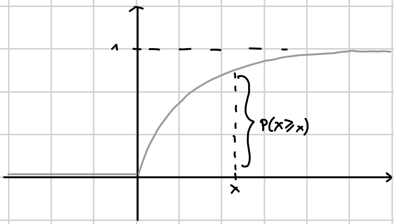
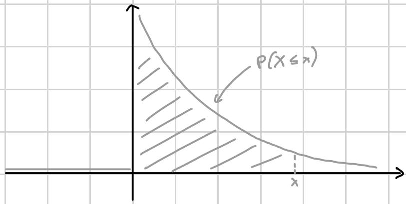
③ EKSPONENTNA PORAZDELITEV

Exp(λ) , $\lambda > 0$



$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; \text{ če } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases}$$

$$p_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , \text{ če } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{ če } x < 0 \end{cases}$$



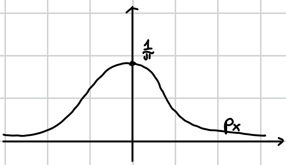
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)\, dt$$

- ZGLED

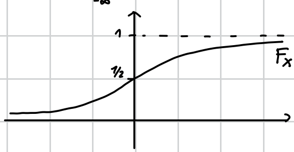
potreben čas, da se nekaj zgodi, npr. radioaktivni razpad

④ CAUCHYJEVA PORAZDELITEV

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad , x \in \mathbb{R}$$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$$



PRIMER - Slučajna spremenljivka, ki ni niti zvezna niti diskretna.

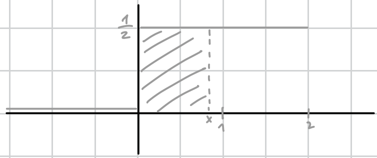
Vržemo pošten kovanec. Če pade grb, potem postavimo $X=1$, če pade cifra, potem naj bo X slučajno izbrano število na $[0,2]$. Določi porazdelitveno funkcijo.

$F_X(x) = P(X \le x)$, vzamemo $x \in [0,2]$

$= P(grb) \cdot P(X \le x \mid grb) + P(cifra) \cdot P(X \le x \mid cifra)$

Vzemimo torej najprej $x \in [0,1)$. Tedaj je

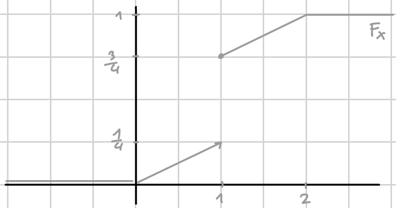
$F_X(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{4}$



Če je $x \in [1,2]$, potem je $F_X(x) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$

Ko vse predpise združimo dobimo porazdelitveno funkcijo z predpisom

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{če } x \le 0 \\ \frac{x}{4}, & \text{če } 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{4}, & \text{če } 1 \le x \le 2 \\ 1, & \text{če } x \ge 2 \end{cases}$$



Ker F_X ni zvezna, X ni zvezno porazdeljen.

Ker F_X ni odsekoma konstantna, X ni diskretno porazdelje

Slučajni vektorji in neodvisnost sluč. spremenljivk

↳ **SLUČAJNI VEKTOR**: je n-terica slučajnih spremenljivk $X=(X_1,X_2,\dots,X_n):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $w\longmapsto(X_1(w),X_2(w),\dots,W_n(w))$, z lastnostjo, da je množica $(X_1\le x_1, X_2\le x_2,\dots,X_n\le x_n):=\{w\in\Omega : X_1(w)\le x_1,\dots,X_n(w)\le x_n\}$ dogodek za vsako n-terico $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

Njegova porazdelitvena funkcija je

$$\boxed{F_X(x)\equiv F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,\dots,x_n):=P(X_1\le x_1,\dots,X_n\le x_n)}\quad,\quad F_X:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$$

↳ **LASTNOSTI SLUČAJNEGA VEKTORJA**

- Očitno je $0\le F_X(x)\le 1$ za vsak $x\in\mathbb{R}^n$
- Glede na vsako spremenljivko je naraščajoča funkcija in z desne zvezna
- $\lim\limits_{\substack{x_1\to\infty\\ \vdots\\ x_n\to\infty}} F_X(x)=1$, $\lim\limits_{\substack{x_1\to-\infty\\ \vdots\\ x_n\to-\infty}} F_X(x)=0$
- Če pošljemo samo nekatere x_i v neskončnost, dobimo porazdelitveno funkcijo podvektorja
  $$\lim_{x_n\to\infty} F_X(x)=F_{(X_1,\dots,X_{n-1})}(x_1,\dots,x_{n-1})$$
- Če pošljemo vse x_i v ∞ razen ene:
  $$\lim_{\substack{x_2\to\infty\\ \vdots\\ x_n\to\infty}} F_X(x)=F_{X_1}(x_1)$$

Te porazdelitve imenujemo robne (marginalne) porazdelitve

<u>Oglejmo si primer $n=2$</u>

$(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$, $w\longmapsto(X(w),Y(w))$

