STRATEŠKE IGRE S FUNKCIJAMI PREFERENC

↳ DEFINICIJA: Naj bo A množica. Funkcija preferenc na množici A je preslikava $u: A \to \mathbb{R}$.

↳ INTUICIJA: $\forall a,b \in A$: $u(a) > u(b)$ ≡ a striktno boljše kot b

$u(a) \geq u(b)$ ≡ a vsaj tako dobro kot b

↳ OPOMBA: $u(a)$ nima kvantitativnega pomena

$u(a) = 2u(b)$ NE pomeni, da imamo a dvakrat...

↳ ZGLED

$A = \{LJ, PAR, NY\}$

$u: A \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} LJ \mapsto 10 \\ PAR \mapsto 5 \\ NY \mapsto 4 \end{array}\right\} \equiv$$ LJ najboljše, potem PAR in na koncu NY, vse striktno

Če bi veljalo $u(PAR) = u(NY)$, rečemo, da smo indiferentni med PAR in NY

↳ ZGLED

$A = \mathbb{R}^2$, $u = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto x^2 + y^2$

Različne funkcije preferenc lahko določijo iste preference npr.: $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto (x^2+y^2)^{10}$

OPOMBA: Namesto "$\mathbb{R}$" bi lahko uporabil drugo urejeno množico. Na primer "abeceda".

OPOMBA: Pri tem predmetu, bo večje število pomenilo boljše v večini primerov

↳ DEFINICIJA

STRATEŠKA IGRA S FUNKCIJAMI PREFERENC je trojica $(N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ pri čemer:

- N je množica igralcev (in je neprazna)
- Za vsakega igralca $i \in N$ je A_i neprazna množica AKCIJ, med katerimi izbere igralec i. Naj bo $\mathcal{A} = \prod_{i \in N} A_i$ množica PROFILOV AKCIJ
- Za vsakega igralca $i \in N$ je $u_i: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ funkcija preferenc na $\mathcal{A}$.

> SKORAJ VEDNO: • N množica igralec
>
> • i je igralec, j je tudi
>
> POGOSTO: $N = \{1, 2, \ldots, n\} = [n]$. V tem primeru $\mathcal{A} = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

$(N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$, za $N = [n]$: $([n], (A_1, \ldots, A_n), (u_1, \ldots, u_n))$, $u_i: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to \mathbb{R}$

Igralec $i \in [n]$ izbere eno akcijo od A_i
iz

↳ ZGLED (zapornikova dilema oz. prisoner's dilemma)

Igralca Alen (igralec 1) in Bojan (igralec 2). Vsak lahko molči ali prizna

$A_1 = \{\text{molči, prizna}\} = \{M, P\}$

$A_2 = \{\text{molči, prizna}\}$

število let v zaporu za osebo $= \begin{cases} 2 & \text{; če oba molčita} \\ 3 & \text{; če oba priznata} \\ 1 & \text{; če oseba prizna, kolega pa molči} \\ 8 & \text{; če oseba molči, kolega pa prizna} \end{cases}$

$N = \{1,2\}$

$A_1 = A_2 = \{M, P\}$

- $u_1 = A_1 \times A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ — koliko let dobi prvi igralec

$$(M,M) \longmapsto \cancel{-2} \quad 3$$
$$(M,P) \longmapsto \cancel{-8} \mapsto 1$$
$$(P,M) \longmapsto \cancel{-1} \quad 4$$
$$(P,P) \longmapsto \cancel{-3} \quad 2$$

↳ razvrstimo po vrstnem redu

- $u_2 : A_1 \times A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(M,M) \longmapsto 3$$
$$(M,P) \longmapsto 2$$
$$(P,M) \longmapsto 1$$
$$(P,P) \longmapsto 4$$

- Za dva igralca uporabimo tabele

ZGORAJ VEDNO DRUGI IGRALEC (Bojan)

LEVO vedno prvi igralec (Alen)

	MOLČI	PRIZNA
MOLČI	3, 3	1, 4
PRIZNA	4, 1	2, 2

$u_2(M,P)$

$u_1(M,P)$

↳ ZGLED (BoS, Bach ali Stravinsky, verzija "battle of sexes")

Dva igralca. Vsak določi sam, ali gre na koncert Bacha ali Stravinskega

→ 1. igralec ima rad Bacha in vsaj bi šel z 2. igralcem:

$$u_1(B,B) > u_1(S,S) > u_1(B,S) = u_1(S,B)$$

→ Za 2. igralca obratno glede B in S:

$$u_2(S,S) > u_2(B,B) > u_2(B,S) = u_1(S,B)$$

	B	S
B	3,2	1,1
S	1,1	2,3

↳ ZGLED (Cifra ali grb)

Dva igralca data svoj kovanec na mizo. Če sta oba dala isto (recimo grb+grb), prvi igralec zmaga in dobi oba kovanca. Sicer drugi zmaga in dobi oba kovanca.

	grb	cifra
grb	1, -1	-1, 1
cifra	-1, 1	1, -1

↳ ZGLED

$A_1 = \{G, S, D\}$

$A_2 = \{L, S, D\}$

$A_3 = \{L, D\}$

	L	S	D
G	0, 1, 0	2, 2, 1	0, 2, 3
S	2, 2, 1	4, 0, 1	6, 3, 3
D	3, 1, 2	0, 3, 3	2, 1, 2

če $u_3 = L$

	L	S	D
G	1, 1, 1	4, 2, 4	0, 3, 1
S	5, 1, 1	0, 1, 0	0, 0, 2
D	2, 3, 1	4, 2, 1	3, 1, 0

$\to u_3(D, D, D)$

če $u_3 = D$

↳ ZGLED (Duopola)

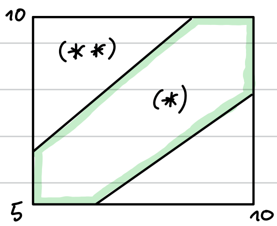
Dve firmi α in β prodajata podobni produkt. Vsaka določi neodvisno ceno produkta $\in [5, 10]$

Trg ima interes za 1000 enot produkta. Če se ceni razlikujeta za ≤ 1, vsaka firma dobi polovico trga. Sicer firma z nižjo ceno dobi cel trg.

$\to N = \{\alpha, \beta\}$

$\to A_1 = A_2 = [5, 10]$

$$\to u_\alpha(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 1000 \cdot x_\alpha & ; \text{ če } \ x_\alpha < x_\beta - 1 \quad (**) \\ 500 \cdot x_\alpha & ; \text{ če } \ |x_\alpha - x_\beta| \leq 1 \quad (*) \\ 0 & ; \text{ če } \ x_\alpha > x_{\beta - 1} \end{cases}$$



• Poglejmo sedaj kako bi lahko istočasno predstavili obe funkciji u_α, u_β

$N = \{1, 2\}$

i en igralec, j ostali igralec

$i + j = 3$

$$u_i(x_1, x_2) = \begin{cases} 1000 \ x_i & ; \text{ če } \ x_i < x_j - 1 \\ 500 \ x_i & ; \text{ če } \ |x_i - x_j| \leq 1 \\ 0 & ; \text{ če } \ x_i > x_j + 1 \end{cases}$$

NOTACIJA

$u_i(a_1, a_2, \dots, a_n \mid b_i) = u_i(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$

npr. $u_2(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid y) = u_2(x_1, y, x_3, x_4)$

↳ ima dve funkciji : → preference katerega igralca opazimo

→ kje v terici naredimo spremembo

$$u_i((a_j)_{j \in N} \mid b_i) = u_i \begin{pmatrix} a_j & ; \text{ če } j \neq i \\ b_i & ; \text{ če } j = i \end{pmatrix}$$

↳ PROFIL AKCIJ ≡ terica, kjer vsak igralec izbere določeno strategijo

Za primer z tremi igralci: $\mathcal{A} = \{G, S, D\} \times \{L, S, D\} \times \{L, D\} \longrightarrow$ množica profilov akcij

npr. (G, D, L) je en profil akcij

(v primeru duopola bi bil en profil akcij $(6, 8)$, $\mathcal{A}$ pa je $\mathcal{A} = [5, 10] \times [5, 10]$)

DEFINICIJA

Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ strateška igra s funkcijami preferenc. Naj bo $a^* = (a_i^*)_{i\in N}$ en profil akcij. a^* je (čisto) NASHEJEVO RAVNOTEŽJE, če velja

$$\boxed{\forall i \in N \quad \forall b_i \in A_i : \quad u_i(a^*) \geq u_i(a^* | b_i)}$$

Profil a^* je strogo (čisto) Nashejevo ravnovesje natanko tedaj, ko velja

$$\forall i \in N \quad \forall b_i \in A_i, \ b_i \neq a_i^* : \quad u_i(a^*) > u_i(a^* | b_i)$$

DEFINICIJA: Nashejevo ravnovesje (čisto ≡ pure) 7.10

Ko $N = [n]$.

$$\forall i \in N \quad \forall b_i \in A_i : \quad u_i(\underbrace{a_1^*, \dots, a_{i-1}^*, a_i^*, a_{i+1}^*, \dots, a_n^*}_{a^*}) \geq u_i(a_1^*, \dots, a_{i-1}^*, b_i, a_{i+1}^*, \dots, a_n^*)$$

$$u_i(a^*) \geq u_i(a^* | b_i)$$

ZGLED: Zapornikova dilema

	molči	prizna
molči	2,2	0,3
prizna	3,0	1,1

$$(*) \quad \overset{1}{u_1(\text{prizna}, \text{prizna})} \overset{?}{\geq} \overset{0}{u_1(\text{molči}, \text{prizna})} \quad ✓$$

$$(\Delta) \quad \underset{1}{u_2(\text{prizna}, \text{prizna})} \overset{?}{\geq} \underset{0}{u_2(\text{prizna}, \text{molči})} \quad ✓$$

(prizna, prizna) je N.R.

To je edino N.R.

ZGLED (Bach, Stravinsky)

	B	S
B	3,2	1,1
S	1,1	2,3

Sta dva N.R. in sicer (B,B) in (S,S)

ZGLED (Cifra, grb)

	grb	cifra
grb	1,-1	-1,1
cifra	-1,1	1,-1

N.R. NE $\exists$

OPOMBA: N.R. $\neq$ rešitev igre!

N.R. $\neq$ optimum

DEFINICIJA

Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ strateška igra s funkcijami preferenc. Označimo $\mathcal{A} = \prod_{i\in N} A_i$. Najboljši odgovor igralca $i \in N$ je preslikava

$$\mathcal{B}_i : \mathcal{A} \longrightarrow 2^{A_i}$$

$$a \longmapsto \{b_i \in A_i \mid u_i(a|b_i) \geq u_i(a|c_i) \ \forall c_i \in A_i\} =$$

$$\boxed{= \{b_i \in A_i \mid u_i(a|b_i) = \max_{c_i \in A_i} u_i(a|c_i)\}}$$

↳ **OPOMBA**:

- „Najboljši odgovor" je napačno ime. B_i bi moral biti „<u>množica najboljših odgovorov</u>".
- Večkrat velja $|B_i(a)| = 1$. V takih primerih lahko pišemo $B_i(a)$ kot element

$$B_i(a) = \{10\} \longmapsto B_i(a) = 10$$

- ko $N = [n]$ je za $i = 1$ (prvega igralca)

$$B_1 : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow 2^{A_1}$$

$$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto \{b_1 \in A_1 \mid u_1(b_1, a_2, \dots, a_n) = \max_{c_1 \in A_1} u_1(c_1, a_2, \dots, a_n)\}$$

To je ubistvu funkcija ki ko si vsi ostali igralci izberejo strategije (jih fiksiramo), kakšno si bo potem prvi igralec

Za $i \in N$ je a_i nerelavantno. A_i pustimo noter ker je notacija lažja

- Za $N = [2]$ ponavadi pišemo

$$B_1 : \cancel{A_1 \times} A_2 \longrightarrow 2^{A_1}$$

$$a_2 \longmapsto \{b_1 \in A_1 \mid u_1(b_1, a_2) = \max_{c_1 \in A_1} u_1(c_1, a_2)\}$$

↳ **ZGLED**

$N = [3]$

	L	S	D
G	0, 1, 0	2, 2, 1	0, 2, 3
S	2, 2, 1	4, 0, 1	6, 3, 3
D	3, 1, 2	0, 3, 3	2, 1, 2

če $a_3 = L$

N.R.

	L	S	D
G	1, 1, 1 *	4, 2, 4	0, 3, 1
S	5, 1, 1	0, 1, 0	0, 0, 2
D	2, 3, 1	4, 2, 1	3, 1, 0

če $a_3 = D$

- 1. igralec
- 2. igralec
- 3. igralec

→ v prvem stolpcu bo 1. igralec izbral D, v drugem bo S, ...

→ v prvi vrstici bo 2. igralec izbral 2 odgovora,

→ $B_3(G, L, \cdot) = \{D\}$ *
$B_1(\cdot, S, D) = \{G, D\}$ } → torej pri tretjem igralcu, smo za ∀ kvadratek izbrali levo ali desno tabelo

↳ **TRDITEV**

Profil akcij $a^* = (a_i^*)_{i \in N}$ je N.R. natanko tedaj, ko velja

$$\boxed{\forall i \in N : a_i^* \in B_i(a^*)}$$

če gledamo zgornji zgled, bodo N.R. tisti kvadratki, ki jih vsi trije izberejo za najboljši odgovor

DOKAZ: Sledi iz definicije

$$\forall i \in N : a_i^* \in B_i(a^*)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i \in N : \underbrace{u_i(a^* \mid a_i^*)}_{= u_i(a^*)} \geq u_i(a^* \mid c_i) \text{ za } \forall c_i \in A_i$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i \in N : \forall c_i \in A_i \cdot u_i(a^*) \geq u_i(a^* \mid c_i)$$

$$\Updownarrow$$

a^* je N.R. ■

↳ OPOMBE

· ko $N=[n]$ imamo $(a_1^*, \dots, a_n^*)$ je N.R. $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^* \in B_1(a_1^*, \dots, a_n^*) \\ a_2^* \in B_2(a_1^*, \dots, a_n^*) \\ \vdots \\ a_n^* \in B_n(a_1^*, \dots, a_n^*) \end{cases}$. To je sistem pogojev.

Če $\forall B_i$ vsebuje natančno en element dobimo: a^* je N.R. $\Longleftrightarrow \begin{cases} a_1^* = B_1(a_1^*, \dots, a_n^*) \\ a_2^* = B_2(a_1^*, \dots, a_n^*) \\ \vdots \\ a_n^* = B_n(a_1^*, \dots, a_n^*) \end{cases}$. To je zdaj sistem enačb

· B_i je optimizacijski problem
- → odvodi
- → max ≠ sup
- → za diskretne naloge vedno ∃ max

↳ ZGLED

Firmi 1 in 2 delata dopolnjujoča izdelka. Vsaka firma določi koliko proizvaja produkta. Vsaka firma hoče proizvajati približno isto količino kot druga firma.

$N=[2]$

$A_1 = A_2 = [0, +\infty)$

$x_1 \in A_1$ ↓ kaj izbere prvi igralec

$x_2 \in A_2$ ↓ kaj izbere drugi igralec

$i+j=3$ (i je prvi igralec, j je drugi igralec)

$$\boxed{u_i(x_1,x_2) = x_i(\underbrace{c}_{\text{konstanta} > 0} + x_j - x_i)}$$

N.R. = ?

→ Pojdimo z definicijo (x_1^*, x_2^*) NR. $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$$x_1^*(c + x_2^* - x_1^*) \geq x_1^*(c + x_2^* - x_1) \quad \forall x_1 \in [0,\infty)$$
$$x_2^*(c + x_2^* - x_1^*) \geq x_2^*(c + x_2 - x_1^*) \quad \forall x_2 \in [0,\infty)$$

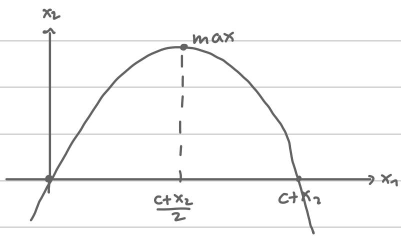
To je pravilno, vendar je težko rešiti

→ Poslusimo z "najboljšim odgovorom" od prvega igralca: B_1

$B_1(x_2)$

za fiksen x_2 nas zanima: $\max\limits_{x_1 \in [0,\infty)} x_1(c + x_2 - x_1)$

to je edina spem.
Torej je konkavna parabola



max dosežen pri $x_1 = \frac{c+x_2}{2}$

→ Lahko uporabimo odvod:

$$\frac{\partial u_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} = c + x_2 - x_1 - x_1 = c + x_2 - 2x_1 \quad \text{je } 0 \iff c + x_2 - 2x_1 = 0 \iff x_1 = \frac{x_2 + c}{2}$$

$$\frac{\partial^2 u_1(x_1,x_2)}{(\partial x_1)^2} = -2$$

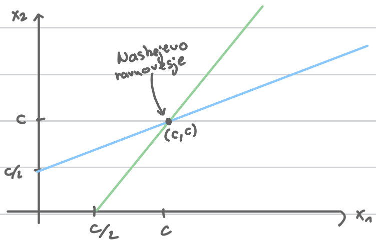
$$\Downarrow$$

$B_1(x_2) = \left\{\frac{c+x_2}{2}\right\}$ — oklepaje lahko pišeš če hočeš

→ $B_2(x_1)$ oz. $B_2(x_1,x_2)$ je $\frac{c+x_1}{2}$

→ (x_1^*, x_2^*) je N.R. $\begin{matrix} x_1^* = \frac{c+x_2^*}{2} \\ x_2^* = \frac{c+x_1^*}{2} \end{matrix} \Longrightarrow \boxed{x_1^* = x_2^* = C}$ To je edino N.R. ⇒ N.R je (c,c)

→ Slike pomagajo



B_1 graf $x_2 \mapsto B_1(x_2)$

B_2 graf $x_1 \mapsto B_2(x_1)$

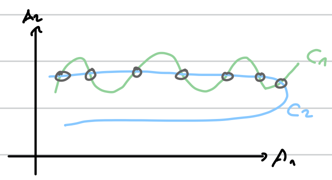
• V splošnem za $n=2$ narišemo

$C_1 = \{(x_1,x_2) \in A_1 \times A_2 \mid x_1 \in B_1(x_2)\}$

$C_2 = \{(x_1,x_2) \in A_1 \times A_2 \mid x_2 \in B_2(x_1)\}$

Potem je množica $C_1 \cap C_2$ N.R.

$C_1 \cap C_2$



↳ Strogo najboljši odgovor igralca i je preslikava (str = strogo)

$B_i^{str} : \mathcal{A} \longrightarrow 2^{A_i}$

$a \longmapsto \{b_i \in A_i \mid u_i(a \mid b_i) > u_i(a \mid c_i) \ \forall c_i \in A_i \quad c_i \neq b_i\}$

Za $\forall i \in N$ $\forall a \in A$ je $B_i^{str}(a)$ bodisi prazen, bodisi moči 1.

↳ TRDITEV: Profil akcij a^* je strogo N.R natanko tedaj ko (n.t.k.)

$$\boxed{\forall i \in N : a_i^* \in B_i^{str}(a^*)}$$

OPOMBA: V zadnjem zgledu smo dobili strogo N.R.

