

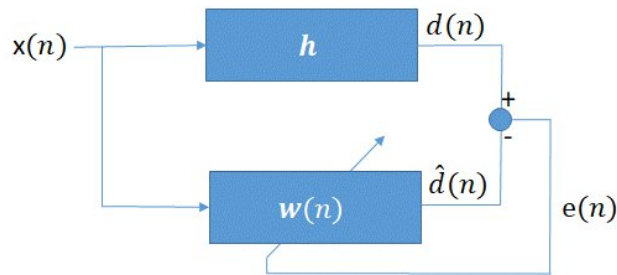
Στατιστική Επεξεργασία Σήματος και Μάθηση

Πρώτη Εργαστηριακή Άσκηση

Ακαδημαϊκό Έτος 2023/24

Ταυτοποίηση Άγνωστου Συστήματος (System Identification)

Ένα από τα βασικά προβλήματα της Στατιστικής Επεξεργασίας Σήματος είναι η αναγνώριση της συνάρτησης μεταφοράς ενός άγνωστου συστήματος (system identification) το οποίο, γενικά, μπορεί να είναι χρονικά μεταβαλλόμενο. Στην συνέχεια, θεωρήστε πως το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα φίλτρο FIR και ο στόχος της διαδικασίας ταυτοποίησης είναι η εκτίμηση των συντελεστών του εν λόγω φίλτρου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η διαδικασία της ταυτοποίησης συστήματος

Το σήμα εισόδου $x(n)$ θεωρήστε πως είναι λευκός Gaussian θόρυβος με μέση τιμή 0 και διασπορά 1, και πως αποτελείται από 2000 δείγματα. Επίσης, θεωρήστε πως το άγνωστο σύστημα περιγράφεται από το FIR φίλτρο $h(n)$, με κρουστική απόκριση

$$h(n) = 51.0\delta(n) - 41.6\delta(n-1) - 30.73\delta(n-2) + 200.15\delta(n-3).$$

Ζητούμενα:

1. Υπολογίστε (θεωρητικά) το βέλτιστο φίλτρο Wiener w για την εκτίμηση του h , για μήκη φίλτρων 3, 4, 5. Υπολογίστε το ελάχιστο σφάλμα σε κάθε περίπτωση.

(*hints*: 1) $d(n) = x^T(n)h$, 2) $r_{dx} = E\{d(n)x(n)\} = E\{x(n)x^T(n)h\}$, 3) $r_d(0) = E\{d^2(n)\} = E\{h^T x(n)x^T(n)h\}$, όπου $h = [h(0), h(1), \dots, h(p-1)]^T$, $x(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-p+1)]^T$).

2. Εφαρμόστε τους αλγορίθμους LMS, windowed LMS (wLMS) και RLS για να εκτιμήσετε τους συντελεστές του φίλτρου, για τα μήκη 3, 4, και 5. Ο wLMS είναι μία παραλλαγή του κλασσικού

LMS αλγορίθμου, ο οποίος αξιοποιεί ένα κυλιόμενο παράθυρο (μεγέθους > 0) από δείγματα για να υπολογίσει τον παράγοντα διόρθωσης του **LMS**. Στην ουσία ο αλγόριθμος αυτός αξιοποιεί περισσότερη γνώση από τον παραδοσιακό **LMS** για τον υπολογισμό του διανύσματος $\nabla \xi$. Πιο συγκεκριμένα, τα βήματα του **wLMS** είναι τα εξής:

$$\begin{aligned} y(n - ws:n) &= x(n - ws:n)^T w_n \\ e(n - ws:n) &= d(n - ws:n) - y(n - ws:n) \\ w_{n+1} &= w_n + \mu x(n - ws:n) e(n - ws:n), \end{aligned}$$

όπου ws το μέγεθος του κυλιόμενου παραθύρου, $w_n \in \mathbb{R}^{p \times 1}$, $y(n - ws:n) \in \mathbb{R}^{ws \times 1}$, $e(n - ws:n) \in \mathbb{R}^{ws \times 1}$, και $x(n - ws:n) \in \mathbb{R}^{p \times ws}$.

Στα πλαίσια του ερωτήματος αυτού, εφαρμόστε τα εξής:

Για τον LMS: Καθορίστε το μέγιστο μέγεθος βήματος μ_{\max} ώστε ο αλγόριθμος να συγκλίνει υπό την έννοια της μέσης τιμής, και χρησιμοποιήστε βήμα $\mu = 0.01 \mu_{\max}$.

