Algoritmos de Ordenação
HeapSort

Estrutura de Dados II

Prof. João Dallyson Sousa de Almeida
Núcleo de Computação Aplicada NCA - UFMA
Dep. De Informática - Universidade Federal do Maranhão

Apresentação

- Ementa
  - Algoritmos de ordenação e busca.
  - Árvore de busca multidirecional balanceada.
  - Hashing. Noções de organização de arquivos.
  - Noções de grafos: conceitos, coloração, árvores geradoras..
  - Algoritmos em grafos: caminho mínimo, fluxo máximo e outros.

- Bibliografia: básica

  - CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. Algoritmos: Teoria e Prática. Editora Campus, 2002
  - Algorithms 4th edition by R. Sedgewick and K. Wayne, Addison-Wesley Professional, 2011, ISBN 0-321-57351-X
  - Ziviani, N. Projeto de Algoritmos Com Implementações em Pascal e C, Cengage Learning, 2004.

- Bibliografia: complementar

  - TENENBAUM, Aaron; LANGSAM, Yedidyah; AUGENSTEIN, Moshe J. Estruturas de dados usando C. São Paulo: Makron Books, 1995. ISBN: 9788534603485
  - ASCENCIO, Ana Fernanda Gomes; ARAUJO, Graziela Santos. Estruturas de Dados: Algoritmos, análise da complexidade e implementações em Java e C/C++. Pearson Prentice Hall, 2010
  - DROZDEK, Adam. Adam Drozdek. Data Structures and Algorithms in Java. 2. Cengage Learning. 2004. 2. Cengage Learning. 2004
  - GOODRICH, Michael T. Estruturas de dados e algoritmos em java. 4 ED. Porto Alegre: Bookman, 2007. 600.
  - SKIENA, Steven S.. The Algorithm Design Manual. 2. Springer-Verlag. 2008

HeapSort

- Possui o mesmo princípio de funcionamento da ordenação por seleção.

- Algoritmo:
  - Selecione o menor item do vetor.
  - Troque-o com o item da primeira posição do vetor.
  - Repita estas operações com os n – 1 itens restantes, depois com os n – 2 itens, e assim sucessivamente.
- O custo para encontrar o menor (ou o maior) item entre n itens é n – 1 comparações.
- Isso pode ser reduzido utilizando uma fila de prioridades.

HeapSort

- **Filas de Prioridades**
  - É uma estrutura de dados onde a chave de cada item reflete sua habilidade relativa de abandonar o conjunto de itens rapidamente.

- Aplicações:
  - SOs usam filas de prioridades, nas quais as chaves representam o tempo em que eventos devem ocorrer.
  - Métodos numéricos iterativos são baseados na seleção repetida de um item com maior (menor) valor.
  - Sistemas de gerência de memória usam a técnica de substituir a página menos utilizada na memória principal por uma nova página.

Filas de Prioridades

- **Filas de Prioridades - Tipo Abstrato de Dados**
  - Operações:
    - Constrói uma fila de prioridades a partir de um conjunto com n itens.
    - Informa qual é o maior item do conjunto.
    - Retira o item com maior chave.
    - Insere um novo item.
    - Aumenta o valor da chave do item i para um novo valor que é maior que o valor atual da chave.
    - Substitui o maior item por um novo item, a não ser que o novo item seja maior.
    - Altera a prioridade de um item.
    - Remove um item qualquer.
    - Ajunta duas filas de prioridades em uma única.

Filas de Prioridades

- Representação através de uma lista linear ordenada:
  - Neste caso, Constrói leva tempo O(n log n).
  - Insere é O(n).
  - Retira é O(1).
  - Ajunta é O(n).

- Representação é através de uma lista linear não ordenada:
  - Neste caso, Constrói tem custo linear.
  - Insere é O(1).
  - Retira é O(n).
  - Ajunta é O(1) para apontadores e O(n) para arranjos.