- Porazdelitvena funkcija: $F_{(X,Y)}(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$, $F_{(X,Y)}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
- Robni porazdelitvi:

$$\lim_{y\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y)=F_X(x)$$
$$\lim_{x\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y)=F_Y(y)$$

↳ V primeru ene slučajne spremenljivke X smo imeli $P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$

<u>Kaj velja za primer $n=2$?</u>

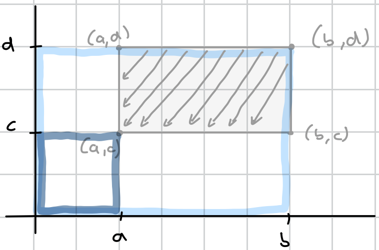
Izrazimo $P(a < X \le b, c < Y \le d)$ s porazdelitveno funkcijo $F_{(X,Y)} \equiv F$!

Najprej izračunajmo

$$P(a < X \le b, Y \le d) = P(X \le b, Y \le d) - P(X \le a, Y \le d) = F(b,d) - F(a,d)$$

V splošnem primeru pa:

$$\begin{aligned} P(a < X \le b, c < Y \le d) &= P(a < X \le b, Y \le d) - P(a < X \le b, Y \le c) = \\ &= F(b,d) - F(a,d) - (F(b,c) + F(a,c)) = \\ &= F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \end{aligned}$$



- $F(b,d)$

- $F(a,c)$

$$\begin{aligned} F(x,y) &= P(X \le x, Y \le y) = \\ &= P((X,Y) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y]) \end{aligned}$$

OMEJIMO SE NA DISKRETNE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

↳ Slučajni vektor $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je DISKRETNO PORAZDELJEN, če je njegova zaloga vrednosti končna ali števna množica točk.

Omejimo se na primer $n=2$: $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$

Tedaj sta X in Y diskretno porazdeljeni slučajni spremenljivki. Naj bo $\{x_1, x_2, \dots\}$ zaloga vrednosti za X, $\{y_1, y_2, \dots\}$ pa zaloga vrednosti za Y.

Potem je zaloga vrednosti (X,Y) vsebovana v množici:

$$\{(x_i, y_j) : i = 1,2,\dots, \ j = 1,2,\dots\}$$

Vpeljimo verjetnostno funkcijo

$$p_{ij} := P(X = x_i, Y = y_j) \quad i,j = 1,2,\dots$$

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_2
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\dots$	p_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	q_1	q_2	q_3	$\dots$	1

to je verjetnostna funkcija za slučajni vektor (X,Y)

$$p_{ij} := P(X=x_i) = P\Big(\bigcup_j (X=x_i,\ Y=y_j)\Big) = \sum_j P(X=x_i, Y=y_j) = \sum_j p_{ij}$$ → vsota po vrsticah

$$q_{ij} := P(Y=y_j) = \sum_i P(X=x_i, Y=y_j) = \sum_i p_{ij}$$

Ker je $\{(X=x_i, Y=y_j)\}_{ij}$ popoln sistem dogodkov, je $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

ZGLED:

Met dveh kock, X - število pik na prvi kocki, Y - število pik na drugi kocki

X \ Y	1	2	3	4	5	6	
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	....		$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	⋮					⋮	$\frac{1}{6}$
3	⋮					⋮	$\frac{1}{6}$
4	⋮					⋮	$\frac{1}{6}$
5	⋮					⋮	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	......				$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

↳ Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ so neodvisne, če za vsako $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ velja:

$$\boxed{F_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)}$$

Torej: $P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) = P(X_1 \le x_1) \dots P(X_n \le x_n)$

oziroma dogodki $(X_1 \le x_1), (X_2 \le x_2), \dots (X_n \le x_n)$ so neodvisni

↳ TRDITEV

Naj bo (X,Y) diskretno porazdeljen slučajni vektor: $p_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j)$, $p_i = P(X=x_i)$, $q_j = P(Y=y_j)$.

Potem sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki $\iff p_{ij} = p_i \cdot q_j$ za vse $i = 1,2,\dots$, $j = 1,2,\dots$

(matrika ima rang 1)

↳ DOKAZ $(\Leftarrow)$

$F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = P\Big(\bigcup_{i: x_i \le x} \bigcup_{j: y_j \le y} (X = x_i, Y = y_j)\Big) =$$
$$= \sum_{i: x_i \le x} \sum_{j: y_j \le y} p_{ij} = \sum_{i: x_i \le x} \sum_{j: y_j \le y} p_i q_j =$$
$$= \Big(\sum_{i: x_i \le x} p_i\Big)\Big(\sum_{j: y_j \le y} q_j\Big) =$$
$$= P(X \le x) \cdot P(Y \le y) =$$
$$= F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