DOMINACIJE

↳ **DEFINICIJA:** Naj bo $\Gamma(N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ strateška (str.) igra s funkcijo preferenc (f.p.). Označimo $\mathcal{A} = \prod_{i\in N} A_i$.

Akcija $b_i \in A_i$ (šibko) dominira akcijo $c_i \in A_i$, če velja

$$\boxed{\forall a \in \mathcal{A}: \ u_i(a|b_i) \geq u_i(a|c_i)}$$

Akcija $b_i \in A_i$ <u>strogo</u> dominira $c_i \in A_i$, če velja

$$\boxed{\forall a \in \mathcal{A}: \ u_i(a|b_i) > u_i(a|c_i)}$$

↳ **TRDITEV:** Naj bo i igralec, $b_i \in A_i$, $c_i \in A_i$, $b_i \neq c_i$.

- Če akcija b_i dominira akcijo c_i, potem ne $\exists$ strogo N.R. a^*, ki ima $a_i^* = c_i$.
- Če akcija b_i strogo dominira akcijo c_i, potem ne $\exists$ N.R. a^*, ki ima $a_i^* = c_i$.

DOKAZ:

- Če akcijo b_i strogo dominira akcijo c_i, potem $c_i \notin B_i(a)$ za $\forall a \in \mathcal{A}$. Torej N.R. nikoli nima c_i za igralca i.
- Če akcijo b_i dominira c_i, potem $c_i \notin B_i^{str}(a)$ za $\forall a \in \mathcal{A}$ (lahko je $c_i \in B_i(a)$ za neke a). Torej strogo N.R. ne more imeti c_i noter

↳ **POSLEDICA:**
- Pri iskanju N.R. lahko izločimo strogo dominirane akcije.
- Pri iskanju strogega N.R. lahko izločimo šibko dominirane akcije.

Izločanje lahko delamo iterativno

↳ **ZGLED**

	L	S	D	
G	0,3	2,2	1,2	2
S	2,2	0,1	$\boxed{6,3}$	
D	3,1	0,0	2,2	4
	3	1		

opomba: ko gledaš dominacije drugega igralca primerjaš stolpce, za prvega pa primerjaš vrstice

- Za prvega igralca niso dominacije
  Za 2. igralca L strogo dominira S ①
- Sedaj smo dobili novo 2×3 igro in spet gledamo če $\exists$ N.A. če ga najdemo bo to N.A. od originalne igre
  Zdaj za 1. igralca S strogo dominira G ②
- Sedaj D strogo dominira L ③
- Potem S dominira L ④
- Dobili smo $\boxed{\text{N.A}: (S,D)}$

↳ **NAPAČNA TRDITEV:** Če odstranimo šibko dominirane akcije in je bilo neko N.R., potem neko N.R. ostane.

PRAVILNO RAZMIŠLJANJE: Torej so nam uporabne večinoma samo <u>STROGE</u> dominacije

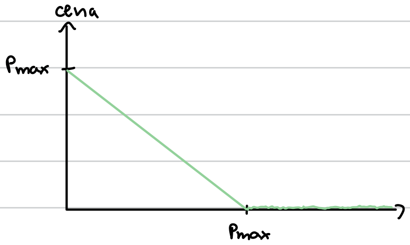
↳ **OPOMBA:** Iterativno odstranjevanje akcije, ki so strogo dominirane $\longrightarrow$ Racionalnost

COURNOTOV MODEL DUOPOLA (oligopol)

- n firm $(1,2,\dots,n)$ proizvajajo isti/podobni produkt. Vsaka firma določi $q_i \geq 0$ produkta $(q_i \in \mathbb{R})$
- Stroški firme i je $c \cdot q_i$, $c > 0$ enako in enako za vse firme.
- Označimo $Q = q_1 + \dots + q_n$ je skupna količina.
- Predpostavimo, da prodajo vse.
- Cena produkta je odvisna od Q in sicer $P(Q) = \begin{cases} P_{max} - Q \,; & \text{če } P_{max} \geq Q \\ 0 \,; & \text{sicer} \end{cases} = (P_{max} - Q)_+$ $\quad \left((f(x))_+ = \max\{f(x), 0\}\right)$ To je def

P_{max} je najvišja možna cena na enoto. Predpostavimo $P_{max} > c > 0$

$\uparrow$ max cena/enoto $\quad$ stroški/enoto



- Dobiček firme i: $u_i(q_1, \dots, q_n) = q_i\left(P(q_1 + \dots + q_n) - c\right)$

$$= q_i\left((P_{max} - q_1 - q_2 - \dots - q_n)_+ - c\right)$$

- Modeliramo kot strateško igro s funkcijo preferenc

$N = [n]$

$A_i = [0, +\infty) \qquad q_i \in A_i$

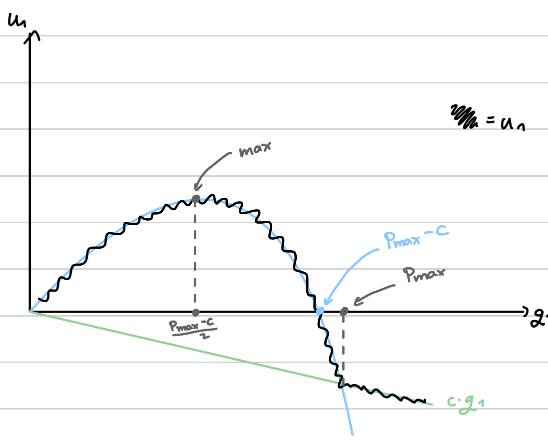
dobiček je funkcija preferenc

N.R. = ?

↳ $n = 1$ oz. MONOPOL

$u_1(q_1) = q_1 \cdot \left((P_{max} - q_1)_+ - c\right)$ $\qquad$ u_1 je zvezna funkcija

$$= \begin{cases} q_1 \cdot (P_{max} - q_1 - c) \,; & \text{če } P_{max} \geq q_1 \\ -q_1 \cdot c \,; & \text{če } P_{max} < q_1 \end{cases}$$



$\max\limits_{q_1 \in [0,\infty)} u_1(q_1)$ je pri $q_1^* = \frac{P_{max} - c}{2} < \frac{P_{max}}{2} < P_{max}$

$$u_1(q_1^*) = u_1\left(\frac{P_{max} - c}{2}\right) = \frac{P_{max} - c}{2}\left(P_{max} - c - \frac{P_{max} - c}{2}\right) = \left(\frac{P_{max} - c}{2}\right)^2 > 0$$

↑ To je neka opomba če rešujemo algebraično ??

→ Cena produkta v N.R.: $\frac{P_{max} + c}{2}$ $\qquad \left(P_{max} - \frac{P_{max} - c}{2} = \frac{P_{max} + c}{2}\right)$

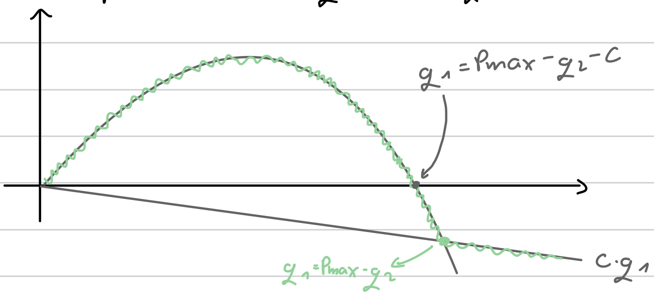
→ Količina proizvodov: $q_1^* = \frac{P_{max} - c}{2}$

→ Dobiček firme: $\frac{(P_{max} - c)^2}{4}$

↳ n=2

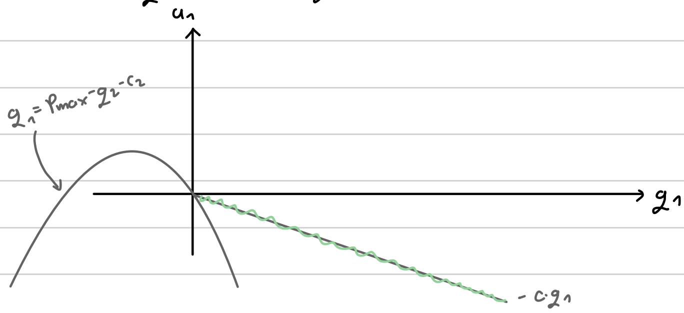
- $q_1, q_2 \in [0,\infty)$
- $u_1(q_1,q_2) = q_i((P_{max} - q_1 - q_2)_+ - c)$ → dobiček firme i = funkcija preferenc
- NR: ?
- $B_1(q_2)$
- $\max\limits_{q_1 \in [0,\infty)} \underbrace{q_1((P_{max} - q_1 - q_2)_+ - c)}_{\text{zvezna in ima dva dela}} = \begin{cases} q_1(P_{max} - q_1 - q_2 - c & ; \ P_{max} - q_1 - q_2 \geq 0 \\ -c q_1 & ; \ \text{sicer} \end{cases}$

- Slika za poseben fiksen $q_2 \geq 0$ in $q_2 \leq P_{max} - c$



max pri $q_1^* = \frac{P_{max} - c - q_2}{2}$

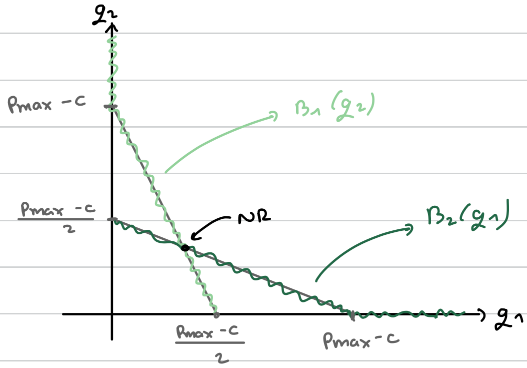
- Slika za $q_2 \geq 0$ in $q_2 > P_{max} - c$



max pri $q_2 = 0$

- $B_1(q_2) = \begin{cases} \frac{P_{max} - c - q_2}{2} & ; \ P_{max} - c - q_2 \geq 0 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases} = \left(\frac{P_{max} - c - q_2}{2}\right)_+$
- zaradi simetrije velja tudi: $B_2(q_1) = \left(\frac{P_{max} - c - q_1}{2}\right)_+$

↳ cournotov model: $P_{max} > c > 0$



NR je pri $q_1^* = q_2^* = \frac{P_{max}-c}{3}$, oziroma $\left(\frac{P_{max}-c}{3}, \frac{P_{max}-c}{3}\right)$, ker je rešitev sistema enačb

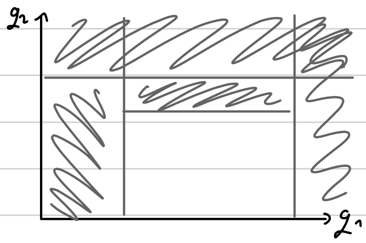
$$q_1^* = \frac{P_{max}-c-q_2^*}{2}$$
$$q_2^* = \frac{P_{max}-c-q_1^*}{2}$$

<u>OPOMBA</u>: To je tudi STROGO N.R., ker je imel najboljši odgovor samo en element

<u>OPOMBA</u>: Do istega sklepa lahko pridemo tudi drugače

- $q_1^* \in B_1(q_2^*) = \left\{\left(\frac{P_{max}-c-q_2^*}{2}\right)_+\right\}$
  $q_2^* \in B_2(q_1^*) = \left\{\left(\frac{P_{max}-c-q_1^*}{2}\right)_+\right\}$

- Z uporabo stroge dominacije. Iterativno



odstranjujemo dele, konvergira proti točki

↳ Primerjava med $n=1$ in $n=2$

	$n=1$		$n=2$
cena produkta	$\frac{1}{2}(P_{max}+c)$	$>$	$\frac{1}{3}(P_{max}+2c)$
skupna proizvodnja	$\frac{1}{2}(P_{max}-c)$	$<$	$\frac{2}{3}(P_{max}-c)$
dobiček posamezne firme	$\frac{1}{4}(P_{max}-c)^2$	$>$	$\frac{1}{9}(P_{max}-c)^2$
skupni dobiček	$\frac{1}{4}(P_{max}-c)^2$	$>$	$\frac{2}{9}(P_{max}-c)^2$

⟵ cena za $n=2$ pri N.R. je $\left(P_{max} - \frac{2(P_{max}-c)}{3}\right) = \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}P_{max}$

⟵ dobiček firme 1 pri N.R. $\frac{P_{max}-c}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}c + \frac{1}{3}P_{max} - c\right)$

↳ OPAZKE

- cena $(n=1) >$ cen $(n=2)$
- skupni dobiček $(n=1) >$ skupni dobiček $(n=2)$
- skupni dobiček $(n=1) : 2 >$ dobiček firme $(n=2)$

  ↳ skriti monopol se splača vsaki firmi, to pa ni N.R.

  skriti monopol: $\left(\frac{1}{4}(P_{max}-c), \frac{1}{4}(P_{max}-c)\right)$

  N.R.: $\left(\frac{1}{3}(P_{max}-c), \frac{1}{3}(P_{max}-c)\right)$ $\curvearrowright$ v

BERTRANDOV MODEL TRGA

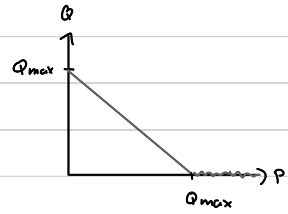
↳ Vsaka firma izbere oz. določi ceno produkta. Povpraševanje produkta je odvisno od najnižje cene. Samo firme z najnižjo ceno prodajajo. Trg se razdeli enakomerno med firme z najnižjo ceno.

↳ $N = [n]$

↳ Vsaka firma $i \in N$ izbere $p_i \in [0, +\infty) \equiv$ cena

↳ $p = \min\{p_1, \dots, p_n\}$ je najnižja cena

↳ povpraševanje $\equiv$ skupna proizvodnja (torej tisti, ki nebodo imeli najnižje cene, sploh ne bodo proizvajali)



$$Q(p) = \begin{cases} Q_{max} - p & ; \text{ če } Q_{max} \geq p \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases} = (Q_{max} - p)_+$$

↳ Definiramo $k(p_1, \dots, p_n) =$ število firm z najnižjo ceno

$$= |\{ i \in [n] \mid p_i = \min\{p_1, \dots, p_n\}\}|$$

↳ Dobiček firme i: $u_i(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} \frac{1}{k(p_1, \dots, p_n)} \cdot (Q_{max} - p_i)_+ \cdot (p_i - c) & ; \text{ če } p_i = \min\{p_1, \dots, p_n\} \\ 0 & ; \text{ sicer (firma } i \text{ nima najnižje cene)} \end{cases}$

↳ $c > 0$ so stroški na enoto pri proizvodnji

Predpostavimo, da $\boxed{Q_{max} > c > 0}$

↪ To je smiselno ker hočemo $Q_{max} > p$ in $p > c$

↳ Opazimo samo primere kjer $p_i \in [c, Q_{max}]$ za $\forall i \in N$, $A_i = [c, Q_{max}]$ $\forall i \in N$????

↳ N.R: ?

↳ $n = 1$

max pri $p_1 = \frac{Q_{max} + c}{2}$, ker je max za $(Q_{max} - p_1)(p_1 - c)$

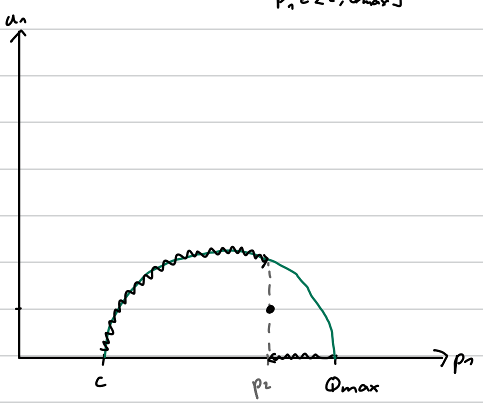
↳ $n = 2$

tega nerabim ker $p_i \in [c, Q_{max}]$

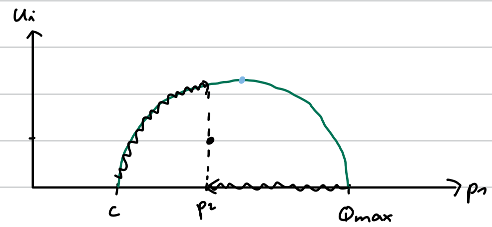
$$u_i(p_1, p_2) = \begin{cases} (Q_{max} - p_i)_+ (p_i - c) & ; \text{ če } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}(Q_{max} - p_i)_+ (p_i - c) & ; \text{ če } p_i = p_j \\ 0 & ; \text{ če } p_i > p_j \end{cases}$$

· $B_1(p_2) \longrightarrow$ zanima nas $\max\limits_{p_1 \in [c, Q_{max}]} u_2(p_1, p_2)$ (=fiksiramo p_2), ni zvezna

$$u_1(p_1, p_2) = \max_{p_1} \begin{cases} (Q_{max} - p_1)(p_1 - c) & ; p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2}(& ; p_1 = p_2 \\ 0 & ; p_1 > p \end{cases}$$



če $p_2 > \frac{c + Q_{max}}{2}$



tu maximuma ni, saj je p_2 pred maksimumom

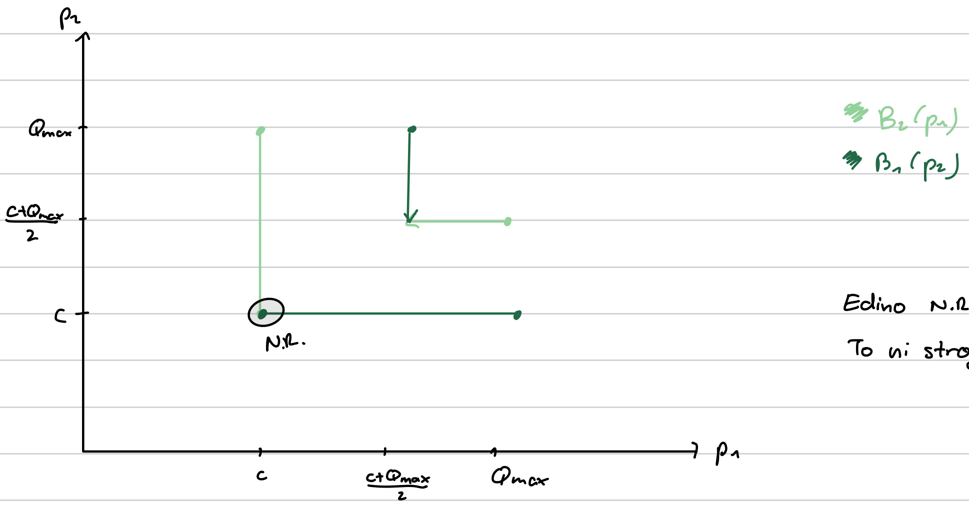
če $p_2 < \frac{c+Q_{max}}{2}$

$$B_1(p_2) = \begin{cases} \left\{\frac{c+Q_{max}}{2}\right\} & ; \text{ če } Q_{max} > p_2 > \frac{Q_{max}+c}{2} \\ \emptyset & ; \text{ če } c < p_2 \leq \frac{Q_{max}+c}{2} \\ [c, Q_{max}] & ; \text{ če } p_2 = c \end{cases}$$

vsak odgovor je uredu

$$B_2(p_1) = \begin{cases} \left\{\frac{c+Q_{max}}{2}\right\} & ; \text{ če } \frac{Q_{max}+c}{2} < p_1 \leq Q_{max} \\ \emptyset & ; \text{ če } c < p_1 \leq \frac{Q_{max}+c}{2} \\ [c, Q_{max}] & ; \text{ če } p_1 = c \end{cases}$$

(=) simetrično enako kot B_1



Edino N.R. je pri: $(p_1^* = c \ , \ p_2^* = c)$

To ni strogo N.R.

