ελέγχου. Με βάση την παραπάνω κατηγοριοποίηση λοιπόν, τα συστήματα (και τα αντίστοιχα μοντέλα) που μελετάμε είναι μη-γραμμικά, χρονοαμετάβλητα δυναμικά συστήματα συνεχούς χρόνου.

### 1.1.2 Εκτίμηση Παραμέτρων

Στην αναγνώριση συστημάτων, αφού επιλέξουμε ένα μαθηματικό μοντέλο με την ικανότητα να περιγράψει επαρκώς την λειτουργία του συστήματος, το επόμενο στάδιο είναι ο προσδιορισμός των ελεύθερων του παραμέτρων. Η διαδικασία αυτή στην βιβλιογραφία ονομάζεται *εκτίμηση παραμέτρων* (parameter estimation).

Σε αυτό το στάδιο, είναι απαραίτητος ο σχεδιασμός ενός πειράματος με σκοπό την συλλογή δεδομένων για το σύστημα που μελετάται. Στην συνέχεια, τα δεδομένα χρησιμοποιούνται από κάποιον αλγόριθμο με σκοπό τον προσδιορισμό των ελεύθερων παραμέτρων του μοντέλου που έχει επιλεχθεί. Η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου εκτίμησης παραμέτρων είναι άμεση συνάρτηση των δεδομένων που θα χρησιμοποιηθούν, συνεπώς απαιτείται προσοχή κατά τον σχεδιασμό του πειράματος συλλογής δεδομένων.

Διακρίνονται δύο μεγάλες οικογένειες αλγορίθμων εκτίμησης παραμέτρων:

- **Offline:** Οι *offline* αλγόριθμοι απαιτούν την εκ των προτέρων συλλογή δεδομένων για το διαθέσιμο σύστημα. Στην συνέχεια τα δεδομένα αυτά επεξεργάζονται από κάποιον αλγόριθμο εκτίμησης παραμέτρων με σκοπό την προσαρμογή ενός υποψηφίου μοντέλου του συστήματος. Το μεγάλο πλεονέκτημα των *offline* αλγορίθμων είναι το γεγονός ότι δεν υπάρχει φραγμός ως προς την υπολογιστική τους πολυπλοκότητα, συνεπώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν σύνθετοι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης που καθιστούν εφικτή την προσαρμογή ακόμα και πολύ σύνθετων μοντέλων όπως τα *πολυεπίπεδα νευρωνικά δίκτυα* (Deep Neural Networks). Ένα κλασσικό παράδειγμα τέτοιου αλγορίθμου είναι η *Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων*.
- **Online:** Αντίθετα με τους *offline* αλγορίθμους οι *online* αλγόριθμοι πραγματοποιούν εκτίμηση παραμέτρων σε πραγματικό χρόνο χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που συλλέγονται κατά την διάρκεια λειτουργίας του πραγματικού συστήματος. Το γεγονός αυτό επιβάλλει σε αυτούς τους αλγορίθμους να είναι υπολογιστικά απλοί, καθώς οι υπολογισμοί δεν μπορούν να διαρκούν περισσότερο από τον κύκλο λειτουργίας του συστήματος.

Ωστόσο, το πλεονέκτημα που προσφέρουν είναι ότι το μοντέλο είναι διαθέσιμο κατά την διάρκεια λειτουργίας του συστήματος, ιδιότητα που τους καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμους σε εφαρμογές όπως ο *προσαρμοστικός έλεγχος* (adaptive control) και η *διάγνωση βλαβών* (fault detection). Ένας κλασσικός *online* αλγόριθμος εκτίμησης παραμέτρων είναι η *Αναδρομική Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων*.

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας η μέθοδος εκτίμησης που θα αναπτυχθεί πρόκειται για μια *online* μέθοδο.

## 1.2 Εφαρμογές της Αναγνώρισης Συστημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρουμε ενδεικτικά κάποιες από τις τυπικές εφαρμογές της Αναγνώρισης Συστημάτων.

- **Πρόβλεψη.** Η ιδέα είναι ότι αν καταλήξουμε σε μια πολύ καλή μαθηματική περιγραφή του συστήματος, τότε μπορούμε να το επιλύσουμε για μελλοντικές χρο-

νικές στιγμές, προβλέποντας με τον τρόπο αυτό την απόκριση του πραγματικού συστήματος σε κάποιο βάθος χρόνου που ονομάζεται χρονικός ορίζοντας (time horizon). Εδώ αξίζει να σημειωθεί πως η συγκεκριμένη εφαρμογή απαιτεί μοντέλα πολύ υψηλής ακρίβειας όσο ο χρονικός ορίζοντας μεγαλώνει.

- **Έλεγχος Συστημάτων.** Παρόλο που στην βιβλιογραφία υπάρχουν ελεγκτές που μπορούν να ελέγχουν συστήματα ακόμα και υπό την έλλειψη γνώσης του μοντέλου τους, η γνώση μιας μαθηματικής περιγραφής του συστήματος επιτρέπει την σχεδίαση πολύ πιο αποτελεσματικών ελεγκτών. Τα μοντέλα που απαιτούνται για τέτοιες εφαρμογές συνήθως είναι πιο απλά έτσι ώστε να είναι εύκολη η χρήση τους στον βρόγχο ελέγχου.
- **Εκτίμηση Καταστάσεων.** Υπάρχουν περιπτώσεις στην πράξη όπου δεν είναι διαθέσιμες προς μέτρηση όλες οι καταστάσεις ενός συστήματος, είτε λόγω κόστους, είτε λόγω έλλειψης αξιόπιστης μεθόδου μέτρησης τους. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η ύπαρξη ενός μοντέλου του συστήματος μπορεί να οδηγήσει στην έμμεση μέτρηση ή διαφορετικά στην εκτίμηση των καταστάσεων. Η ποιότητα της εκτίμησης είναι άμεση συνάρτηση της ποιότητας του μοντέλου.
- **Προσομοίωση.** Είναι η αριθμητική επίλυση του μοντέλου. Χρησιμοποιείται σε κάθε πρόβλημα σχεδίασης ως μέσο εκτίμησης της απόδοσης του αναπτυσσόμενου συστήματος, στην εκπαίδευση των χειριστών του συστήματος, αλλά και στην υποβοήθηση του ελέγχου καλής λειτουργίας και στην λήψη αποφάσεων.
- **Βελτιστοποίηση.** Όλα τα μαθηματικά εργαλεία που εγγυώνται την βέλτιστη λειτουργία ενός συστήματος στηρίζονται στην ύπαρξη ενός μοντέλου. Επειδή η λύση που προσδιορίζεται είναι κάθε φορά βέλτιστη για το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος, και όχι το ίδιο το σύστημα, είναι προφανές πως και η εγκυρότητα της λύσης για το πραγματικό σύστημα είναι ανάλογη της ποιότητας του μοντέλου του.
- **Διάγνωση Βλαβών.** Η κεντρική ιδέα της χρήσης αναλυτικών μοντέλων στην διάγνωση βλαβών είναι η εξής: Κατασκευάζουμε ένα μοντέλο ώστε να περιγράφει το σύστημα στην κατάσταση φυσιολογικής λειτουργίας του. Ομοίως κατασκευάζουμε μοντέλα για κάθε πιθανή βλάβη που μπορεί να υποστεί το σύστημα. Συγκρίνοντας τις εξόδους των μοντέλων με αυτή του πραγματικού συστήματος κατά την διάρκεια λειτουργίας του, μπορούμε να αποφανθούμε εάν πάσχει από κάποια από τις μοντελοποιημένες βλάβες.

## 1.3 Ιστορική Αναδρομή

Το πρόβλημα της *online* αναγνώρισης συστημάτων είναι ένα θέμα το οποίο έχει μελετηθεί εκτεταμένα στην βιβλιογραφία του Αυτομάτου Ελέγχου. Οι αρχικές προσπάθειες έγιναν πάνω στα γραμμικά συστήματα, και η συνήθης προσέγγιση ήταν διέγερση του εκάστοτε συστήματος από μια σειρά δοκιμαστικών εισόδων, καταγραφή της απόκρισης του συστήματος και στην συνέχεια προσαρμογή μοντέλων με χρήση διάφορων αλγορίθμων που είχαν αναπτυχθεί. Παρόλο που αρκετές τέτοιες προσπάθειες πέτυχαν κάποια αποτελέσματα, το πρόβλημα αυτής της μεθοδολογίας είναι ότι δεν διεγείρει το σύστημα

με κάποιον συστηματικό τρόπο, με αποτέλεσμα σε πολλές περιπτώσεις να μην αναδεικνύεται ολόκληρη η δυναμική του συστήματος.

Περαιτέρω έρευνες μελέτησαν το πρόβλημα της επαρκούς διέγερσης συστημάτων και απέδειξαν πως οι ιδιότητες σύγκλισης και ευρωστίας των αλγορίθμων αναγνώρισης συστημάτων και ελέγχου συνδέονται με την ικανοποίηση μιας συνθήκης που στην βιβλιογραφία ονομάζεται *Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης* [4]. Ενώ για την περίπτωση των γραμμικών συστημάτων βρέθηκε πως η συνθήκη της Επιμένουσας Διέγερσης σχετίζεται άμεσα με το συχνοτικό περιεχόμενο των σημάτων διέγερσης, στην περίπτωση της αναγνώρισης μη-γραμμικών συστημάτων δεν έχει σημειωθεί μεγάλη πρόοδος.

Παρακάτω ακολουθεί μια σύντομη ιστορική αναφορά στην πρόοδο που έχει σημειωθεί στον τομέα της αναγνώρισης των μη-γραμμικών συστημάτων, ενώ πιο λεπτομερείς περιγραφές για πολλά από τα αποτελέσματα και τις έννοιες που παρουσιάζονται θα δοθούν στα επόμενα κεφάλαια.

### 1.3.1 Αρχικές Προσπάθειες

Οι περισσότερες εργασίες που ασχολούνται με το πρόβλημα, μέχρι και σήμερα χρησιμοποιούν ως μοντέλα τα Νευρωνικά Δίκτυα που λόγω των προσεγγιστικών τους ιδιοτήτων είναι ιδανικά για προσέγγιση μη γραμμικών συναρτήσεων. Στην εργασία [5] οι συγγραφείς χρησιμοποιούν τα νευρωνικά δίκτυα για αναγνώριση και παρακολούθηση τροχιάς ενός ρομποτικού βραχίονα, μια εφαρμογή αναγνώρισης για αυτόματο έλεγχο. Το πρόβλημα εδώ είναι η άγνωστη αντίστροφη δυναμική του βραχίονα που είναι απαραίτητη για την αποσύμπλεξη των εισόδων ελέγχου. Η ιδέα αυτής της εργασίας είναι η χρήση ενός νευρωνικού δικτύου για την προσέγγιση της δυναμικής αυτής και η εκπαίδευση του μέσω της ελαχιστοποίησης των ροπών που παράγονται από έναν PID ελεγκτή κατά τον έλεγχο του συστήματος. Παρόλο που η εφαρμογή δεν απαιτεί την ακριβή εκμάθηση της άγνωστης δυναμικής, η απόδοση του σχήματος ελέγχου βελτιώθηκε σημαντικά μετά από τα πρώτα 30 λεπτά της εκμάθησης.

Άλλες σημαντικές εργασίες είναι αυτές των *Sanner* και *Slotine* [6] όπου παρουσιάστηκε ένας αναδρομικός αλγόριθμος για την αναγνώριση μη γραμμικών συστημάτων τόσο στην συνεχή όσο και στην διακριτή περίπτωση, καθώς και των *Lu* και *Basar* [7] όπου συγκρίνονται οι αρχιτεκτονικές δικτύων RBF (radial basis functions) και MFN (multilayer feedforward networks) καθώς και διάφοροι αλγόριθμοι εκμάθησης όπως η βαθμωτή κατάβαση (gradient descent), οι γενετικοί αλγόριθμοι καθώς και ο κλασσικός αλγόριθμος back-propagation. Και στις δυο αυτές εργασίες μελετώνται οι επιπτώσεις της συνθήκης της επιμένουσας διέγερσης. Στην εργασία [6] δίνεται μια συνθήκη ικανοποίησης της επιμένουσας διέγερσης εμπνευσμένη από την περίπτωση των διακριτών συστημάτων, ενώ στην εργασία [7] δείχνεται πως ανάλογα με τον αλγόριθμο και την αρχιτεκτονική αναγνώρισης που χρησιμοποιείται μπορεί η συνθήκη να έχει διαφορετικές προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται.

### 1.3.2 Επιμένουσα Διέγερση για Μη-Γραμμικά Συστήματα

Το πρόβλημα της Επιμένουσας Διέγερσης για τις αρχιτεκτονικές δικτύων RBF μελετήθηκε συστηματικά στην εργασία [1]. Συγκεκριμένα, οι *Kurdila*, *Narcowich* και *Ward*

απέδειξαν πως όταν το διάνυσμα οπισθοδρομιτών (regressor vector) αποτελείται από ακτινικές συναρτήσεις βάσης (Radial Basis Functions), τότε αρκεί η τροχιά του συστήματος να πληρεί μια συνθήκη εργοδικότητας. Με πιο απλά λόγια, αυτό θα πει πως όταν χρησιμοποιείται ένα νευρωνικό δίκτυο RBF ως το μαθηματικό μοντέλο περιγραφής του συστήματος, για να πληρείται η συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης αρκεί η τροχιά να διέρχεται απ' όλα τα κέντρα των συναρτήσεων βάσης του δικτύου με έναν περιοδικό τρόπο.

Η ακριβής επίπτωση των επιπέδων διέγερσης στην σύγκλιση ενός αλγορίθμου μελετήθηκε για πρώτη φορά το 2011 στην εργασία [8], ενώ στην εργασία [9] δόθηκαν οι μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν ποσοτικά τα επίπεδα διέγερσης  $a_1$  και  $a_2$  με την αρχιτεκτονική του εκάστοτε δικτύου RBF καθώς και τις ιδιότητες της περιοδικής τροχιάς του συστήματος κλειστού βρόγχου.

Καθώς η ικανοποίηση της ΣΕΔ είναι ένα πολύ σημαντικό κομμάτι για στην αναγνώριση συστημάτων, ένα μεγάλο κομμάτι των εργασιών που ασχολούνται με το πρόβλημα βασίστηκε στα αποτελέσματα της εργασίας [1]. Στις εργασίες [10–21] οι συγγραφείς προτείνουν αλγορίθμους αναγνώρισης διαφόρων ειδών συστημάτων όπως τα strict-feedback και pure-feedback, συστήματα σε κανονική μορφή, καθώς και περιπτώσεις συστημάτων με γνωστό κέρδος εισόδου. Όλες οι παραπάνω εργασίες είναι βασισμένες σε ένα κοινό αποτέλεσμα που είναι εμπνευσμένο από την εργασία [1], το οποίο ονομάζεται στην ξένη βιβλιογραφία *partial Peristancy of Excitation condition*. Η ιδέα είναι πως στην περίπτωση που έχω μια τροχιά με περιοδικό χαρακτήρα, μπορώ να χρησιμοποιήσω ένα νευρωνικό δίκτυο RBF με ομοιόμορφα κατανεμημένα κέντρα σε ένα σύνολο που να περιλαμβάνει την τροχιά αυτή. Παρόλο που δεν μπορώ να εξασφαλίσω την ΣΕΔ για την δυναμική του συστήματος σε ολόκληρο το σύνολο  $\Omega$ , μπορώ να εγγυηθώ μερική σύγκλιση του δικτύου για τα κέντρα που βρίσκονται κοντά στην περιοδική τροχιά, επιτυγχάνοντας έτσι τοπική αναγνώριση του άγνωστου συστήματος.

Ενώ η παραπάνω μεθοδολογία είναι βάσιμη και έχει πετύχει κάποια πολύ σημαντικά αποτελέσματα στην βιβλιογραφία, διακρίνονται τα εξής μειονεκτήματα. Αρχικά η αναγνώριση δεν λαμβάνει χώρο σε ολόκληρο το σύνολο ενδιαφέροντος, παρά μόνο γύρω από μια κλειστή τροχιά. Κατά δεύτερον, ακόμα και σε αυτή την περίπτωση, επιτυγχάνεται αναγνώριση της δυναμικής του συστήματος κλειστού βρόγχου, και κατά συνέπεια τα αποτελέσματα είναι χρήσιμα κυρίως για εφαρμογές ελέγχου και είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθούν για εφαρμογές πρόβλεψης ή προσομοίωσης.

### 1.3.3 Πρόσφατη Βιβλιογραφία

Σχετικά με τις πιο πρόσφατες εξελίξεις στον κλάδο της αναγνώρισης μη γραμμικών συστημάτων, η εργασία [22] προσπαθεί να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της ραγδαίας αύξησης υπολογιστικών απαιτήσεων στα strict feedback συστήματα μεγάλης τάξης. Μέσω ενός προτεινόμενου μετασχηματισμού, το σύστημα μετατρέπεται σε σύστημα κανονικής μορφής (normal form), και στην συνέχεια μέσω της χρήσης ενός παρατηρητή υψηλού κέρδους (High Gain Observer) καθώς και ενός ελεγκτή προδιαγεγραμμένης απόκρισης (Prescribed Performance Controller) πραγματοποιείται εκτίμηση των άγνωστων μετασχηματισμένων καταστάσεων καθώς και παρακολούθηση της επιθυμητής τροχιάς. Το αποτέλεσμα της παραπάνω προσπάθειας είναι η εκμάθηση της δυναμικής κλειστού

βρόγχου του μετασχηματισμένου συστήματος, η οποία στην συνέχεια χρησιμοποιείται για αποτελεσματικότερο έλεγχο.