$(\Rightarrow)$ Oznaka: $F_{(X,Y)} \equiv F$

$$p_{ij} = \lim_{h \searrow 0} P(x_i - h < X \le x_i,\ y_j - h < Y \le y_j) =$$
$$= \lim_{h \searrow 0} \big(F(x_i, y_j) - F(x_i - h, y_j) - F(x_i, y_j - h) + F(x_i - h, y_j - h)\big) =$$
$$= \lim_{h \searrow 0} \big(F_X(x_i) \cdot F_Y(y_j) - F_X(x_i - h) \cdot F_Y(y_j) - F_X(x_i) \cdot F_Y(y_j - h) + F_X(x_i - h) \cdot F_Y(y_j - h)\big) =$$
$$= \lim_{h \searrow 0} \big((F_X(x_i) - F_X(x_i - h)) \cdot (F_Y(y_j) - F_Y(y_j - h)\big) =$$
$$= P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) =$$
$$= p_i q_j$$

5.12

7. MATEMATIČNO UPANJE OZ. PRIČAKOVANA VREDNOST SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

- Za KONČNO slučajno spremenljivko $X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ je MATEMATIČNO UPANJE OZ. PRIČAKOVANA VREDNOST definirano s:

$$\boxed{E(X) := \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k}$$

Torej je v primeru $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ to enak povprečju vrednosti $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

- Naj ima X neskončno zalogo vrednosti:
  - → če je X diskretna; $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$, potem ima X matematično upanje oz. pričakovana vrednost, če je $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot p_k < \infty$ (konvergira), tedaj je matematično upanje definirano s

$$\boxed{E(X) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, p_k}$$

  - → Če je X zvezna z gostoto p_X, potem X ima matematično upanje, če je $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p_X(x)\, dx < \infty$, tedaj je matematično upanje definirano kot:

$$\boxed{E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x)\, dx}$$

- ZGLED:

① Izrojena slučajna spremenljivka $P(X = x_0) = 1$ oz. $X: \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies E(X) = x_0$

② $X \sim Ber(p)$, $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} \implies E(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

to je končna slučajna spremenljivka

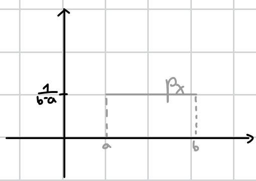
③ $X \sim Poi(\lambda)$: $p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

④ Enakomerna zvezna porazdelitev na $[a,b]$:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; \text{ če } a \le x \le b \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases}$$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

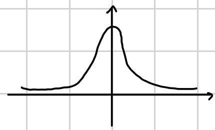
Očitno je $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p_X(x)\, dx < \infty$, torej imamo matematično upanje

⑤ $X \sim N(0,1)$: $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$

X ima matematično upanje : $I = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p_X(x)\,dx < \infty$

$$I = 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}(-1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} < \infty$$

Tedaj je $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{liha funkcija}}\,dx = 0$



⑥ Cauchyjeva porazdelitev

$p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

Nima mat. upanja : $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p_X(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2)\Big|_0^{\infty} = \infty$

↳ **TRDITEV**: Naj bo $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka in $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je $Y := f \circ X \equiv f(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ tudi slučajna spremenljivka.

↳ **TRDITEV**: ① Če je $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$, potem je $E(f(X)) = \sum_k f(x_k) \cdot p_k$ (če vrsta abs. konv.)

② Če je X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto p_X, je potem

$$E(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x)\,dx \quad \text{(če integral abs. konv.)}$$

DOKAZ ①

$f(X) = f \circ X : \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$

(če je $f(x_1) = f(x_2)$, potem je $f(x_1) \cdot (p_1 + p_2) = f(x_1) \cdot p_1 + f(x_2) \cdot p_2$) ■

↳ **OPOMBA** ② : $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_{f(X)}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x)\,dx$

↳ **POSLEDICA**: Slučajna spremenljivka X ima matematično upanje $\Leftrightarrow$ $|X|$ ima mat. upanje; tedaj velja $|E(X)| \leq E(|X|)$

DOKAZ: Sledi iz trditve za $f(x) = |x|$. Prav tako sledi neenakost:

$$E(|X|) = \sum_k |x_k| \cdot p_k \underset{\triangle \text{ neenakost}}{\geq} \left|\sum_k x_k p_k\right| = |E(X)|$$

V zveznem primeru je podobno. ■

↳ **POSLEDICA**: Za $a \in \mathbb{R}$ in za slučajno sprem. X z mat. upanjem velja: $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$

DOKAZ: $f(x) = a \cdot x$ ∎

↳ **TRDITEV**: Naj bo $(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$ slučajni vektor in $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, potem je $f(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega \longmapsto f(X(\omega), Y(\omega))$ slučajna spremenljivka

↳ **TRDITEV**: ⓐ Če je (X,Y) diskretno porazdeljen : $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, potem je $E(f(X,Y)) = \sum_i \sum_j f(x_i, x_j) \cdot p_{ij}$

ⓑ Če je (X,Y) zvezno porazdeljen z gostoto $p_{(X,Y)}$, potem je

$$E(f(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot p_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy \quad \text{(če int. abs. konv.)}$$