ZGLED

- Vickeyeva družba n igralcev, $N=[n]$ družba za en objekt.
- Vsak igralec i ponudi $b_i \geq 0$
- Zmagovalec je igralec, ki ponudi največjo b_i (če več igralcev ponudi največjo ceno, je zmagovalec tisti z najmanjšim indeksom)
- Zmagovalec plača drugo največjo ponujeno ceno

npr. 10, 9, 10, 8, 6, 13, 10
→ ta zmaga in plača 10

10, 11, 9, 8, 11, 10, 9
→ ta zmaga in plača 11

- Vsak igralec i ima neko vrednost v_i za objekt

$$u_i(b_1,\dots,b_n) = \begin{cases} 0 & ; \text{če igralec } i \text{ ne dobi objekta } i \neq \text{zmagovalec} \\ v_i - (\text{koliko plača}) & ; \text{če igralec } i \text{ dobi objekt} \end{cases}$$

- $z \in [n]$ je zmagovalec
- $p(b_1,\dots,b_n) = \max\{b_i \mid i \neq z\}$

$$u_i(b_1,\dots,b_n) = \begin{cases} 0 & ; \text{če } i \neq z \\ v_i - p(b_1,\dots,b_n) & ; \text{če } i = z \end{cases}$$

- Eno N.R. je $(b_1 = v_1, b_2 = v_2, \dots, b_n = v_n)$ ⟶ To ni edino, ∃ veliko N.R.

Zakaj je to N.R.?

→ Opazimo $i = z$. Ali se za z splača spremenit?

* ~~$b_z' > b_z = v_z$~~ če $b'_z > p(b_1,\dots,b_n)$

$$v_z - b(b_1,\dots,b_n) = u_z(b_1,\dots,b_n \mid b_z') \overset{?}{\leq} u_z(b_1,\dots,b_n) = v_z - p(b_1,\dots,b_n)$$

ker plača z, se ne spremeni

* če $b_z' \leq p(b_1,\dots,b_n) = p$

$$\underbrace{u_z(b_1,\dots,b_n \mid b_z')}_{\|} \overset{?}{\leq} u_z(b_1,\dots,b_n) = v_z - p(b_1,\dots,b_n)$$

- 0, če ima drugi ponudnik manjši indeks
- $v_z - p$, če še vedno zmaga

→ Poglejmo $i \neq z$

$$u_i(b_1,\dots,b_n \mid b_i') \leq u_i(b_1,\dots,b_n) = 0$$
$$\wedge\!\!\mid$$
$$v_i - \max\{v_1,\dots,v_n\} \leq 0$$

- Za vsakega igralca $i \in N$, akcija $b_i = v_i$ šibko dominira druge akcije

$\boxed{\text{Mechanism design (ljudje morajo povedati resnico)}}$

STRATEŠKE IGRE S FUNKCIJAMI KORISTNOSTI

↳ **MOTIVACIJA**:

- Včasih te funkcije preferenc res imajo kvantitavni pomen npr. €, kg. čokolade,... oz. imamo skupno enoto
- Včasih lahko pogledamo, kaj dobimo v povprečju.
- Igralci lahko izberejo naključno med akcijami na voljo

	GRB	CIFRA
GRB	1, -1	-1, 1
CIFRA	-1, 1	1, -1

LOTERIJE IN KORISTNOST

↳ A ... končna množica

π ... funkcija verjetnosti na A

$\pi : A \to [0,1]$

$\sum_{a \in A} \pi(a) = 1$

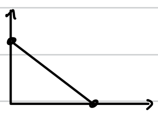
$\pi \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \pi(a_1) & \pi(a_2) & \dots & \pi(a_n) \end{pmatrix}$

$\Pi(A) = \{\pi : A \to [0,1] \mid \pi \text{ je funkcija verjetja na } A\}$

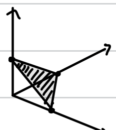
↳ **DEF**: $\Pi(A)$ je množica loterij na A.

Če $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$\Pi(A)$ je izomorfna $\underbrace{\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{matrix} x_1, \dots, x_n \in [0,1] \\ x_1 + \dots + x_n = 1 \end{matrix} \right\}}_{\text{simpleks dimenzije kot v } \mathbb{R}^n}$. To je konveksna množica ker $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, $x_1 + \dots + x_n = 1$] ker je presek konveksnih tudi konveksna množica



n=2



n=3

↳ **ZGLED** 21.10

A končna množica, $\Pi(A)$ množica loterij nad A

$\pi \sim \begin{pmatrix} LJ & NY & PAR & BAR \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \in \Pi(A)$

$\Pi(A)$ je konveksna množica

$\pi' \sim \begin{pmatrix} LJ & NY & PAR & BAR \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Lahko govorimo o loteriji

$\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi' \sim \begin{pmatrix} LJ & NY & PAR & BAR \\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} & \square & \square & \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \pi & \pi' \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$\Pi(\Pi(A)) = \Pi(A)$

↳ **DEFINICIJA**

Funkcija koristnosti nad A je preslikava $u: A \to \mathbb{R}$

Funkcije koristnosti imajo kvantitativni pomen oz. ima vsak $u(a)$ skupno enoto.

V tem primeru lahko naredimo povprečje med elementi $\{u(a) \mid a \in A\}$

Funkcija koristnosti u nad A določi preference $\hat{u}$ na množici $\Pi(A)$.

$$\hat{u}: \Pi(A) \to \mathbb{R}$$

$$\pi \longmapsto \hat{u}(\pi) = \sum_{a \in A} \pi(a) \cdot u(a)$$

$\hat{u}$ je razširitev funkcije koristnosti u na množico $\Pi(A)$

$\boxed{\text{primer}}$ $u(LJ) = 100$, $u(NY) = 200$, $u(PAR) = 50$, $u(BAR) = 30$

$$\hat{u}\left(\begin{pmatrix} LJ & NY & PAR & BAR \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot 100 + \frac{1}{3} \cdot 200 + 0 \cdot 50 + 1/3 \cdot 30 =$$

Za vsak $a \in A$ obstaja POSEBNA LOTERIJA $\delta(a) \in \Pi(a)$ definirana kot

$$\delta(a)(b) = \begin{cases} 1 & ; \text{ če } b = a \\ 0 & ; \text{ če } b \neq a \end{cases}$$

$\boxed{\text{primer}}$: $\delta(PAR) = \begin{pmatrix} LJ & NY & PAR & BAR \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv PAR$

$\hat{u}$ je razširitev, ker za $\forall a \in A$ velja $\hat{u}(\delta(a)) = u(a)$

↳ Ali za vsako funkcijo preferenc $\succ$ na $\Pi(A)$ obstaja funkcija koristnosti u na A, tako, da $\hat{u}$ in $\succ$ določata iste preference na $\Pi(A)$?

<u>NE</u>, ampak če dodamo neke dodatne predpostavke v $\succ$, je odgovor DA (utility theory)

↳ Uporabili bomo princip: $\hat{u}(\pi) > \hat{u}(\pi')$

$$\Updownarrow$$

π boljše kot π'

To ni vedno realistično

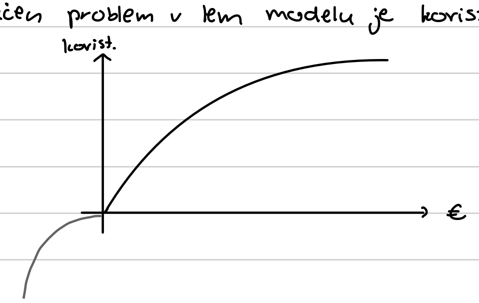
$\boxed{\text{primer}}$: $\pi \sim \begin{pmatrix} \text{dobiš } 2 \cdot 10^6 \text{ €} & \text{dobiš } 0 \text{ €} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \hat{u}(\pi') > \hat{u}(\pi)$

$\pi' \sim \begin{pmatrix} \text{dobiš } 3 \cdot 10^6 \text{ €} + 1 & \text{plačam } 1 \cdot 10^6 \text{ €} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

↳ vendar bi logično večina ljudi izbrala prvo opcijo

↳ ključen problem v tem modelu je koristnost denarja



Model je realističen za majhne količine denarja

↳ **DEF**: Strateška igra s funkcijami koristnosti je trojica $\Gamma = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$, pri čemer:

- N – množica igralcev
- A_i – neprazna množica akcij za igralca i. Za nas bo vsak A_i končna množica
  Definiramo $\mathcal{A} = \prod_{i\in N} A_i$ množica poljubnih profilov akcij
- u_i – funkcija koristnosti nad $\mathcal{A}$ za igralca i.

↳ Množica (mešanih/mixed) strategij za igralca i je $S_i = \Pi(A_i)$.

- strategija $\pi_i \in S_i$ je čista/pure, če $\exists\, a_i \in A_i$ tako, da je $\pi_i \in \delta(a_i)$
- Strategija $\pi_i \in S_i$ meša akcije $\{a_i \in A_i \mid \pi_i(a_i) > 0\}$

Množica profilov strategij je $\prod_{i\in N} S_i$ (= kartezični produkt)

↳ **ZGLED**

		$1/3$ L	0 S	$2/3$ D
$1/2$	G	3,1	4,2	5,3
$1/3$	S	1,6	2,5	3,4
$1/6$	D	8,0	7,3	6,2

→ v tem primeru za igralca ni nujno, da "igrata" v isti enoti

Strateška igra s funkcijami koristnosti

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} G & S & D \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} p_1, p_2, p_3 \geq 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{matrix} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} L & S & D \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} q_1, q_2, q_3 \geq 0 \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{matrix} \right\}$$

Igralec 1 ima 3 čiste strategije: $\begin{pmatrix} G & S & D \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \delta(G)$, $\begin{pmatrix} G & S & D \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \delta(S)$, $\begin{pmatrix} G & S & D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta(D)$

V strategiji $\begin{pmatrix} G & S & D \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ meša 1 igralec G in D.

Denimo, da igralec 1 uporabi $\pi_1 = \begin{pmatrix} G & S & D \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$ in igralec 2 uporabi $\pi_2 = \begin{pmatrix} L & S & D \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$ *

Potem
$$\begin{aligned} E[u_1] = {} & \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 3 + \tfrac{1}{2}\cdot 0\cdot 4 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 5 + {} \\ & \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 1 + \tfrac{1}{3}\cdot 0\cdot 2 + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 3 + {} \\ & \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 8 + \tfrac{1}{6}\cdot 0\cdot 7 + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 6 \\ = {} & \pi_1(G)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\cdot 3 + 0\cdot 4 + \tfrac{2}{3}\cdot 5\right) + {} \\ & \pi_1(S)\left(\tfrac{1}{3}\cdot 1 + 0\cdot 2 + \tfrac{2}{3}\cdot 3\right) + {} \\ & \pi_1(D)\left(\tfrac{1}{3}\cdot 8 + 0\cdot 7 + \tfrac{2}{3}\cdot 6\right) \end{aligned}$$

$E[u_1$, če 1 igralec uporabi $\delta(G)$ in 2. uporabi $\pi_2]$

$E[u_1$, če 1. igralec uporabi $\delta(S)$ in 2. $\pi_2]$

$E[u_1$, če 1. igralec uporabi $\delta(D)$ in 2. uporabi $\pi_2]$

↳ Denimo, da imamo nek profil strategij $(\pi_i)_{i\in N} = \pi$. Določi funkcijo verjetnosti na $\mathcal{A}$:
verjetnost, da se igra konča v $(a_i)_{i\in N} = a \in \mathcal{A}$ je $\prod_{i\in N} \pi_i(a_i)$

> Funkcija koristnosti $u_i : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ inducira funkcijo preferenc na $\prod_{j\in N} S_j$
>
> $$U_i : \prod_{i\in N} S_i \longrightarrow \mathbb{R}$$
>
> $$\pi = (\pi_i)_{i\in N} \longmapsto \sum_{a\in A}\Big(\prod_{j\in N} \pi_j(a_j)\Big)\cdot \pi_i(a) = \underset{\forall j:\, a_j \sim \pi_j}{E}[u_i(a)]$$

PRIMER

- ko $N=[n]$

$$u_1(\pi_1,\dots,\pi_n)=\sum_{(a_1,\dots,a_n)\in \mathcal{A}} \pi_1(a_1)\cdot\pi_2(a_2)\cdot\ldots\cdot\pi_n(a_n)\cdot u_1(a_1,\dots,a_n)$$

$$=\sum_{a_1\in A_1}\pi_1(a_1)\cdot\Big(\sum_{(a_2,\dots,a_n)\in A_2\times\dots\times A_n}\pi_2(a_2)\cdot\ldots\cdot\pi_n(a_n)\,u_1(a_1,\dots,a_n)\Big)$$

$$=\sum_{a_1\in A_1}\pi_1(a_1)\cdot\underbrace{\mathcal{U}_1(\delta(a_1),\pi_2,\dots,\pi_n)}_{\mathcal{U}_1(\pi\,|\,\delta(a_1))}$$

- V splošnem za poljuben N

$$\mathcal{U}_i((\pi_j)_{j\in N}=\pi)=\sum_{a_i\in A_i}\pi_i(a_i)\cdot\mathcal{U}_i(\pi\,|\,\delta(a_i))$$

↳ **DEFINICIJA**: Naj bo $\Gamma=(N,(A_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N})$ strateška igra s funkcijami koristnosti $S_i=\Pi(A_i)$ za $\forall i\in N$.

Profil strategij $\pi^*=(\pi_i^*)_{i\in N}$ je Nashejevo ravnovesje natanko tedaj, ko:

$$\boxed{\forall i\in N\quad\forall\sigma_i\in S_i:\ \mathcal{U}_i(\pi^*)\geq\mathcal{U}_i(\pi^*\,|\,\sigma_i)}$$

Profil π^* je strogo N.R. natanko tedaj, ko velja:

$$\boxed{\forall i\in N\quad\forall\sigma_i\in S_i,\ \sigma_i\neq\pi_i^*:\ \mathcal{U}_i(\pi^*)>\mathcal{U}_i(\pi^*,\sigma_i)}$$

Ravnotežje je čisto, ko je vsaka strategija čista.

Definiramo preslikavo $\phi_{kor\to pre}$: {igre s funk. koristnosti} $\longrightarrow$ {igre s funkcijami preferenc}

$\phi_{kor\to pre}$ (kor → pre: koristnost v preferenco)

$$(N,(A_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N})\longmapsto(N,(S_i)_{i\in N},(\mathcal{U}_i)_{i\in N})$$

$$\mathcal{U}_i:\prod_{j\in N}S_j\to\mathbb{R}$$

Igra $\phi_{kor\to pre}(\Gamma)$ je mešana razširitev igre Γ.

↳ **TRDITEV**

π^* je N.R. v strateški igri s funkcijami koristnosti Γ

$\Updownarrow$

π^* je N.R. v strateški igri s funkcijami preferenc $\phi_{kor\to pre}(\Gamma)$

DOKAZ: Sledi iz definicije

↳ ZGLED

Opazujmo igro s funk. koristnosti

	X	Y
A	4, 2	2, 4
B	0, 3	3, 2

$$\Phi_{kor \to pre}(\Gamma) = \left([2], \left(S_1 = \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ p & 1-p \end{pmatrix} \mid p \in [0,1]\right\}, S_2 = \left\{\begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix} \mid q \in [0,1]\right\}\right), \left(u_i : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}, u_2\right)\right) \cong$$

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix}\right) \mapsto p \cdot q \cdot 4 + p(1-q) \cdot 2 + (1-p) q \cdot 0 + (1-p)(1-q) \cdot 3$$

$\Downarrow$

To bomo pisali kot $u_i(\underset{[0,1]}{p}, \underset{[0,1]}{q})$

$$\cong \left(\{1,2\}, (\underset{p}{[0,1]}, \underset{q}{[0,1]}), \left(u_1 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}\right.\right.$$

$$(p,q) \mapsto u_1(p,q) = pq4 + p(1-q) \cdot 2 + (1-p) q \cdot 0 + (1-p)(1-q) 3$$

$$u_2 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$$

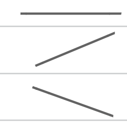
$$\left.\left.(p,q) \mapsto u_2(p,q) = p \cdot q 2 + p(1-q) \cdot 4 + (1-p) q \cdot 3 + (1-p)(1-q) \cdot 2\right)\right)$$

$B_1(q)$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p}(p,q) = 4 q + 2(1-q) + 0 + 3(-1)(1-q) = -1 + 5q$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p}(p,q) = \begin{cases} = 0 & ; \text{ če } q = 1/5 \\ > 0 & ; q > 1/5 \\ < 0 & ; q < 1/5 \end{cases}$$

[kako funkcija zgleda:

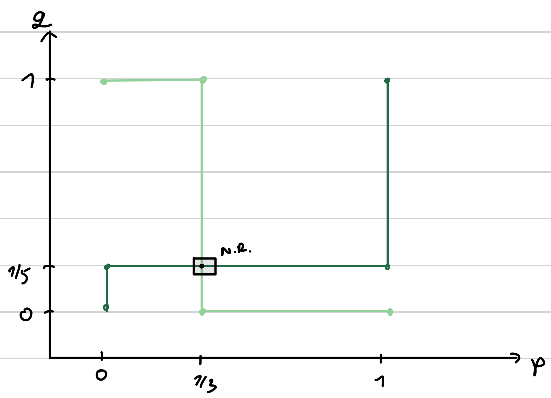

]

$$B_1(q) = \begin{cases} [0,1] & , \text{če } q = 1/5 \\ 1 & ; \text{če } q > 1/5 \\ 0 & ; \text{če } q < 1/5 \end{cases}$$

$B_2(p)$

$$\frac{\partial u_2}{\partial q}(p,q) = 2p - 4p + 3(1-p) - 2(1-p) = 1 - 3p$$

$$B_2(p) = \begin{cases} [0,1] & , \text{če } p = 1/3 \\ 1 & , \text{če } p < 1/3 \\ 0 & , \text{če } p > 1/3 \end{cases}$$

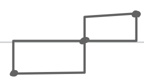


— $B_1(q)$

— $B_2(p)$

N.R. $(p = 1/3, q = 1/5)$ oz $\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}\right)$

če bi malo premaknili, bi lahko dobili tudi tri N.R.