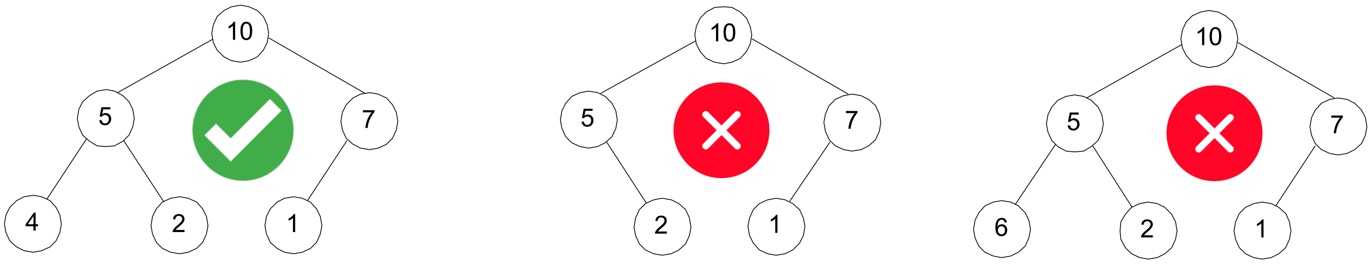
Estrutura do Heap

- **Filas de Prioridades – Representação**
  - A melhor representação é através de uma estruturas de dados chamada *heap*:
    - Neste caso, Constrói é O(n).
    - Insere, Retira, Substitui e Altera são O(log n).
- **Observação**:
  - Para implementar a operação Ajunta de forma eficiente e ainda preservar um custo logarítmico para as operações Insere, Retira, Substitui e Altera é necessário utilizar estruturas de dados mais sofisticadas, tais como árvores binomiais (Vuillemin, 1978).

Heap e Filas de Prioridades

- **Filas de Prioridades - Algoritmos de Ordenação**
  - As operações das filas de prioridades podem ser utilizadas para implementar algoritmos de ordenação.
  - Basta utilizar repetidamente a operação Insere para construir a fila de prioridades.
  - Em seguida, utilizar repetidamente a operação Retira para receber os itens na ordem reversa.
  - O uso de *heaps* corresponde ao método Heapsort .

Ilustração de Heap



HeapSort

- Heaps
  - É uma seqüência de itens com chaves c[1], c[2], . . . , c[n], tal que:

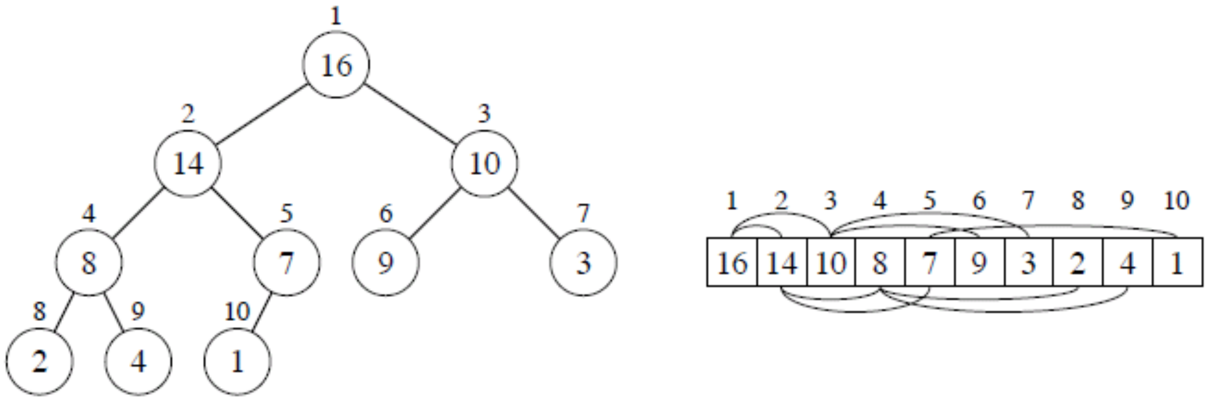
$$c[i] \geq c[2i],$$

$$c[i] \geq c[2i+1],$$

  - para todo i = 1, 2, . . . ,
  - MinHeap e MaxHeap

HeapSort

- **Heap** é uma **estrutura de prioridades** na forma de árvore binária semi-completa que representa uma ordem parcial entre os elementos do conjunto.



HeapSort

- Os nós são numerados de 1 a n.
- O primeiro nó é chamado raiz
  - O nó k/2 é o pai do nó k, para 1 < k <= n.
  - Os nós 2k e 2k + 1 são os filhos à esquerda e à direita do nó k, para 1 <= k <= k/2.