↳ **TRDITEV**: Če X in Y imata mat. upanji, potem ga ima tudi $X+Y$ in velja $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ (aditivnost)

DOKAZ (za diskreten primer):

Po zadnji trditvi je $(f(x,y) = x+y)$

$$E(X+Y) = \sum_i \sum_j (x_i + y_j) \cdot p_{ij} = \sum_i x_i \left(\sum_j p_{ij} \right) + \sum_j y_j \underbrace{\left(\sum_i p_{ij} \right)}_{q_j} = E(X) + E(Y)$$ ∎

↳ **POSLEDICA**: Za slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z mat. upanji velja:

$E(a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n) = a_1 E(X_1) + \ldots + a_n E(X_n)$

↳ **ZGLEDI**: ① $E(X - E(X)) = E(X) - \underbrace{E(E(X))}_{E(X)} = 0$

② $X_k \sim Ber(p)$, $X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $k = 1, 2, \ldots, n$

Potem je $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim Bin(n, p)$ in zato je $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = n \cdot p$,

saj je $E(X_k) = p$

še enkrat (2)

Če je $X \sim Bin(n,p)$, potem $E(X) = n\cdot p$. X se zapiše kot vsota: $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, kjer je

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

To lahko pokažemo direktno

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \, q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

$$= n \cdot p \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} \cdot q^{(n-1)-(k-1)}}_{(p+q)^{k-1} = 1} = n \cdot p$$

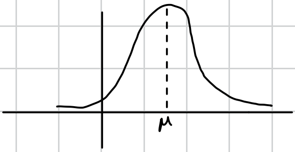
ZGLED

Če je $X \sim (N, \mu, \sigma)$, potem ni težko videti, da je $Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$ porazdeljena po $N(0,1)$. Torej je

$$E(X) = E(\sigma Y + \mu) = \sigma \cdot \underset{0}{E(Y)} + \mu = \mu$$

lin E

$E(X) = \mu \quad (\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$



TRDITEV

Če obstaja $E(X^2)$ in je $E(Y^2)$, potem obstaja $E(X \cdot Y)$ in velja neenakost

$$\boxed{E(|X \cdot Y|) \leq \sqrt{E(X^2) E(Y^2)}}$$ Cauchy Schwarzova neenakost

Enakost velja v neenakosti $\iff |Y| = \sqrt{\frac{E(Y^2)}{E(X^2)}} \cdot |X|$ z verjetnostjo 1.

Ker je $|E(X \cdot Y)| \leq E(|X \cdot Y|)$, velja tudi $|E(X \cdot Y)| \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}$

POSLEDICA

Če obstaja $E(X^2)$, potem obstaja tudi $E(X)$ in velja $|E(X)|^2 \leq E(X^2)$

DOKAZ: $Y \equiv 1$ tj. $P(Y=1) = 1$

TRDITEV

Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, ki imata mat. upanje. Potem ga ima tudi $X\cdot Y$ in velja

$$\boxed{E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)}$$

DOKAZ:

Po trditvi je $\underbrace{E(X\cdot Y)}_{f(X,Y)}=\sum_i\sum_j \underbrace{x_i y_j}_{=f(x_i,y_j)}\cdot p_{ij}$, kjer je $p_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j)$. Ko sta X in Y neodvisni

$f(x,y)=x\cdot y$

slučajni spremenljivki, je $p_{ij}=p_i\cdot q_j$, kjer je $p_i=P(X=x_i)$, $q_j=P(Y=y_j)$. Torej je

$$E(X\cdot Y)=\sum_i\sum_j x_i y_j p_i q_j =$$
$$=\Big(\sum_i x_i p_i\Big)\Big(\sum_j y_j q_j\Big)=$$
$$=E(X)\cdot E(Y) \longrightarrow \text{multiplikativnost}$$

Če velja $E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$, potem pravimo, da sta X in Y NEKORELIRANI slučajni sprem. Sicer sta korelirani. Po trditvi iz neodvisnosti sledi nekoreliranost. Obratno ne velja.

ZGLED

Vzemimo $U=\begin{pmatrix}0 & \frac{\pi}{2} & \pi\\ \frac13 & \frac13 & \frac13\end{pmatrix}$ in postavimo $X=\sin U$, $Y=\cos U$. Potem je $X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac13 & \frac13 & \frac13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac23 & \frac13\end{pmatrix}$

in $Y=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac13 & \frac13 & \frac13\end{pmatrix}$. Dokažimo, da sta X in Y nekorelirana, nista pa neodvisna

$X\cdot Y=\sin U\cos U=0 \implies E(XY)=0$

Ko je $E(X)=\frac13$ in $E(Y)=-\frac13+0+\frac13=0$, je $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$, tj. X in Y sta nekorelirani,

X \ Y	-1	0	1	
0	$\frac13$	0	$\frac13$	$\frac23$
1	0	$\frac13$	0	$\frac13$
	$\frac13$	$\frac13$	$\frac13$	