Στην εργασία [23], οι συγγραφείς προτείνουν μια παραλλαγή του αλγορίθμου βαθμωτής κατάβασης (Gradient Descent) σε συνδιασμό με ένα σχήμα ελέγχου που στην βιβλιογραφία ονομάζεται fast terminal Sliding Mode Control. Τα επιτεύγματα της εν λόγω εργασίας είναι η βελτίωση του ρυθμού σύγκλισης των παραμέτρων καθώς και η μείωση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ρίζας. Η μέθοδος σχεδιάστηκε για συστήματα με μοναδιαίο κέρδος ελέγχου και τα αποτελέσματα της επιβεβαιώνονται πειραματικά χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα μια παραμετροποιημένη εκδοχή του ταλαντωτή *Duffing* (*Duffing Oscillator*) έτσι ώστε να παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά.

Στην εργασία [24] παρουσιάζεται ένα γενικότερο σχήμα ελέγχου (αλλιώς πλαίσιο ίσως), βασισμένο στην θεωρία Αναγνώρισης Προτύπων καθώς και στην Αναγνώριση Συστημάτων που μιμείται την ανθρώπινη συμπεριφορά. Πιο συγκεκριμένα, η ιδέα εδώ είναι πως χρησιμοποιώντας την θεωρία αναγνώρισης δυναμικών συστημάτων που παρουσιάστηκε στις προηγούμενες παραγράφους, μπορεί κανείς να εκπαιδεύσει νευρωνικά δίκτυα για διάφορες καταστάσεις ελέγχου, φυσιολογικές ή μη. Στην συνέχεια μέσω της αναγνώρισης προτύπων, ο ελεγκτής είναι ικανός να αναγνωρίσει σε ποια κατάσταση βρίσκεται το σύστημα, και χρησιμοποιώντας την καταχωρημένη γνώση να το ελέγξει πολύ αποδοτικά. Έτσι λοιπόν η προτεινόμενη αρχιτεκτονική μιμείται την ανθρώπινη συμπεριφορά με την έννοια πως είναι ικανή να μαθαίνει και να εκτελεί αποδοτικά σύνθετους στόχους ελέγχου, καθώς και να αναγνωρίζει την κατάσταση στην οποία βρίσκεται, όπως ο άνθρωπος.

Τέλος, εκτός από τις εξελίξεις πάνω στην θεωρητική θεμελίωση της Αναγνώρισης Συστημάτων, υπάρχουν πάρα πολλές εργασίες με εφαρμογές πάνω σε σχεδόν οποιοδήποτε κλάδο της επιστήμης και της μηχανικής. Κάποιες από τις τελευταίες περιλαμβάνουν αναγνώριση ρομποτικών βραχιόνων [25], εκμάθηση δυναμικής θαλάσσιων σκαφών με σκοπό την επίτευξη αυστηρών στόχων ελέγχου [26], και ακόμα και ποιοτική σύγκριση δυναμικών συστημάτων [27].

## 1.4 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Στο τέλος.



# Κεφάλαιο 2

## Μαθηματικά Εργαλεία

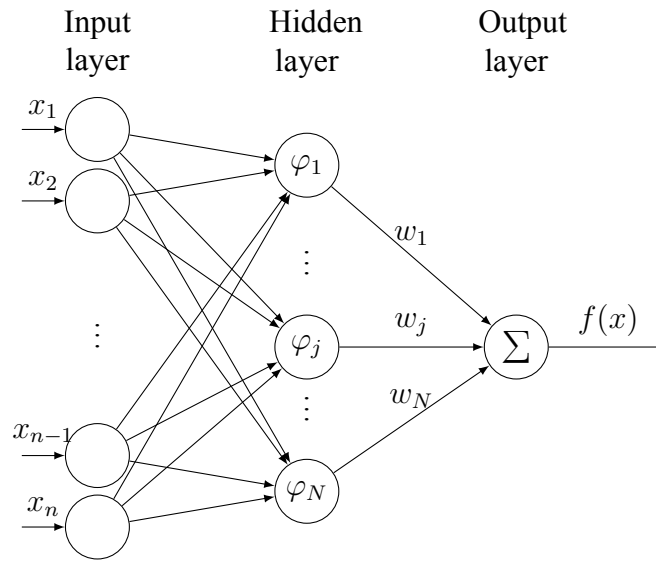
Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται εισαγωγή των μαθηματικών εργαλείων και βασικών εννοιών στα οποία βασίζεται η διπλωματική εργασία. Σκοπός του κεφαλαίου είναι η συμπίλιση του αναγνώστη με αυτές τις έννοιες, έτσι ώστε να γίνει ομαλή η μετάβαση στα αποτελέσματα της διπλωματικής εργασίας στα κεφάλαια που ακολουθούν.

Συνοπτικά, τρία είναι τα εργαλεία που θα παρουσιαστούν. Αρχικά θα γίνει μια εισαγωγή στα νευρωνικά δίκτυα RBF με έμφαση στην αρχιτεκτονική τους, στον τρόπο που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές αναγνώρισης και ελέγχου, καθώς και τις προσεγγιστικές τους ιδιότητες. Στην συνέχεια θα παρουσιαστεί ο Έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης, ο σκοπός που χρησιμοποιείται σε αυτή την εργασία καθώς και επιχειρήματα που αποδεικνύουν την εγκυρότητα του, τόσο σε μαθηματικό επίπεδο όσο και με την χρήση προσομοιώσεων. Τέλος, θα γίνει μια συνοπτική εισαγωγή στην αρχιτεκτονική του υποσυστήματος που παράγει τα σήματα αναφοράς του σχήματος, καθώς και ποιοι είναι οι λόγοι που χρησιμοποιείται αυτή η μεθοδολογία και όχι κάποια άλλη.

### 2.1 Νευρωνικά Δίκτυα RBF

Με τον όρο *Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα* (Artificial Neural Networks) αναφερόμαστε σε μια κατηγορία μαθηματικών μοντέλων τα οποία προέκυψαν την δεκαετία του 1940 και είναι εμπνευσμένα από τα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα τα οποία απαντώνται στους εγκεφάλους των ανθρώπων και των ζώων. Το κύριο χαρακτηριστικό των νευρωνικών δικτύων είναι η εγγενής ικανότητα μάθησης. Ως μάθηση μπορεί να οριστεί η σταδιακή βελτίωση της ικανότητας του δικτύου να επιλύει κάποιο πρόβλημα (π.χ. η σταδιακή προσέγγιση μίας συνάρτησης). Η μάθηση επιτυγχάνεται μέσω της εκπαίδευσης, μίας επαναληπτικής διαδικασίας σταδιακής προσαρμογής των παραμέτρων του δικτύου σε τιμές κατάλληλες ώστε να επιλύεται με επαρκή επιτυχία το προς εξέταση πρόβλημα.

Υπάρχουν πολλές κατηγορίες νευρωνικών δικτύων όπως τα Συνελικτικά Νευρωνικά Δίκτυα (Convolutional Neural Networks), τα Αναδρομικά Νευρωνικά Δίκτυα (Recurrent Neural Networks), τα Ακτινικά Νευρωνικά Δίκτυα (Radial Basis Networks), τα Πιθανοτικά Νευρωνικά Δίκτυα (Probabilistic Neural Networks) και άλλα, κάθε ένα κατάλληλο για διαφορετικό τύπο εφαρμογών. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τα ακτινικά νευρωνικά



Σχήμα 2.1: Αρχιτεκτονική Νευρωνικού Δικτύου RBF

δίκτυα τα οποία από εδώ και στο εξής θα αναφέρουμε ως *δίκτυα RBF* καθώς είναι τα καταλληλότερα για προσέγγιση συναρτήσεων.

### 2.1.1 Αρχιτεκτονική

Η αρχιτεκτονική ενός RBF νευρωνικού δικτύου παρουσιάζεται στο σχήμα (2.1). Ένα RBF νευρωνικό δίκτυο αποτελείται από τρία επίπεδα, το επίπεδο εισόδου, το ενδιάμεσο ή κρυφό επίπεδο, και το επίπεδο εξόδου.

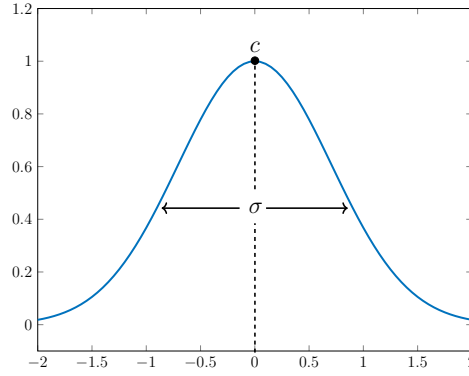
**Επίπεδο Εισόδου:** Η είσοδος ενός δικτύου RBF είναι ένα διάνυσμα  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ . Στα νευρωνικά δίκτυα αυτής της κατηγορίας το επίπεδο εισόδου είναι υπεύθυνο για την μετάδοση των επιμέρους ορισμάτων  $x_i$  σε κάθε νευρώνα και όχι για κάποια περαιτέρω προεπεξεργασία δεδομένων.

**Κρυφό Επίπεδο:** Στο κρυφό επίπεδο λαμβάνει χώρα ο υπολογισμός των συναρτήσεων  $\varphi_i(x)$  οι οποίες ονομάζονται *συναρτήσεις βάσης* ή *συναρτήσεις ενεργοποίησης*. Σε άλλους τύπους δικτύων μπορεί να υπάρχουν πάνω από ένα κρυφά επίπεδα, αλλά στα RBF δίκτυα που μελετάμε υπάρχει μόνο ένα.

Κάθε συνάρτηση βάσης είναι μια πραγματική συνάρτηση  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , και αντιστοιχεί σε ένα σημείο του χώρου  $c \in \mathbb{R}^n$ . Οι συναρτήσεις  $\varphi$  είναι ακτινικές συναρτήσεις, που σημαίνει πως το αποτέλεσμα τους εξαρτάται από την απόσταση της εισόδου  $x$  από το σημείο  $c$ , ή αλλιώς μαθηματικά:

$$\varphi(x, c) = \varphi(\|x - c\|)$$

και από εκεί προκύπτει και η ονομασία Ακτινικά Νευρωνικά Δίκτυα. Τυπικές ακτινικές συναρτήσεις είναι η γκαουσιανή, η τετραγωνική, η αντίστροφη τετραγωνική και άλλες [28], ωστόσο σε αυτήν την εργασία θα χρησιμοποιήσουμε τις γκαουσιανές συ-



Σχήμα 2.2: Γκαουσιανή συνάρτηση ενεργοποίησης. Το κέντρο  $c$  είναι το σημείο στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει την μέγιστη τιμή, ενώ η διασπορά  $\sigma$  καθορίζει τον ρυθμό που η συνάρτηση μειώνεται όσο το  $x$  απομακρύνεται από το  $c$ .

ναρτήσεις οι οποίες έχουν την μορφή

$$\varphi(x) = \exp\left(-\left\|\frac{x - c}{\sigma}\right\|^2\right)$$

Το σημείο  $c$  ονομάζεται *κέντρο* ενώ η ποσότητα  $\sigma$  ονομάζεται *διασπορά*. Στην εφαρμογή μας, και τα δυο αυτά μεγέθη επιλέγονται εκ των προτέρων και παραμένουν σταθερά κατά την διάρκεια των πειραμάτων. Ένα παράδειγμα μιας μονοδιάστατης γκαουσιανής συνάρτησης φαίνεται στο σχήμα (2.2).

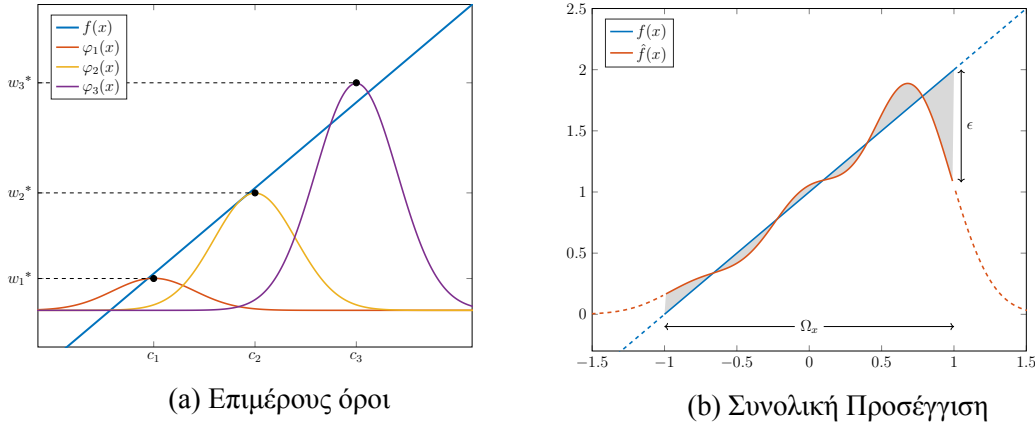
**Επίπεδο Εξόδου:** Η έξοδος ενός RBF νευρωνικού δικτύου είναι μια βαθμωτή συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Η έξοδος αυτή υπολογίζεται στο επίπεδο εξόδου ως το σταθμισμένο άθροισμα:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(x)$$

Τα βάρη  $w_i$  ονομάζονται *συναπτικά βάρη*, και αποτελούν τις ελεύθερες παραμέτρους του δικτύου. Καθώς οι συναρτήσεις βάσης  $\varphi_i(x)$  είναι προεπιλεγμένες και σταθερές, λέμε ότι το μοντέλο είναι *γραμμικά παραμετροποιημένο* που θα πει ότι η έξοδος του είναι γραμμικός συνδυασμός των ελεύθερων παραμέτρων αυτού. Τέλος, η έξοδος του μοντέλου μπορεί να γραφτεί και διανυσματικά ως:

$$f(x) = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix} = W^T \cdot \Phi(x)$$

Το διάνυσμα  $W$  ονομάζεται *διάνυσμα βαρών* ενώ το διάνυσμα  $\Phi(x)$  ονομάζεται *διάνυσμα οπισθοδρομητών* στην βιβλιογραφία της αναγνώρισης συστημάτων. Η γραμμικότητα ως προς τις ελεύθερες παραμέτρους αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα στα προβλήματα αναγνώρισης, για αυτό και τα γραμμικά παραμετροποιημένα μοντέλα προτιμούνται σε τέτοιου είδους εφαρμογές.



Σχήμα 2.3: Προσέγγιση της  $f(x) = 1 + x$  από ένα απλό RBF νευρωνικό δίκτυο.

### 2.1.2 Προσεγγιστικές Ιδιότητες

Τα ακτινικά νευρωνικά δίκτυα είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στην αναγνώριση μη γραμμικών συστημάτων. Ο λόγος είναι πως η παραπάνω δομή μπορεί να προσεγγίσει ικανοποιητικά καλά μια οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση όπως αναφέρεται στην ακόλουθη ιδιότητα [2].

**Ιδιότητα Προσέγγισης:** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  και κάθε θετική σταθερά  $\epsilon > 0$  υπάρχουν ακέραιος αριθμός  $q$ , βέλτιστα βάρη  $W^* \in \mathbb{R}^q$  και διανυσματικό πεδίο βάσης  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ , τέτοια ώστε:

$$\max_{x \in \Omega_x} \|f(x) - W^{*T} \Phi(x)\| \leq \epsilon$$

όπου  $\Omega_x$  είναι ένα συμπαγές σύνολο προσέγγισης.

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα αν το μέγεθος του διανυσματικού πεδίου βάσης  $q$  είναι αρκούντως μεγάλο και οι συναρτήσεις που περιλαμβάνει είναι κατάλληλα επιλεγμένες τότε υπάρχουν βέλτιστα βάρη  $W^*$  τέτοια ώστε η έξοδος του νευρωνικού δικτύου να προσεγγίζει οσοδήποτε καλά την άγνωστη συνάρτηση  $f(x)$  μέσα στο σύνολο  $\Omega_x$ . Ως εκ τούτου, μπορούμε να αντικαταστήσουμε, χωρίς βλάβη γενικότητας, την άγνωστη συνάρτηση  $f(x)$  με ένα RBF νευρωνικό δίκτυο ως εξής:

$$f(x) = W^{*T} \Phi(x) + \epsilon_f(x)$$

Η ποσότητα  $\epsilon_f(x)$  ονομάζεται *σφάλμα μοντελοποίησης*, και εξαρτάται από την αρχιτεκτονική του νευρωνικού δικτύου, δηλαδή το πλήθος και την διάταξη των συναρτήσεων βάσης και αντίστοιχα των κέντρων και των διασπορών του νευρωνικού δικτύου.

#### Παράδειγμα

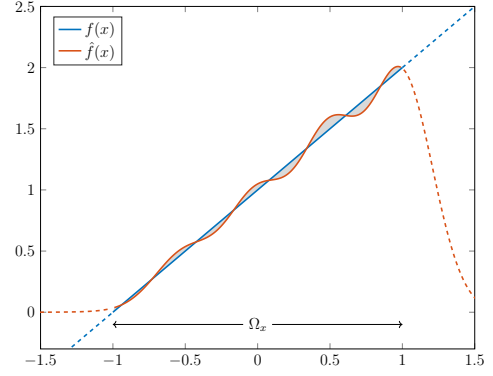
Στο παράδειγμα που ακολουθεί, θα γίνει μια επίδειξη των προσεγγιστικών ικανοτήτων ενός RBF νευρωνικού δικτύου. Για λόγους απλότητας θα προσεγγίσουμε την μονοδιάστατη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 1 + x$$

στο συμπαγές σύνολο  $\Omega_x = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ . Για την προσέγγιση θα χρησιμοποιήσουμε ένα νευρωνικό δίκτυο RBF με τρία κέντρα κατανομημένα στο  $\Omega_x$ . Τα κέντρα αυτά θα είναι τα  $c = [-0.7 \ 0.0 \ 0.7]$  και η διασπορά  $\sigma$  είναι 0.4.

Τα αποτελέσματα της προσέγγισης φαίνονται στο σχήμα (2.3). Αρχικά στο σχήμα (2.3.a) φαίνονται τα βέλτιστα βάρη για κάθε μια από τις συναρτήσεις βάσης, και το άθροισμα τους το οποίο αποτελεί την προσέγγιση  $\hat{f}(x)$  φαίνεται στο σχήμα (2.3.b).