↪ ZGLED

		q X	$1-q$ Y
p	A	3,8	5,7
$1-p$	B	4,6	3,6

$p \in [0,1]$

$q \in [0,1]$

$$u_1(p,q) = 3pq + 5p(1-q) + 4(1-p)q + 3(1-p)(1-q) =$$
$$= p\underbrace{(3q + 5(1-q))}_{u_1(\sigma(A),q)} + (1-p)\underbrace{(4q + 3(1-q))}_{u_1(\sigma(B),q)}$$

$$u_2(p,q) = 8pq + 7p(1-q) + (1-p)\cdot\underbrace{6}_{6(q+1-q)}$$

$B_1(q)$

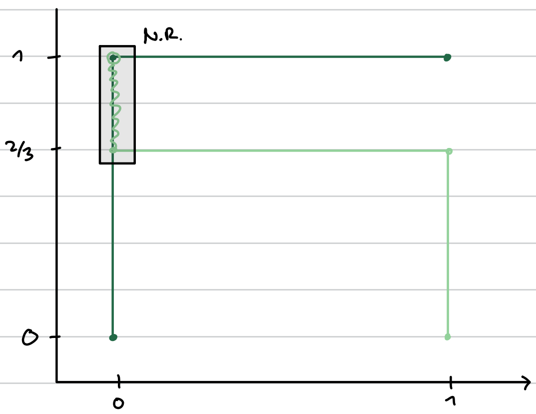
$$\frac{\partial u_1}{\partial p}(p,q) = 5-2q-(3+q) = 2-3q \quad \text{je} \begin{cases} 0 & ; \text{če } q = 2/3 \\ >0 & ; \text{če } q < 2/3 \\ <0 & ; \text{če } q > 2/3 \end{cases}$$

$$B_1(q) = \begin{cases} [0,1] & ; \text{če } q = 2/3 \\ 1 & ; \text{če } q < 2/3 \\ 0 & ; \text{če } q > 2/3 \end{cases}$$

$B_2(p)$

$$\frac{\partial u_2}{\partial q}(p,q) = 8p + (-7p) + 0 = p \qquad \begin{cases} =0 & ; p=0 \\ >0 & ; p>0 \end{cases}$$

$$B_2(p) = \begin{cases} [0,1], & \text{če } p=0 \\ 1 & ; \text{če } p>0 \end{cases}$$



- $B_2(p)$

- $B_1(q)$

N.R. $\{(0,q) \mid q \in [2/3, 1]\}$

v izvirni igri:

NR: $\left\{ \left(\sigma(B), \begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix}\right) \mid q \in [2/3, 1] \right\}$

LASTNOSTI NASHEJEVEGA RAVNOVESJA

↳ **IZREK (Nash, 1949)**

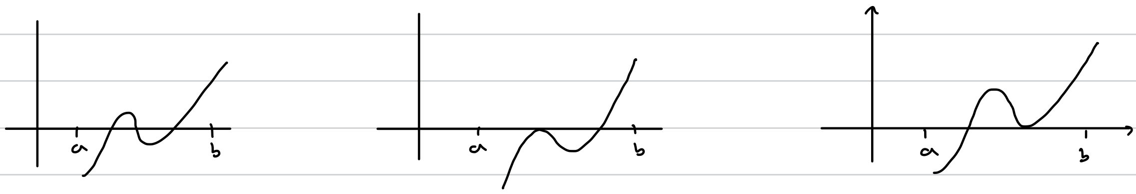
Naj bo Γ strateška igra z funkcijami koristnosti, kjer ima vsak igralec končno množico akcij. Tedaj ima Γ vsaj eno Nashejevo ravnovesje.

OPOMBA:

- Dokazali bomo kasneje, ker pokaže le obstoj, ampak nič o tem, kako dobimo N.R.

  [Podobna situacija: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna, $f(a)<0, f(b)>0$. Tedaj je množica ničel $\{x\in[a,b] \mid f(x)=0\}$ je neprazna.]
- V izreku sem napisal ŠE ENKRAT, da je $|A_i|<\infty$ za $\forall i\in N$. Brez tega izrek ne drži

  $\exists$ podobni izrek za $|A_i|=\infty$, ki imajo dodatne predpostavke
- Generična strateška igra z funkcijo koristnosti ima liho število N.R.



↳ **ZGLED**

	X	Y
A	3,8	5,7
B	4,6	3,6

ima neskončno N.R.

	X	Y
A	3,8	5,7
B	4,6+ε	3,6

$\varepsilon\neq 0$. če $|\varepsilon|$ dovolj blizu 0 potem je ENO N.R.

POGOSTO NA IZPITU TEORIJE

↳ **TRDITEV (Sistem enačb)**

Profil strategij $\pi^*=(\pi_i^*)_{i\in N}$ je N.R. natanko tedaj, ko velja

$$\boxed{\forall i\in N \quad \forall a_i\in A_i: \quad u_i(\pi^*)\geq u_i(\pi^* \mid \delta(a_i))}$$

- PRIMERJAVA: · def: $\forall i\in N \quad \forall \sigma_i\in S_i: \quad u_i(\pi^*)\geq u_i(\pi^*\mid\sigma_i)$

  · tr: $\forall i\in N \quad \forall a_i\in A_i: \quad u_i(\pi^*)\geq u_i(\pi^*\mid\delta(a_i))$

- DOKAZ TRDITVE:

  → Predpostavimo, da je π^* N.R. Po definiciji velja

  $$\forall i\in N \quad \forall \sigma_i\in S_i: \quad u_i(\pi^*)\geq u_i(\pi^*\mid\sigma_i)$$

  Ker $T_i=\{\delta(a_i) \mid a_i\in A_i\}\subseteq S_i$ velja za π^*:

  $$\forall i\in N \quad \forall \sigma_i\in T_i: \quad u_i(\pi^*)\geq u_i(\pi^*\mid\sigma_i)$$

  $$\Vert$$

  $$\forall i\in N \quad \forall a_i\in A_i: \quad u_i(\pi^*)\geq u_i(\pi^*\mid\delta(a_i))$$

→ DRUGA SMER: Predpostavimo, da velja za π^*

$$\forall i \in N,\ \forall a_i \in A_i : u_i(\pi^*) \geq u_i(\pi^* \mid \delta(a_i))$$

Izberemo $i \in N$ in $\sigma_i \in S_i$.

$$u_i(\pi^* \mid \sigma_i) = \sum_{a_i \in A_i} \underbrace{\underbrace{\sigma_i(a_i)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{u_i(\pi^* \mid \delta(a_i))}_{\leq u_i(\pi^*)}}_{\sigma_i(a_i) \cdot u_i(\pi^*)} \leq \sum_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i) \cdot u_i(\pi^*) =$$

linearnost u_i glede σ_i

$$= u_i(\pi^*) \cdot \underbrace{\sum_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i)}_{1} = u_i(\pi^*)$$

Ker to velja za $\forall i \in N$ in $\forall \sigma_i \in S_i$, je π^* N.R. ■

↳ **ZGLED**

		q	$1-q$
		X	Y
p	A	3,1	1,2
$1-p$	B	1,2	4,3

(p^*, q^*) je N.R. natanko tedaj ko

(def): $3p^*q^* + 1 \cdot p^*(1-q^*) + 1(1-p^*)q^* + 4(1-p^*)(1-q^*) \geq 3pq^* + 1 \cdot p(1-q^*) + 1(1-p)q^* + 4(1-p)(1-q^*)$ za $\forall p \in [0,1]$

$1p^*q^* + 2 \cdot p^*(1-q^*) + 1(1-p^*)q^* + 3(1-p^*)(1-q^*) \geq 1p^*q + 2 \cdot p^*(1-q) + 1(1-p^*)q + 3(1-p^*)(1-q)$ za $\forall q \in [0,1]$

(sistem neenačb)

$$\left.\begin{aligned}
3p^*q^* + 1p^*(1-q^*) + 1(1-p^*)q^* + 4(1-p^*)(1-q^*) &\geq 1 \cdot q^* + 4(1-q^*) = u_1(\delta(B), q^*) \\
3p^*q^* + 1p^*(1-q^*) + 1(1-p^*)q^* + 4(1-p^*)(1-q^*) &\geq 3 \cdot q^* + 1(1-q^*) = u_1(\delta(A), q^*) \\
1p^*q^* + 2 \cdot p^*(1-q^*) + 1(1-p^*)q^* + 3(1-p^*)(1-q^*) &\geq 1 \cdot p^* + 2(1-p^*) = u_2(p^*, \delta(X)) \\
1p^*q^* + 2 \cdot p^*(1-q^*) + 1(1-p^*)q^* + 3(1-p^*)(1-q^*) &\geq 2 \cdot p^* + 3(1-p^*) = u_2(p^*, \delta(Y))
\end{aligned}\right] \textbf{!}$$

↳ **POSLEDICA**: Naj bo $\Gamma = (N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ strateška igra s funkcijami koristnosti. Profil akcij $a^* = (a_i^*)_{i \in N}$ je čisto N.R. v igri Γ, ko interpretiramo u_i kot funkcijo preferenc $\iff$ profil strategij $\pi^* = (\delta(a_i))_{i \in N}$ je N.R. v igri Γ (čisto).

↳ **ZGLED**: BoS

	B	S
B	2,1	0,0
S	0,0	1,2

funkcije koristnosti

(B,B) in (S,S) sta čista N.R. v igri s preferencami

$(\delta(B), \delta(B))$ in $(\delta(S), \delta(S))$ sta N.R. v igri z funk. koristnosti

↳ **POSLEDICA:** (Popolna indiferentnost)

Naj bo $\pi^* = (\pi_i^*)_{i\in N}$ profil strategij, za katero velja

$$\boxed{\forall i \in N \quad \forall a_i, b_i \in A_i : \quad u_i(\pi^* \mid s(a_i)) = u_i(\pi^* \mid s(b_i))}$$

Tedaj je π^* N.R.

DOKAZ: $\forall i \in N$ izberemo neko akcijo $c_i \in A_i$, potem velja

$$u_i(\pi^*) \overset{\text{linearnost } u_i \text{ na } \pi_i}{=} \sum_{a_i \in A_i} \pi_i^*(a_i) \cdot \underbrace{u_i(\pi^* \mid s(a_i))}_{= u_i(\pi^* \mid s(c_i))} =$$

$$= \sum_{a_i \in A_i} \pi_i^*(a_i) \cdot u_i(\pi^* \mid s(c_i)) = u_i(\pi^* \mid s(c_i)) \cdot \underbrace{\sum_{a_i \in A_i} \pi_i^*(c_i)}_{=1} = u_i(\pi^* \mid s(c_i))$$

Torej: za $\forall i \quad \forall a_i \in A_i$: $u_i(\pi^*) = u_i(\pi^* \mid s(a_i))$

$\Longrightarrow \pi^*$ je N.R.

sistem neenačb z enakosti

↳ **TRDITEV** (Princip indiferentnosti)

Naj bo $\pi^* = (\pi_i^*)_{i \in N}$ Nashevo ravnovesje. Tedaj velja

$$\boxed{\forall i \in N \quad \forall a_i \in A_i : \left(\pi_i^*(a_i) > 0 \implies u_i(\pi^*) = u_i(\pi^* \mid s(a)) \right)}$$

OPOMBE:
- Ni karakterizacije
- Princip indiferentnosti uporabimo za iskanje kandidatov za N.R.. Potem uporabimo sistem neenačb za preverjanje
- Vsak igralec je indiferenten med akcijami, ki jih meša.

DOKAZ: Dokaz s protislovjem. Denimo, da trditev ne velja

Torej obstaja $i \in N$ in $a_i \in A_i$ za katero velja: $\pi_i^*(a_i) > 0$ in $u_i(\pi^*) \neq u_i(\pi^* \mid s(a_i))$

Ker je π^* N.R.: $u_i(\pi^*) \geq u_i(\pi^* \mid s(c_i))$

Torej: $\pi_i^*(a_i) > 0$ (že ≥ 0), $u_i(\pi^*) > u_i(\pi^* \mid s(a_i))$ $\Big] \Rightarrow \pi_i^*(a_i) \cdot u_i(\pi^*) \overset{(*)}{>} \pi_i^*(a_i) \cdot u_i(\pi^* \mid s(a_i))$ ← $\geq$ tega nočemo

Linearnost u_i glede π_i:

$$\boxed{u_i(\pi^*)} = \sum_{b_i \in A_i} \pi_i^*(b_i) \cdot u_i(\pi^* \mid s(b_i))$$

$$= \underbrace{\pi_i^*(a_i) \cdot u_i(\pi^* \mid s(a_i))}_{\overset{(*)}{<} \pi_i^*(a_i) \cdot u_i(\pi^*)} + \underbrace{\sum_{\substack{b_i \in A_i \\ b_i \neq a_i}} \underbrace{\pi_i^*(b_i)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{u_i(\pi^* \mid s(b_i))}_{\leq u_i(\pi^*) \text{ ker } \pi^* \text{ je N.R}}}_{\leq \pi_i^*(b_i) \cdot u_i(\pi^*)}$$

$$\boxed{<} \ \pi_i^*(a_i) \cdot u_i(\pi^*) + \sum_{\substack{b_i \in A_i \\ b_i \neq a_i}} \pi_i^*(b_i) \cdot u_i(\pi^*)$$

$$= u_i(\pi^*) \cdot \sum_{b_i \in A_i} \pi^*(b_i) =$$

$$\boxed{= u_i(\pi^*)} \longrightarrow \times$$

■

↳ **POSLEDICA**

- N.R. je lahko STROGO N.R., če je čisto N.R.
  (strogo $\Rightarrow$ čisto)

↳ **ZGLED**

		(q) X	$(1-q)$ Y
(p)	A	4, 2	2, 4
$(1-p)$	B	1, 3	3, 2

- $\boxed{p=1}$ oz $\mathcal{S}(A)$

  $B_2(\mathcal{S}(A)) = \mathcal{S}(Y)$

  $B_1(\mathcal{S}(Y)) = \mathcal{S}(B)$

  $\nexists$ N.R. $(\mathcal{S}(A), \cdot)$

- $\boxed{p=0}$ oz $\mathcal{S}(B)$

  $B_2(\mathcal{S}(B)) = \mathcal{S}(X)$

  $B_1(\mathcal{S}(X)) = \mathcal{S}(A)$

  $\nexists$ N.R. $(\mathcal{S}(B), \cdot)$

- $\boxed{p \in (0,1)}$

  Prvi igralec meša A in B. Iščemo N.R. oblike

  $$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \cdot\right) \qquad p \neq 0,1$$

  Princip indiferentnosti: $u_1(\mathcal{S}(A), q) = u_1(\mathcal{S}(B), q)$

  $$\Updownarrow$$

  $$4q + 2(1-q) = 1 \cdot q + 3(1-q)$$

  $$q = 1/4$$

  ker $q \neq 0,1$ zdaj uporabimo princip indif za 2 igralca:

  $$u_2(p, \mathcal{S}(X)) = u_2(p, \mathcal{S}(Y))$$

  $$2p + 3(1-p) = 4p + 2(1-p)$$

  $$3 - p = 2 + 2p$$

  $$p = 1/3$$

  Edini kandidat za N.R.: $\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}\right)$

  ker imamo pri $p = 1/3$ in $q = 1/4$ popolno mešanje: $(u_1(\mathcal{S}(A), q)) = u_1(\mathcal{S}(B), q)$ in $u_2(p, \mathcal{S}(X)) = u_2(p, \mathcal{S}(Y)))$
  sledi, da je N.R.

↳ ZGLED

		X (q)	Y $(1-q)$
(p)	A	3, 8	5, 7
$(1-p)$	B	4, 6	3, 6

- $\boxed{p=1}$ oz. $\mathcal{J}(A)$

  $B_2(\mathcal{J}(A)) = \mathcal{J}(X)$

  $B_1(\mathcal{J}(X)) = \mathcal{J}(B) \neq \mathcal{J}(A)$

  $\nexists$ N.R. oblike $(\mathcal{J}(A), \cdot)$

- $\boxed{p=0}$ oz. $\mathcal{J}(B)$

  $B_2(\mathcal{J}(B)) = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix} \;\middle|\; q \in [0,1] \right\}$

  kdaj je $B_1\left(\begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix}\right) \ni \mathcal{J}(B)$?

  $u_1\left(\mathcal{J}(B), \begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix}\right) = 4q + 3(1-q) = 3 + q$

  $u_1\left(\mathcal{J}(A), \begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix}\right) = 3q + 5(1-q) = 5 - 2q$ $\Longrightarrow$ $3+q \geq 5-2q$, $q \geq 2/3$

  kdaj je $u_2\left(\mathcal{J}(B), \begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix}\right) \geq \underbrace{u_1\left(\begin{pmatrix} A & B \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix}\right)}_{p \cdot u_1\left(\mathcal{J}(A), \begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix}\right) + (1-p) \cdot u_1\left(\mathcal{J}(B), \begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix}\right)}$

  ko je $q \geq 2/3$ je $\mathcal{J}(B)$ najboljši odgovor na $\begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix}$

  N.R. oblike $\left(\mathcal{J}(B), \begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix}\right)$ za nek $q \geq 2/3$

- $\boxed{p \in (0,1)}$ oz. $p \neq 0,1$

  1. igralec meša A in B. Princip indiferentnosti za 1. igralca pove

  $u_1\left(\mathcal{J}(A), \begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix}\right) = u_1\left(\mathcal{J}(B), \begin{pmatrix} X & Y \\ q & 1-q \end{pmatrix}\right)$

  $3q + 5(1-q) = 4q + 3(1-q)$

  $5 + 2q = 3 + q$

  $q = 2/3$

  ker drugi igralec meša X in Y, princip indif. za 2. igralca pove:

  $u_2\left(\begin{pmatrix} A & B \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \mathcal{J}(X)\right) = u_2\left(\begin{pmatrix} A & B \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \mathcal{J}(Y)\right)$

  $8p + 6(1-p) = 7p + 6(1-p)$

  $p = 0 \Longrightarrow \nexists$ N.R. oblike $\left(\begin{pmatrix} A & B \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \cdot\right)$ $p \neq 0,1$

DOMINACIJE

↳ **ZGLED**

	X	Y	Z
A	1,	2,	3,
B	3,	2,	1,
C	1,	1,	1,
$1/2\,\sigma(A) + 1/2\,\sigma(B)$	2,	2,	2,

$\exists$ N.R. σ^* pri katerem $\sigma_1^*(C) > 0$

Ne, ker $1/2\,\sigma(A) + 1/2\,\sigma(B)$ strogo dominira $\sigma(C)$

↳ **DEFINICIJA**

Strategija $\alpha_i \in S_i$ strogo dominira $\beta_i \in S_i$, če velja:

$$\forall \sigma \in S : u_i(\sigma | \alpha_i) > u_i(\sigma | \beta_i)$$

Strategija $\alpha_i \in S_i$ dominira $\beta_i \in S_i$, če velja:

$$\forall \sigma \in S : u_i(\sigma | \alpha_i) \geq u_i(\sigma | \beta_i)$$

↳ **TRDITEV**

Naj bo $\sigma^* = (\sigma_i^*)_{i \in N}$ Nashejevo ravnovesje. Če strategija α_i strogo dominira čisto strategijo $\sigma(a_i)$, potem $\sigma_i^*(a_i) = 0$

DOKAZ 4.11

Ker α_i strogo dominira $\sigma(b_i)$, velja

$$\forall \sigma \in S : u_i(\sigma | \alpha_i) > u_i(\sigma | \sigma(b_i))$$

Torej: $u_i(\sigma^* | \alpha_i) > u_i(\sigma^* | \sigma(b_i))$

Predpostavimo, da velja $\sigma_i^*(b_i) > 0$, in dobimo, da σ^* <u>NI</u> Nashejevo r.