$\implies$ X in Y nista neodvisni:

$P(X=0, Y=0)=0 \neq P(X=0)\cdot P(Y=0)=\frac23\cdot\frac13=\frac29$

$X:\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ p_1 & p_2\end{pmatrix}$ $p_1+p_2=1$, $Y:\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ q_1 & q_2\end{pmatrix}$ $q_1+q_2=1$

Potem sta X in Y neodvisna $\iff$ X in Y nekorelirana

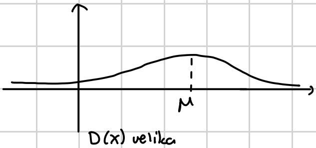
dokaz: DN

⑧ DISPERZIJA, KOVARIANCA IN KORELACIJSI KOEFICIENT

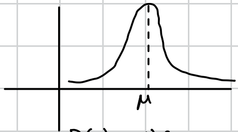
↳ Naj obstaja $E(x^2)$. DISPERZIJA ali VARIANCA sluč. spr. X je število

$$\boxed{D(x) \equiv Var(x) := E((X-E(x))^2)}$$

Meri razpršenost sluč. spr. X okoli $E(x)$



D(x) velika



D(x) majhen

Ker je $E((x-E(x))^2) = E(x^2 - 2x E(x) + (E(x))^2) =$
$= E(x^2) - \cancel{2} E(x)E(x) + \cancel{E(x)}^2 =$
$= E(x^2) - E(x)^2$

je $\boxed{D(x) = E(x^2) - (E(x))^2}$

↳ LASTNOSTI DISPERZIJE

① $D(x) \geq 0$ in $D(x) = 0 \iff X$ je izrojena sluč. spr., tj. $P(X = x_0) = 1$ (tedaj je $E(x) = x_0$)

② $D(ax) = a^2 \cdot D(x)$, $a \in \mathbb{R}$

③ Za vsak $a \in \mathbb{R}$ velja $E((x-a)^2) \geq D(x)$. Enakost velja samo v primeru $a = E(x)$.

DOKAZ: $E((x-a)^2) = E(x^2 - 2aX + a^2) = E(x^2) - 2a \cdot E(x) + a^2 =$
$= (a - E(x))^2 + \underbrace{E(x^2) - (E(x))^2}_{D(x)} = (a - E(x))^2 + D(x) \geq D(x)$

↳ STANDARDNA DEVIACIJA oz. STANDARDNI ODKLON sl. spr. X je število

$$\boxed{\sigma(X) := \sqrt{D(X)}}$$

Zanjo velja $\sigma(a \cdot X) = |a| \cdot \sigma(x)$, $a \in \mathbb{R}$

PREGLED NEKATERIH E(X) IN D(X)

ENAKOMERNO DISKRETNA PORAZDELITEV

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

- $E(X) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

  $D(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2$

BINOMSKA PORAZDELITEV

- $Bin(n,p)$
- $E(X) = n \cdot p$ $\quad D(X) = n \cdot p \cdot q$ $\quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

POISSONOVA PORAZDELITEV

- $E(X) = \lambda$ $\quad D(X) = \lambda$

GEOMETRIJSKA P.

- $Geo(p)$: $q = 1-p$
- $E(X) = \frac{1}{p}$ $\quad D(X) = \frac{q}{p^2}$

PASCALOVA P.

- $Pas(m,p)$, $m \in \mathbb{N}$ $\quad p \in (0,1)$
- $E(X) = \frac{m}{p}$ $\quad D(X) = \frac{m \cdot q}{p^2}$

ENAKOMERNO ZVEZNA P. NA $[a,b]$

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

NORMALNA P.

- $N(\mu, \sigma)$
- $E(X) = \mu$ $\quad D(X) = \sigma^2$ $\quad \sigma(X) = \sigma$

EKSPONENTNA P.

- $Exp(\lambda)$
- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

↳ Dokažimo (4) (Geometrijska)

- $p_k = P(X=k) = p \cdot q^{k-1}$ $k = 1, 2, 3, \dots$
- $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} = p \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}}_{\text{odvod geometrijske}} = p \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p \left(\frac{1}{1-q}\right)' =$

$$= p \cdot \left(-\frac{1}{\underbrace{(1-q)^2}_{p}} \cdot (-1)\right) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$$

- $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$\to E(\underbrace{X \cdot (X+1)}_{\substack{f(X) \\ f(x) = x \cdot (x+1)}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k(k+1)}_{f(k)} \cdot p \cdot q^{k-1} = p \cdot \left(\sum_{k=-1}^{\infty} q^{k+1}\right)'' = p \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)'' =$$

$$= p \cdot \left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)' = p \cdot \frac{(-2)}{\underbrace{(1-q)^3}_{p}} \cdot (-1) = \frac{2}{p^2}$$

$$D(X) = E(X(X+1)) - E(X) - (E(X))^2 =$$

$$= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{1-p}{p^2} = \underline{\underline{\frac{q}{p}}}$$