Όπως φαίνεται λοιπόν από το σχήμα (2.3.b), το εκπαιδευμένο νευρωνικό δίκτυο καταφέρνει να προσεγγίσει ικανοποιητικά την άγνωστη συνάρτηση στην περιοχή ενδιαφέροντος  $\Omega_x$ . Το σφάλμα μοντελοποίησης  $\epsilon_f(x)$  είναι η σκιαγραφημένη περιοχή, ενώ στο σχήμα φαίνεται και το μέγιστο σφάλμα  $\epsilon$ . Καθώς αυτό το σφάλμα είναι το ελάχιστο δυνατό για την δεδομένη αρχιτεκτονική που έχουμε επιλέξει, στην περίπτωση που απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια, πρέπει να αυξήσουμε τον αριθμό των συναρτήσεων βάσης. Μια προσέγγιση με την χρήση ενός πυκνότερου δικτύου φαίνεται στο σχήμα (2.4)



Σχήμα 2.4: Προσέγγιση με πυκνότερο δίκτυο

Τέλος, είναι σημαντικό να σημειωθεί πως το θεώρημα μας εξασφαλίζει πως το σφάλμα  $\epsilon_f(x)$  φράσσεται από το  $\epsilon$  μόνο εντός του  $\Omega_x$ . Όπως φαίνεται και στο σχήμα (2.3.b), όσο απομακρυνόμαστε από το  $\Omega_x$  το σφάλμα μεγαλώνει ανεξέλεγκτα.

## 2.2 Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2.1, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μαθηματικό μοντέλο των νευρωνικών δικτύων  $RBF$  για να προσεγγίσουμε αρκούντως καλά μια συνεχή μη-γραμμική συνάρτηση σε ένα πεδίο ενδιαφέροντος  $\Omega_x$ . Πώς όμως εξασφαλίζεται ότι τα βάρη  $W$  θα συγκλίνουν στα βέλτιστα βάρη  $W^*$  κατά την εκτίμηση παραμέτρων;

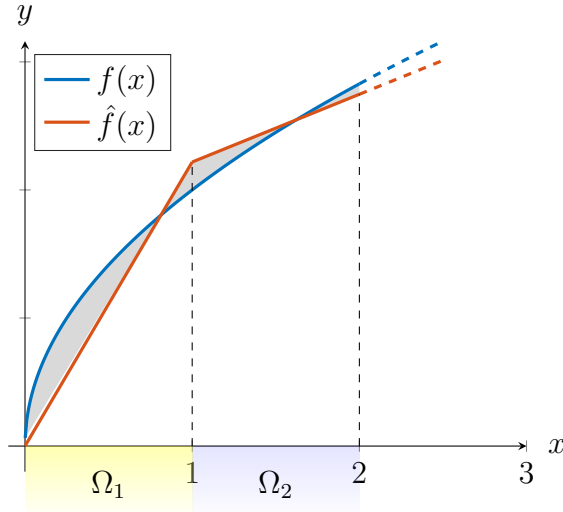
Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα δίνεται από την συνθήκη της επιμένουσας διέγερσης (Persistency of Excitation Condition), η οποία δίνεται παρακάτω:

**Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης:** Έστω  $\mu$  ένα θετικό  $\Sigma$ -πεπερασμένο μέτρο Borel στο διάστημα  $[0, \infty)$ . Μια συνεχής, ομοιόμορφα φραγμένη διανυσματική συνάρτηση  $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^q$  ικανοποιεί την συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης εάν υπάρχουν θετικές σταθερές  $a_1$ ,  $a_2$  και  $T$  έτσι ώστε:

$$a_1 \|W\|^2 \leq \int_{t_0}^{t_0+T} |W^T \Phi(\tau)|^2 d\mu(\tau) \leq a_2 \|W\|^2, \quad \forall t_0 \geq 0, \quad \forall W \in \mathbb{R}^q \quad (2.1)$$

Διαισθητικά το παραπάνω θεώρημα θα πει πως η συνθήκη επιμένουσας διέγερσης ικανοποιείται όταν η τροχιά του συστήματος εξερευνεί πλήρως τον χώρο ελεύθερων παραμέτρων. Η παρακάτω έννοια θα εξηγηθεί και στην συνέχεια με παραδείγματα.

**Παρατήρηση 1:** Στην παραπάνω εξίσωση, οι σταθερές  $a_1$  και  $a_2$  ονομάζονται επίπεδα διέγερσης, και οι τιμές τους είναι καθοριστικές για την απόδοση των αλγορίθμων αναγνώρισης (ρυθμός σύγκλισης, άνω φράγματα σφαλμάτων). Ωστόσο, το παραπάνω Θεώρημα είναι θεώρημα ύπαρξης αυτών των τιμών, και όχι υπολογισμού τους.

Σχήμα 2.5: Προσέγγιση της  $\sqrt{x}$  από ράμπες

**Παρατήρηση 2:** Ο λόγος που το διάνυσμα οπισθοδρομητών  $\Phi(x)$  εμφανίζεται στην παραπάνω εξίσωση ως συνάρτηση του χρόνου  $t$  είναι επειδή στην πράξη, το διάνυσμα καταστάσεων  $x(t)$  είναι μια καμπύλη  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Η ικανοποίηση της ΣΕΔ στις εφαρμογές *online* αναγνώρισης συστημάτων ανάγεται ακριβώς στο πρόβλημα της σχεδίασης ενός ελεγκτή που επιτυγχάνει την παρακολούθηση μιας τροχιάς η οποία διεγείρει επαρκώς την δυναμική συστήματος.

**Παρατήρηση 3:** Η ισχύς του παραπάνω θεωρήματος είναι γενική και δεν ισχύει μόνο για το μοντέλο των RBF νευρωνικών δικτύων. Εν αντιθέσει, το θεώρημα δεν θέτει κανέναν περιορισμό για την δομή του διανύσματος οπισθοδρομητών  $\text{varPhi}(\tau)$ , συνεπώς οποιαδήποτε επιλογή μοντέλου και σετ δεδομένων  $x(t)$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

**Παρατήρηση 4:** Είναι σημαντικό να τονίσουμε πως η ΣΕΔ το μόνο που εξασφαλίζει είναι ότι τα βέλτιστα βάρη για το επιλεγμένο μοντέλο μπορούν να βρεθούν. Αυτό δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι το μοντέλο αυτό είναι ικανό να προσεγγίσει επαρκώς την δυναμική του συστήματος (Παράδειγμα 2).

### 2.2.1 Παράδειγμα 1: Μη ικανοποίηση της Σ.Ε.Δ

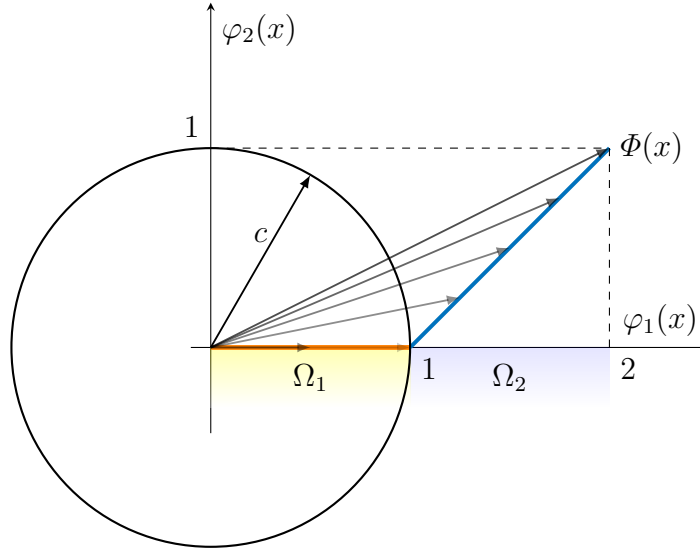
Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε την άγνωστη συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  στο κλειστό σύνολο  $\Omega_x = [0, 2]$ . Για τον σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε δυο συναρτήσεις ράμπα τοποθετημένες στο  $x = 0$  και στο  $x = 1$ . Καθώς η συνάρτηση ράμπα περιγράφεται από τον παρακάτω τύπο

$$R_i(x) = \begin{cases} x - i & , x \geq i \\ 0 & , x < i \end{cases}$$

το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε είναι το:

$$y = aR_0(x) + bR_1(x) \quad (2.2)$$

όπου  $a$  και  $b$  οι ελεύθεροι παράμετροι. Χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο, η βέλτιστη δυνατή προσέγγιση φαίνεται στο σχήμα (2.5).

Σχήμα 2.6: Γεωμετρικός τόπος του  $\Phi(x)$  στο  $\Omega$ 

### Διαισθητική Ερμηνεία

Με την φράση “η τροχιά του συστήματος εξερευνεί πλήρως τον χώρο ελεύθερων παραμέτρων” εννοούμε πως κατά την διάρκεια συλλογής δεδομένων, ανεξαρτήτως του αν ο αλγόριθμος είναι online ή offline, πρέπει η τροχιά  $x(t)$  να διεγείρει όλες τις συνιστώσες του διανύσματος του διανύσματος οπισθοδρομητών.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το διάνυσμα οπισθοδρομητών είναι το

$$\Phi(x(t)) = \begin{bmatrix} R_0(x(t)) \\ R_1(x(t)) \end{bmatrix}$$

Εάν κατά την διάρκεια εκτέλεσης ενός πειράματος αναγνώρισης, η τροχιά  $x(t)$  ανήκει εξολοκλήρου στο σύνολο  $\Omega_1$  (σχήμα ...), τότε η εκτίμηση  $\hat{f}(x)$  εκφυλίζεται σε:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0(x) \\ R_1(x) \end{bmatrix} \xrightarrow{x \in \Omega_1} \\ &= aR_0(x) \end{aligned}$$

και κατά συνέπεια η παράμετρος  $b$  δεν επηρεάζει καθόλου το αποτέλεσμα. Συνεπώς, κανένας αλγόριθμος εκτίμησης παραμέτρων δεν μπορεί να εκτιμήσει σωστά αυτή την παράμετρο με αποτέλεσμα την αποτυχία του πειράματος αναγνώρισης.

**Μαθηματική Απόδειξη**

Αρχικά, ας εξετάσουμε την σχέση (2.1). Χρησιμοποιώντας τον γεωμετρικό ορισμό του εσωτερικού γινομένου για τον όρο  $W^T \Phi(x(t))$  έχουμε

$$\begin{aligned} a_1 \|W\|^2 &\leq \int_{t_0}^{t_0+T} |W^T \Phi(\tau)|^2 d\mu(\tau) \leq a_2 \|W\|^2 \xrightarrow{a^T \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta} \\ a_1 \|W\|^2 &\leq \|W\|^2 \int_{t_0}^{t_0+T} \|\Phi(\tau)\|^2 \cos^2(\theta) d\mu(\tau) \leq a_2 \|W\|^2 \Rightarrow \\ a_1 &\leq \int_{t_0}^{t_0+T} \|\Phi(\tau)\|^2 \cos^2(\theta) d\mu(\tau) \leq a_2, \quad \text{όπου } \theta = \angle(W, \Phi(\tau)) \end{aligned}$$

Καθώς το διάνυσμα  $W \in \mathbb{R}^q$ , η γωνία  $\theta$  της παραπάνω εξίσωσης πρακτικά είναι η γωνία του διανύσματος οπισθοδρομητών  $\Phi(x(t))$  με οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα  $c$  στον χώρο  $\mathbb{R}^q$ . Συνεπώς, η παραπάνω σχέση γράφεται αλλιώς και ως:

$$a_1 \leq \int_{t_0}^{t_0+T} \|c^T \Phi(\tau)\|^2 d\mu(\tau) \leq a_2, \quad \forall t_0 \geq 0, \quad \|c\| = 1 \quad (2.3)$$

για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα του χώρου  $\mathbb{R}^q$ . Η εξίσωση (2.3) αποτελεί μια ισοδύναμη έκφραση της Συνθήκης επιμένουσας διέγερσης, η οποία σε αυτό το παράδειγμα διευκολύνει την ανάλυση.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα μας, έστω ότι έχουμε βρει έναν μηχανισμό ελέγχου που εξαναγκάζει την τροχιά  $x(t)$  του συστήματος να εκτελέσει την περιοδική κίνηση

$$x(t) = 0.5(1 + \cos(t))$$

, συνεπώς  $0 \leq x(t) \leq 1$  άρα  $x(t) \in \Omega_1$ .

Καθώς η συνάρτηση  $x(t)$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ , έτσι και η συνάρτηση  $c^T \Phi(x(t))$  της εξίσωσης (2.3), ως σύνθεση με περιοδική συνάρτηση είναι επίσης περιοδική. Έτσι, επιλέγοντας στο θεώρημα ... την σταθερά  $T$  ίση με την περίοδο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ιδιότητα των περιοδικών συναρτήσεων:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

για να απλοποιήσουμε περαιτέρω το ολοκλήρωμα της ΣΕΔ ως εξής:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |c^T \Phi(x(\tau))|^2 d\tau = \int_0^T |c^T \Phi(x(\tau))|^2 d\tau, \quad \forall t_0$$

Από την παραπάνω σχέση, είναι ευκολότερο να αντιληφθεί κανείς την φυσική σημασία της ΣΕΔ. Πρέπει, κατά μήκος μιας περιόδου το διάνυσμα  $\Phi(x(t))$  να εξερευνεί κάθε κατεύθυνση  $c$  του χώρου ελεύθερων παραμέτρων. Όσο πιο αποτελεσματική είναι η διέγερση αυτή, τότε τόσο αυξάνεται το κάτω φράγμα  $a_1$  το οποίο ονομάζεται και *επίπεδο διέγερσης*.

Για να επιδείξουμε το παραπάνω συμπέρασμα, στο σχήμα (2.6) μελετάμε την γεωμετρική συμπεριφορά του διανύσματος  $\Phi(x(t))$  συναρτήσει της τροχιάς  $x(t)$ . Καθότι



έχουμε συναρτήσεις ράμπας, το διάνυσμα γράφεται ως:

$$\Phi(x) = \begin{cases} [x, 0]^T & , x \in \Omega_1 \\ [x, x-1]^T & , x \in \Omega_2 \end{cases}$$

Όταν η τροχιά  $x(t) \in \Omega_1$ , τότε το διάνυσμα  $\Phi$  κινείται πάνω στο πορτοκαλί ευθύγραμμο τμήμα. Σε αυτή την περίπτωση όμως, είναι πάντα κάθετο στο μοναδιαίο διάνυσμα  $c = [1 \ 0]^T$ , συνεπώς το εσωτερικό γινόμενο  $c^T \Phi(x(\tau))$  είναι 0 καθ'όλη την διάρκεια της περιόδου.

Μέσω αυτού του αντιπαραδείγματος βλέπουμε πως δεν υπάρχει θετικό  $a_1$  που να ικανοποιεί την παρακάτω σχέση.

$$0 < a_1 \leq \int_0^T |c^T \Phi(x(\tau))|^2 d\tau \quad \forall c \in \{c \mid c \in \mathbb{R}^2, \|c\| = 1\}$$

συνεπώς η διανυσματική συνάρτηση  $\Phi$  δεν ικανοποιεί την συνθήκη επιμένουσας διέγερσης.

Αντιθέτως, μέσω του σχήματος (2.6) βλέπουμε πως εάν επιλέξουμε μια τροχιά  $x(t)$  που να επισκέπτεται και τα δύο σύνολα  $\Omega_1$  και  $\Omega_2$ , τότε το διάνυσμα  $\Phi$  κινείται πάνω στα δύο ευθύγραμμα τμήματα (πορτοκαλί και μπλέ). Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει διάνυσμα  $c$  του μοναδιαίου κύκλου που να είναι κάθετο σε όλη την διάρκεια της περιόδου  $T$ , συνεπώς ικανοποιείται η συνθήκη επιμένουσας διέγερσης.

Παρόλα αυτά, ακόμα και σε αυτό το απλό παράδειγμα είναι αρκετά δύσκολος ο αναλυτικός υπολογισμός του επιπέδου διέγερσης  $a_1$ .

### 2.2.2 Παράδειγμα 2: Σ.Ε.Δ και ποιότητα εκτίμησης

Σε αυτό το δεύτερο παράδειγμα το ζητούμενο μας είναι η προσέγγιση της άγνωστης συνάρτησης  $f(x) = 1 + 0.3 \cos(5x)$  με την χρήση του μοντέλου

$$y = a \cos(x) + b \sin(x)$$

Όπως και πριν, έτσι και εδώ θα υποθέσουμε πως έχουμε βρει έναν μηχανισμό ελέγχου που εξαναγκάζει την τροχιά  $x(t)$  του συστήματος να εκτελέσει την κίνηση  $x(t) = t$ . Παρόλο που η κίνηση δεν είναι περιοδική όπως πριν, αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα αφού τόσο η άγνωστη συνάρτηση  $f$ , όσο και το διάνυσμα οπισθοδρομητών  $\Phi$  είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου.