Definiramo strategijo $\sigma_i \in S_i$

$$\sigma_i(a_i) = \begin{cases} \alpha_i(b_i) \cdot \sigma_i^*(b_i) & ; \text{ če } a_i = b_i \\ \sigma_i^*(a_i) + \alpha_i(a_i) \cdot \sigma_i^*(b_i) & ; \text{ če } a_i \neq b_i \end{cases}$$

Preverimo: (1) $\sigma_i \in S$

(2) $u_i(\sigma^*, \sigma_i) > u_i(\sigma^*)$ in torej σ^* ni N.R.

(1) Ze σ_i res je strategija:

→ $\forall a_i \in A_i : \sigma_i(a_i) \geq 0$

→ $\displaystyle\sum_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i) = \alpha_i(b_i) \cdot \sigma_i^*(b_i) + \sum_{\substack{a_i \in A_i \\ a_i \neq b_i}} \left(\sigma_i^*(a_i) + \alpha_i(a_i) \cdot \sigma^*(b_i)\right) = \sigma_i^*(b_i) \cdot \underbrace{\sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i)}_{=1} + \sum_{\substack{a_i \in A_i \\ a_i \neq b_i}} \sigma_i^*(a_i)$

$\displaystyle = \sigma_i^*(b_i) + \sum_{\substack{a_i \in A_i \\ a_i \neq b_i}} \sigma_i^*(a_i) = \sum_{a_i \in A_i} \sigma_i^*(a_i) = 1$

$$(2) \quad u_i(\pi^* | \sigma_i) \overset{\text{linearnost}}{=} \sum_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i) \cdot u_i(\pi^* | s(a_i)) = \alpha_i(b_i) \cdot \pi_i^*(b_i) \cdot u_i(\pi^* | s(b_i)) + \sum_{\substack{a_i \in A_i \\ a_i \neq b_i}} \left(\pi_i^*(a_i) + \alpha_i(a_i)\, \pi_i^*(b_i) \right) \cdot u_i(\pi^* | s(a_i))$$

$$= \alpha_i(b_i) \cdot \pi_i^*(b_i) \cdot u_i(\pi^* | s(b_i)) + \sum_{\substack{a_i \in A_i \\ a_i \neq b_i}} \pi_i^*(a_i) \cdot u_i(\pi^* | s(a_i)) + \left(\sum_{\substack{a_i \in A_i \\ a_i \neq b_i}} \alpha_i(a_i) \cdot u_i(\pi^* | s(a_i)) \right) \cdot \pi_i^*(b_i) =$$

$$= \sum_{\substack{a_i \in A_i \\ a_i \neq b_i}} \pi_i^*(a_i) \cdot u_i(\pi^* | s(a_i)) + \pi_i^*(b_i) \cdot u_i(\pi^* | s(b_i)) - \pi_i^*(b_i) \cdot u_i(\pi^* | s(b_i)) + \pi_i^*(b_i) \cdot \sum_{\substack{a_i \in A_i \\ a_i \neq b_i}} \alpha_i(a_i) \cdot u_i(\pi^* | s(a_i)) =$$

$$= u_i(\pi^*) + \underbrace{\underbrace{\pi_i^*(b_i)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left(u_i(\pi^* | \alpha_i) - u_i(\pi^* | s(b_i)) \right)}_{> 0 \text{ zaradi stroge dominacije}}}_{> 0}$$

$$> u_i(\pi^*)$$

$\Longrightarrow$ Dobili smo, da $u_i(\pi^* | \sigma_i) > u_i(\pi^*)$ in torej π^* ni Nashevo ravnovesje ■

OBSTOJ NASHEJEVEGA RAVNOVESJA

↳ **KONVEKSNOST**

$X \subseteq \mathbb{R}^d$ konveksna $\iff$ $\forall x,y \in X$ in $\forall \lambda \in [0,1]$ velja $(1-\lambda)x + \lambda y \in X$

- X, Y konveksne $\Rightarrow$ $X \cap Y$ je konveksna
  $\Rightarrow$ $X \times Y$ je konveksna
- Premice, hiperravnine in polprostori so konveksne množice
- $S_i = \Pi(A_i)$ konveksna
  $\| \; \{\dots \mid x_i \geq 0 \; \forall i \;\; \sum x_i = 1\}$
- $S = \prod_{i \in N} S_i$ množica profilov strategij je konveksna

↳ **KOMPAKTNOST**

$X \subseteq \mathbb{R}^d$ kompaktna $\iff$ $\begin{cases} X \text{ zaprta} \\ X \text{ omejena} \end{cases}$

- X, Y kompaktna $\Rightarrow$ $X \cap Y$ kompaktna
  $\Rightarrow$ $X \times Y$ kompaktna
- S_i je kompaktna, ker vsaka koordinata $x \in S_i$ znotraj $[0,1]$ in je S_i presek zaprtih množic
- S je kompaktna

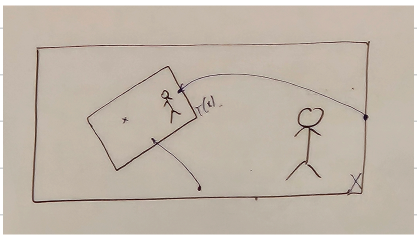
↳ **DEFINICIJA**

$T: X \to X$. $x \in X$ je negibna točka (fixed point), če velja $T(x) = x$

↳ **IZREK (Brouwerjev izrek o negibni točki)**

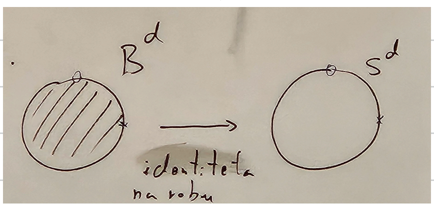
$X \subseteq \mathbb{R}^d$ konveksna in kompaktna. $T: X \to X$ zvezna.

Tedaj obstaja negibna točka za T $\Rightarrow$ $\exists x \in X: T(x) = x$

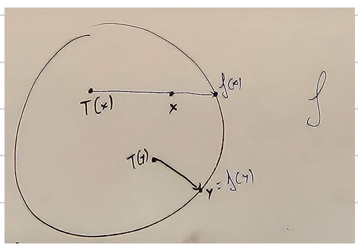


↳ Izrek se vidi v algebraični topologiji

- $\nexists$ nobena zvezna funkcija od



- Če T ne bi imela negibne točke, potem lahko skonstruiramo funkcijo iz prve točke



↳ **DOKAZ (Nashejev izrek)**

Definiramo funkcijo $T: S \to S$

$$\pi = (\pi_i)_{i \in N} \longrightarrow \pi' = (\pi_i')_{i \in N}$$

Za $\forall\, i \in N$ in $\forall a_i \in A_i$:

$$\pi_i'(a_i) = \frac{\pi_i(a_i) + \max\{0, u_i(\pi \mid s(a_i)) - u_i(\pi)\}}{1 + \sum\limits_{b_i \in A_i} \max\{0, u_i(\pi \mid s(b_i)) - u_i(\pi)\}}$$

→ Ali je res tak $\pi_i' \in S_i$?

- $\pi_i'(a_i) \geq 0$ za $\forall a_i \in A_i$

$$\pi_i^*(a_i) = \frac{\overset{\geq 0}{\pi_i(a_i)} + \geq 0}{1 + \sum\limits_{b_i \in A_i} \geq 0} \; \begin{matrix} \geq 0 \\ \geq 1 \end{matrix} \geq 0$$

- $\sum\limits_{a_i \in A_i} \pi_i'(a_i) \overset{?}{=} 1$

$$\sum_{a_i \in A_i} \frac{\pi_i(a_i) + f(a_i, \pi)}{1 + \sum\limits_{b_i \in A_i} f(b_i, \pi)} = \frac{\sum\limits_{a_i \in A_i} (\pi(a_i) + f(a_i, \pi))}{1 + \sum\limits_{b_i \in A_i} f(b_i, \pi)} = \frac{1 + \sum\limits_{a_i \in A_i} f(a_i, \pi)}{1 + \sum\limits_{b_i \in A_i} f(b_i, \pi)} = 1$$

⟹ Dobro smo definirali π'

→ T je zvezna

$$\pi_i'(a_i) = \frac{\overbrace{\underset{\text{zvezno}}{\pi_i(a_i)} + \max\{0, \overbrace{\underset{\text{zvezno}}{u_i(\pi \mid s(a_i))} - \underset{\text{zv}}{u_i(\pi)}}^{\text{zv.}}\}}^{\text{zv.}}}{\underbrace{1 + \sum\limits_{b_i \in A_i} \underbrace{\max\{0, u_i(\pi \mid s(b_i)) - u_i(\pi)\}}_{\text{zv}}}_{\text{zv}}}$$

$\max\{f(x), g(x)\}$ $\frac{f}{g}$ zvezna, če f, g zvezni in $g \neq 0$

Uporabili smo

- f in g zvezni $\Rightarrow \begin{cases} f+g & \text{zvezna} \\ f-g & \text{zvezna} \\ \frac{f}{g} & \text{zvezna, če } g \neq 0 \\ \max\{f,g\} & \text{zvezna} \end{cases}$

S je konveksna in kompaktna

⟹ T ima negibno točko π^*. Videli bomo, da je π^* N.R.

→ Izberemo poljubnega igralca $i \in N$. Velja:

$$\pi_i^*(a_i) = \frac{\pi_i^*(a_i) + \max\{0, u_i(\pi^* \mid s(a_i)) - u_i(\pi^*)\}}{1 + \sum\limits_{b_i \in A_i} \max\{0, u_i(\pi^* \mid s(b_i)) - u_i(\pi^*)\}} \quad (*) \qquad \text{za } \forall a_i \in A_i$$

Zaradi linearnosti u_i velja: $u_i(\pi^*) = \sum\limits_{a_i \in A_i} \pi_i^*(a_i) \cdot u_i(\pi^* \mid s(a_i))$

$\exists\, c_i \in A_i$ tako, da velja $\pi_i^*(c_i) > 0$ in $\underbrace{u_i(\pi^*) \geq u_i(\pi^* \mid s(c_i))}_{u_i(\pi^* \mid s(c_i)) - u_i(\pi^*) \leq 0}$

Opazimo (*) za c_i :

$$\pi_i^*(c_i) = \frac{\pi_i^*(c_i) + 0}{1 + \sum_{b_i \in A_i} \max\{0, u_i(\pi^* | S(b_i)) - u_i(\pi)\}} \qquad x = \frac{x}{1+a} \to a=0$$

$$\Rightarrow \sum_{b_i \in A_i} \max\{0, u_i(\pi^* | S(b_i)) - u_i(\pi^*)\} = 0$$

$$\Rightarrow \forall b_i \in A_i : \max\{0, u_i(\pi^* | S(b_i)) - u_i(\pi^*)\} = 0$$

$$\Rightarrow \forall b_i \in A_i : \quad u_i(\pi^* | S(b_i)) - u_i(\pi^*) \leq 0$$

$$u_i(\pi^*) \geq u_i(\pi^* | S(b_i))$$

Torej $\forall i \in N$ in $\forall b_i \in A_i : u_i(\pi^*) \geq u_i(\pi^* | S(b_i)) \xRightarrow{\text{sistem neenačb}} \pi^*$ je N.R. ■

OPOMBA : Za 3 igralce, so igre kjer so vhodni podatki $\in \mathbb{N}$, so vsa N.R. neracionalne verjetnosti.

BIMATRIČNE IN MATRIČNE IGRE

BIMATRIČNE IGRE

- $N = \{1, 2\}$
- $A_1 = [m]$
- $A_2 = [n]$
- funkcije koristnosti

- Namesto tabele uporabimo matrike / bimatrike

	1	2	3
1	2,3	4,1	6,0
2	3,1	1,3	0,1

$$\longmapsto \begin{bmatrix} 2,3 & 4,1 & 6,0 \\ 3,1 & 1,3 & 0,1 \end{bmatrix} = [A,B] \text{ bimatrika}$$

- $A \ldots$ $m \times n$ matrika $[A]_{ij} = u_1(i,j) = a_{ij}$
- $B \ldots$ $m \times n$ matrika $[B]_{ij} = u_2(i,j) = b_{ij}$
- $[A,B]_{ij} = u_1(i,j)\ ,\ u_2(i,j)$

Lahko uporabimo notacijo LA ??

- $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \begin{matrix} p_1, \ldots, p_m \geq 0 \\ p_1 + \ldots + p_m = 1 \end{matrix} \right\}$
- $S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{matrix} q_1, \ldots, q_n \geq 0 \\ q_1 + \ldots + q_n = 1 \end{matrix} \right\}$

- $u_1(p,q) = u_1\left(\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}\right) = \sum_{\substack{i \in [m] \\ j \in [n]}} a_{ij} \cdot p_i \cdot q_j = p^T A q$

$u_2(p,q) = p^T B q$

$u_1(S(i), q) = [Aq]_i$

$u_2(p, S(j)) = [p^T B]_j$

- N.R. → To je def?

$$(p^*, q^*) \in S_1 \times S_2 \iff \begin{cases} \forall p \in S_1 : & p^T A q^* \leq (p^*)^T A q^* \\ \forall q \in S_2 : & (p^*)^T A q \leq (p^*)^T A q^* \end{cases}$$

- Sistem neenačb → To je trditev?

$$(p^*, q^*) \in S_1 \times S_2 \text{ N.R.} \iff \begin{cases} \forall i \in [m] : & [Aq^*]_i \leq (p^*)^T A q^* \\ \forall j \in [n] : & [(p^*)^T A]_j \leq (p^*)^T B q^* \end{cases}$$

- Popolna indiferentnost

$(p^*, q^*) \in S_1 \times S_2$

$$\left.\begin{matrix} \forall i, i' \in [m] : [Aq^*]_i = [Aq^*]_{i'} \\ \forall j, j' \in [n] : [(p^*)^T B]_j = [(p^*)^T B]_{j'} \end{matrix}\right\} \implies (p^*, q^*) \text{ je N.R.}$$

- Princip indiferentnosti

$$(p^*, q^*) \text{ je N.R.} \implies \begin{cases} \forall i \in [m] : & (p_i^* > 0 \implies (p^*)^T A q^* = [Aq^*]_i) \\ \forall j \in [n] : & (q_j^* > 0 \implies (p^*)^T B q^* = [(p^*)^T B]_j) \end{cases}$$

m × n

Ideja: poskusimo vse $I \subseteq [m]$ in $J \subseteq [n]$ in iščemo N.R., ki imajo vrednost $\rightarrow p_i > 0 \quad \forall i \in I$ in $q_j > 0$ za $\forall j \in J$

$\rightarrow p_i = 0 \quad \forall i \notin I$ in $q_j = 0$ za $\forall j \notin J$

Za vsak $I \subseteq [m]$ in $J \subseteq [n]$:

Rešimo naslednji sistem enačb s spremenljivkama $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}$ in $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$

sistem enačb

$[Aq]_i = [Aq]_{i'}$ za $\forall i, i' \in I$ in $i \neq i'$

$q_j = 0$ za $\forall j \in [n] \setminus J$

$1 = q_1 + \dots + q_n$

\# spremenljivk: $|J|$

\# enačb: $(|I|-1)+1 = |I|$

$[p^T B]_j = [p^T B]_{j'}$ za $\forall j, j' \in J$, $j \neq j'$

$p_i = 0$ za $\forall i \in [m] \setminus I$

$1 = p_1 + \dots + p_m$

\# spremenljivk: $|I|$

\# enačb: $(|J|-1)+1 = |J|$

Generično $|J| = |I|$

Za vsako rešitev p, q, ki izpolnjuje

$p^T A q \geq [Aq]_{i'}$ za $\forall i' \in [m] \setminus I$

$q_j \geq 0$ za $\forall j \in [n]$

$p^T B q \geq [p^T B]_{j'}$ za $\forall j' \in [n] \setminus J$

$p_i \geq 0$ za $\forall i \in [n]$

je Nashevo ravnovesje

↳ **ZGLED**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} >0 & >0 & 0 & 0 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} >0 \; p_1 \\ >0 \; p_2 \\ 0 \; p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 5,7 & 2,2 & 3,4 & 2,5 \\ 2,1 & 4,9 & 1,7 & 6,2 \\ 3,6 & 1,5 & 2,5 & 3,7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\rightarrow I = \{1,2\}$, $J = \{1,2\}$

$5q_1 + 2q_2 = 2q_1 + 4q_2$

$q_3 = q_4 = 0$

$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$

rešimo: $q_1 = 2/5$, $q_2 = 3/5$, $q_3 = q_4 = 0$

$7p_1 + p_2 = 2p_1 + 9p_2$

$p_3 = 0$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$

rešimo: $p_1 = 8/13$, $p_2 = 5/13$, $p_3 = 0$

$\rightarrow$ preverimo, če izpolnjuje druge pogoje

$5q_1 + 2q_2 \geq 3q_1 + 1 \cdot q_2 = u_1(s(3), q)$

$7p_1 + 1p_2 \geq 4p_1 + 7p_2 = u_2(p, s(3))$ $\rightarrow$ spremeniš na 3 strategijo od q

$7p_1 + 1 \cdot p_2 \geq 5p_1 + 2p_2 = u_2(p, s(4))$

↳ **m × n**

Za vsak $I \subseteq [m]$ in za vsak $J \subseteq [n]$

⋮

Rešitev sistema linearnih enačb je ponavadi le, ko $\underbrace{|I| = |J|}_{\text{št. spremenljivk = št. enačb}}$. Ta metoda najde vsa N.R. Porabi veliko časa.

- **ZAHTEVNOST**

  $\to \#\underset{|I|=|J|}{(|I|,|J|)} = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \binom{m}{i}\binom{n}{i} \sim \Omega(\min\{m^n, n^m\})$ slabše kot eksponencirano $\min\{2^m, 2^n\}$

  → PPAD-complete $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\nexists$ algoritem, ki bi delal v polinomskem času

- **POSLEDICA**

  Če so vhodni podatki $\mathbb{Z}$, potem ima vsaka N.R. vrednosti v $\mathbb{Q}$

↳ **2 × n**

- $[A,B] = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11}, b_{11} & \dots & a_{1n}, b_{1n} \\ a_{21}, b_{21} & \dots & a_{2n}, b_{2n} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} \end{array}$

- Parametriziramo $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \mid p \in [0,1] \right\}$

- Analiziramo $B_2(p)$. Za to uporabimo zgornjo ovojnico

  $$z(p) = \max_{j \in [n]} u_2\left(\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, S_{(j)}\right) = \max_j \left[[p, 1-p]\, B\right]_j$$

  $\parallel$

  zgornja ovojnica linearnih funkcij

- Za vsak del (z_p) iščemo N.R.