↳ **KOVARIANCA** sluč. spem. X in Y je število

$$\boxed{K(X,Y) = Cov(X,Y) := E((X-E(X)) \cdot (Y-E(Y)))}$$

$$= E(X \cdot Y - E(X) \cdot Y - E(Y) X + E(X) \cdot E(Y)) =$$

$$= E(X \cdot Y) - E(X)\cancel{E(Y)} - E(Y)E(X) + \cancel{E(X) \cdot E(Y)} =$$

$$\boxed{= E(XY) - E(X)E(Y)}$$

↳ **LASTNOSTI KOVARIANCE**

1. $K(X,X) = D(X)$
2. X in Y sta nekorelirani $\Leftrightarrow K(X,Y) = 0$ (če sta X in Y neodvisni, torej je $K(X,Y) = 0$)
3. K je simetrična in bilinearna funkcija

$$K(X,Y) = K(Y,X)$$

$$K(aX + bY, Z) = aK(X,Z) + bK(Y,Z)$$

19.12.

U, V: $|E(U \cdot V)| \leq \sqrt{E(U^2) \cdot E(V^2)}$

④ Če obstajata $D(X)$ in $D(Y)$, potem obstaja tudi $K(X,Y)$ in velja:

$$|K(X,Y)| \leq \sqrt{D(X) \cdot D(Y)} = \sigma(X) \cdot \sigma(Y),$$

kar sledi iz Cauchy-Schwarzove neenakosti za sluč. spremenljivke $X-E(X)$ in $Y-E(Y)$. Enako velja $\Leftrightarrow$

$Y-E(Y) = \pm \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \cdot (X-E(X))$ z verjetnostjo 1

⑤ Če imata X in Y disperziji, potem jo ima tudi $X+Y$ in velja

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2K(X,Y)$$

Če sta X in Y nekorelirani, potem je $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

DOKAZ: To sledi iz neenakosti

$$(X+Y-E(X+Y))^2 = ((X-E(X)) + (Y-E(Y)))^2 =$$
$$= (X-E(X))^2 + (Y-E(Y))^2 + 2(X-E(X)) \cdot (Y-E(Y))$$

če uporabimo E na obeh straneh

⑥ Posplošitev zadnje formule:

$$D(X_1 + \ldots + X_n) = D(X_1) + \ldots + D(X_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} K(X_i, Y_j)$$

Če so $X_1, \ldots, X_n$ paroma nekorelirani, potem je $D(X_1 + \ldots + X_n) = D(X_1) + \ldots + D(X_n)$

↳ ZGLED

Če je $X \sim Bin(n,p)$, potem je $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, kjer je $X_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ in so $X_1, \ldots, X_n$ neodvisni. $(X_k = 1)$ je dogodek, da se A zgodi v k-ti ponovitvi poskusa $(P(A) = p)$

Potem je $D(X) = D(X_1) + \ldots + D(X_n) = n \cdot p \cdot q$,

saj je $D(X_k) = E(X_k^2) - (E(X_k))^2 = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$

↳ STANDARDIZACIJA SLUČ. SPREM. X je slučajna spremenljivka

$$\boxed{X_s := \frac{X-E(X)}{\sigma(X)}}$$

Potem je $E(X_s) = \frac{1}{\sigma(X)} E(X - E(X)) = 0$ in $D(X_s) = \frac{1}{(\sigma(X))^2} \cdot \underbrace{D(X-E(X))}_{D(X)} = 1$

↳ ZGLED: Če je $X \sim (\mu, \sigma)$, potem je $X_s \sim N(0,1)$, $X_s = \frac{X-\mu}{\sigma}$

↳ **KORELACIJSKI KOEFICIENT** med sluč. sprem. X in Y je število:

$$r(X,Y) := \frac{K(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = \frac{E\left((X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\right)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = E(X_s \cdot Y_s)$$

LASTNOSTI KOEFICIENTA $r(X,Y)$:

1. $r(X,Y)=0 \iff X$ in Y nekolinearni
2. $-1 \leq r(X,Y) \leq 1$ sledi iz. last. $\boxed{4}$ za $K(X,Y)$
3. $r(X,Y)=1 \iff Y = \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X-E(X))+E(Y)$ z verjetnostjo 1

   $r(X,Y)=-1 \iff Y = -\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X-E(X)+E(Y))$ z verjetnostjo 1.

↳ <u>ZGLED</u>: Vržemo 2 kocki. X naj bo število na prvi, Y pa na drugi kocki, $Z=X+Y$. Izračunajmo $r(X,Z)$?

Očitno je $r(X,Y)=0$, saj sta X in Y neodvisni.