#### Μαθηματική Ανάλυση

Ας εξετάσουμε την ΣΕΔ για το συγκεκριμένο παράδειγμα χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.3). Ομοίως με πριν, το διάνυσμα οπισθοδρομητών είναι περιοδικό με περίοδο  $2\pi$ , συνεπώς ο υπολογισμός της ΣΕΔ ανάγεται στην μελέτη του ολοκληρώματος

$$\int_0^T |c^T \Phi(x(\tau))|^2 d\tau \quad \forall c \in \{c \mid c \in \mathbb{R}^2, \|c\| = 1\}$$

Αναλύοντας το εσωτερικό γινόμενο  $c^T \Phi(x(\tau))$  περαιτέρω, προκύπτει

$$\int_0^T |c^T \Phi(x(\tau))|^2 d\tau = \int_0^T \|c\|^2 \|\Phi(x(\tau))\|^2 \cos^2(\theta) d\tau, \quad \text{όπου } \theta = \angle(c, \Phi(\tau)) \quad (2.4)$$

Καθώς όμως, το  $c$  είναι μοναδιαίο, το μέτρο του είναι 1. Επίσης, το διάνυσμα οπισθοδρομητών είναι το

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{bmatrix}$$

το μέτρο  $\|\Phi(x(\tau))\|$  είναι επίσης 1 για κάθε  $x$ . Συνεπώς το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.4) απλοποιείται ακόμα περισσότερο και τελικά καταλήγουμε στην τελική μορφή:

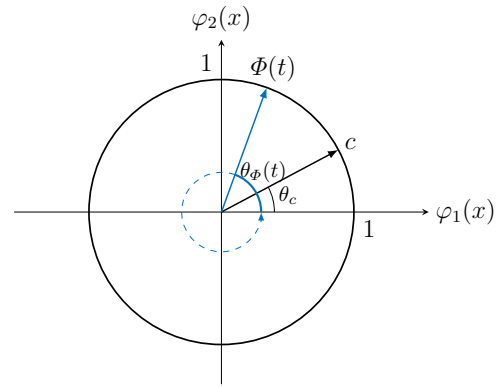
$$\int_0^T \cos^2(\theta(t)) d\tau$$

όπου η γωνία  $\theta(t)$  δίνεται από την σχέση

$$\theta(t) = \theta_\Phi(t) - \theta_c, \quad \theta_c \in [0, 2\pi]$$

με τα  $\theta_\Phi$  και  $\theta_c$  να φαίνονται στο σχήμα (2.7). Λόγω της συμμετρίας του σχήματος, το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο για κάθε γωνία  $\theta_c$ , και συνεπώς η αριθμητική τιμή του ολοκληρώματος της ΣΕΔ είναι τελικά

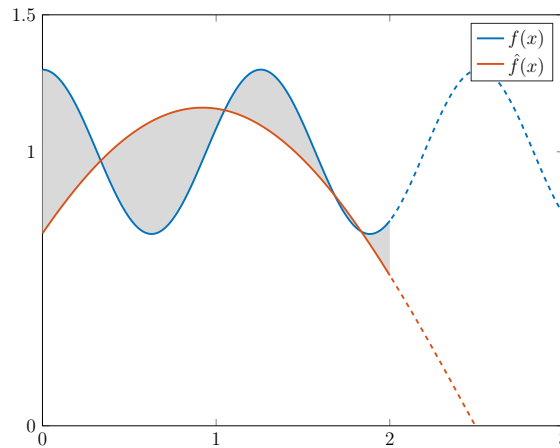
$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\tau) d\tau = \pi = a_1 = a_2$$



Σχήμα 2.7

Όπως μπορούμε να δούμε η απλότητα του παραδείγματος μας επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό των επιπέδων διέγερσης και ως εκ τούτου την μαθηματική επαλήθευση της ΣΕΔ.

Παρόλα αυτά, χρησιμοποιώντας το παραπάνω μοντέλο για να προσεγγίσουμε την άγνωστη  $f(x)$  στο πεδίο ενδιαφέροντος, καταλήγουμε στην προσέγγιση του σχήματος (2.8) η οποία δεν είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική.



Σχήμα 2.8: Προσέγγιση της  $f(x)$  του Παραδείγματος 2.

Το συμπέρασμα που προσπαθούμε να καταλήξουμε μέσω αυτού του παραδείγματος είναι πως ακόμα και αν η ΣΕΔ ικανοποιείται, αυτό δεν συνεπάγεται υποχρεωτικά στην επιτυχία της εφαρμογής αναγνώρισης. Πρέπει και το μοντέλο που χρησιμοποιείται να είναι ικανό να προσεγγίσει την ικανοποιητικά την άγνωστη συνάρτηση.

### 2.2.3 ΣΕΔ για RBF νευρωνικά δίκτυα

Όπως είδαμε, η μαθηματική εξασφάλιση της ικανοποίησης της Συνθήκης Επιμέρους Διέγερσης είναι αρκετά πολύπλοκη, ακόμα και σε πολύ απλές εφαρμογές όπως αυτές των Παραδειγμάτων 1 και 2.

Καθώς στην εργασία αυτή χρησιμοποιούμε ως μοντέλα τα RBF νευρωνικά δίκτυα, σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε ένα αποτέλεσμα που μας επιτρέπει να εγγυηθούμε την ικανοποίηση της ΣΕΔ σε ένα τόσο σύνθετο πρόβλημα.

**Θεώρημα:** Έστω το σύνολο  $I = [t_0, t_0 + T]$ , όπου  $t_0$  και  $T$  θετικές σταθερές, και τα σύνολα  $I_i = \{t \in I : \|x(t) - c_i\| \leq \epsilon, i = 1, \dots, q \text{ με το } \epsilon \leq \frac{1}{2} \min_{i \neq j} \{\|c_i - c_j\|\}\}$ . Εάν υπάρχει σταθερά  $T$  έτσι ώστε τα μέτρα  $\mu(I_i)$  να είναι κάτω φραγμένο από μια σταθερά  $\tau_0$  που είναι ανεξάρτητη του  $t_0$  και του  $i$ , τότε το διάνυσμα οπισθοδρομητών  $\Phi(x(t))$  ικανοποιεί την συνθήκη επιμέρους διέγερσης της εξίσωσης (2.1).

#### Φυσική Σημασία

Η ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος είναι η εξής: Εάν εντός μιας περιόδου  $T$ , για κάθε κέντρο  $c_i$  υπάρχει ένα χρονικό διάστημα  $I_i$  στο οποίο η τροχιά  $x(t)$  διέρχεται αρκούντως κοντά από αυτό, και ο χρόνος  $\mu(I_i)$  που παραμένει αρκούντως κοντά είναι πάντα μεγαλύτερος από μια σταθερά  $\tau_0$ , τότε το διανυσματικό πεδίο  $\Phi(x(t))$  ικανοποιεί την ΣΕΔ της εξίσωσης (2.1).

Με αυτόν τον τρόπο, κάθε συνάρτηση ενεργοποίησης  $\varphi_i(x(t))$  φτάνει κοντά στην μέγιστη τιμή της τουλάχιστον μια φορά εντός κάθε περιόδου, διεγείροντας έτσι την αντίστοιχη μοναδιαία κατεύθυνση  $c$  του χώρου ελεύθερων παραμέτρων  $\mathbb{R}^q$ .

ίσως μπορώ να βαλω ενα σχήμα εδω... (will see)

## 2.3 Έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης

Ο Έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης (Prescribed Performance Control) είναι μια μεθοδολογία ελέγχου που μας επιτρέπει να ελέγξουμε ένα συνεχές δυναμικό σύστημα, εφόσον αυτό ικανοποιεί κάποιες συνθήκες που θα διατυπωθούν παρακάτω. Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της μεθοδολογίας είναι ότι εγγυάται πως το σφάλμα παρακολούθησης εξόδου θα συγκλίνει σε μια προαποφασισμένη και οσοδήποτε μικρή περιοχή του μηδενός με προεπιλεγμένη ταχύτητα και υπερύψωση.

Ο έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης εισήχθη στην εργασία [3] το 2008, και τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί εκτεταμένα. Παρόλο που στις εργασίες αυτές έχουν

αναπτυχθεί πολλές παραλλαγές που να εξασφαλίζουν προδιαγεγραμμένη απόκριση εξόδου σε strict feedback συστήματα [29], pure feedback συστήματα [30] και άλλα, σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την βασική ιδέα της μεθόδου. Στο κεφάλαιο 3 θα εμβαθύνουμε παρουσιάζοντας έναν συγκεκριμένο τρόπο εφαρμογής της που να εξυπηρετεί τις ανάγκες του προβλήματος μας, και θα αποδείξουμε μαθηματικά την ορθότητα του.

### 2.3.1 Ορισμός του προβλήματος

Έστω ένα γενικό μη γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.5}$$

όπου  $x \in \mathbb{R}^n$  το διάνυσμα καταστάσεων,  $u \in \mathbb{R}^m$  το διάνυσμα εισόδων ελέγχου και  $y \in \mathbb{R}^p$  είναι η έξοδος του συστήματος. Τα διανυσματικά πεδία  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  και  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  είναι τοπικά Lipschitz συνεχή στα ορίσματά τους. Έστω επίσης και η αρκούντως ομαλή και φραγμένη τροχιά παρακολούθησης

$$y_d(t) = [y_{d1}(t) \ y_{d2}(t) \ \cdots \ y_{dp}(t)]^T$$

καθώς και τα αντίστοιχα σφάλματα εξόδου:

$$e_i(t) = y_i(t) - y_{di}(t), \quad i = 1, \dots, p$$

Αυτό που επιδιώκουμε είναι η σύγκλιση των σφαλμάτων  $e_i$  σε μια προαποφασισμένη και οσοδήποτε μικρή περιοχή του μηδενός με προεπιλεγμένη ταχύτητα σύγκλισης και υπερύψωση.

Το πρώτο βήμα είναι η μαθηματική περιγραφή των εννοιών αυτών. Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε τις συναρτήσεις επίδοσης:

**Συνάρτηση Επίδοσης:** Μια συνάρτηση  $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  καλείται συνάρτηση επίδοσης εάν είναι φραγμένη, θετική, γνησίως φθίνουσα και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) > 0$$

Μια τυπική επιλογή συνάρτησης συμμετοχής είναι η συνάρτηση

$$\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t} + \rho_\infty\tag{2.6}$$

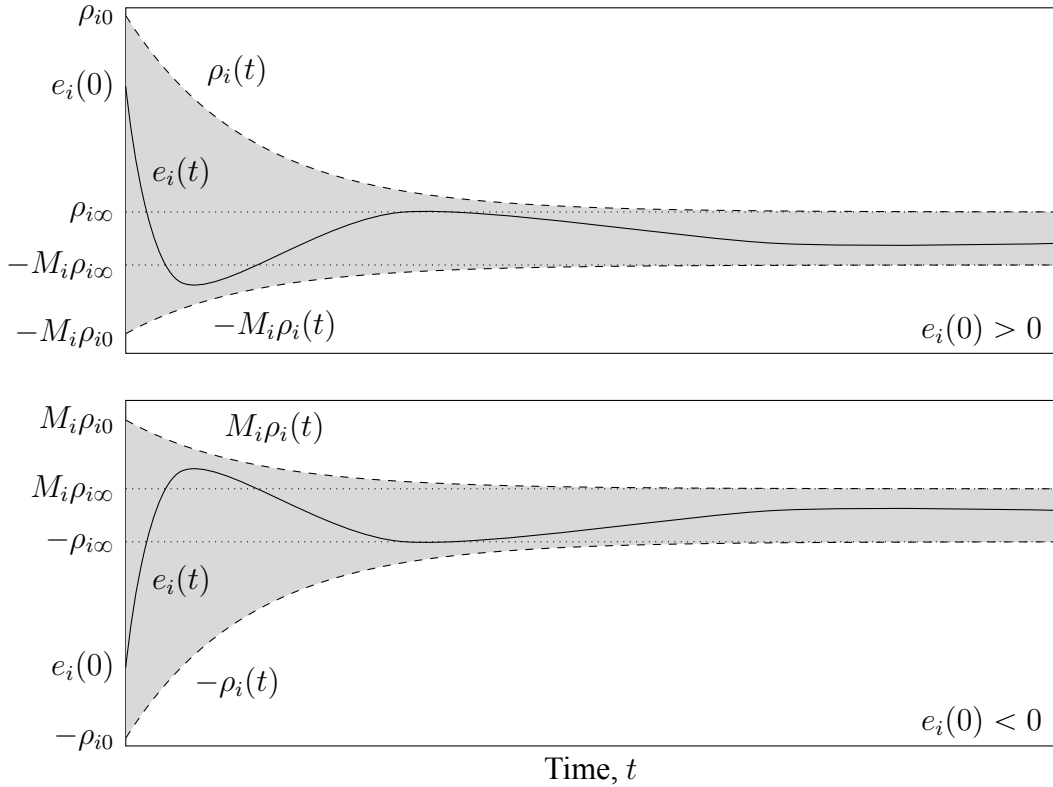
Ο λόγος είναι πως η παραπάνω επιλογή μας επιτρέπει να διαμορφώσουμε το σφάλμα σταθερής κατάστασης επιλέγοντας το  $\rho_\infty$ , το αρχικό σφάλμα επιλέγοντας το  $\rho_0$  και τον ρυθμό σύγκλισης επιλέγοντας το  $\lambda$ .

Στην συνέχεια, για να μοντελοποιήσουμε την υπερύψωση, ορίζουμε τους αριθμούς  $\overline{M}_i$  και  $\underline{M}_i$  ως

$$(\underline{M}_i, \overline{M}_i) = \begin{cases} (-M_i, 1) & \text{όταν } e_i(0) > 0 \\ (-1, M_i) & \text{όταν } e_i(0) < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, p\tag{2.7}$$

και το συνολικό πρόβλημα της Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης Εξόδου (ΠΑΕ) περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\underline{M}_i \rho_i(t) < e_i(t) < \overline{M}_i \rho_i(t), \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, p\tag{2.8}$$



Σχήμα 2.9: Μαθηματική περιγραφή της Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης

Η ανίσωση (2.8) περιγράφεται σχηματικά στην γραφική παράσταση (2.9). Όπως μπορούμε να δούμε το πλάτος της τελικής ζώνης σύγκλισης καθορίζεται από την σταθερά  $\rho_{i\infty}$  της εξίσωσης (2.6) ενώ ο ρυθμός σύγκλισης σε αυτή την ζώνη από την αντίστοιχη σταθερά  $\lambda_i$ .

Ο λόγος που τα όρια  $\overline{M}_i$  και  $\underline{M}_i$  καθορίζονται με βάση την εξίσωση (2.7) είναι επειδή όταν το αρχικό σφάλμα  $e_i$  είναι θετικό, περιμένουμε υπερύψωση στα αρνητικά και αντίστοιχα στα θετικά στην περίπτωση που το  $e_i$  είναι αρνητικό. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο άκρα με την σταθερά  $M_i$  το μόνο που επιτυγχάνεται είναι η κλιμάκωση (scale) της συνάρτησης επίδοσης, ενώ χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.7) μπορούμε να επιβάλουμε μέγιστη υπερύψωση ίση με  $M_i \rho_{i0}$ . Μάλιστα, εάν επιλέξουμε  $M_i = 0$  είναι εφικτή και η περιγραφή της μηδενικής υπερύψωσης.

Τέλος, είναι πολύ σημαντικό να τονίσουμε πως για να ισχύει η εξίσωση (2.8) για κάθε  $t \geq 0$  πρέπει η τιμή  $\rho_{i0}$  να είναι μεγαλύτερη από το αρχικό πλάτος του αρχικού σφάλματος  $|e_i(0)|$  αλλιώς για  $t = 0$  το σφάλμα βρίσκεται έξω από την ζώνη.

Με βάση τα παραπάνω λοιπόν, το πρόβλημα της Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης Εξόδου (ΠΑΕ) ορίζεται ως εξής:

**Πρόβλημα ΠΑΕ:** Να σχεδιαστεί μια συνεχής είσοδος ελέγχου  $u$  για το σύστημα (2.5) έτσι ώστε όλα τα σήματα κλειστού βρόχου να διατηρούνται φραγμένα και τα σφάλματα εξόδου  $e_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$  να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\underline{M}'_i \rho_i(t) \leq e_i(t) \leq \overline{M}'_i \rho_i(t), \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.9)$$

για κάποιες σταθερές  $\underline{M}'_i$  και  $\overline{M}'_i$  για τις οποίες ισχύουν:

$$\underline{M}_i < \underline{M}'_i \leq \overline{M}'_i < \overline{M}_i, \quad i = 1, \dots, p$$

με τα  $\underline{M}_i$  και  $\overline{M}_i$  να ορίζονται από την σχέση (2.7) και  $\rho_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$  κατάλληλα επιλεγμένες συναρτήσεις επίδοσης.

### 2.3.2 Μετασχηματισμός σε πρόβλημα σταθεροποίησης

Καθώς το πρόβλημα ΠΑΕ στην μορφή της εξίσωσης (2.9) είναι αρκετά δύσκολο να αντιμετωπιστεί, παρακάτω θα παρουσιαστεί ένας μετασχηματισμός των σφαλμάτων εξόδου, ο οποίος τα διαμορφώνει αναφορικά με τα χαρακτηριστικά απόκρισης της εξίσωσης (2.8) με σκοπό την διευκόλυνση της ανάλυσης. Ο μετασχηματισμός αυτός έχει την μορφή:

$$\varepsilon_i(t) = T_i \left( \frac{e_i(t)}{\rho_i(t)} \right), \quad i = 1, \dots, p \quad (2.10)$$

όπου οι ποσότητες  $\varepsilon_i(t)$  ονομάζονται μετασχηματισμένα σφάλματα, και οι συναρτήσεις μετασχηματισμού  $T_i(\cdot)$  είναι θετικές, γνησίως αύξουσες που ορίζουν απεικονίσεις της μορφής:

$$T_i : (\underline{M}_i, \overline{M}_i) \rightarrow (-\infty, \infty), \quad i = 1, \dots, p$$

όπου τα  $\underline{M}_i$  και  $\overline{M}_i$  δίνονται από την εξίσωση (2.7). Η ποσότητα  $e_i(t)/\rho_i(t)$  ονομάζεται αλλιώς και κανονικοποιημένο σφάλμα, και συμβολίζεται ως  $\xi_i(t)$ .