↳ **ZGLED**

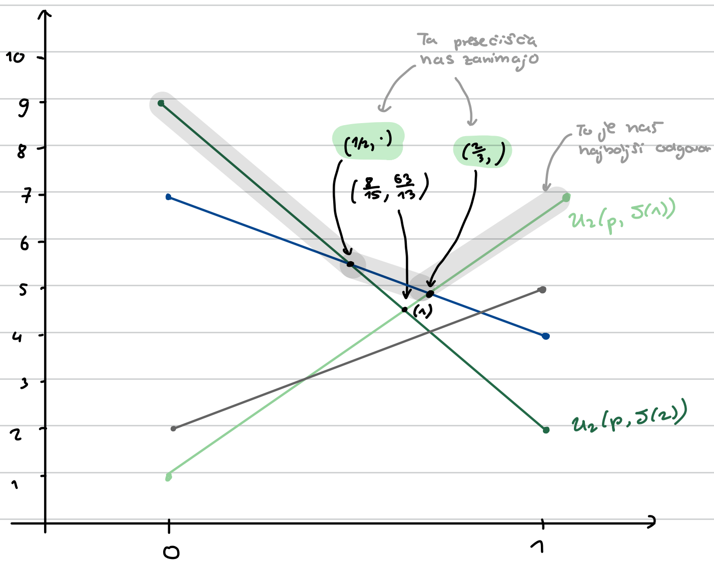
$$[A,B] = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 5,7 & 2,2 & 5,4 & 2,5 \\ 2,1 & 4,9 & 1,7 & 6,2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} \end{array}$$

$j=1 \quad S(1):\ 7p + (1)(1-p) = 1 + 6p$

$j=2 \quad S(2):\ 2p + 9(1-p) = 9 - 7p$

$j=3 \quad S(3):\ 4p + 7(1-p) = 7 - 3p$

$j=4 \quad S(4):\ 5p + 2(1-p) = 2 + 3p$



$(1):\ 1 + 6p = 9 - 7p$

$\downarrow$

$p = 8/13 \longrightarrow \frac{61}{13}$

$$B_2(p) = \begin{cases} S(2) & ;\ \text{če } 0 \le p < 1/2 \\ \lambda S(2) + (1-\lambda) S(3) & ;\ \lambda \in [0,1] \text{ če } p = 1/2 \\ S(3) & ;\ \text{če } 1/2 < p < 3/2 \\ \lambda \cdot S(3) + (1-\lambda) S(1) & ;\ \lambda \in [0,1] \text{ če } p = 3/2 \\ S(1) & ;\ \text{če } 2/3 < p \le 1 \end{cases}$$

→ poljubna komb. $S(2)$ in $S(3)$

- $\boxed{p \in [0, 1/2)}$

  Ali $\exists$ N.R. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \cdot \right)$ za $p \in [0, 1/2)$?

  Edini kandidat: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, S(2) \right)$ $\quad p \in [0, 1/2)$

  saj mora biti najboljši odgovor v N.R.

  $B_1(S(2)) = (p=0) = S(2)$

  $\Rightarrow$ N.R. je $(S(2), S(2))$

- $\boxed{p = 1/2}$

  Ali $\exists$ N.R. $\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \cdot \right)$?

  Zaradi principa indiferentnosti za prvega igralca mora veljati

  $$2q + 3(1+q) = 4q + 1(1-q)$$
  $$3 - q = 1 + 3q$$
  $$2 = 4q$$
  $$q = 1/2$$

  Kandidat za N.R. je $\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

  To je res N.R. ker vemo, da je $\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \in B_2\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right)$ in $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \in B_1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = S_1$

- $\boxed{p \in (1/2, 2/3)}$

  Iščemo N.R. $\left(\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, S(3) \right)$ za $p \in (1/2, 2/3)$

  $B_1(S(3)) = S(1)$ oz $p = 1$

  ker $p \notin (1/2, 2/3) \Rightarrow \nexists$ N.R.

- $\boxed{p = 2/3}$

  Ali $\exists$ N.R. $\left(\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \cdot \right)$

  Po principu indiferentnosti za 1. igralca mora veljati

  $$5q + 3(1-q) = 2q + 1(1-q)$$
  $$3 + 2q = 1 + q$$
  $$q = -2$$

  $\Rightarrow \nexists$ N.R.

- $\boxed{p \in (2/3, 1]}$

  $\exists$ N.R. $\left(\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, \cdot \right)$ za $p \in [2/3, 1]$?

  $B_1(S(1)) = S(1) = (p = 1)$

  $\Rightarrow \exists$ N.R. $(S(1), S(1))$

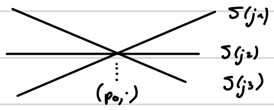
Vse skupaj imamo 3. N.R.

$(S(1), S(1))$ $\quad \left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

$(S(2), S(2))$

↳ OPOMBA

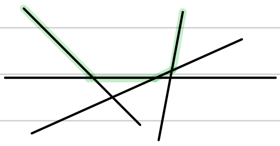
· Zgornja ovojnica



$$B(p_0) = \{ \lambda_1 S(j_1) + \lambda_2 S(j_2) + \lambda_3 S(j_3) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 ,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \}$$

• metodologija je učinkovita

→ Zgornja ovojnica n linearnih funkcij, ima največ n delov

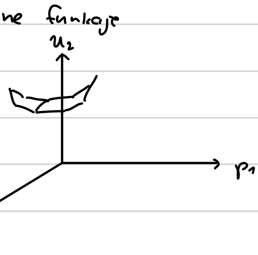


→ Računanje zgornje ovojnice je hitro: $\mathcal{O}(n^2)$ ali $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$

• podobna metodologija dela za $3 \times n$

→ Zgornja ovojnica 2. dimenzionalne funkcije

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1-p_1-p_2 \end{bmatrix}$$



• $m \times 2$
$$\begin{array}{cc} q & 1-q \\ \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array}\right] \end{array}$$

LINEARNO PROGRAMIRANJE

↳ LINEARNI PROGRAM

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max/\min & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax \leq b \end{array}}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ vektor spremenljivk

$$\left.\begin{array}{l} c \in \mathbb{R}^n \\ A \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ b \in \mathbb{R}^m \end{array}\right\} \text{podatki}$$

↳ ZGLED

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 7x_2 \\ \text{p.p} & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$[3, 7] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0$$

↳ Linearni program (LP) je lahko:

- <u>nedopusten</u> $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = \emptyset$
- <u>neomejen</u>: $\forall \lambda > 0 \quad \exists x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\} : \quad c^T x \geq \lambda$
- <u>omejen in dopusten</u>: $\exists$ optimalna rešitev

$$\downarrow$$

če $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$:
- → $Ax_0 \leq b$
- → $x_0 \geq 0$
- → (za max): $c^T x_0 \geq c^T x$ za $\forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = D$

↳ DUALNOST

Originalni program $\longrightarrow$ Dualni program

Originalni program:

$$\max \quad c^T x$$

$$\text{pp.} \quad \begin{array}{r} j\{ \\ m-j\{ \end{array} \begin{bmatrix} A \\ \hline \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leq \\ = \end{array} \begin{bmatrix} \\ \hline \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}j \\ \}m-j \end{array}$$

$$x_1, \dots, x_k \geq 0$$

$$x_{k+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Dualni program:

$$\min \quad b^T y$$

$$\text{p p} \quad \begin{array}{r} k\{ \\ n-k\{ \end{array} \begin{bmatrix} A^T \\ \hline \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} \begin{array}{c} \geq \\ = \end{array} \begin{bmatrix} c \\ \hline \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array}$$

$$y_1, \dots, y_j \geq 0$$

$$y_{j+1}, \dots, y_n \in \mathbb{R}$$

- **ZGLED**

$$\max\ 2x_1+3x_2$$

$$\text{p.p.}\quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \le \\ \\ = \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\min\ 6y_1+7y_2+1y_3$$

$$\text{p.p.}\quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \geq \\ = \end{array} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$
$$y_3 \in \mathbb{R}$$

↳ **IZREK:** Če ima originalni problem optimalno resitev x^*, potem ima dualni problem tudi optimalno resitev y^* in velja $\underbrace{c^T x^* = b^T y^*}$

↳ oba imata isto optimalno vrednost

STOPNJA VARNOSTI

[safety level]

↳ **DEFINICIJA**

$[A, B]$ bimatrična igra $m \times n$.

- Stopnja varnosti prvega igralca je

$$\boxed{v_1 = \max_{p \in S_1} \left(\min_{q \in S_2} p^T A q \right)}$$

Maksimum strategija prvega igralca je $p^* \in S_1$.

$$\boxed{v_1 = \min_{q \in S_2} (p^*)^T A q}$$

(p^* doseže max v def. stopnje varnosti)

- Podobno za 2. igralca

→ $$\boxed{v_2 = \max_{q \in S_2} \left(\min_{p \in S_1} p^T B q \right)}$$

→ $q^* \in S_2$ je maksimum strategija za 2. igralca če velja:

$$\boxed{v_2 = \min_{p \in S_1} p^T B q^*}$$

↳ **OPOMBE**:

- V povprečju lahko prvi igralec zagotovi v_1 in drugi igralec lahko zagotovi v_2
- maximum strategije obstajajo, ker sta $p^T A q$ in $p^T B q$ zvezni, ker S_1 in S_2 kompaktni.

↳ **TRDITEV**

- $\forall p \in S_1$: $\min_{q \in S_2} p^T A q = \min_{j \in [n]} [p^T A]_j$
- $\forall q \in S_2$: $\min_{p \in S_1} p^T B q = \min_{i \in [m]} [B q]_i$

DOKAZ

- Ideja: $\min_{q \in S_1} (a_1 q_1 + a_2 q_2 + \ldots + a_n q_n) = \min \{a_1, \ldots, a_n\}$

$$\min_{q \in S_2} p^T A q = \min_{q \in S_2} \sum_{j=1}^{n} [p^T A]_j \cdot q_j$$

↳ **POSLEDICA**

- $v_1 = \max_{p \in S_1} \min_{j \in [n]} [p^T A]_j$
- $v_2 = \max_{q \in S_2} \min_{i \in [m]} [B q]_i$

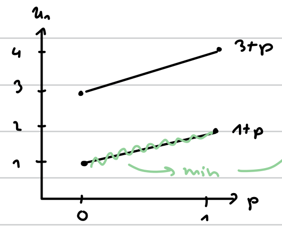
↳ **ZGLED**

$$[A,B] = \begin{array}{c|cc|c} & q & 1-q & \\ \hline & 2,3 & 4,1 & p \\ & 1,4 & 3,2 & 1-p \end{array}$$

(1) $v_1 \overset{def.}{=} \max\limits_{p\in[0,1]} \min\limits_{q\in[0,1]} \{2pq + 4p(1-q) + 1\cdot(1-p)q - 3(1-p)(1-q)\}$

(2) $v_1 \overset{posledica}{=} \max\limits_{p\in[0,1]} \min\{2p+1(1-p), 4p+3(1-p)\}$

$= \max\limits_{p\in[0,1]} \underbrace{\min\{1+p, 3+p\}}_{\text{To lahko narišemo}} = \max\limits_{p\in[0,1]} 1+p = 2$



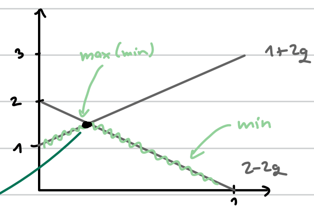
↳ **ZGLED**

$$[A,B] = \begin{array}{c|cc|c} & q & 1-q & \\ \hline & 2,3 & 4,1 & p \\ & 1,0 & 3,2 & 1-p \end{array}$$

(1) $v_2 \overset{def}{=} \max\limits_{q\in[0,1]} \min\limits_{p\in[0,1]} 3pq + 1\cdot p(1-q) + 0 + 2(1-p)(1-q)$

(2) $v_2 \overset{posledica}{=} \max\limits_{q\in[0,1]} \min\{3q + 1(1-q), 0+2(1-q)\}$

$= \max\limits_{q\in[0,1]} \min\{1+2q, 2-2q\}$



poglejmo presečišče, saj je tam max: $1+2q = 2-2q$

$q = 1/4 \rightarrow 3/4$

$\Rightarrow$ maximum strategije za 2.: $\begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$

↳ **ZGLED**

$$[A,B] = \begin{array}{c|cc|c} & 1/4 & 3/4 & \\ \hline & 2,3 & 4,1 & p \\ & 1,0 & 3,2 & 1-p \end{array}$$

$v_2 = 1 + 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

↳ **TRDITEV**: z linearnim programom

- Za 1. igralca

$$v_1 = \max v$$

$$\text{p.p. } \quad \underbrace{[p^T A]_j \geq v}_{[-A^T p]_j + v \leq 0} \quad \text{za } \forall j \in [n]$$

$$p_1 + \dots + p_m = 1$$

$$p_1, \dots, p_m \geq 0$$

- Za 2. igralca

$$v_2 = \max u$$

$$\text{p.p. } \quad \underbrace{[Bq]_i \geq u}_{[-Bq]+u \leq 0} \quad \forall i \in [m]$$

$$q_1 + \dots + q_n = 1$$

$$q_1, \dots, q_n \geq 0$$

↳ **ZGLED**

- max u

$$\begin{aligned} \text{p.p.}\quad & 1+2q \geq u \\ & 2-2q \geq u \\ & q \geq 0 \\ & 1-q \geq 0 \\ & u \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad \equiv \quad \begin{aligned} &\max u \\ \text{p.p}\quad & 3q_1 + 1\cdot q_2 \geq u \\ & 0\cdot q_1 + 2\cdot q_2 \geq u \\ & q_1 + q_2 = 1 \\ & q_1, q_2 \geq 0 \\ & u \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad \equiv \quad \begin{aligned} &\max u \\ \text{p.p}\quad & 3q_1 + 1\cdot q_2 - u \geq 0 \\ & 0\cdot q_1 + 2\cdot q_2 - u \geq 0 \\ & q_1 + q_2 = 1 \\ & q_1, q_2 \geq 0 \\ & u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- $v_1 = \max \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ v \end{bmatrix}$

$$\text{p.p.} \quad \begin{array}{c} n\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ \end{array} \begin{bmatrix} \overbrace{\quad -A^T \quad}^{m} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 1 \ \dots \ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ v \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq \\ \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

$$p_1, \dots, p_m \geq 0$$

$$v \in \mathbb{R}$$

- $v_2 = \max \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ u \end{bmatrix}$

$$\text{p.p.} \quad \begin{array}{c} m\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ \end{array} \begin{bmatrix} \overbrace{\quad -B \quad}^{n} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 1 \ \dots \ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ u \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq \\ \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

$$q_1, \dots, q_n \geq 0$$

$$u \in \mathbb{R}$$

MATRIČNE IGRE

↳ **DEFINICIJA**

Matrična igra je bimatrična igra $[A, B]$, kjer je $B = -A$

V tem primeru samo damo A

$$\text{Matrična igra} \begin{cases} 2 \text{ igralca} \\ A_1 = [m],\ A_2 = [n] \\ u_1 + u_2 = 0 \\ u_1, u_2 \text{ koristnost} \end{cases}$$

↳ **IZREK (Minimax izrek ; von Neuman 1928)**

Za vsako matrično igro velja $v_1 = -v_2$

oz.
$$\boxed{\max_{p \in S_1} \min_{q \in S_2}} p^T A q = -\max_{q \in S_2} \min_{p \in S_1} p^T B q$$

$$= \min_{q \in S_2} \max_{p \in S_1} -p^T B q$$

$$\boxed{A=-B} \rightarrow\ = \boxed{\min_{q \in S_2} \max_{p \in S_1}} p^T A q$$

DOKAZ IZREKA

$$v_2 = -\min \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ \underbrace{-u}_{u'} \end{bmatrix}$$

$$\text{p.p} \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & A & & \vdots \\ & & & 1 \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ \underbrace{-u}_{u'} \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq \\ \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$q_1, \dots, q_n \geq 0$

$\underbrace{-u}_{u'} \in \mathbb{R}$

TA SISTEM je dualen sistemu $*$

25.11

↳ **PONOVITEV**

- $v_1 = \max_{p \in S_1} \min_{q \in S_2} p^T A q = \max_{p \in S_1} \min_{j \in [n]} [p^T A]_j$
- $p^* \in S_1$ maksimum $\iff v_1 = \min_{q \in S_2} p^T A q = \min_{j \in [n]} [p^T A]_j$

v_1 je LP.

v_2 je LP.

$v_1 = -v_2$ za matrične igre $A = -B$

A... plačilna matrika, pove koliko 2. igralec plača prvemu igralcu

↳ $v(A) \stackrel{def.}{=} v_1$ vrednost igre

$v(A) = 0$ igra je poštena

$v(A) > 0$ 1. igralec ima prednost

$v(A) < 0$ 2. igralec ima prednost

↳ **TRDITEV**: Za bimatrične igre je množica $\{p \in S_1 \mid \text{maximum}\}$ konveksna

je množica $\{q \in S_2 \mid q \text{ maksimum}\}$ konveksna

DOKAZ: Denimo, da sta p in p' maxmin strategiji. To pomeni:

$$\forall j \in [n] : [p^T A]_j \geq v_1$$

$$\forall j \in [n] : [(p')^T A]_j \geq v_1$$

za $\forall \lambda \in [0,1]$ velja: $[((1-\lambda)p + \lambda p')^T A]_j = (1-\lambda)[p^T A]_j + \lambda [(p')^T A]_j \geq (1-\lambda) v_1 + \lambda v_1 = v_1$ — To velja za bimatrične igre

iz tega sledi, da je $(1-\lambda)p + \lambda p'$ maksimum strategij — $\lambda, 1-\lambda \geq 0$

■

↳ **POSLEDICA MAXMIN IZREKA**

1. A matrična igra
   $p \in S_1$, $q \in S_2$, $u \in \mathbb{R}$
   $[p^T A]_j \geq u$ za $\forall j \in [n]$
   $\underbrace{[Aq]_i \leq u}$ za $\forall i \in [m]$
   $\Longrightarrow$ p je maxmin za 1., q je maxmin za 2., $u = v(A)$

   $[Bq]_i \geq -u$
   ↳ 2. lahko zagotovi, da nebo plačal več od u

DOKAZ: $\forall j \in [n] : [p^T A]_j \geq u \Longrightarrow u \leq v_1$

$\forall i \in [m] : [Aq]_i \leq u$ oz. $[Bq]_i \geq -u \Longrightarrow -u \leq v_2 = -v_1$ (maxmin izrek)

$\}\ u = v_1 = v(A)$

$\forall j \in [n] : [p^T A]_j \geq v_1 \Rightarrow p$ maxmin za 1

$\forall i \in [m] : \underbrace{[Aq]_i \leq v_1}_{[Bq]_i \geq v_2} \Longrightarrow q$ maxmin za 2.

■

2. p maxmin, q maxmin $\Big\}\ p^T A q = v(A)$

DOKAZ: p maxmin $\Rightarrow p^T A q \geq v_1$

q maxmin $\Rightarrow \underline{p^T B q \geq v_2}$

$p^T A q \leq -v_2$

$v_2 = -v_1$

$\Big\}\ v_1 \leq p^T A q \leq v_1 \Longrightarrow p^T A q = v_1 = v(A)$

■

3. 1. igralec lahko pove, da bo uporabil neko maxmin strategijo p in 2. igralec ne more tega konstit [nemore izkoristiti to znanje za sebi v prid]?