→ Lahko izračunamo direktno (DN)

→ Lahko pa naredimo takole: $2\cdot K(X,Z) = \underbrace{K(X,Z)+K(Y,Z)}_{K(Y,Z)=K(X,Z)} \overset{\text{bilinearnost}}{=} K(X+Y,Z) = K(Z,Z) = D(Z)$

$\Rightarrow K(X,Y) = \frac{1}{2}\cdot D(Z)$

$D(Z) = D(X+Y) \underset{X \text{ in } Y \text{ neodvisni}}{=} D(X)\cdot D(Y) \Longrightarrow D(X) = \frac{1}{2}\cdot D(Z)$

Torej je $r(X,Z) = \frac{K(X,Z)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Z)} = \frac{\frac{1}{2}D(Z)}{\sqrt{\frac{1}{2}D(Z)}\cdot\sqrt{D(Z)}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{,}7$

9 POGOJNA PORAZDELITEV IN POGOJNO MATEMATIČNO UPANJE

↳ Fiksirajmo dogodek B s $P(B)>0$. POGOJNA PORAZDELITVENA FUNKCIJA slučajne sprem. X glede na pogoj B je

$$\boxed{F_X(x\mid B)=P(X\le x\mid B)=\frac{P((X\le x)\cap B)}{P(B)}}$$

↳ Naj bo (X,Y) diskretno porazdeljen slučajni vektor:

$$p_{ij}=P(X=x_i,\ Y=y_j),\quad p_i=P(X=x_i),\quad q_j=P(Y=y_j)$$

Pogojno porazdelitvena funkcija sl. sprem. X gleden na $(Y=y_j)$ je

$$\boxed{F_X(x\mid Y=y_j)\equiv F_X(x\mid y_j):=P(X\le x\mid Y=y_j)=\frac{P(X\le x,\ Y\le y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{1}{q_j}\sum_{i:\,x_i\le x}p_{ij}}$$

Če upeljemo pogojno verjetnostno funkcijo $\quad p_{i\mid j}:=\frac{p_{ij}}{q_j}=P(X=x_i\mid Y=y_j)$,

potem je $\quad F_X(x\mid Y=y_j)=\sum_{i:\,x_i\le x}p_{i\mid j}$

Pogojno matematično upanje slučajne sprem. X glede na $Y=y_j$ je matematično upanje te porazdelitve:

$$\boxed{E(X\mid Y=y_j)=\sum_i x_i\,p_{i\mid j}=\frac{1}{q_j}\sum_i x_i\,p_{ij}}$$

↳ DEFINICIJA: Regrecijska funkcija $f(y_j)=E(X\mid Y=y_j)$, ki je definirana na zalogi vrednosti sluč. sprem. Y.

↳ Pogojno matematično upanje sluč. sprem X glede na sl. sprem. Y je

$$E(X\mid Y)=f(X):\begin{pmatrix} f(y_1) & f(y_2) & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots \end{pmatrix}$$

⇓ ni št. ampak je sluč. sprem.

Za to slučajno spremenljivko velja:

$$E(E(X\mid Y))=\sum_j f(y_j)\cdot q_j=\sum_j\sum_i x_i\,p_{ij}=\sum_i x_i\Big(\underbrace{\sum_j p_{ij}}_{p_i}\Big)=\sum_i x_i\,p_i=E(X)$$

↳ POSEBNI PRIMER: X in Y sta neodvisna ($p_{ij}=p_i\cdot q_j$ za $\forall i,j$)

$$p_{i\mid j}=\frac{p_i\,q_j}{q_j}=p_i$$

$$f(y_j)=E(X\mid Y=y_j)=\sum_i x_i\cdot p_{i\mid j}=\sum_i x_i\,p_i=E(X)$$

↳ regresijska funkcija je v tem primeru konstantna

$\Longrightarrow E(X\mid Y)=E(X)$ izrojena sluč. sprem.

↳ **PRIMER**: Kokoš znese N jajc, kjer je $N \sim Poi(\lambda)$. Iz vsakega jajca se z verjetnostjo $p \in (0,1)$ izvali piščanec, neodvisno od drugih jajc. Naj bo K število piščancev. Izračunajmo $E(K|N)$, $E(K)$ in $E(N|K)$.

$$P(N=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \qquad n = 0,1,2,\dots$$

$$P(K=k \mid N=n) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad Bin(n,k)$$

$$E(K \mid N=n) = \sum_k k \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = n \cdot p$$ (saj je upanje binomske porazd. $n \cdot p \Rightarrow E(Bin(n,p)) = n \cdot p$)

$$\varphi(n) = n \cdot p$$

$$E(K \mid N) = \varphi(N) = p \cdot N$$

$$P(K=k) = \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} P(K=k \mid N=n) \cdot P(N=n)}_{\text{popolna verjetnost}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{k!\,(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \cdot \frac{\lambda^n}{\cancel{n!}} e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{p^k \cdot \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} \, q^{n-k} \cdot \lambda^{n-k}}_{\text{eksponentna vrsta}} =$$

$(q \cdot \lambda)^{n-k}$

$$= \frac{(p \cdot \lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot e^{q \cdot \lambda} = \qquad q = 1-p$$

$$= \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda} \quad , \text{ torej } K \sim Poi(p \cdot \lambda)$$