HeapSort

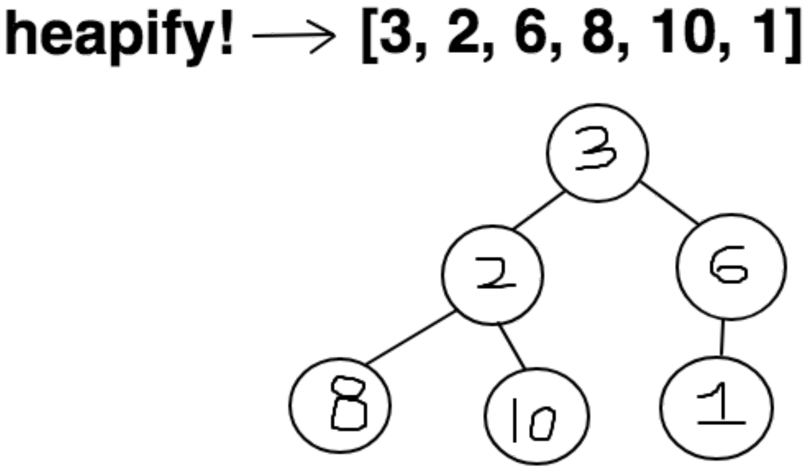
- As chaves na árvore satisfazem a condição do *heap*.
- As chaves em cada nós são maiores do que as chaves em seus filhos.
- A chave no nó raiz é a maior chave do conjunto
- Uma árvore binária completa pode ser representada por um arranjo

HeapSort

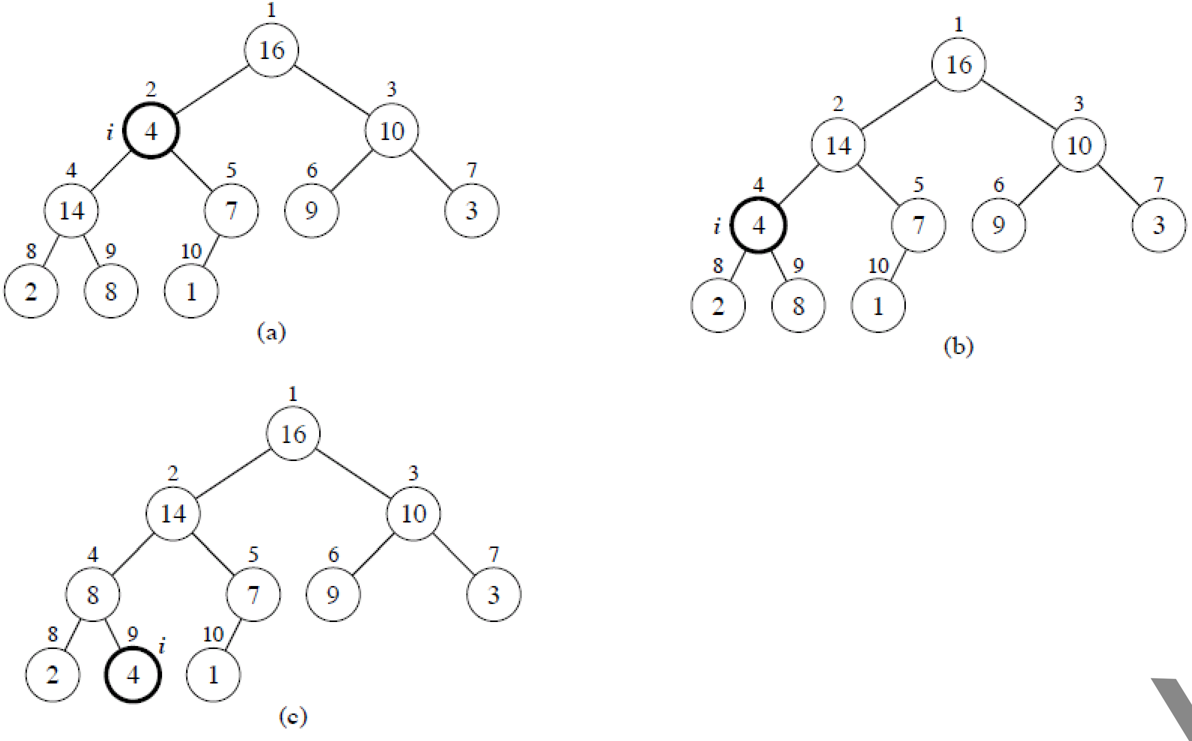
- Um algoritmo elegante para construir o *heap* foi proposto por Floyd em 1964.
- O algoritmo não necessita de nenhuma memória auxiliar.
- Dado um vetor v[1], v[2], . . . , v[n].
- Os itens v[n/2 + 1], v[n/2 + 2], . . . , v[n] formam um *heap*:
  - Neste intervalo não existem dois índices i e j tais que j = 2i ou j = 2i + 1.