↳ **TRDITEV**

$p \in S_1,\ q \in S_2$

p in q sta maxmin strategiji $\Longrightarrow$ (p,q) je N.R.

DOKAZ

$$\left.\begin{array}{l} \forall j \in [n]: [p^T A]_j \geq v_1 \Longrightarrow \forall q' \in S_2 \quad p^T A q' \geq v_1 \overset{(2)}{=} p^T A q \\ \forall i \in [m]: [Aq]_i \leq v_1 \Longrightarrow \forall p' \in S_1 \quad (p')^T A q \leq v_1 \overset{(2)}{=} p^T A q \end{array}\right\} (p,q) \text{ je N.R.}$$

↳ **TRDITEV**: Če je (p,q) N.R. $\Rightarrow \begin{cases} p & \text{maxmin} \\ q & \text{maxmin} \end{cases}$

DOKAZ: (p,q) N.R $\iff \begin{cases} \forall p' \in S_1 : (p')^T A q \leq p^T A q & \text{(a)} \\ \forall q' \in S_2 : p^T A q' \geq p^T A q \quad \leftarrow \text{ne bo plačal manj} & \text{(b)} \end{cases}$

Naj bosta $\bar{p}$ in $\bar{q}$ strategiji za 1. oz. 2. igralca

Iz (2) $\Rightarrow \bar{p}^T A \bar{q} = v_1$

$$v_1 \underset{\bar{p}\text{ maxmin}}{\leq} (\bar{p})^T A q \underset{\substack{(p,q)\text{ je N.R.}\\(a)}}{\leq} p^T A q \underset{\substack{(p,q)\text{ je N.R.}\\(b)}}{\leq} p^T A \bar{q} \underset{\bar{q}\text{ je maxmin}}{\leq} v_1$$

$\Rightarrow p^T A q = v_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a): \forall p' \in S_1 : (p')^T A q \leq v_1 \Rightarrow \forall i \in [m] : [Aq]_i \leq v_1 \Rightarrow q \text{ je maxmin} \\ (b): \forall q' \in S_2 : p^T A q' \geq v_1 \Rightarrow \forall j \in [n] : [p^T A]_j \geq v_1 \Rightarrow p \text{ je maxmin} \end{cases}$$

↳ **IZREK**

Za matrične igre: $(p,q) \in S_1 \times S_2$ je N.R $\iff$ p je maxmin strategija za 1. igralca in q je maxmin strategija za 2. igralca] vedno za matrične igre govorimo o rešitvi igre

OPOMBA: To NI res za bimatrične igre

↳ **POSLEDICA**

Za matrične igre je množica $\{(p,q) \in S_1 \times S_2 \mid (p,q) \text{ je N.R}\}$ konveksna

DOKAZ: $\{(p,q) \in S_1 \times S_2 \mid (p,q) \text{ N.R.}\} = \left\{(p,q) \in S_1 \times S_2 \mid \begin{smallmatrix} p \text{ maxmin} \\ q \text{ maxmin} \end{smallmatrix}\right\} = \underbrace{\underbrace{\{p \in S_1 \mid p \text{ maxmin}\}}_{\text{konv.}} \times \underbrace{\{q \in S_2 \mid q \text{ maxmin}\}}_{\text{konv}}}_{\text{konv}}$

OP: če N.R. ni samo 1., jih je neskončno, saj mora biti celotna daljica med dvema najdenema tudi

POSEBNE MATRIČNE IGRE

① SEDLO

DEF: A matrična igra velikosti $m \times n$. Na položaju $(i,j) \in [m] \times [n]$ je sedlo, če velja:

- $\to \forall i' \in [m]: \ a_{ij} \geq a_{i'j}$
- $\to \forall j' \in [n]: \ a_{ij} \leq a_{ij'}$

(a_{ij} največji v stolpcu in najmanjši v vrstici

npr. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & \boxed{2} & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ $(2,2)$ je sedlo

TRDITEV: Če ima matrična igra sedlo pri (i,j), potem
$$\begin{cases} a_{ij} = v(A) \\ \delta(i) \text{ je maxmin za 1. igralca} & [\delta(i) = e_i \in \mathbb{R}^m] \\ \delta(j) \text{ je maxmin za 2. igralca} & [\delta(j) = e_j \in \mathbb{R}^n] \end{cases}$$

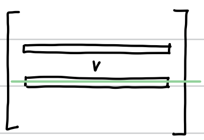
DOKAZ: $p = \delta(i)$, $q = \delta(j)$, $a = a_{ij}$

$$\left.\begin{array}{l} [p^T A]_j \geq a \ \text{ za } \forall j \\ [Aq]_i \leq a \ \text{ za } \forall i \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{trditev}$$

∎

- Iskanje sedla $\equiv$ iskanje čistega N.R.

② DOMINACIJE

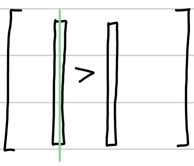


$\delta(i)$ strogo dominira $\delta(i')$

$\equiv$

$\forall j \in [n]: \ a_{ij} > a_{i'j}$

za 1. igralca



$\delta(j)$ strogo dominira $\delta(j')$

$\equiv$

$\forall i \in [m]: \ a_{ij} < a_{ij'}$

za 2. igralca

- $\exists$ tudi mešane dominacije
- POSEBNO ZA MATRIČNE IGRE: Če imamo šibko dominirano akcijo, jo lahko odstranimo in ne spremenimo vrednosti igre. (Mogoče spremenimo samo množico N.R.)

primer: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Za 1. igralca $[1/2 \ \ 1/2 \ \ 0]^T$ šibko dominira $[0 \ 0 \ 1]^T$

$\Downarrow$

$$v(A) = v\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = v\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

③ $\boxed{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$$

<u>Algoritem</u>: (1) če je sedlo smo dobili vrednost igre in eno N.R. oz. maxmin strategije

(2) če ni sedlo

$$v = \frac{ac-bd}{(a-b)+(c-d)} = \frac{\det A}{(a-b)+(c-d)} \;, \quad p_1 = \frac{c-d}{a-b+c-d} \qquad q_1 = \frac{c-b}{a-b+c-d}$$

Zakaj je ok?

→ če je sedlo, je očitno ok. (Dobimo eno N.R., malo treba paziti, če hočemo vsa N.R.)

→ če ni sedlo: $\Longrightarrow \nexists$ čisto N.R. in lahko uporabimo princip indiferentnosti

Ker ni sedlo pri $(1,1)$, ker d ni sedlo, c ni sedlo, b ni sedlo

$$\begin{bmatrix} a < b \\ \wedge \quad \vee \\ d > c \end{bmatrix} \quad a<d \Rightarrow d>c \Rightarrow c<b \Rightarrow b>a \Longrightarrow p_1 = \frac{\overset{<0}{c-d}}{\underbrace{a-b}_{<0} + \underbrace{c-d}_{<0}} \in (0,1)$$

$$\begin{bmatrix} a > b \\ \vee \quad \vee \\ d < c \end{bmatrix} \quad a>b \Rightarrow b<c \Rightarrow c>d \Longrightarrow a>d \Longrightarrow p_1 = \frac{\overset{>0}{c-d}}{\underbrace{a-b}_{>0} + \underbrace{c-d}_{>0}} \in (0,1)$$

Vemo, da sta $p_1, q_1 \in (0,1)$

Princip indiferentnosti za 1. igralca

$$a q_1 + b(1-q_1) = d q_1 + c(1-q_1)$$
$$b + (a-b) q_1 = c + (d-c) q_1$$
$$(a-b+c-d) q_1 = c-b$$
$$q_1 = \frac{c-b}{a-b+c-d} \in (0,1)$$

Indiferentnost za 2. igralca

$$a \cdot p_1 + d(1-p_1) = b p_1 + c(1-p_1)$$
$$d + p_1(a-d) = c + p_1(b-c)$$
$$p_1(a-b+c-d) = c-d$$

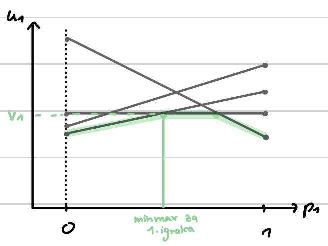
∎

④ $\boxed{2 \times n}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} p_1 \\ 1-p_1 \end{array}$$

Narišemo $[[p_1 \;\; 1-p_1] A]_j \quad \forall j \in [n]$

$$\| $$
$$a_{1j} \cdot p_1 + a_{2j} \cdot (1-p_1)$$



S tem lahko določimo

- maxmin za 1. igralca
- v_1

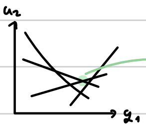
Premice, ki določijo najvišjo točko v spodnji ovojnici, povejo, katere akcije oz. stolpce meša 2. igralec v maxmin strategiji

Spodnjo ovojnico določi $\min_{j \in [n]} [[p_1 \;\; 1-p_1] A]_j$

y-koordinata najvišje točke v spodnji ovojnici je v_1

⑤ $\boxed{m \times 2}$

$\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{1.\ način}$



najnižja točka zgornje ovojnice

$\xrightarrow{2.\ način}$

Zamenjamo vlogo 1. in 2. igralca

$A \longleftrightarrow \underbrace{-A^T}_{2\times m}$

In potem rešujemo kot v točki ④

⑥ $\boxed{A \text{ nesingularna}}$ (in ima srečo)

$A \dots n \times n$ in ima inverz

Iščemo N.R., kjer igralci mešajo vse. Zaradi principa indiferentnosti za 1. igralca

$$Ag = v \cdot \mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{bmatrix} \Longrightarrow g = v \cdot A^{-1}\mathbb{1}_n \Longrightarrow \mathbb{1}_n^T g = 1 = v\,\mathbb{1}_n^T A^{-1} \Longrightarrow v = \frac{1}{\underbrace{\mathbb{1}_n^T A^{-1}\mathbb{1}_n}_{=\sum_{i,j}[A^{-1}]_{ij}}} \Longrightarrow g = v \cdot A^{-1}\mathbb{1}_n = \frac{A^{-1}\mathbb{1}_n}{\mathbb{1}_n^T A^{-1}\mathbb{1}_n}$$

$\mathbb{1}_n^T g = 1$

za drugega igralca

$$p^T A = v \cdot \mathbb{1}_n^T = [v \dots v] \Longrightarrow p^T = v \cdot \mathbb{1}_n^T A^{-1} \Longrightarrow 1 = p^T\mathbb{1}_n = v \cdot \mathbb{1}_n^T \cdot A^{-1} \cdot \mathbb{1}_n \Longrightarrow p^T = \frac{\mathbb{1}_n^T A^{-1}}{\mathbb{1}_n^T A^{-1}\mathbb{1}_n}$$

$p^T \cdot \mathbb{1}_n = 1$

POSTOPEK:

(1) računamo A^{-1}

(2) računamo $v = \frac{A}{\mathbb{1}_n^T A^{-1}\mathbb{1}_n} = \frac{1}{\sum_{ij}[A^{-1}]_{ij}}$

(3) Računamo $p^T = v\ \mathbb{1}_n^T A^{-1}$

$g = v A^{-1}\mathbb{1}_n$

(4) če $p \in [0,1]^n$ in $g \in [0,1]^n$, potem (p, g) N.R. in v vrednost igre.] ČE IMAMO SREČO, DA SE TO IZIDE

Sicer...

ZGLED

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 13 & -2 & -7 \\ -2 & 4 & 6 \\ -7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v = \frac{16}{13+(-2)+(-7)+\dots} = 1$$

$$p = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \in [0,1]^2$$

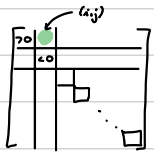
V tem primeru bo torej prejšen postopek delal

7 A diagonalna

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}$$

→ če $d_i = 0$ za nek i $\Longrightarrow$ (i,i) je sedlo

→ če $d_i > 0$ za nek i in
$d_j < 0$ za nek j $\Bigg\}$ $\Longrightarrow$



$\Longrightarrow$ (i,j) je sedlo $v = 0$

→ Vsi elementi na diagonali so $\neq 0$ in imajo isti predznak

Obstaja inverz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & & & \\ & 1/d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/d_n \end{bmatrix}$$

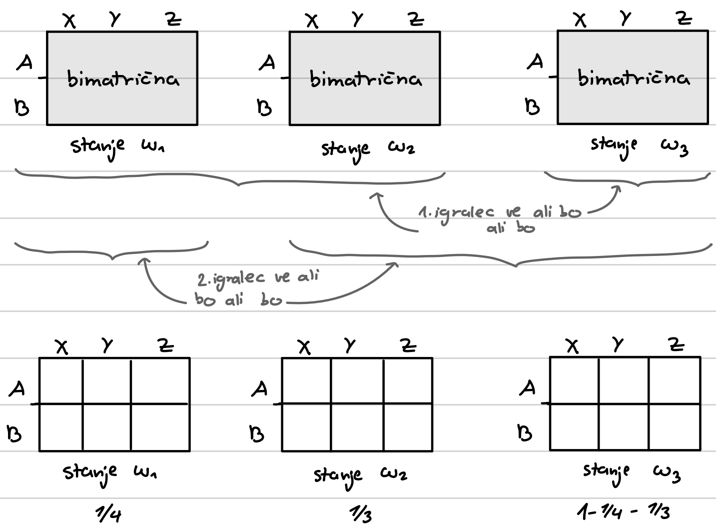
(kandidat) $v = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/d_i}$

(kandidat) $p^T = \dfrac{[1/d_1 \ 1/d_2 \ \dots 1/d_n]}{\sum_i 1/d_i} = q^T$ za $\forall i \in [n]$ je $p_i = \dfrac{1/d_i}{\sum_{j=1}^{n} 1/d_j} \in (0,1)$

BAYESOVE IGRE

↳ **MOTIVACIJA**

Igralci imajo nesimetrične informacije. Imamo neko množico stanj Ω



3.12

↳ **DEFINICIJA**

Bayesova igra je 7 terica $(N, \Omega, (p_i)_{i\in N}, (T_i)_{i\in N}, (\tau_i)_{i\in N}, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$, kjer je

- N ... množica igralcev [končna in neprazna]
- Ω ... množica stanj; za nas končna, ponavadi označimo $\omega \in \Omega$
- $p_i : \Omega \to [0,1]$ ... funkcija verjetnosti za igralca $i \in N$ predhodno prepričanje. Večkrat je $p_i = p_j$ za $\forall i,j \in N$
- T_i ... množica signalov za igralca i
- $\tau_i : \Omega \to T_i$ ... signalna funkcija za igralca i
- A_i ... množica profilov za igralca i
- u_i ... funkcija koristnosti za igralca i ; $u_i : \Omega \times A \to \mathbb{R}$; $A = \prod_{i\in N} A_i$ množica profilov akcij

↳ ZGLED

Y... yes, N... no

hočemo, da je igra simetrična

	B	S
B	3,2	0,0
S	0,0	2,3

$\omega_1 = YY$

	B	S
B	3,1	0,0
S	0,0	2,2

$\omega_2 = YN$

	B	S
B	2,2	0,0
S	0,0	1,3

$\omega_3 = NY$

	B	S
B	1,1	0,0
S	0,0	1,1

$\omega_4 = NN$

$\Omega = \{\omega_1 = YY,\ \omega_2 = YN,\ \omega_3 = NY,\ \omega_4 = NN\}$

$N = [2]$

$p_1 = p_2 : \Omega \to [0,1]$

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 \mapsto 1/4 \\ \omega_2 \mapsto 1/6 \\ \omega_3 \mapsto 1/6 \\ \omega_4 \mapsto 5/12 \end{array}\right\} \Sigma = 1$$

$A_1 = A_2 = \{B, S\}$

u_1 in u_2 so tabele

$T_1 = \{1.$ igralec ve svojo $Y/N\} = \{Y_1, N_1\}$

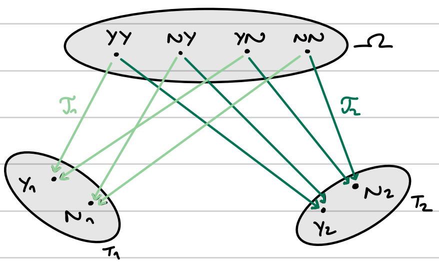
$T_2 = \{Y_2, N_2\}$

$\mathcal{T}_1 : \Omega \to T_1$

$YN \mapsto Y_1$
$YY \mapsto Y_1$
$NN \mapsto N_1$
$NY \mapsto N_1$

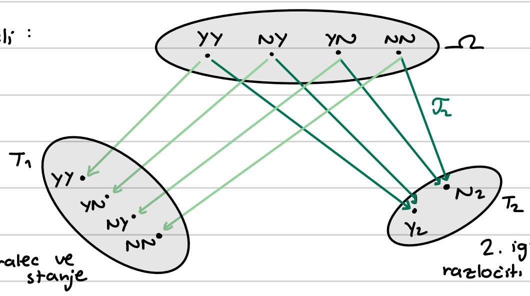
$\mathcal{T}_2 : \Omega \to T_2$

$YN \mapsto N_2$
$YY \mapsto Y_2$
$NN \mapsto N_2$
$NY \mapsto Y_2$



$T = \{(1, Y_1), (1, N_1), (2, Y_2), (2, N_2)\}$

· lahko bi imeli:



1. igralec ve stanje

2. igralec ne more razločiti med YY in NY

$T = \{(1, YY), (1, YN), (1, NY), (1, NN), (2, Y_2), (2, N_2)\}$

primer profila akcij: (B, B, S, B, S, B)

akcija 1. igralca pri signalu YY

akcija 1. igralca pri signalu NN

akcija 2. igralca, ko je signal Y_2 → to je stanje YY ali NY

akcija 2. igralca pri signalu N_2, to je stanje YN ali NN

↳ IDEJA:
- pri vsakem signalu bo vsak igralec izbral akcijo
- uporabimo $E(u_i)$

↳ DEFINICIJA: Množica tipov je $T=\{(i,t_i)\ ;\ i\in N,\ t_i\in T_i\}$. Množica profilov akcij je $\prod_{(i,t_i)\in T} A_i = \prod_{i\in N}\prod_{t_i\in T} A_i$

↳ ZGLED

Imamo $p_i[\omega \mid t_i] = \begin{cases} 0 & ; \text{ če } J_i(\omega)\neq t_i \text{ ali } p_i(J_i^{-1}(t_i))=0 \\ \frac{p_i(\omega)}{p_i(J_i^{-1}(t_i))} & ; \text{ sicer} \end{cases}$

$p_1[YY \mid Y_1] = \frac{1/4}{1/4+1/6} = 3/5$
$p_1[YN \mid Y_1] = 2/5$
$p_2[YY \mid Y_2] = 3/5$
$p_2[NY \mid Y_2] = 2/5$
$p_1[NN \mid N_1] = 5/7$
$p_1[NY \mid N_1] = 2/7$
$p_2[NN \mid N_2] = 5/7$
$p_2[YN \mid N_2] = 2/7$

V povprečju dobi $\underbrace{(1,Y)}_{\text{tip}}$ v profilu akcij $(\underset{Y_1}{B}, \underset{N_1}{S}, \underset{Y_2}{S}, \underset{N_2}{B})$

$\tilde{u}_{(1,Y)}(B,S,S,B) = \frac{3}{5}\, u_1(YY,B,S) + 2/5\, u_1(YN,B,B) =$

$a(2,N_2)$
v stanju YN 2. igralec izbere B

$= \frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 3$

↳ V splošnem:
- Za profil a in tip (i,t_i) naj bo $a(i,t_i)$ akcija v a za tipe (i,t_i)
- Za vsak tip $(i,t_i)\in T$ definiramo $\tilde{u}_{(i,t_i)}(a) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ J_i(\omega)=t_i}} p_i[\omega \mid t_i]\; u_i(\omega, (a(j, J_j(\omega)))_{j\in N})$

↳ Definiramo preslikavo $\varnothing_{Bay\to kor}$: {Bayesove igre} ⟶ {igre s funkcijami koristnosti}

$\Gamma = (N, \Omega, (p_i)_{i\in N}, (T_i)_{i\in N}, (J_i)_{i\in N}, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}) \longmapsto (N, (A_i)_{(i,t_i)\in T}, (\tilde{u}_i(i,t_i))_{(i,t_i)\in T})$

Profil a je Bayesovo ravnovesje v Bayesovi igri Γ natanko tedaj, ko je NR v igri $\varnothing_{Bay\to kor}(\Gamma)$

Lahko tudi mešajo igralci in imamo potem mešane strategije.