Torej je $E(K) = p \cdot \lambda$

Preverimo še, da velja $E(\underbrace{E(K|N)}_{E(p \cdot N)}) = E(K)$ ✓ velja

$E(p \cdot N) = p \cdot E(N) = p \cdot \lambda$, $E(K) = p \cdot \lambda$

$$P(N=n \mid K=k) = \frac{P(N=n, K=k)}{P(K=k)} = \frac{P(N=n) \cdot P(K=k \mid N=n)}{P(K=k)} \qquad \text{BAYSOVA FORMULA}$$

$$= \frac{\lambda^n \cdot e^{-\lambda}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{k!}\,(n-k)!} \cdot \cancel{p^k} \cdot q^{n-k} \cdot \frac{\cancel{k!}}{\cancel{(p \cdot \lambda)^k}} \cdot e^{p \cdot \lambda} =$$

$$= \frac{\lambda^{n-k} \cdot q^{n-k}}{(n-k)!} \cdot e^{-q\lambda} \qquad \text{to je } Poi(q\lambda) + k$$

$\downarrow$ premaknjena za k

$$\underbrace{E(N \mid K=k)}_{\psi(k)} = E(k + Poi(q\lambda)) = k + q\lambda$$

$$E(N \mid K) = \psi(K) = K + q \cdot \lambda$$

Preizkus: $E(E(N|K)) = E(K + q \cdot \lambda) = E(K) + q\lambda = p\lambda + q \cdot \lambda = \lambda(p+q)$

10 RODOVNE FUNKCIJE

Naj bo zaloga vrednosti sl. sprem. X vsebovana v $\mathbb{N} \cup \{0\}$: $p_k = P(X=k)$, $k=0,1,2,\ldots$

RODOVNA FUNKCIJA sl. sprem. X je

$$\boxed{G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot s^k} \qquad s \in \mathbb{R}$$

za vse $s \in \mathbb{R}$, za katere ta vrsta absolutno konvergira.

Očitno je $G_X(0) = p_0$, $G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ in $G_X(s) \equiv E(s^X)$, saj je

$$s^X : \begin{pmatrix} s^0 & s^1 & s^2 & s^3 & \ldots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

Ker za vse $|s| \leq 1$ velja $|p_k \cdot s^k| \leq p_k$ in ker $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, je po primerjalnem kriteriju vrsta abs. konvergentna za vse $s \in [-1,1]$. Z drugimi besedami, konvergenčen radij vrste je vsaj 1.

↳ **ZGLED:** ① $X \sim Geo(p)$

$$p_k = P(X=k) = p q^{k-1}, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

$$G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} \cdot s^k = p \cdot s \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (q \cdot s)^{k-1} = p \cdot s \, \frac{1}{1 - q \cdot s} = \frac{ps}{1-qs}$$

; konvergira če je $|q \cdot s| < 1$ torej $|s| < \frac{1}{q}$

② $X \sim Poi(\lambda)$

$$p_k = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot s^k = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot s)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

Absolutno konvergira za vse $s \in \mathbb{R}$; torej konvergenčni radij je ∞

↳ Iz def. sledi $\boxed{G_X'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k \cdot s^{k-1}}$ za $s \in (-1,1)$

zato je $\lim_{s \nearrow 1} G_X'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = E(X)$

Abelov izrek

↳ **IZREK:** Naj ima X rodovno funkcijo $G_X(s)$. Potem je $G_X^{(n)}(1-) = E(X(X-1)(X-2)\ldots(X-n+1))$

limita njega odvoda iz leve

DOKAZ: Za $s \in [0,1)$ je $G_X^{(n)}(s) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1) \cdot p_k \cdot s^{k-n}$

Ko gre $s \nearrow 1$, z uporabo Abelove leme dobimo $\lim_{s \nearrow 1} G_X^{(n)}(s) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1) \cdot p_k = E(X(X-1)(X-2)\ldots(X-n+1))$

↳ POSLEDICA: $G_X'(1-) = E(X)$

$$D(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 =$$
$$= G_X^{(2)}(1-) + G_X'(1-) - (G_X'(1-))^2$$

↳ Iz teorije Taylorjevih vrst sledi:

IZREK O ENOLIČNOSTI: Naj imata X in Y rodovni funkciji G_X in G_Y, potem je $G_X(s) = G_Y(s)$ za vse $s \in [-1, 1] \iff P(X=k) = P(Y=k)$ za vse $k = 0, 1, 2, \dots$

Tedaj je $P(X=k) = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0)$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{P(X=k)}_{\frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}} \cdot s^k$$

NEVEM KAM TO SPADA

↳ IZREK: Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki z rod. funkcijama G_X in G_Y.

Potem je $\boxed{G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s)}$ za vse $s \in [-1, 1]$

DOKAZ: $G_{X+Y}(s) = E(s^{X+Y}) = E(s^X \cdot s^Y) = E(s^X) \cdot E(s^Y) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$

neodvisni sluč. sprem

multiplikativnost upanja