Μια τέτοια συνάρτηση μετασχηματισμού είναι η

$$T_i \left( \frac{e_i(t)}{\rho_i(t)} \right) = T_i(\xi_i(t)) = \ln \left( \frac{-\underline{M}_i + \xi_i(t)}{\overline{M}_i - \xi_i(t)} \right) \quad (2.11)$$

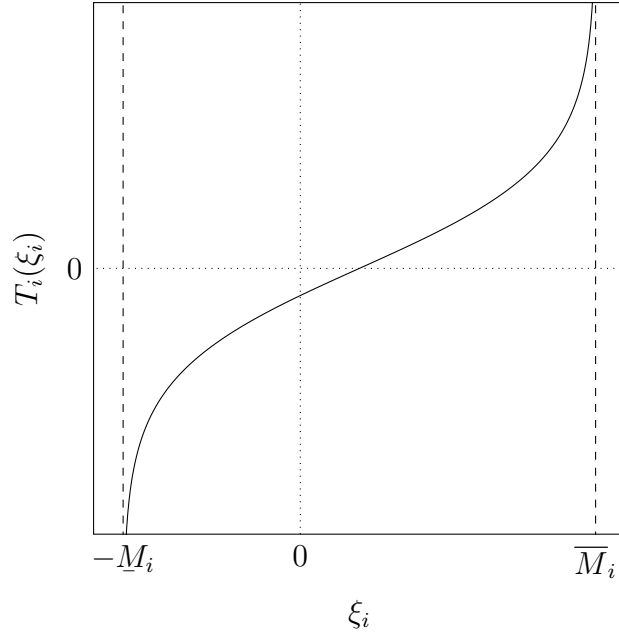
η οποία αναπαρίσταται γραφικά και στο σχήμα (2.10). Χρησιμοποιώντας αυτό το εργαλείο, μπορούμε να επαναπροσδιορίσουμε το πρόβλημα της ΠΑΕ χρησιμοποιώντας την ακόλουθη πρόταση:

**Ισοδύναμο Πρόβλημα ΠΑΕ:** Εάν τα μετασχηματισμένα σφάλματα  $\varepsilon_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$  της εξίσωσης (2.10) διατηρηθούν φραγμένα, τότε ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις:

$$\underline{M}_i \rho_i(t) < \underline{M}'_i \rho_i(t) \leq e_i(t) \leq \rho_i(t) \overline{M}'_i < \rho_i(t) \overline{M}_i, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, p$$

για κάποιες σταθερές  $\underline{M}'_i$  και  $\overline{M}'_i$  για τις οποίες ισχύουν:

$$\underline{M}_i < \underline{M}'_i \leq \overline{M}'_i < \overline{M}_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.12)$$



Σχήμα 2.10: Συνάρτηση Μετασχηματισμού

**Απόδειξη**

Καθώς τα  $\varepsilon_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$  είναι φραγμένα, τότε θα υπάρχουν τα κάτω φράγματα  $\underline{\varepsilon}_i$  και τα άνω φράγματα  $\bar{\varepsilon}_i$  για κάθε  $i$ . Αντικαθιστώντας το  $\varepsilon_i(t)$  από την εξίσωση (2.10), θα ισχύει η παρακάτω ανίσωση:

$$\underline{\varepsilon}_i \leq T_i \left( \frac{e_i(t)}{\rho_i(t)} \right) \leq \bar{\varepsilon}_i, \quad \forall t \geq 0, i = 1, \dots, p$$

Καθώς οι συναρτήσεις μετασχηματισμού  $T_i(\cdot)$  είναι ένα προς ένα και γνησίως αύξουσες, χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό έχουμε:

$$T^{-1}(\underline{\varepsilon}_i) \leq \frac{e_i(t)}{\rho_i(t)} \leq T^{-1}(\bar{\varepsilon}_i), \quad \forall t \geq 0, i = 1, \dots, p$$

και καθώς οι συναρτήσεις επίδοσης  $\rho_i(t)$  είναι θετικές, τελικά καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$T^{-1}(\underline{\varepsilon}_i)\rho_i(t) \leq e_i(t) \leq T^{-1}(\bar{\varepsilon}_i)\rho_i(t), \quad \forall t \geq 0, i = 1, \dots, p$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη ορίζοντας της ποσότητες:

$$\underline{M}'_i = T^{-1}(\underline{\varepsilon}_i) \quad \text{και} \quad \overline{M}'_i = T^{-1}(\bar{\varepsilon}_i), \quad i = 1, \dots, p$$

οι οποίες σημειώνουμε πως ικανοποιούν την σχέση (2.3.2), καθώς οι ποσότητες  $\underline{M}_i$  και  $\overline{M}_i$  είναι τα όρια του αντίστροφου μετασχηματισμού  $T^{-1}(\cdot)$  στο  $-\infty$  και  $+\infty$  αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση, καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$\underline{M}_i \rho_i(t) < \underline{M}'_i \rho_i(t) \leq e_i(t) \leq \rho_i(t) \overline{M}'_i < \rho_i(t) \overline{M}_i, \quad \forall t \geq 0, i = 1, \dots, p$$

□

## 2.4 Σύστημα Αναφοράς

Τέλος, σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε στον μηχανισμό που παράγει τα σήματα αναφοράς τα οποία χρησιμοποιούνται στο σχήμα αναγνώρισης που αναπτύσσεται στα πλαίσια αυτής της εργασίας. Το ζητούμενο ενός τέτοιου συστήματος περιγράφεται παρακάτω.

**Περιγραφή Προβλήματος:** Έστω ένα δυναμικό σύστημα τάξης  $n$  σε κανονική ελέγξιμη μορφή:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f(x, u, t)\end{aligned}\tag{2.13}$$

όπου  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής, τοπικά Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Να σχεδιαστεί σύστημα που θα παράγει τα σήματα αναφοράς  $x_{1d}(t), x_{2d}(t), \dots, x_{nd}(t)$  για μεταβάσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t_0 + \Delta T) \\ x_2(t_0 + \Delta T) \\ \vdots \\ x_n(t_0 + \Delta T) \end{bmatrix}\tag{2.14}$$

για κάθε αρχικό διάνυσμα  $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$  προς κάθε τελικό διάνυσμα  $x(t_0 + \Delta T) \in \mathbb{R}^n$  για ένα επιθυμητό χρονικό διάστημα μετάβασης  $\Delta T$ . Τέλος, θα πρέπει δυο διαδοχικές μεταβάσεις  $x(t_0) \rightarrow x(t_0 + \Delta T) \rightarrow x(t_0 + 2\Delta T)$  να σχηματίζουν μια ομαλή καμπύλη στον χώρο  $\mathbb{R}^n$ .

Ο λόγος που διατυπώνουμε το πρόβλημα με την παραπάνω μορφή συνδέεται με την Συνθήκη Επιμέρους Διέγερσης για RBF δίκτυα που περιγράφεται στην παράγραφο 2.2.3. Οι μεταβάσεις  $x(t_0) \rightarrow x(t_0 + \Delta T)$  στην ουσία περιγράφουν την μετάβαση από ένα κέντρο  $c_i$  του RBF νευρωνικού δικτύου σε ένα κέντρο  $c_j$ , και η διάρκεια μετάβασης  $\Delta T$  συνδέεται με τον χρόνο παραμονής της επιθυμητής τροχιάς  $x_d(t)$  στην γειτονία του κάθε κέντρου  $c_i$ .

### 2.4.1 Μαθηματική Ανάλυση

#### Συνοριακές Συνθήκες

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να λάβει κανείς υπόψιν στην σχεδίαση είναι η μορφή της εξίσωσης (2.13). Η εξίσωση αυτή επιβάλλει τον περιορισμό:

$$\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, n-1$$

ο οποίος προφανώς θα πρέπει να ισχύει και για τα σήματα αναφοράς  $x_{di}(t)$ .

Στην συνέχεια, μελετώντας κανείς το παραπάνω πρόβλημα από την οπτική γωνία των Διαφορικών Εξισώσεων διαπιστώνει πως πρόκειται για ένα πρόβλημα συνοριακών συνθηκών, για το οποίο έχουμε  $2n+2$  συνοριακές συνθήκες. Οι  $2n$  περιγράφονται από την εξίσωση (2.13) και είναι οι αρχικές και οι τελικές τιμές του διανύσματος καταστάσεων.



Οι άλλες 2 προκύπτουν από την τελευταία απαίτηση η οποία αναφέρεται στην διατήρηση της ομαλότητας της καμπύλης μεταξύ δυο μεταβάσεων. Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζεται από την συνέχεια των παραγώγων των καταστάσεων η οποία διατυπώνεται ως εξής:

$$\dot{x}_i(t_0^-) = \dot{x}_i(t_0^+), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

Καθώς το σύστημα βρίσκεται σε κανονική μορφή, οι πρώτες  $n-1$  εξισώσεις της σχέσης (2.15) αναφέρονται στην συνέχεια των καταστάσεων  $x_2(t), \dots, x_n(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  και συνεπώς έχουν συμπεριληφθεί ήδη στην σχεδίαση από την εξίσωση (2.14).

Εν αντιθέσει, η συνθήκη  $\dot{x}_n(t_0^-) = \dot{x}_n(t_0^+)$  δεν ικανοποιείται απαραίτητα όταν οι υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες της σχέσης (2.14) ικανοποιούνται, και συνεπώς εισάγει δυο επιπλέον συνοριακές συνθήκες, μια για το  $\dot{x}_n(t_0)$  και μια για το  $\dot{x}_n(t_0 + \Delta T)$ .

### Επιλογή λύσης

Αρχικά θα θεωρήσω ότι πως για κάθε ζητούμενη μετάβαση, η κατάσταση  $x_1(t)$  περιγράφεται από το πολυώνυμο του χρόνου  $t$  ως εξής:

$$x_1(t) = y(t) = \sum_{j=1}^{2n+2} \alpha_j \cdot t^{j-1}, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta T] \quad (2.16)$$

Ο βαθμός του πολωνύμου επιλέγεται ίσος με  $2n+1$  έτσι ώστε με κατάλληλη επιλογή των συντελεστών του πολωνύμου  $a_i$  να μπορούν να ικανοποιηθούν όλες οι συνοριακές συνθήκες. Παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.16)  $n+1$  φορές, προκύπτουν οι υπόλοιπες καταστάσεις συναρτήσει του χρόνου  $t$ , καθώς και η παράγωγος της  $n$ -οστής κατάστασης: για  $n+1$ :

$$x_i(t) = \sum_{j=i}^{2n+2} \alpha_j \cdot \prod_{k=1}^{i-1} (j-k) \cdot t^{j-i}, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta T], \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (2.17)$$

Ορίζω ως τον συντελεστή του όρου  $a_j$  για την κατάσταση  $x_i$  ως την συνάρτηση

$$b_{i,j}(t) = \begin{cases} \left( \prod_{k=1}^{i-1} (j-k) \right) \cdot t^{j-i} & , j \geq i \\ 0 & , j < i \end{cases} \quad (2.18)$$

και με αυτόν τον τρόπο μπορώ να ξαναγράψω την εξίσωση (2.17) στην γραμμική ως προς τους όρους μορφή:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{2n+2} b_{i,j}(t) \cdot \alpha_k, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta T], \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (2.19)$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό, μπορούμε να γράψουμε τις συνοριακές συνθήκες για την χρονική στιγμή  $t_0$  στην πιο συμπαγή μορφή:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \\ \dot{x}_n(t_0) \end{bmatrix}}_{Y(t_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1,1}(t_0) & b_{1,2}(t_0) & \dots & b_{1,2n+2}(t_0) \\ b_{2,1}(t_0) & b_{2,2}(t_0) & \dots & b_{2,2n+2}(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1}(t_0) & b_{n,2}(t_0) & \dots & b_{n,2n+2}(t_0) \\ b_{n+1,1}(t_0) & b_{n+1,2}(t_0) & \dots & b_{n+1,2n+2}(t_0) \end{bmatrix}}_{R(t_0)} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n+2} \end{bmatrix}}_{A}$$

όπου  $R(t_0)$  είναι γνωστός  $n + 1 \times 2(n + 1)$  πίνακας και  $Y(t_0)$  το  $n + 1 \times 1$  διάνυσμα συνοριακών συνθηκών. Γράφοντας σε αντίστοιχη τις συνοριακές συνθήκες για την χρονική στιγμή  $t_0 + \Delta T$ , τελικά το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} Y(t_0) \\ Y(t_0 + \Delta T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(t_0) \\ R(t_0 + \Delta T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n+2} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Το αλγεβρικό σύστημα της εξίσωσης (2.20) είναι ένα σύστημα  $2n + 2$  εξισώσεων και  $2n + 2$  αγνώστων, και καθώς ο πίνακας  $R$  είναι καλώς ορισμένος (αυτό ίσως πρέπει να το δείξω σε κάποιο παράρτημα), το πρόβλημα έχει μια μόνο λύση η οποία υπολογίζεται ως:

$$\alpha = R^{-1}Y \quad (2.21)$$

### 2.4.2 Μορφή κλειστού βρόχου

Η μαθηματική ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου αναφέρεται στην επιλογή και την παραμετροποίηση μιας ισοδύναμης Διαφορικής Εξίσωσης που να ικανοποιεί της ζητούμενες συνοριακές συνθήκες. Για να χρησιμοποιηθεί αυτό το αποτέλεσμα εντός ενός κλειστού βρόχου, απαιτείται να το μετασχηματίσουμε σε μορφή εξισώσεων κατάστασης. Ξεκινώντας από την λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\dot{x}_{1d}(t) = y(t)$$

πραγωγίζουμε  $n$  φορές και έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d}(t) &= \dot{y}(t) \\ \dot{x}_{2d}(t) &= \ddot{y}(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{nd}(t) &= y^{(n)}(t) \end{aligned}$$

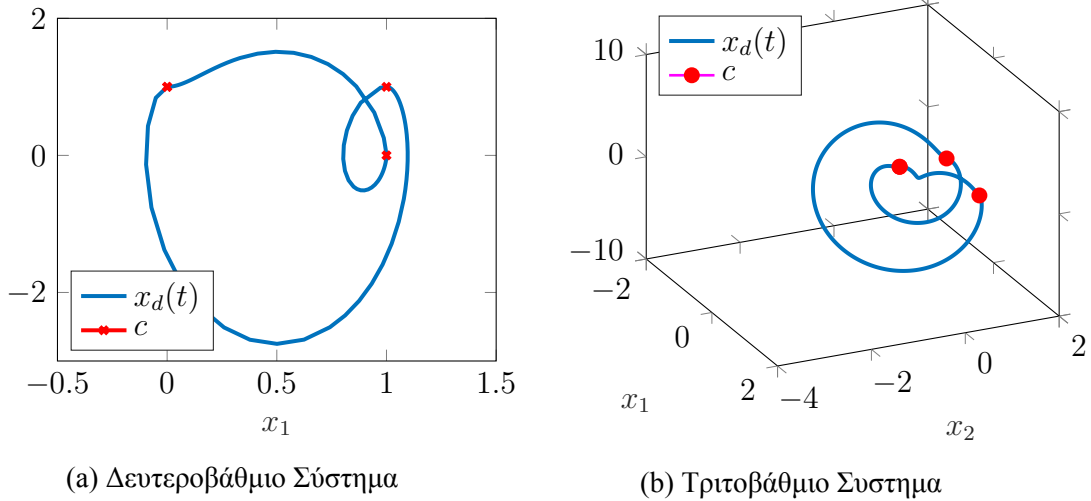
Με βάση τα παραπάνω, χρησιμοποιώντας την σχέση  $y^i(t) = x_{(i+1)d}(t)$  και ορίζοντας την παράγωγο  $n$ -οστή παράγωγο  $y^{(n)}(t)$  ως  $\nu(t)$  τελικά καταλήγουμε στις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος αναφοράς:

$$\Sigma_{ref} \begin{cases} \dot{x}_{1d}(t) &= x_{2d}(t) \\ \dot{x}_{2d}(t) &= x_{3d}(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{nd}(t) &= \nu(t) \end{cases} \quad (2.22)$$

Η είσοδος ελέγχου του συστήματος αναφοράς ορίζεται με την βοήθεια της σχέσης (2.18) ως:

$$\nu(t) = y^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{2n+2} b_{n+1,j}(t) \cdot \alpha_j, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta T]$$

όπου τα βάρη  $a_j$  υπολογίζονται για κάθε μετάβαση με την βοήθεια της σχέσης (2.20).



Σχήμα 2.11: Τροχιές αναφοράς που διέρχονται από τα επιθυμητά κέντρα  $c$

### 2.4.3 Παραδείγματα χρήσης

Τέλος για να δείξουμε πως το προτεινόμενο σύστημα αναφοράς ικανοποιεί τις απαιτήσεις, παραθέτουμε δυο παραδείγματα στα οποία σκοπός είναι ο σχηματισμός μιας κλειστής ομαλής τροχιάς που να διέρχεται από κάποια επιθυμητά σημεία του χώρου  $\mathbb{R}^2$  και  $\mathbb{R}^3$  αντίστοιχα.

Το παραπάνω σενάριο είναι ακριβώς ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζεται η θεωρία που αναπτύξαμε σε αυτή την παράγραφο και στο πραγματικό πρόβλημα, όπου το ζητούμενο είναι να σχεδιαστεί μια περιοδική τροχιά αναφοράς που να διέρχεται από όλα τα κέντρα ενός πλέγματος από γκαουσιανές συναρτήσεις βάσης, όπως επιτάσσει η ΣΕΔ για νευρωνικά δίκτυα RBF.

Στο σχήμα (2.11) φαίνεται πως πράγματι, και στις δυο περιπτώσεις, το προσομοιωμένο σύστημα αναφοράς της εξίσωσης (2.22) παράγει όντως μια κλειστή και ομαλή τροχιά που να διέρχεται από όλα τα επιθυμητά σημεία.

## Κεφάλαιο 3

### Σχήμα Αναγνώρισης

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα σχήμα αναγνώρισης για μη-γραμμικά συστήματα ΠΕΠΕ (πολλαπλών εισόδων, πολλαπλών εξόδων) σε κανονική μορφή, βασισμένο στα νευρωνικά δίκτυα RBF καθώς και στον έλεγχο προδιαγεγραμμένης απόκρισης.

#### 3.1 Ορισμός του Προβλήματος

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι η παρουσίαση του προβλήματος που ασχολείται η παρούσα εργασία. Για τον σκοπό αυτό, ακολουθεί μια μαθηματική περιγραφή της κλάσης των συστημάτων που μελετάμε, η παρουσίαση των βασικών υποθέσεων που γίνονται για τα συστήματα αυτά και τέλος η επίσημη διατύπωση του προβλήματος.