HeapSort

- Funções
  - Max-Heapfy
  - Build Max-Heap
  - HeapSort



Max-Heapfy

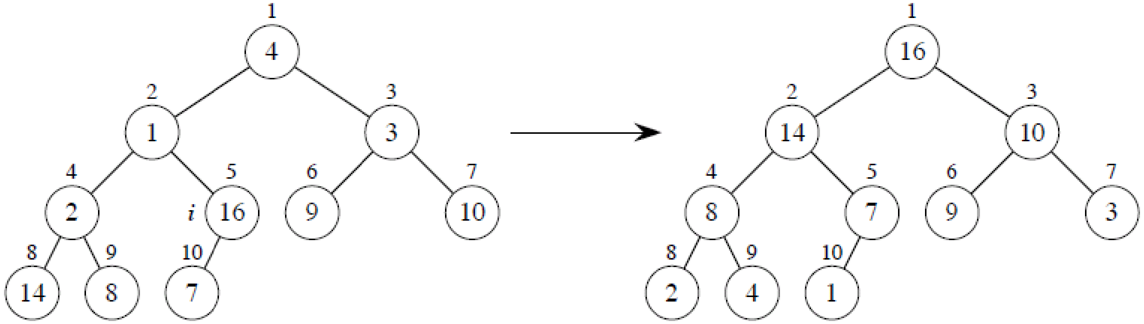


HeapSort

BUILD-MAX-HEAP(A, n)

for $i \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$ **downto** 1
    do MAX-HEAPIFY(A, i, n)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	4	1	3	2	16	9	10	14	8	7



HeapSort

$\text{MAX-HEAPIFY}(A, i, n)$

$l \leftarrow \text{LEFT}(i)$
$r \leftarrow \text{RIGHT}(i)$
if $l \leq n$ and $A[l] > A[i]$
  then $largest \leftarrow l$
  else $largest \leftarrow i$
if $r \leq n$ and $A[r] > A[largest]$
  then $largest \leftarrow r$
if $largest \neq i$
  then exchange $A[i] \leftrightarrow A[largest]$
    $\text{MAX-HEAPIFY}(A, largest, n)$

Heapsort

HEAPSORT(A, n)

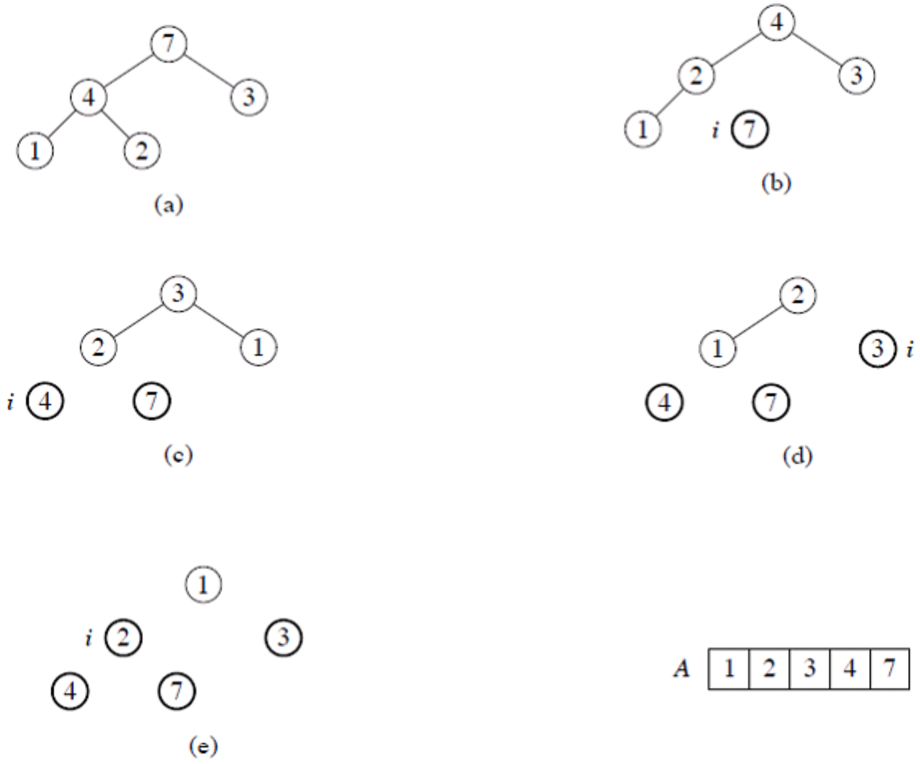
BUILD-MAX-HEAP(A, n)