Για τον wLMS: Πειραματιστείτε με δύο διαφορετικά μήκη παραθύρου και το ίδιο βήμα $\mu = 0.01 \mu_{\max}$, μέσα στα οποία θα υπολογίζεται ο παράγοντας διόρθωσης του **wLMS**.

Για τον RLS: Χρησιμοποιήστε παράγοντα λήθης α) $\lambda = 1$, και β) $\lambda = 0.9$.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, να επαναλάβετε τις μετρήσεις για 100 διαφορετικές υλοποιήσεις του σήματος αναφοράς $d(n)$, αρχικοποιώντας κάθε φορά το φίλτρο με μηδενικούς συντελεστές. Για κάθε υλοποίηση, υπολογίστε το στιγμιαίο τετραγωνικό σφάλμα $e^2(n)$ συναρτήσει του n , και υπολογίστε το μέσο όρο του για όλες τις υλοποιήσεις.

i) Για κάθε μήκος φίλτρου σχεδιάστε στο ίδιο διάγραμμα τις καμπύλες μάθησης (δηλαδή, του σφάλματος) των τριών αλγορίθμων για όλες τις τιμές των παραμέτρων (ένα διάγραμμα ανά μήκος φίλτρου).

ii) Επιλέξτε μία υλοποίηση και σχεδιάστε την εξέλιξη των εκτιμώμενων συντελεστών στο χρόνο (και για τους τρεις αλγορίθμους), συμπεριλαμβάνοντας στο διάγραμμα τις πραγματικές τιμές των συντελεστών (ένα διάγραμμα ανά μήκος φίλτρου).

Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας (πώς επιδρούν οι παράμετροι μ , λ , στην ταχύτητα σύγκλισης των αλγορίθμων και στην ποιότητα των εκτιμήσεων; ποιος αλγόριθμος έχει καλύτερη απόδοση και γιατί; πώς επηρεάζει το μέγεθος του παραθύρου την σύγκλιση του αλγορίθμου **wLMS**;
Bonus: Εάν το μήκος παραθύρου είναι ίσο με τον αριθμό δειγμάτων του σήματος εισόδου $x(n)$, δηλαδή 2000, ποια λύση προσεγγίζει ο **wLMS**;

3. Στο ερώτημα αυτό θα χρησιμοποιήσετε τους δύο επισυναπτόμενους πίνακες για να περιγράψετε την μορφή του χρονικά μεταβλητού h που αντιστοιχεί στο άγνωστο σύστημα. Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας $x.mat$ περιγράφει 100 υλοποιήσεις του αρχικού σήματος εισόδου $x(n)$, ενώ αντίστοιχα ο πίνακας $d.mat$ περιγράφει 100 υλοποιήσεις του σήματος αναφοράς $d(n)$, το οποίο προέκυψε όμως από το άγνωστο h (μήκος φίλτρου ίσο με 3). Ο στόχος σας είναι

αξιοποιώντας τους δύο αυτούς πίνακες να καταλήξετε στην μορφή του άγνωστου συστήματος. Πιο συγκεκριμένα:

i) Υπολογίστε τους συντελεστές w με βάση τις εξισώσεις του Wiener-Hopf, τον **LMS**, **wLMS** και **RLS**.

ii) Κατασκευάστε την καμπύλη μάθησης και σχεδιάστε την εξέλιξη των συντελεστών w με βάση τους τρεις προσαρμοστικούς αλγορίθμους.

iii) Τι παρατηρείτε σε σχέση με την λύση των εξισώσεων Wiener-Hopf; Ποιο είναι τώρα το χρονικά μεταβλητό διάνυσμα $h \in \mathbb{R}^3$ που περιγράφει το άγνωστο σύστημα;

Διαδικαστικά

- Προθεσμία παράδοσης: **20/2/2023**.
- Η τεχνική αναφορά με τα αποτελέσματα, τα σχόλια και τον κώδικα που γράψατε παραδίδεται ηλεκτρονικά μέσω eclass.
- Για ερωτήσεις σχετικά με την εργασία, μπορείτε να απευθύνεστε στον Υποψήφιο Διδάκτορα Νίκο Πυτερίγκο (piperigkos @ ceid.upatras.gr).