##### 3.1.1 Δομή του συστήματος

Έστω ένα μη-γραμμικό συνεχές χρονοαμετάβλητο σύστημα ΠΕΠΕ  $m$  εισόδων και  $m$  εξόδων σε κανονική μορφή το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}x_1^{(n_1)} &= f_1(x) + g_{11}(x)u_1 + \dots + g_{1m}(x)u_m \\&\vdots \\x_m^{(n_m)} &= f_m(x) + g_{m1}(x)u_1 + \dots + g_{mm}(x)u_m\end{aligned}\tag{3.1}$$

με

$$\begin{aligned}x_i^{(n_i)} &:= \frac{d^{n_i} x_i}{dt^{n_i}} \\x &:= \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_1^{(n_1-1)} & \dots & x_m & \dots & x_m^{(n_m-1)} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n \\n &= n_1 + \dots + n_m \\y &= \begin{bmatrix} x_1(t) & \dots & x_m(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m\end{aligned}$$

όπου  $x \in \mathbb{R}^n$  είναι το διάνυσμα καταστάσεων,  $n$  η συνολική τάξη του συστήματος,  $m$  ο αριθμός υποσυστημάτων  $u \in \mathbb{R}^m$  το διάνυσμα των εισόδων ελέγχου, και  $y \in \mathbb{R}^m$  το

διάνυσμα εξόδων. Το σύστημα της εξίσωσης (3.1) μπορεί να γραφτεί στην πιο συμπαγή μορφή:

$$x^{(n)} = F(x) + G(x)u \quad (3.2)$$

ορίζοντας το διάνυσμα  $F(x)$  και τον πίνακα  $G(x)$  ως:

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad G(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & \cdots & g_{1m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(x) & \cdots & g_{mm}(x) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

και το διάνυσμα  $x^{(n)}$  ως:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1^{(n_1)} & \cdots & x_m^{(n_m)} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m$$

### 3.1.2 Υποθέσεις

Σε αυτό το σημείο περιγράφονται κάποιες υποθέσεις που θα θεωρήσουμε ότι πληρούνται από το σύστημα που εξετάζεται. Οι υποθέσεις αυτές είναι θεμελιώδους σημασίας για την μαθηματική ανάλυση που ακολουθεί, και για συστήματα στα οποία δεν ισχύουν, ενδέχεται η εφαρμογή της μεθόδου που περιγράφει το κεφάλαιο να μην επιφέρει τα αποτελέσματα που εξασφαλίζει η μαθηματική ανάλυση.

**Υπόθεση 1:** Ο πίνακας  $G(x)$  είναι θετικά ορισμένος εντός ενός κλειστού και συμπαγούς συνόλου  $A \subset \mathbb{R}^n$ , δηλαδή η μικρότερη ιδιοτιμή του συμμετρικού του πίνακα είναι μεγαλύτερη από μια θετική σταθερά  $\lambda^*$  όπως περιγράφει η παρακάτω εξίσωση.

$$\lambda_{\min} \left( \frac{G(x) + G^T(x)}{2} \right) \geq \lambda^* > 0, \quad \forall x \in A \quad (3.4)$$

**Υπόθεση 2:** Το εξεταζόμενο σύστημα είναι τύπου Euler–Lagrange, δηλαδή ο πίνακας  $G(x)$  δεν είναι συνάρτηση του διανύσματος  $x^{(n)}$ , ή μαθηματικά:

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x^{(n_i-1)}} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m \quad (3.5)$$

**Υπόθεση 3:** Το πλήρες διάνυσμα καταστάσεων  $x \in \mathbb{R}^n$  είναι διαθέσιμο προς μέτρηση σε κάθε χρονική στιγμή  $t \geq 0$ .

**Υπόθεση 4:** Ο πίνακας  $G(x)$  είναι τοπικά Lipschitz συνεχής στο σύνολο  $A$  της υπόθεσης 1.

### 3.1.3 Διατύπωση του προβλήματος αναγνώρισης

Τέλος, έχοντας ορίσει τόσο την δομή των συστημάτων με τα οποία ασχολείται η εργασία, όσο τις υποθέσεις που πρέπει αυτά τα συστήματα να ικανοποιούν, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το πρόβλημα με το οποίο ασχολείται η παρούσα εργασία.

**Πρόβλημα (Αναγνώριση μη-γραμμικού ΠΕΠΕ):**

Έστω ένα σύστημα ΠΕΠΕ της εξίσωσης (2.13) το οποίο ικανοποιεί της υποθέσεις της

παραγράφου 3.1.2. Για το σύστημα αυτό να σχεδιαστεί σχήμα αναγνώρισης κλειστού βρόγχου, ικανό να προσεγγίσει αρκούντως καλά την άγνωστη δυναμική του που περιγράφεται από το διάνυσμα  $F(x)$  και τον πίνακα  $G(x)$  της εξίσωσης (3.3) εντός ενός κλειστού και συμπαγούς συνόλου  $\Omega$ , και ταυτόχρονα να διασφαλίζει πως όλα τα σήματα κλειστού βρόγχου θα παραμένουν φραγμένα για κάθε  $t \geq 0$ .

## 3.2 Υποσυστήματα

Με βάση τα παραπάνω, σε αυτή την παράγραφο αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο θα χρησιμοποιηθούν τα μαθηματικά εργαλεία του κεφαλαίου 2 προς την επίλυση του προβλήματος, όπως αυτό ορίζεται την παράγραφο 3.1.3.

### 3.2.1 Προσέγγιση με Νευρωνικά Δίκτυα

Καθώς το ζητούμενο είναι η αναγνώριση της άγνωστης δυναμικής του συστήματος, η οποία περιγράφεται από τις άγνωστες συναρτήσεις  $F(x)$  και  $G(x)$  εντός ενός συνόλου  $\Omega$ , θα χρησιμοποιηθούν τα νευρωνικά δίκτυα RBF, τα οποία όπως έχουμε δείξει στο κεφάλαιο 2, έχουν την δυνατότητα να προσεγγίσουν οποιαδήποτε μη-γραμμική συνάρτηση.

Για λόγους που δεν είναι εμφανής ακόμα, αλλά θα αποσαφηνισθούν κατά την μαθηματική ανάλυση, μέσω των δικτύων RBF θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε τις συναρτήσεις:

$$\Phi(x) := F(x)G^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad (3.6)$$

και

$$\Gamma(x) := G^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(x) & \cdots & \gamma_{1m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1}(x) & \cdots & \gamma_{mm}(x) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Καθώς το διάνυσμα  $F(x)$  είναι συνάρτηση του πλήρους διανύσματος καταστάσεων  $x \in \mathbb{R}^n$ , ενώ ο πίνακας  $G(x)$  είναι συνάρτηση μόνο των πρώτων  $n_i - 1$  καταστάσεων κάθε υποσυστήματος  $i$ , θα χρησιμοποιηθεί διαφορετικό διάνυσμα οπισθοδρομητών για τις δυο αυτές περιπτώσεις, αφού αντίθετα εισάγεται περιττή πολυπλοκότητα στην προσέγγιση της  $\Gamma(x)$ . Συνεπώς, συμβολίζουμε με  $Z_\Phi(x)$  το διάνυσμα οπισθοδρομητών για την προσέγγιση του διανύσματος  $\Phi(x)$  και με  $Z_\Gamma(x)$  το διάνυσμα οπισθοδρομητών της  $\Gamma(x)$ .

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα προσέγγισης της παραγράφου 2.1.2, χωρίς βλάβη γενικότητας αντικαθιστούμε κάθε συνάρτηση  $\varphi_i(x)$  και  $\gamma_{ij}(x)$  των  $\Phi(x)$  και  $\Gamma(x)$  με τις προσεγγίσεις τους:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= w_{\varphi_i}^{*T} Z_\Phi(x) + \epsilon_{\varphi_i}(x), \quad \forall x \in \Omega \\ \gamma_{ij}(x) &= w_{\gamma_{ij}}^{*T} Z_\Gamma(x) + \epsilon_{\gamma_{ij}}(x), \quad \forall x \in \Omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

όπου  $w_{\varphi_i}^* \in \mathbb{R}^{q_\Phi}$  και  $w_{\gamma_{ij}}^* \in \mathbb{R}^{q_\Gamma}$  τα βέλτιστα βάρη των νευρωνικών δικτύων της αντίστοιχης συνάρτησης,  $q_\Phi$  και  $q_\Gamma$  το μέγεθος του κάθε νευρωνικού δικτύου και  $\epsilon_{\varphi_i}(x)$  και  $\epsilon_{\gamma_{ij}}(x)$  τα σφάλματα μοντελοποίησης, τα οποία έχουν ένα άγνωστο άνω φράγμα που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} |\epsilon_{\varphi_i}(x)| &\leq \bar{\epsilon}_{\varphi_i}, \quad \forall x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, m \\ |\epsilon_{\gamma_{ij}}(x)| &\leq \bar{\epsilon}_{\gamma_{ij}}, \quad \forall x \in \Omega, \quad i, j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.9)$$

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να τονίσουμε πως στην προσπάθεια ελέγχου του συστήματος, το διάνυσμα  $x(t)$  ενδέχεται να μη παραμένει πάντα εντός του συνόλου  $\Omega$ . Για να αντιμετωπιστεί αυτή η δυσκολία, παρατηρούμε πως, αφού οι συναρτήσεις  $\Phi(x)$  και  $\Gamma(x)$  είναι συνεχείς, και τα διάνυσμα οπισθοδρομητών  $Z_\Phi(x)$  και  $Z_\Gamma(x)$  είναι επίσης συνεχή, τότε και τα σφάλματα μοντελοποίησης:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\varphi_i}(x) &= \varphi_i(x) - w_{\varphi_i}^{*T} Z_\Phi(x), \quad \forall x \in A \\ \epsilon_{\gamma_{ij}}(x) &= \gamma_{ij}(x) - w_{\gamma_{ij}}^{*T} Z_\Gamma(x), \quad \forall x \in A \end{aligned} \quad (3.10)$$

είναι συνεχής συναρτήσεις. Παρόλο που όταν το  $x(t)$  βρίσκεται εκτός του  $\Omega$ , δεν μπορούμε να εγγυηθούμε πως τα σφάλματα μοντελοποίησης φράζονται από την σχέση (3.9), η παραπάνω παρατήρηση μας επιτρέπει να συνεχίσουμε την ανάλυση.

Τέλος, ορίζουμε κάποια σήματα τα οποία θα χρειαστούν στην μαθηματική ανάλυση. Αρχικά, ορίζουμε τις προσεγγίσεις  $\hat{\Phi}(x)$  και  $\hat{\Gamma}(x)$  ως:

$$\hat{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{w}_{\varphi_1}^T Z_\Phi(x) \\ \vdots \\ \hat{w}_{\varphi_m}^T Z_\Phi(x) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

και

$$\hat{\Gamma}(x) = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{11}(x) & \cdots & \hat{\gamma}_{1m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\gamma}_{m1}(x) & \cdots & \hat{\gamma}_{mm}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{w}_{\gamma_{11}}^T Z_\Gamma(x) & \cdots & \hat{w}_{\gamma_{1m}}^T Z_\Gamma(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{w}_{\gamma_{m1}}^T Z_\Gamma(x) & \cdots & \hat{w}_{\gamma_{mm}}^T Z_\Gamma(x) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Κατά δεύτερον, ορίζουμε τα σφάλματα προσέγγισης ως:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{\varphi_i}(t) &= w_{\varphi_i}^* - \hat{w}_{\varphi_i}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \tilde{w}_{\gamma_{ij}}(t) &= w_{\gamma_{ij}}^* - \hat{w}_{\gamma_{ij}}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.13)$$

και συνεπώς μπορούμε να εκφράσουμε τα συνολικά σφάλματα προσέγγισης των συναρτήσεων ως:

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) - \hat{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{\varphi_1}^T Z_\Phi(x) \\ \vdots \\ \tilde{w}_{\varphi_m}^T Z_\Phi(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{\varphi_1}(x) \\ \vdots \\ \epsilon_{\varphi_m}(x) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

και

$$\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x) - \hat{\Gamma}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{\gamma_{11}}^T Z_\Gamma(x) & \cdots & \tilde{w}_{\gamma_{1m}}^T Z_\Gamma(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{w}_{\gamma_{m1}}^T Z_\Gamma(x) & \cdots & \tilde{w}_{\gamma_{mm}}^T Z_\Gamma(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{\gamma_{11}}(x) & \cdots & \epsilon_{\gamma_{1m}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{\gamma_{m1}}(x) & \cdots & \epsilon_{\gamma_{mm}}(x) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Τέλος, παραγωγίζοντας τις εξισώσεις (3.13) έχουμε τις παραγώγους των παραμετρικών σφαλμάτων, οι οποίες εμφανίζονται κατά την μαθηματική ανάλυση:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{w}}_{\varphi_i}(t) &= -\dot{w}_{\varphi_i}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{\tilde{w}}_{\gamma_{ij}}(t) &= -\dot{w}_{\gamma_{ij}}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, m\end{aligned}\tag{3.16}$$

### Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης

Με βάση τα συμπεράσματα της υποπαραγράφου 2.2.3, για να επιτευχθεί σύγκλιση των βαρών  $\hat{W}_{\Phi}^T(x)$  και  $\hat{W}_{\Gamma}^T(x)$  στα βέλτιστα βάση  $W_{\Phi}^{*T}$  και  $W_{\Gamma}^{*T}$ , απαιτείται ο σχεδιασμός και η παρακολούθηση μιας περιοδικής τροχιάς αναφοράς  $x_d(t)$  η οποία θα διέρχεται από όλα τα κέντρα  $c$  των νευρωνικών δικτύων RBF.

### 3.2.2 Σύστημα Αναφοράς

Στην προσπάθεια αναγνώρισης της άγνωστης δυναμικής του συστήματος (2.13), απαιτείται ένα σύστημα αναφοράς το οποίο θα παράγει την επιθυμητή τροχιά  $x_d(t)$ . Σε αυτή την παράγραφο γίνεται μια εισαγωγή στον συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω, καθώς και σε όλες τις υποθέσεις που γίνονται για αυτό το σύστημα αναφοράς.

Για κάθε υποσύστημα  $i$  του συστήματος 3.1, ορίζω ένα σύστημα αναφοράς  $\Sigma_i$  το οποίο υλοποιεί την τροχιά αναφοράς  $x_{id}(t)$ , καθώς και τις παραγώγους της μέχρι τάξης  $n_i - 1$ :  $x_{id}^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, n_i - 1$ . Τέλος, η  $n_i$ -οστή παράγωγος του συστήματος αναφοράς, δίνεται από τον τύπο:

$$x_{id}^{(n_i)}(t) = \nu_i(t), \quad \forall i = 1, \dots, m\tag{3.17}$$

όπου  $\nu_i(t)$  είναι η είσοδος αναφοράς του  $i$ -οστού υποσυστήματος. Σε αυτό το σημείο δεν είναι απαραίτητος ο ακριβής ορισμός των  $\nu_i(t)$ . Αν'αυτού, ορίζουμε κάποιες επιθυμητές ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιούνται έτσι ώστε να είναι εφικτή η μαθηματική επαλήθευση του σχήματος.

Οι ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιεί κάθε υποσύστημα, είναι αφενός να παράγει μια φραγμένη τροχιά αναφοράς  $x_{id}(t)$ , καθώς και να διατηρεί φραγμένες και όλες της παραγώγους μέχρι τάξης  $n_i - 1$ , δηλαδή το διάνυσμα καταστάσεων αναφοράς:

$$\bar{x}_{id}(t) = \begin{bmatrix} x_{id}(t) \\ \dot{x}_{id}(t) \\ \vdots \\ x_{id}^{(n_i-1)}(t) \end{bmatrix}$$

να παραμένει φραγμένο σε ένα κλειστό συμπαγές σύνολο  $\mathcal{X}_{id}$ . Αφετέρου, πρέπει οι είσοδοι αναφοράς  $\nu_i(t)$  να είναι συνεχή και φραγμένα σήματα.

Τέλος, στην ανάλυση μας θα υποθέσουμε πως όλα τα σήματα αναφοράς  $x_{id}^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, n_i - 1$ , καθώς και οι είσοδοι αναφοράς  $\nu_i(t)$  είναι διαθέσιμα σήματα, και συνεπώς θα χρησιμοποιηθούν στην σχεδίαση του νόμου ελέγχου καθώς και στους νόμους προσαρμογής.



Χρησιμοποιώντας  $m$  τέτοια υποσυστήματα, παράγουμε την συνολική τροχιά αναφοράς του συστήματος:

$$x_d(t) = \begin{bmatrix} x_{1d}(t) & \dots & x_{1d}^{(n_1-1)}(t) & \dots & x_{md}(t) & \dots & x_{md}^{(n_m-1)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (3.18)$$

η οποία είναι φραγμένη σε ένα κλειστό και συμπαγές σύνολο  $\mathcal{X}_d$ .

**Σημείωση:** Κάθε σύστημα αναφοράς  $\Sigma_i$  που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, έχει στην ουσία την μορφή της εξίσωσης (2.22), δηλαδή:

$$\Sigma_i \begin{cases} \dot{x}_{1d}(t) &= x_{2d}(t) \\ \dot{x}_{2d}(t) &= x_{3d}(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n_id}(t) &= \nu_i(t) \end{cases}$$

απλά χρησιμοποιούμε διαφορετικό συμβολισμό για να διατηρήσουμε την συμβατότητα με την σχέση (2.13).

### 3.2.3 Έλεγχος του συστήματος

Για την λύση του προβλήματος παρακολούθησης της τροχιάς  $x_d(t)$  θα χρησιμοποιηθεί ο Έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης. Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζονται τα σήματα κλειστού βρόγχου που θα χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση, καθώς και διατυπώνεται επίσημα ο στόχος ελέγχου. Η απόδειξη πως η προτεινόμενη μεθοδολογία επιτυγχάνει τον στόχο ελέγχου γίνεται στο υποκεφάλαιο (τοδο).