for $i \leftarrow n$ **downto** 2

  do exchange $A[1] \leftrightarrow A[i]$

    MAX-HEAPIFY$(A, 1, i - 1)$

HeapSort



Análise do HeapSort

- Etapa1: Construir o Heap para uma dada lista

$$C_{worst}(n) = \sum_{i=0}^{h-1} \sum_{\text{level } i \text{ keys}} 2(h-i) = \sum_{i=0}^{h-1} 2(h-i)2^i = 2(n - \log_2(n+1)),$$

- Etapa2: Repetir a operação de remoção da raiz n-1 vezes (corrigir heap) no pior caso:

$$C(n) \le 2\lfloor \log_2(n-1) \rfloor + 2\lfloor \log_2(n-2) \rfloor + \cdots + 2\lfloor \log_2 1 \rfloor \le 2\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i$$

$$\le 2\sum_{i=1}^{n-1} \log_2(n-1) = 2(n-1)\log_2(n-1) \le 2n \log_2 n.$$

- Custo para pior e caso médio: $\Theta(n \log n)$

Heapsort

- Vantagens:
  - O comportamento do Heapsort é sempre O(n log n), qualquer que seja a entrada.
  - Não necessita de memória adicional.
- Desvantagens:
  - O anel interno do algoritmo é bastante complexo se comparado com o do Quicksort . (Cerca de 2x mais lento que o QuickSort)
  - O Heapsort não é **estável**.
- Recomendado:
  - Aplicações que não podem tolerar eventuais variação no tempo de espera de execução.
  - Não é recomendado para arquivos com poucos registros, por causa do tempo necessário para construir o *heap*.

Comparação entre os Métodos

	Complexidade
Inserção	$O(n^2)$
Seleção	$O(n^2)$
Shellsort	$O(n \log n)$
Quicksort	$O(n \log n)$
Heapsort	$O(n \log n)$

Comparação entre os Métodos

- Registros na ordem aleatória:

Qtd. /t	5.00	5.000	10.000	30.000
Inserção	11,3	87	161	–
Seleção	16,2	124	228	–
Shellsort	1,2	1,6	1,7	2
Quicksort	1	1	1	1
Heapsort	1,5	1,6	1,6	1,6

Comparação entre os Métodos

- Registros na ordem ascendente:

Qtd. /t	500	5.000	10.000	30.000
Inserção	1	1	1	1
Seleção	128	1.524	3.066	–
Shellsort	3,9	6,8	7,3	8,1
Quicksort	4,1	6,3	6,8	7,1
Heapsort	12,2	20,8	22,4	24,6

Comparação entre os Métodos

- Registros na ordem descendente:

Qtd. /t	500	5.000	10.000	30.000
Inserção	40,3	305	575	–
Seleção	29,3	221	417	–
Shellsort	1,5	1,5	1,6	1,6
Quicksort	1	1	1	1
Heapsort	2,5	2,7	2,7	2,9

Comparação entre os Métodos

- Shellsort , Quicksort e Heapsort têm a mesma ordem de grandeza.
- O Quicksort é o mais rápido para todos os tamanhos aleatórios experimentados.
- A relação Heapsort/Quicksort se mantém constante para todos os tamanhos, sendo o Heapsort mais lento.
- A relação Shellsort/Quicksort aumenta à medida que o número de elementos aumenta; para arquivos pequenos (500 elementos), o Shellsort é mais rápido que o Heapsort ; porém, quando o tamanho da entrada cresce, essa relação se inverte.
- Entre os algoritmos de custo $O(n^2)$, o Inserção é melhor para todos os tamanhos aleatórios experimentados.

Comparação entre os Métodos

- **Influência da ordem inicial do registros:**

	Shellsort			Quicksort			Heapsort		
	5.000	10.000	30.000	5.000	10.000	30.000	5.000	10.000	30.000
Asc	1	1	1	1	1	1	1,1	1,1	1,1
Des	1,5	1,6	1,5	1,1	1,1	1,1	1	1	1
Ale	2,9	3,1	3,7	1,9	2,0	2,0	1,1	1	1

- O Shellsort é bastante sensível à ordenação ascendente ou descendente da entrada;
- Em arquivos do mesmo tamanho, o Shellsort executa mais rápido para arquivos ordenados.
- O Quicksort é sensível à ordenação ascendente ou descendente da entrada.