Αρχικά ορίζουμε το σφάλμα παρακολούθησης εξόδου ως:

$$e_i(t) = x_i(t) - x_{di}(t), \quad i = 1, \dots, m$$

και τα σφάλματα καταστάσεων κάθε υποσυστήματος ως:

$$e_i^{(j)}(t) = x_i^{(j)}(t) - x_{id}^{(j)}(t), \quad j = 0, \dots, n_i - 1$$

Στην συνέχεια, για το κάθε υποσύστημα, ορίζουμε ένα φίλτρο  $s_i$  ως εξής:

$$\begin{aligned} s_i(t) &= \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{(n_i-1)} e_i(t), \quad i = 1, \dots, m \\ &= \sum_{j=0}^{n_i-1} \binom{n_i-1}{j} \lambda^j e_i^{(n_i-j)}(t), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.19)$$

όπου  $\lambda$  θετικό κέρδος. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο κάθε όρο  $s_i(t)$  έχουμε:

$$\dot{s}_i(t) = \underbrace{x_i^{(n_i)}(t) - x_{id}^{(n_i)}(t) + \sum_{j=1}^{n_i-1} \binom{n_i-1}{j} \lambda^j e_i^{(n_i-j+1)}(t)}_{d_i(t)}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.20)$$

Ο όρος  $d_i(t)$  της εξίσωσης (3.20) είναι γνωστός για κάθε υποσύστημα  $i$  αφού όλες οι καταστάσεις  $x_{id}^{(j)}$  και  $x_i^{(j)}$  είναι μετρήσιμα σήματα, και επιπλέον οι όροι  $x_{id}^{(n_i)}$  είναι στην ουσία οι εισοδοί  $\nu_i(t)$  των συστημάτων αναφοράς. Συνεπώς, τα σήματα  $d_i(t)$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον σχεδιασμό της εισόδου ελέγχου  $u(t)$ .

Τέλος, ορίζουμε το διάνυσμα φιλτραρισμένων σφαλμάτων ως:

$$s(t) = [s_1(t) \ \dots \ s_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$$

και την παράγωγο του ως:

$$\dot{s}(t) = x^{(n)}(t) + d(t) \in \mathbb{R}^m \quad (3.21)$$

, όπου το διάνυσμα  $d(t)$  ορίζεται ως

$$d(t) = [d_1(t) \ \dots \ d_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$$

και θεωρείται γνωστό.

**Υποπρόβλημα(Έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης):** Να σχεδιαστεί μια είσοδος ελέγχου  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  η οποία να εγγυάται την σύγκλιση των σφαλμάτων  $s_i(t)$  σε μια ζώνη, τα χαρακτηριστικά της οποίας καθορίζονται από μια επιθυμητή συνάρτηση επίδοσης  $\rho(t)$ .

$$|s_i(t)| < \rho(t), \quad \forall t \geq 0, \ i = 1, \dots, m \quad (3.22)$$

Ορίζοντας το προβλήματα ελέγχου με τον παραπάνω τρόπο, επιτυγχάνεται σημαντική απλοποίηση του σχήματος ελέγχου σε σύγκριση με τον κλασσικό έλεγχο προδιαγεγραμμένης απόκρισης της εργασίας [3]. Ταυτόχρονα, λύνεται το πρόβλημα παρακολούθησης της τροχιάς  $x_d(t)$ , αφού με βάση την ανάλυση της εργασίας [31] (πρόταση 2), με την ικανοποίηση της εξίσωσης (3.22) συνεπάγεται τα σφάλματα  $e_i^{(j)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n_i - 1$  θα παραμένουν φραγμένα στα σύνολα:

$$E_{i,j} = \left\{ e_i^{(j)} \in \mathbb{R} : |e_i^{(j)}(t)| < \bar{e}_i^{(j)} + \frac{2^{j-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t)}{\lambda^{n_i-j}} \right\} \quad (3.23)$$

όπου  $\bar{e}_i^{(j)}$  μια παράμετρος που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες.

Σε αυτό το σημείο σημειώνεται πως χρησιμοποιείται μια καθολική συνάρτηση επίδοσης  $\rho(t)$  για όλα τα υποσυστήματα, καθώς μια αρκεί για να καλύψει τις απαιτήσεις της εφαρμογής. Έτσι, αποφεύγεται η εισαγωγή περιττής πολυπλοκότητας τόσο στον τελικό ελεγκτή όσο και στην ανάλυση που θα ακολουθήσει.

Τέλος, ορίζουμε τα κανονικοποιημένα ως προς την συνάρτηση επίδοσης σφάλματα  $\xi_i(t)$ :

$$\xi_i(t) = \frac{s_i(t)}{\rho(t)}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.24)$$

καθώς και τις παραγώγους αυτών:

$$\dot{\xi}_i(t) = \frac{\dot{s}_i(t)\rho(t) - s_i(t)\dot{\rho}(t)}{\rho^2(t)} \stackrel{(3.24)}{=} \frac{\dot{s}_i(t) - \xi_i(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.25)$$

Γράφοντας την εξίσωση (3.24) ως διάνυσμα, προκύπτει:

$$\xi(t) = \frac{s(t)}{\rho(t)} = [\xi_1(t) \ \dots \ \xi_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m \quad (3.26)$$

και με την βοήθεια των εξισώσεων (3.2) και (3.21) έχουμε την διανυσματική μορφή της παραγώγου  $\dot{\xi}(t)$  ως:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \frac{\dot{s}(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \\ &= \frac{x^{(n)}(t) + d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \\ &= \frac{F(x) + G(x)u(t) + d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Όπως περιγράφεται στην παράγραφο 2.3, σημείο κλειδί για την επιτυχία του Ελέγχου Προδιαγεγραμμένης απόκρισης είναι οι συναρτήσεις μετασχηματισμού  $T$ . Έτσι λοιπόν, εδώ ορίζουμε τις συναρτήσεις μετασχηματισμού ως:

$$T(\xi_i) = \ln \left( \frac{1 + \xi_i(t)}{1 - \xi_i(t)} \right), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.28)$$

Και εδώ σημειώνεται πως θα μπορούσαμε να ορίσουμε προδιαγραφές για την υπερύψωση κάθε υποσυστήματος εισάγοντας μια διαφορετική συνάρτηση μετασχηματισμού  $T_i(\cdot)$  για κάθε υποσύστημα. Παρόλα αυτά, κάτι τέτοιο δεν είναι αναγκαίο για τις ανάγκες της παρούσας εφαρμογής αναγνώρισης οπότε επιλέγεται μια συνάρτηση μετασχηματισμού  $T(\cdot)$  για όλα τα υποσυστήματα, με σκοπό την απλοποίηση του σχήματος ελέγχου.

Τέλος, το διάνυσμα  $T(\xi)$  ορίζεται ως :

$$T(\xi(t)) = \begin{bmatrix} \ln \left( \frac{1+\xi_1(t)}{1-\xi_1(t)} \right) \\ \vdots \\ \ln \left( \frac{1+\xi_m(t)}{1-\xi_m(t)} \right) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

### 3.3 Μαθηματική Ανάλυση

#### 3.3.1 Πρόβλημα παρακολούθησης τροχιάς

Έστω το σύστημα της εξίσωσης (3.1) υπό τις υποθέσεις της παραγράφου 3.1.2, και οι προσεγγίσεις των αγνώστων συναρτήσεων του συστήματος των εξισώσεων *todo*.

Η είσοδος ελέγχου του συστήματος  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  επιλέγεται ως:

$$u(t) = -kT(\xi(t)) - \hat{\Phi}(x, t) - \hat{\Gamma}(x, t) (d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) \in \mathbb{R}^m \quad (3.29)$$

και οι νόμοι προσαρμογής των βαρών των προσεγγίσεων  $\hat{\varphi}_i(x)$  και  $\hat{\gamma}_{ij}(x)$  ως:

$$\begin{aligned}\dot{w}_{\varphi_i}(t) &= \beta_{\varphi_i} \frac{\xi_i(t)}{\rho(t)} Z_{\Phi}(x) \in \mathbb{R}^{q_{\Phi}}, & i &= 1, \dots, m \\ \dot{w}_{\gamma_{ij}}(t) &= \beta_{\gamma_{ij}} \frac{\xi_i(t)}{\rho(t)} (d_j(t) - \xi_j(t)\dot{\rho}(t)) Z_{\Gamma}(x) \in \mathbb{R}^{q_{\Gamma}}, & i, j &= 1, \dots, m\end{aligned}\quad (3.30)$$

όπου  $k$  θετικό κέρδος ελέγχου, και  $\beta_{\varphi_i}$  και  $\beta_{\gamma_{ij}}$  τα κέρδη αναγνώρισης του σχήματος, τα οποία πρέπει να είναι επίσης θετικά.

#### Θεώρημα:

Έστω ένα σύστημα ΠΕΠΕ που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.1) και ικανοποιεί τις υποθέσεις της παραγράφου 3.1.2. Για αυτό το σύστημα, η είσοδος ελέγχου της εξίσωσης (3.29) και οι νόμοι προσαρμογής της εξίσωσης (3.30) εγγυώνται πως 1) όλα τα σήματα κλειστού βρόγχου θα παραμένουν φραγμένα  $\forall t \geq 0$  και 2) τα σφάλματα καταστάσεων  $e_i^{(j)}(t)$  για  $i = 1, \dots, m$  και  $j = 0, \dots, n_i - 1$  θα συγκλίνουν στα σύνολα:

$$\bar{E}_{i,j} = \left\{ e_i^{(j)} \in \mathbb{R} : |e_i^{(j)}(t)| \leq \frac{2^{j-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t)}{\lambda^{n_i-j}} \right\} \quad (3.31)$$

**Απόδειξη** Έστω η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$\begin{aligned}V(x, t) &= \frac{\xi^T(t)G^{-1}(x)\xi(t)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\beta_{\varphi_i}} \tilde{w}_{\varphi_i}^T \tilde{w}_{\varphi_i} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{\beta_{\gamma_{ij}}} \tilde{w}_{\varphi_{\gamma_{ij}}}^T \tilde{w}_{\varphi_{\gamma_{ij}}}\end{aligned}\quad (3.32)$$

η οποία είναι θετικά ορισμένη αφού ο πίνακας  $G(x)$  είναι θετικά ορισμένος, και κατά συνέπεια και ο αντίστροφος πίνακας  $G^{-1}(x)$  είναι επίσης θετικά ορισμένος.

Παραγωγίζοντας την σχέση (3.32) έχουμε:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, t) &= \xi^T(t)G^{-1}(x)\dot{\xi}(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{\partial G^{-1}(x)}{\partial x_i^{(j)}} \frac{\partial}{\partial t} x_i^{(j)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\beta_{\varphi_i}} \tilde{w}_{\varphi_i}^T \dot{w}_{\varphi_i} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{\beta_{\gamma_{ij}}} \tilde{w}_{\varphi_{\gamma_{ij}}}^T \dot{w}_{\varphi_{\gamma_{ij}}}\end{aligned}\quad (3.33)$$

Καθώς υποθέτουμε συστήματα *Euler-Lagrange*, επεκτείνοντας την υπόθεση 2 για τις μερικές παραγώγους της  $G^{-1}(x)$  ( εξίσωση (3.5) ) προκύπτει:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{\partial G^{-1}(x)}{\partial x_i^{(j)}} \frac{\partial}{\partial t} x_i^{(j)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-2} \frac{\partial G^{-1}(x)}{\partial x_i^{(j)}} x_i^{(j+1)}$$

Ο λόγος που η υπόθεση 2 είναι τόσο σημαντική είναι ακριβώς επειδή μας επιτρέπει αυτή την απλοποίηση, χωρίς την οποία θα εμφανιζόταν στην ανάλυση μας οι είσοδοι  $u_i(t)$  με αγνώστους συντελεστές, καθιστώντας την ανάλυση μη εφικτή.

Στην συνέχεια, αντικαθιστώντας την σχέση (3.27) έχουμε

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, t) &= \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} G^{-1}(x) (F(x) + G(x)u(t) + d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-2} \frac{\partial G^{-1}(x)}{\partial x_i^{(j)}} x_i^{(j+1)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\beta_{\varphi_i}} \tilde{w}_{\varphi_i}^T \dot{w}_{\varphi_i} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{\beta_{\gamma_{ij}}} \tilde{w}_{\varphi_{\gamma_{ij}}}^T \dot{w}_{\varphi_{\gamma_{ij}}}\end{aligned}\quad (3.34)$$

Συνεχίζοντας με την ανάλυση του πρώτου όρου, αντικαθιστούμε την είσοδο ελέγχου  $u(t)$  από την εξίσωση (3.29):

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x) &:= \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} G^{-1}(x) (F(x) + G(x)u(t) + d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) \\ &= \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} (\Phi(x) + u(t) + \Gamma(x)(d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t))) \\ &= \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} (-kT(\xi(t)) + \tilde{\Phi}(x) + \tilde{\Gamma}(x)(d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)))\end{aligned}$$

Για το σφάλμα προσέγγισης  $\tilde{\Phi}(x)$ , έχουμε:

$$\begin{aligned}\xi^T(t)\tilde{\Phi}(x) &= [\xi_1(t) \quad \dots \quad \xi_m(t)]^T \cdot \left( \begin{bmatrix} \tilde{w}_{\varphi_1}^T Z_{\Phi}(x) \\ \vdots \\ \tilde{w}_{\varphi_m}^T Z_{\Phi}(x) \end{bmatrix} + \epsilon_{\varphi}(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \xi_i(t) \tilde{w}_{\varphi_i}^T Z_{\Phi}(x) + \xi^T(t) \epsilon_{\varphi}(x)\end{aligned}\quad (3.35)$$

Ομοίως για το σφάλμα  $\tilde{\Gamma}(x)$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned}\xi^T(t)\tilde{\Gamma}(x)(d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i(t)(d_j(t) - \xi_j(t)\dot{\rho}(t)) \tilde{w}_{\varphi_{\gamma_{ij}}}^T Z_{\Gamma}(x) \\ &\quad + \xi^T(t) \epsilon_{\Gamma}(x)(d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t))\end{aligned}\quad (3.36)$$

Για το επόμενο βήμα, αρχικά αντικαθιστώνται τα σφάλματα προσέγγισης των εξισώσεων (3.35) και (3.36) στην παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov ( εξίσωση (3.34) ). Στην συνέχεια αντικαθιστώνται οι νόμοι προσαρμογής της εξίσωσης (3.30) με αποτέλεσμα την απλοποίηση της εξίσωσης ως εξής:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, t) &= \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} (-kT(\xi(t)) + \epsilon_{\varphi}(x) + \epsilon_{\Gamma}(x)(d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t))) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-2} \frac{\partial G^{-1}(x)}{\partial x_i^{(j)}} x_i^{(j+1)}\end{aligned}\quad (3.37)$$

Σε αυτό το σημείο, είμαστε σε θέση να μελετήσουμε την χρονική εξέλιξη της δυναμικής του συστήματος κλειστού βρόγχου ως προς τον χρόνο. Αρχικά, η δυναμική κλειστού βρόγχου κάθε υποσυστήματος περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις:

$$\Sigma_i \begin{cases} \dot{e}_i^j = e_i^{j+1}, & j = 1, \dots, n_i - 1 \\ e_i^{(n_i)} = f_i(e - x_d) - \nu_i(t) + \sum_{j=1}^m g_{ij}(e - x_d)u_j(t) \\ \dot{\xi}_i(t) = \frac{f_i(e - x_d) + \sum_{j=1}^m g_{ij}(e - x_d)u_j(t) + d_i(t) - \xi_i(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \end{cases} \quad (3.38)$$

Ορίζοντας το διάνυσμα  $\Xi(t) := [e^T \quad \xi^T]^T$ , η δυναμική κλειστού βρόγχου του συνολικού συστήματος γράφεται ως:

$$\dot{\Xi} = H(t, \Xi) \quad (3.39)$$

και είναι συνεχής ως προς τον χρόνο  $t$  και το διάνυσμα  $\Xi$ . Επιπλέον, ορίζουμε το σύνολο  $\mathcal{X}_0$  ως:

$$\mathcal{X}_0 = \mathbb{R}^n \times (-1, 1)^m \quad (3.40)$$

Αρχικά, γνωρίζουμε από τον ορισμό του προβλήματος τις τιμές των  $x(0)$  και  $x_d(0)$ . Συνεπώς, καθώς η σταθερά  $|\rho(0)|$  επιλέγεται κατά την σχεδίαση του ελεγκτή, μπορούμε να την επιλέξουμε με τέτοιο τρόπο ώστε:

$$\xi_i(0) \in (-1, 1), \quad i = 1, \dots, m$$

Συνεπώς, την χρονική στιγμή  $t = 0$ , το διάνυσμα  $\Xi(0)$  ανήκει στο σύνολο  $\mathcal{X}_0$ . Εάν επικαλεστούμε το Θεώρημα (sontag maximal solution) του παραρτήματος για το δυναμικό σύστημα (3.39), προκύπτει πως θα υπάρχει μια μέγιστη (ή μη-επεκτάσιμη) λύση στο χρονικό διάστημα  $[0, \tau_{max})$  η οποία είναι μοναδική και ανήκει εξ ολοκλήρου στο σύνολο  $\mathcal{X}_0$ ,  $\forall t \in [0, \tau_{max})$ .

Στο χρονικό διάστημα αυτό, αφού τα κανονικοποιημένα σφάλματα  $|\xi_i(t)| < 1$ , επαληθεύεται η εξίσωση (3.22) με αποτέλεσμα τα σφάλματα  $e_i^{(j)}(t)$  να είναι φραγμένα στα σύνολα  $E_{i,j} \forall t \in [0, \tau_{max})$ . Κατά συνέπεια, και οι καταστάσεις του συστήματος  $x_i^{(j)}(t)$  είναι επίσης φραγμένες, αφού ισχύει:

$$x_i^{(j)}(t) = e_i^{(j)}(t) + x_{di}^{(j)}(t), \quad i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, n_i - 1$$

και η τροχιά  $x_d(t)$  είναι φραγμένη εξ υποθέσεως.

Με βάση τα παραπάνω, η τροχιά  $x(t)$  θα είναι φραγμένη σε ένα κλειστό σύνολο  $\mathcal{X}$  η μορφή του οποίου εξαρτάται από το σύνολο  $\mathcal{X}_d$  στο οποίο ανήκει η τροχιά αναφοράς και από τα σύνολα  $E_{i,j}$  στα οποία ανήκουν τα σφάλματα παρακολούθησης. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής, συμπεραίνουμε πως οι συνεχείς συναρτήσεις  $\epsilon_{\varphi_i}(x)$ ,  $\epsilon_{\gamma_{ij}}(x)$  και  $d_i(x)$  θα έχουν ένα άγνωστο άνω φράγμα σε αυτό το σύνολο  $\mathcal{X}$ .

Στην συνέχεια, ορίζουμε ως  $\pi(t)$  το διάνυσμα:

$$\pi(t) := \epsilon_{\varphi}(x(t)) + \epsilon_{\Gamma}(x(t))(d(t) - \xi(t)\dot{\rho}(t)) \in \mathbb{R}^m \quad (3.41)$$

Εφόσον, οι συναρτήσεις  $\rho(t)$  και  $\dot{\rho}(t)$  είναι φραγμένες εκ κατασκευής και οι υπόλοιποι όροι του  $\pi(t)$  είναι φραγμένοι, έτσι και το μέτρο του διανύσματος  $\pi(t)$  θα έχει ένα άνω φράγμα  $\bar{\pi}$  στο διάστημα  $[0, \tau_{max})$ .

Ορίζουμε το βαθμωτό όρο  $\delta(t)$  ως:

$$\delta(t) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i-2} \frac{\partial G^{-1}(x)}{\partial x_i^{(j)}} x_i^{(j+1)} \in \mathbb{R} \quad (3.42)$$

Εξ υποθέσεως η  $G(x)$ , συνεπώς και η  $G^{-1}(x)$  είναι Lipschitz συνεχής στο  $\mathcal{X}$ , συνεπώς οι μερικοί παράγωγοι της παραπάνω σχέσης θα είναι φραγμένοι σε αυτό το  $\mathcal{X}$ . Έτσι συμπεραίνουμε πως ο όρος  $\delta(t)$  έχει ένα άγνωστο άνω φράγμα  $\bar{\delta}$  στο  $[0, \tau_{max})$ .

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.41) και (3.42) στην παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov (εξίσωση (3.37)) έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &= -k \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} (T(\xi(t)) + \pi(t)) + \delta(t) \\ &\leq -k \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} T(\xi(t)) + \|\xi(t)\| \cdot \|\pi(t)\| + |\delta(t)| \\ &\leq -k \frac{\xi^T(t)}{\rho(t)} T(\xi(t)) + \|\xi(t)\| \bar{\pi} + \bar{\delta} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Τέλος, αφού στο διάστημα  $[0, \tau_{max})$  τα  $\xi_i(t)$  είναι φραγμένα στο διάστημα  $(-1, 1)$ , το μέτρο του διανύσματος  $\|\xi(t)\|$  είναι μικρότερο του  $\sqrt{m}$ , και έτσι καταλήγουμε στην ανίσωση:

$$\dot{V}(x, t) \leq -\frac{k}{\rho(t)} \sum_{i=1}^m \xi_i(t) \ln \left( \frac{1 + \xi_i(t)}{1 - \xi_i(t)} \right) + \sqrt{m} \bar{\pi} + \bar{\delta}$$

Καθώς όλοι οι όροι του αθροίσματος  $\xi_i(t) T(\xi_i(t))$  είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του μηδενός, από την εξίσωση (3.3.1) βγαίνει το συμπέρασμα:

$$\exists \bar{\xi}_i \in (0, 1) : |\xi_i(t)| > \bar{\xi}_i \implies \dot{V} < 0, \quad i = 1, \dots, m \quad \forall t \in [0, \tau_{max})$$

Συνεπώς, έχουμε δείξει πως το σύστημα εξισώσεων (3.39), για  $t = 0$  ανήκει στο σύνολο  $\mathcal{X}_0$  της εξίσωσης (3.40), και για  $\forall t \in [0, \tau_{max})$  παραμένει φραγμένο εντός του συνόλου:

$$\mathcal{X}_f = \bigtimes_{i=1}^m \left( \bigtimes_{j=0}^{n_i-1} E_{i,j} \right) \times (-\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_i)$$

το οποίο είναι υποσύνολο του  $\mathcal{X}_0$ . Έτσι, χρησιμοποιώντας το πόρισμα (sontag maximal contradiction), συμπεραίνουμε πως το  $\tau_{max}$  μπορεί να επεκταθεί στο  $\infty$ .

Με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύεται ότι τα κανονικοποιημένα σφάλματα  $\xi_i(t)$  παραμένουν φραγμένα στο σύνολο  $(-1, 1) \quad \forall t \geq 0$ , εξασφαλίζοντας έτσι πως τα σφάλματα  $e_{i,j}$  συγκλίνουν στα σύνολα  $\bar{E}_{i,j}$ , διασφαλίζοντας το πρόβλημα παρακολούθησης της τροχιάς  $x_d(t)$  για το σύστημα 3.1.  $\square$

Μέχρι στιγμής, το μόνο που έχει αποδειχθεί είναι η ικανότητα του προτεινόμενου σχήματος να λύνει το πρόβλημα παρακολούθησης τροχιάς για το σύστημα 3.1, χωρίς να έχει γίνει κάποια αναφορά στην σύγκλιση των παραμετρικών σφαλμάτων  $\tilde{w}_{\varphi_i}(t)$  και  $\tilde{w}_{\gamma_{ij}}(t)$ .

### 3.3.2 Παραμετροποίηση του Συστήματος Αναφοράς

Για την επιτυχία της αναγνώρισης των συναρτήσεων  $\Phi(x)$  και  $\Gamma(x)$ , πρέπει να σχεδιαστεί μια τροχιά  $x_d(t)$  η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις της υποπαραγράφου (3.2.2), και ταυτόχρονα ικανοποιεί την συνθήκη επιμένουσας διέγερσης για το μοντέλο προσέγγισης που έχουμε επιλέξει.

Προς αυτή την κατεύθυνση, χρησιμοποιείται η θεωρία που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 2.4, για τον σχεδιασμό των υποσυστημάτων αναφοράς  $\Sigma_i$ . Σύμφωνα με την παράγραφο 2.4 λοιπόν, η είσοδος  $\nu_i(t)$  κάθε υποσυστήματος επιλέγεται ως:

$$\nu_i(t) = \sum_{k=n_i+1}^{2(n_i+1)} \prod_{l=1}^{n_i} (k-l) \alpha_k t^{k-n_i-1} \quad (3.44)$$

Κατά την διάρκεια της κλειστής περιοδικής τροχιάς, είναι επιθυμητό η τροχιά αναφοράς  $x_d(t)$  να επισκέπτεται όλα τα κέντρα των διανυσμάτων οπισθοδρομητών  $Z_\Phi(x)$  και  $Z_\Gamma(x)$ .

Λύνοντας την εξίσωση (2.21) της παραγράφου 2.4, μπορούμε κάθε φορά να παραμετροποιήσουμε τις εισόδους αναφοράς  $\nu_i(t)$ , έτσι ώστε η τροχιά  $x_d(t)$  να υλοποιεί μια επιθυμητή μετάβαση  $c_i \rightarrow c_j$  (όπου  $c_i$  και  $c_j$  κέντρα του νευρωνικού δικτύου) μέσα σε έναν επιθυμητό χρόνο  $\Delta T$ . Έτσι η κλειστή περιοδική τροχιά σχηματίζεται ως μια σειρά μεταβάσεων, που τελικά διέρχεται από όλα τα κέντρα των νευρωνικών δικτύων.

Τέλος, σημειώνεται πως με κατάλληλη επιλογή των συνοριακών συνθηκών  $x_{di}^{(n_i)}(t)$  και  $x_{di}^{(n_i)}(t + \Delta T)$ , μπορεί κανείς να εγγυηθεί την συνέχεια των εισόδων αναφοράς  $\nu_i(t)$ , το οποίο είναι απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύει η μαθηματική ανάλυση του σχήματος.

### 3.3.3 Επιμένουσα Διέγερση

Έχοντας σχεδιάσει μια κλειστή περιοδική τροχιά  $x_d(t)$  που διέρχεται από όλα τα κέντρα, μένει να δείξουμε πως με κατάλληλη επιλογή των κερδών του ελεγκτή, μπορούμε να εγγυηθούμε ικανοποίηση της ΣΕΔ για το προτεινόμενο σχήμα αναγνώρισης.

**Πρόταση(Αναγνώριση Δυναμικής):** Έστω το σύστημα 3.1 υπό τις υποθέσεις της παραγράφου 3.1.2, με την είσοδο αναφοράς της εξίσωσης (3.29), τους νόμους προσαρμογής της εξίσωσης (3.30) και το σύστημα αναφοράς της παραγράφου 3.3.2. Για το σύστημα αυτό, εάν επιλεγθεί το κέρδος  $\lambda$  και η συνάρτηση επίδοσης  $\rho(t)$  έτσι ώστε:

$$\frac{2^{j-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t)}{\lambda^{n_i-j}} < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} \{\|c_i - c_j\|\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n_i - 1 \quad (3.45)$$



τότε τα βάρη  $\hat{w}_{\varphi_i}(t)$  και  $\hat{w}_{\gamma_{ij}}(t)$  των προσεγγίσεων  $\hat{\Phi}(x)$  και  $\hat{\Gamma}(x)$  θα συγκλίνουν σε μια περιοχή των βέλτιστων τιμών τους.

#### Απόδειξη

Έστω  $\bar{\epsilon}$  το μέγιστο σφάλμα μόνιμης κατάστασης της τροχιάς  $x(t)$ , από την εξίσωση (3.31):

$$\bar{\epsilon} = \max_{i,j} \left\{ \frac{2^{j-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t)}{\lambda^{n_i-j}} \right\} \quad (3.46)$$

Τότε, θα υπάρχει ένα  $T_0$  για το οποίο η τροχιά  $x(t)$  θα ανήκει στο σύνολο:

$$B_t(x_d(t), \bar{\epsilon}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x(t) - x_d(t)\| \leq \bar{\epsilon}\}, \quad t \geq T_0 \quad (3.47)$$

Στην συνέχεια ορίζουμε τα σφαιρικά σύνολα  $B_i$  γύρω από τα κέντρα των νευρωνικών δικτύων  $c_i$  ως εξής:

$$B_i(c_i, \bar{\epsilon}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x(t) - c_i\| \leq \bar{\epsilon}\} \quad (3.48)$$

Εφόσον ισχύει η εξίσωση (3.45), τα σύνολα  $B_i$  της εξίσωσης (3.48) δεν επικαλύπτονται μεταξύ τους. Συνεπώς, αφού η τροχιά  $x_d(t)$  είναι ομαλή και περιοδική με περίοδο  $T$ , και καθώς έχουμε αποδείξει στην παράγραφο 3.3.2 πως διέρχεται από όλα τα κέντρα, δηλαδή:

$$\exists t_i : x_d(t_i + mT) = c_i, \quad m \in \mathbb{N}$$

για κάθε κέντρο  $c_i$ , τότε θα υπάρχει μια θετική σταθερά  $\delta t$  έτσι ώστε:

$$B_t(x_d(t), \bar{\epsilon}) \subset B_i(c_i, \bar{\epsilon}), \quad \forall t \in \left[ t_i + mT - \frac{\delta t}{2}, t_i + mT + \frac{\delta t}{2} \right] \cap [T_0, \infty)$$

δηλαδή ένα χρονικό διάστημα  $\delta t$  για το οποίο η τροχιά  $x(t)$  βρίσκεται στην  $\bar{\epsilon}$ -γειτονία του κέντρου  $c_i$ , σε κάθε περίοδο. Συνεπώς, η τροχιά  $x(t)$  ικανοποιεί το θεώρημα (todo:label), και κατ' επέκταση την συνθήκη επιμένουσας διέγερσης του ορισμού (πάλι, todo).

Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

□

### 3.4 Παρατηρήσεις

## **Κεφάλαιο 4**

### **(τίτλος κεφαλαίου 2)**

#### **4.1 (τίτλος ενότητας 2.1)**

##### **4.1.1 (τίτλος υποενότητας 2.1.1)**

□

## Κεφάλαιο 5

### Βιβλιογραφία

- [1] AJ Kurdila, Francis J Narcowich, and Joseph D Ward. Persistency of excitation in identification using radial basis function approximants. *SIAM journal on control and optimization*, 33(2):625–642, 1995.
- [2] Jooyoung Park and Irwin W Sandberg. Universal approximation using radial-basis-function networks. *Neural computation*, 3(2):246–257, 1991.
- [3] Charalampos P Bechlioulis and George A Rovithakis. Robust adaptive control of feedback linearizable mimo nonlinear systems with prescribed performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(9):2090–2099, 2008.
- [4] Michael Green and John B Moore. Persistence of excitation in linear systems. In *American Control Conference, 1985*, pages 412–417. IEEE, 1985.
- [5] Hiroyuki Miyamoto, Mitsuo Kawato, Tohru Setoyama, and Ryoji Suzuki. Feedback-error-learning neural network for trajectory control of a robotic manipulator. *Neural networks*, 1(3):251–265, 1988.
- [6] Robert M Sanner and Jean-Jacques E Slotine. Stable recursive identification using radial basis function networks. In *American Control Conference, 1992*, pages 1829–1833. IEEE, 1992.
- [7] Songwu Lu and Tamer Basar. Robust nonlinear system identification using neural-network models. *IEEE Transactions on Neural networks*, 9(3):407–429, 1998.
- [8] Chengzhi Yuan and Cong Wang. Persistency of excitation and performance of deterministic learning. *Systems & Control Letters*, 60(12):952–959, 2011.
- [9] Tongjia Zheng and Cong Wang. Relationship between persistent excitation levels and rbf network structures, with application to performance analysis of deterministic learning. *IEEE transactions on cybernetics*, 47(10):3380–3392, 2017.
- [10] Cong Wang, David J Hill, and Guanrong Chen. Deterministic learning of nonlinear dynamical systems. In *Intelligent Control. 2003 IEEE International Symposium on*, pages 87–92. IEEE, 2003.
- [11] Cong Wang and David J Hill. Learning from direct adaptive neural control. In *Control Conference, 2004. 5th Asian*, volume 1, pages 674–681. IEEE, 2004.

- [12] Cong Wang and David J Hill. Learning from neural control. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17(1):130–146, 2006.
- [13] Tengfei Liu and Cong Wang. Learning from neural control of general brunovsky systems. In *Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control, 2006 IEEE*, pages 2366–2371. IEEE, 2006.
- [14] Tengfei Liu and Cong Wang. Learning from neural control of strict-feedback systems. In *Control and Automation, 2007. ICCA 2007. IEEE International Conference on*, pages 636–641. IEEE, 2007.
- [15] Tengfei Liu, Cong Wang, and David J Hill. Learning from neural control of nonlinear systems in normal form. *Systems & Control Letters*, 58(9):633–638, 2009.
- [16] Cong Wang, Min Wang, Tengfei Liu, and David J Hill. Learning from iss-modular adaptive nn control of nonlinear strict-feedback systems. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 23(10):1539–1550, 2012.
- [17] Min Wang and Cong Wang. Learning from adaptive neural control for a class of pure-feedback systems. In *Control Automation Robotics & Vision (ICARCV), 2012 12th International Conference on*, pages 76–81. IEEE, 2012.
- [18] Min Wang and Cong Wang. Identification and learning control of strict-feedback systems using adaptive neural dynamic surface control. In *Control and Decision Conference (CCDC), 2013 25th Chinese*, pages 25–30. IEEE, 2013.
- [19] Shi-Lu Dai, Cong Wang, and Min Wang. Dynamic learning from adaptive neural network control of a class of nonaffine nonlinear systems. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 25(1):111–123, 2014.
- [20] Min Wang, Cong Wang, and Xiaoping Liu. Dynamic learning from adaptive neural control with predefined performance for a class of nonlinear systems. *Information Sciences*, 279:874–888, 2014.
- [21] Min Wang and Cong Wang. Learning from adaptive neural dynamic surface control of strict-feedback systems. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 26(6):1247–1259, 2015.
- [22] Min Wang, Cong Wang, Peng Shi, and Xiaoping Liu. Dynamic learning from neural control for strict-feedback systems with guaranteed predefined performance. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 27(12):2564–2576, 2016.
- [23] Mohammad Khazaei, Hossein Sadat-Hosseini, Ali Marjaninejad, and Sabalan Daneshvar. A radial basis function neural network approximator with fast terminal sliding mode-based learning algorithm and its application in control systems. In *Electrical Engineering (ICEE), 2017 Iranian Conference on*, pages 812–816. IEEE, 2017.
- [24] Feifei Yang and Cong Wang. Pattern-based nn control of a class of uncertain nonlinear systems. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 2017.

- [25] Min Wang and Anle Yang. Dynamic learning from adaptive neural control of robot manipulators with prescribed performance. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 47(8):2244–2255, 2017.
- [26] Shi-Lu Dai, Min Wang, and Cong Wang. Neural learning control of marine surface vessels with guaranteed transient tracking performance. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(3):1717–1727, 2016.
- [27] Danfeng CHEN Cong WANG Xunde DONG. Modeling of nonlinear dynamical systems based on deterministic learning and structural stability. *Science*, 9:008, 2016.
- [28] Wikipedia contributors. Radial basis function — Wikipedia, the free encyclopedia, 2018. [Online; accessed 17-April-2018].
- [29] Charalampos P Bechlioulis and George A Rovithakis. Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems. *Automatica*, 45(2):532–538, 2009.
- [30] Charalampos P Bechlioulis and George A Rovithakis. A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems. *Automatica*, 50(4):1217–1226, 2014.
- [31] Charalampos P Bechlioulis, Achilles Theodorakopoulos, and George A Rovithakis. Output feedback stabilization with prescribed performance for uncertain nonlinear systems in canonical form. In *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*, pages 5084–5089. IEEE, 2013.
- [32] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.