Comparação entre os Métodos

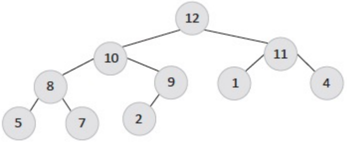
- Em arquivos do mesmo tamanho, o Quicksort executa mais rápido para arquivos ordenados
- O Quicksort é o mais rápido para qualquer tamanho para arquivos na ordem ascendente.
- O Heapsort praticamente não é sensível à ordenação da entrada.

Questão Discursiva (ENADE 2021)

QUESTÃO DISCURSIVA 05

Um *heap* binário é um arranjo que pode ser visualizado como uma árvore binária, sendo que cada nó da árvore corresponde a um elemento do arranjo, como pode ser observado na figura a seguir.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	10	11	8	9	1	4	5	7	2



Percebe-se que existem dois tipos de *heaps*: *heaps* máximo e *heaps* mínimo. O *heap* máximo é uma estrutura de dados que possibilita a consulta ou extração de forma eficiente do maior elemento de uma coleção. A propriedade de *heap* máximo especifica que um nó filho (no código calculado pelas funções *left* e *right*) tem sempre armazenado um valor menor ou igual ao seu pai.

CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. **Introduction to Algorithms**. 3. ed. MIT Press and McGraw-Hill. p. 131-161, 2009 (adaptado).

Considerando a implementação a seguir, o *heapify* é uma função auxiliar para reorganizar o arranjo (garantindo a propriedade de *heap* máximo em uma determinada posição do arranjo) e *buildHeap* é uma função que usa *heapify* para reorganizar todas as posições do arranjo (garantindo a propriedade de *heap* máximo para todos os elementos).

```
int left(int i) { return (2 * i + 1); }
int right(int i) { return (2 * i + 2); }
/* a - arranjo, n - número de elementos,
i - posição do elemento que deve ser
colocado em propriedade de heap */
void heapify (int *a, int n, int i)
{
    int e, d, max, aux;

    e = left(i);
    d = right(i);
    if (e < n && a[e] > a[i])
        max = e;
    else
        max = i;
    if (d < n && a[d] > a[max])
        max = d;
    if (max != i)
    {
        aux = a[i];
        a[i] = a[max];
        a[max] = aux;
        heapify(a, n, max);
    }
}
/a - arranjo, n - número de elementos */
void buildHeap(int *a, int n)
{
    int i;
    for (i = (n-1)/2; i >= 0; i--)
        heapify(a, n, i);
}
```

Questão Discursiva (ENADE 2021)

De acordo com as informações apresentadas, faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Como ficará o arranjo `int a[ ] = {2, 5, 8 ,13, 21, 1, 3, 34}` após a execução da função `buildHeap(a, 8)`. (valor: 5,0 pontos)

b) Apresente a complexidade de tempo no pior caso para a função *heapify*, use a notação O ou Θ. (valor: 5,0 pontos)

RASCUNHO	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

Referências

Básica

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. Algoritmos: Teoria e Prática. Editora Campus, 2002
- Ziviani, N. Projeto de Algoritmos Com Implementações em Pascal e C, Cengage Learning, 2004.

Complementar

- TENENBAUM, Aaron; LANGSAM, Yedidyah; AUGENSTEIN, Moshe J. *Estruturas de dados usando C. São Paulo: Makron Books, 1995. ISBN: 9788534603485*
- ASCENCIO, Ana Fernanda Gomes; ARAUJO, Graziela Santos. Estruturas de Dados: Algoritmos, análise da complexidade e implementações em Java e C/C++. Pearson Prentice Hall, 2010
- DROZDEK, Adam. Adam Drozdek. Data Structures and Algorithms in Java. 2. Cengage Learning. 2004. 2. Cengage Learning. 2004
- GOODRICH, Michael T. Estruturas de dados e algoritmos em java. 4 ED. Porto Alegre: Bookman, 2007. 600.
- SKIENA, Steven S.. The Algorithm Design Manual. 2. Springer-Verlag. 2008
- Notas de aula: prof. Ítalo Cunha – UFMG. 2012.

Perguntas....