COURNOTOV MODEL DUOPOLA Z NEPOPOLNO INFORMACIJO

↳ Imamo firmo 1 in firmo 2. Vsaka firma izbere $g_i \in [0,\infty)$. Cena produkta je $P(g_1+g_2)=(P_{max}-g_1-g_2)_+$ na enoto. Stroški proizvodnje prve firme so c^N na enoto, za 2. firmo pa c^V ali c^N na enoto.

$$0 < c^N < c^V < P_{max}$$

Imamo dva stanja: $\Omega = \{V, N\}$

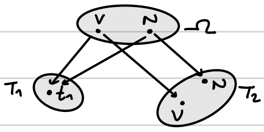
V... visoki stroški za 2. firmo

N... nizki stroški za 2. firmo

$\mu = P_V[\text{stanje } V]$

$1-\mu = P_N[\text{stanje } N]$

Denimo, da 1. firma ne ve stanja, 2. firma pa pozna stanje



$u_1(\omega, g_1, g_2) = g_1 \cdot (P(g_1+g_2) - c^N)$

$u_2(\omega, g_1, g_2) = g_2 \cdot (P(g_1+g_2) - c^V)$

Imamo torej tri tipe: 1, (2,V), (2,N)

$1 \to (1, t_1)$

Profil akcij je $(g_1, g_{2,N}, g_{2,V})$

- $\tilde{u}_1(g_1, g_{2,N}, g_{2,V}) = \mu \cdot u_1(V, g_1, g_{2,V}) + (1-\mu)\, u_1(N, g_1, g_{2,N})$
  $= \mu \cdot g_1(P(g_1+g_{2,V}) - c^N) + (1-\mu) \cdot g_1(P(g_1+g_{2,N}) - c^N)$
- $\tilde{u}_{(2,x)}(g_1, g_{2,N}, g_{2,V}) = u_2(g_1, g_{2,x}) = g_2(P(g_1+g_{2,x}) - c^x)$
  $x \in \{V, N\}$

Strateška igra s funkcijami koristnosti za 3 igralce:

$B_{2,V}(g_1)$

$B_{2,N}(g_1)$

$B_1(g_{2,V}, g_{2,N})$

↳ Naj bodo sedaj stroški vsake firme c^N ali c^V na enoto neodvisno za 1. in 2. firmo

Vsaka firma ve za svoje stroške (V ali N).

Vsaka firma mogoče ve ali ne ve za stroške ostale firme.

stanja: $\Omega = \{(\underbrace{V_1/N_1}_{1.\text{firma}}, \underbrace{V_2/N_2}_{2.\text{firma}}, \underbrace{Ve_1/Neve_1}_{1. \text{ o } 2. \text{ firmi}}, \underbrace{Ve_2/Neve_2}_{2 \text{ o } 1. \text{ firmi}})\}$

$|\Omega| = 2^4 = 16$

$T_1 = \{(V_1/N_1, V_2/N_2, Ve_1)\} \cup \{(V_1/N_1, \cdot, Neve_1)\}$ $\qquad \# T_1 = 4+2 = 6$

$$\mathcal{T}_1(x_1, x_2, z_1, z_2) = \begin{cases} (x_1, x_2, Ve_1) & ; z_1 = Ve_1 \\ (x_1, \cdot, Neve_1) & ; z_1 = Neve_1 \end{cases}$$

INFORMACIJA LAHKO ŠKODUJE

	L	S	D
G	4,2	4,0	4,3
D	8,8	0,0	0,12

ω_1

	L	S	D
G	4,2	4,3	4,0
D	8,8	0,12	0,0

ω_2

① $P[\omega_1] = P[\omega_2] = 1/2$

Igralca ne poznata stanja : $\begin{cases} \mathcal{T}_1(\omega_1) = \mathcal{T}_1(\omega_2) \\ \mathcal{T}_2(\omega_1) = \mathcal{T}_2(\omega_2) \end{cases}$

B.R. : $\equiv$ B.N.R.

	L	S	D
G	4,2	4, 3/2	4, 3/2
D	8,8	0,6	0,6

Edino B.R. je (D,L), ker za 2. igralca L strogo dominira S in D.

Izid je (8,8) po B.R.

② Igralec 2 ve stanje oz. $\mathcal{T}_2(\omega_1) \neq \mathcal{T}_2(\omega_2)$

profil akcij : (1. igralec, 2. igralec pri ω_1, 2. igralec pri ω_2)

- Za tip $(2, \omega_1)$ D strogo dominira L in S
- Za tip $(2, \omega_2)$ S strogo dominira D in L

Torej je vsako B.R. (mešano ali čisto) oblike $(\cdot, D, S)$

Stroga dominacija ?

Edino B.R. je $(\underset{1.}{G}, \underset{2\omega_1}{D}, \underset{2\omega_2}{S})$ Izid je (4,3).

izid je (8,8) pri B.R.

* Dražbe

Igralec i ocenjuje, da je objekt na dražbi vreden v_i

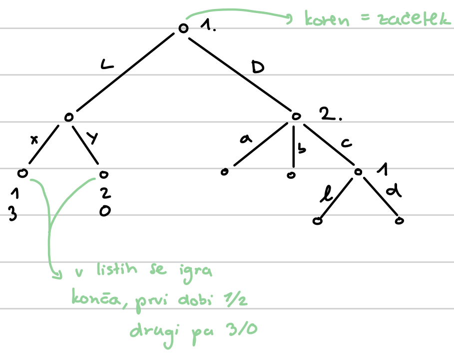
$\Omega = \{ (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \underset{\sim}{\mathbb{R}^n_{\geq 0}} \}$

$\Omega = \{ (v_1, \dots, v_n) \mid v_i \in [a,b] \}$ $\quad v_i \sim \mathcal{U}[a,b]$

$T_i(v_1, \dots, v_n) = v_i \equiv$ $\begin{cases} \text{igralec i ve, koliko ocenjuje objekt} \\ \text{in i ve o distribuciji ocen za ostale igralce} \end{cases}$

EKSTENZIVNE IGRE

↳ Imamo runde, kjer se igralci odločajo



↳ DEFINICIJA

Ekstenzivna igra je 4-terica $(N,T,P,(u_i)_{i\in N})$, kjer je:

- N ... množica igralcev [končna in neprazna]
- T ... drevo s korenom r in brez neskončnih poti
  - → $E(T)$ ... množica povezav
  - → $V(T)$ ... množica vozlišč
  - → $L(T)$ ... množica listov
- $P: V(T)\setminus L(T) \longrightarrow N$
- $u_i : L(T) \longrightarrow \mathbb{R}$ ... funkcija preferenc igralca i na množici listov.

9.12

↳ Povezave določijo akcije oziroma izbire igralcev. Označimo z E_v množico povezav od vozlišča v, navzdol. V vozlišču v ima igralec $P(v)$ izbiro E_v. Strategija za igralca i pove za vsako vozlišče, kjer je igralec i na vrsti, katere povezave bi izbral.

Množica strategij za igralca je

$$S_i = \prod_{\substack{v\in V(T)\setminus L(T)\\ P(v)=i}} E_v = \prod_{v\in P^{-1}(i)} E_v$$

je to $\prod_v$??

Množica profilov strategij je $S=\prod_{i\in N} S_i$.

↳ Definirajmo funkcijo izida $O_T: S \to L(T)$, ki $(S_i)_{i\in N}$ preslika v list, kjer se bo igra končala, če vsak igralec uporabi strategijo S_i. To pa je edini list, za katerega obstaja pot do korena v

$$\bigcup_{\substack{i\in N\\ v\in V(T)\setminus L(T)\\ P(v)=i}} S_i(v)$$

↳ Profil $s^* = (s_i^*)_{i \in N} \in S$ je Nashejevo ravnovesje natanko tedaj, ko velja za

$\forall i \in N: \forall s_i' \in S_i: u_i(\sigma_v((s_j^*)_{j \in N})) \geq u_i(\sigma_v((s_j^*)_{j \in N} \mid s_i'))$ oziroma

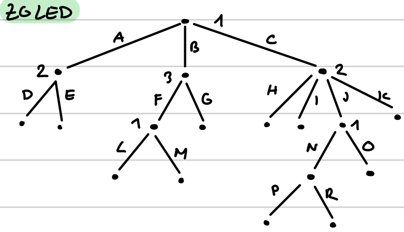
$u_i((\sigma(s^*)) \geq u_i(\sigma(s^* \mid s_i))$

$\emptyset_{eks \to pref}: \{\text{ekstenzivne igre}\} \to \{\text{strateške igre s funkcijami preferenc}\}$

$(N, T, P, (u_i)_{i \in N}) \mapsto (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i \circ \sigma_v)_{i \in N})$

Nashejevo ravnovesje v ekstenzivni igri Γ je Nashejevo ravnovesje v strateški igri s funkcijami preferenc $\emptyset_{eks \to pref}(\Gamma)$

↳ ZGLED



profili akcij:

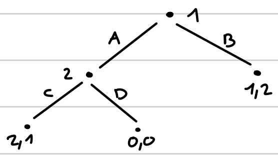
$S_1 = \{A, B, C\} \times \{L, M, N\} \times \{O, P\}$ igralec ima $3 \times 3 \times 2 = 18$ strategij

$S_2 = \{D, E\} \times \{I, J, K, L\} \times \{P, R\}$

$S_3 = \{F, G\}$

↳ ZGLED: "threatening game"

podobno kot primer mama in otrok, ki hoče sladkarije in joče, če mama reče ne



⇝

	C	D
A	2,1	0,0
B	1,2	1,2

→ je vedno enako, ker možnosti C,D ni

NR? $\overset{2,1}{(A,C)}$ in $\overset{1,2}{(B,D)}$

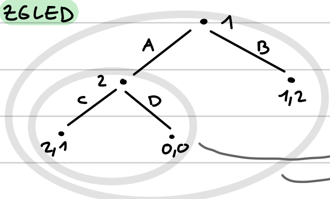
NR (B, D) ne upošteva sekvencialnosti igre. 2. igralec izbere nekaj, kar je njemu lokalno slabše

↳ DEFINICIJA: Profil strategij $s = (s_i)_{i \in N}$ je vgnezdeno Nashejevo ravnovesje, če velja za $\forall v \in V(T) \setminus L(T)$, $\forall i \in N$, $\forall s_i' \in S_i$:

$$\underbrace{(u_i \circ \sigma_v)(s) \geq (u_i \circ \sigma_v)(s \mid s_i)}_{\text{NR za vsako podigro}}$$

Iskanje VNR delamo s povratno indukcijo / od spodaj navzgor / dinamično programiranje.

↳ ZGLED

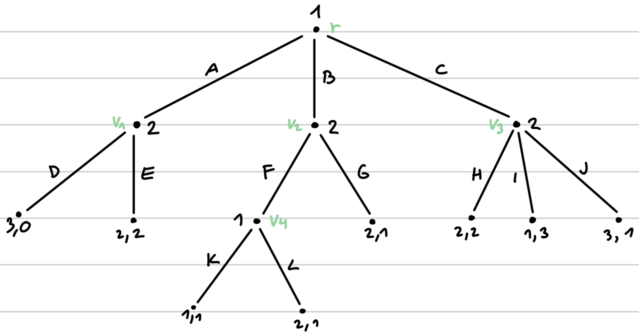


najprej gledamo to ⇒ C, torej je VNR oblike $(\cdot, C)$

potem pogledamo še to, ugotovimo da je VNR (A, C)

ZGLEDI

↳



VNR : (~~~~ , ~~~~)

1. igralec izbere med $\{A,B,C\} \times \{K,L\}$

2. igralec izbere med $\{D,E\} \times \{F,G\} \times \{H,I,J\}$

v_1 oziroma Γ_{v_1} : vsak VNR izgleda (· , E..)

v_4 Γ_{v_4} : vsak VNR izgleda (·L , E..)

v_2 Γ_{v_2} : vsak VNR izgleda (·L, EF..) ali (·L, EG.)

v_3 Γ_{v_3} : vsak VNR izgleda (·L, EFI) ali (·L, EGI)

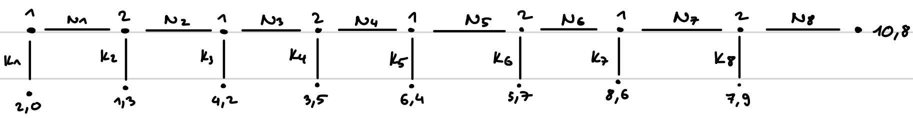
r Γ_r : vsak VNR izgleda (·L, EFI) ⟶ (BL, EFI)

(·L, EGI) ⟶ (AL, EGI)

⟶ (BL, EGI)

imamo 3 VNR

↳ **STONOGINA IGRA**

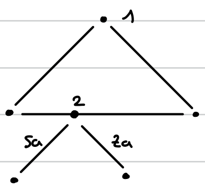


V tej igri se igralec odloči ali konča (k_n) ali nadaljuje (N_n)

VNR : k_i za vsak i. Izid pri VNR je 2,0

↳ **ULTIMATE GATE**

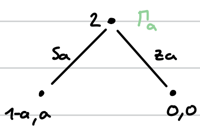
Razdelimo 1€ med 2. igralca. 1. igralec da predlog, kako naj si razdelita 1€. 2. igralec lahko sprejme predlog in si razdelita po predlogu ali pa zavrne in nihče ne dobi nič.



$a \in [0,1]$

$a \equiv$ predlog $\begin{cases} 2. \text{ igralec } a \\ 1. \text{ igralec } 1-a \end{cases}$

VNR ; za vsak $a \in [0,1]$ pogledamo podigro Γ_a, kjer je 1. igralec izbral a



če je $a > 0$: 2. igralec izbere Sa

če je $a = 0$: 2. igralec izbere Sa ali Za

⟹ 2. igralec ima 2. strategiji, ki se pojavita v VNR

$$S_2 = S_a,\ a \in [0,1] \text{ in } S_2' = \begin{cases} S_a & ; a \in (0,1] \\ Z_a & ; a = 0 \end{cases}$$

VNR izgleda: $(\cdot, S_2)$ oz. $(\cdot, S_2')$

Ali obstaja VNR oblike $(\cdot, S_2)$?

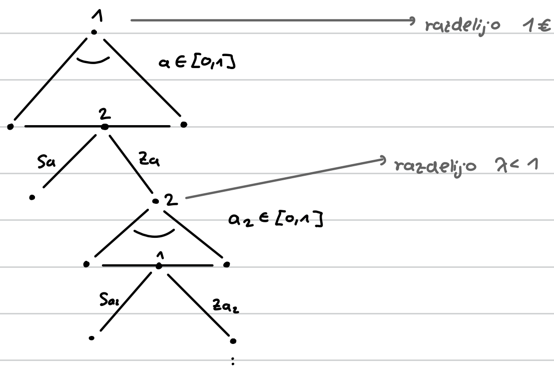
DA in sicer $(a=0, S_2)$; izid je da prvi dobi 1€, drugi pa 0€

To je tudi edino VNR

Ali obstaja VNR oblike $(\cdot, S_2')$?

NE, ker $\max_{a \in [0,1]} \begin{cases} 1-a & ; a \in [0,1] \\ 0 & ; a=0 \end{cases}$ ne obstaja.

PODNALOGA: 2. igralec lahko sprejme predlog ali pa da protipredlog



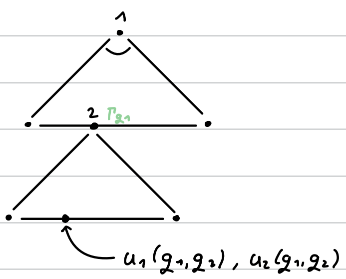
2 modela:

- v iteraciji i si razdelijo λ^i, $0<\lambda<1$
  začetek $i=0$ → neskončno drevo
- v iteraciji i si razdelijo $1-\lambda_i$, $0<\lambda<1$
  začetek $i=0$ → končno drevo

[OSEBNA OPOMBA: Razlaga te podnaloge je malo SHADY]

↳ STACKELBERGOV MODEL DUOPOLA

- Modifikacija Cournotovega modela duopola, kjer 2. igralec že ve q_1, ko mora izbrati q_2.



$$P(q_1+q_2) = (P_{max} - q_1 - q_2)_+$$
$$u_i(q_1,q_2) = q_i\,(P(q_1+q_2) - c)$$
$$P_{max} > c > 0$$

VNR: Za vsak q_1 mora pogledati kaj bo izbral 2. igralec. $B_2(q_1)$ že pove, kaj izbere 2. igralec

- q_2, ki doseže $\max_{q_2 \in [0,\infty)} u_2(q_1, q_2)$; q_1 je fiksen

$$B_2(q_1) \equiv q_2 = \left(\frac{P_{max} - c - q_1}{2}\right)_+ \quad \text{zvezna}$$
$$S_2 \equiv q_2 \quad \Longrightarrow \text{vsak VNR je oblike } (\cdot, S_2)$$

- 1. igralec izbere g_1, ki maximizira

$$\max_{g_1\in[0,\infty)} u_1(g_1, S_2(g_1)) = \max_{g_1\in[0,\infty)} u_1\left(g_1, \left(\frac{P_{max}-c-g_1}{2}\right)_+\right) = \max_{g_1\in[0,\infty)} g_1\left(\left(P_{max}-g_1-\left(\frac{P_{max}-c-g_1}{2}\right)_+\right)_+-c\right)$$

max pri $g_1 = \frac{P_{max}-c}{2}$

$\Longrightarrow$ pri VNR bo $g_1 = \frac{P_{max}-c}{2}$, $g_2 = \frac{P_{max}-c}{4}$

VNR: $\left(g_1 = \frac{P_{max}-c}{2},\ S_2 \equiv \left(\frac{P_{max}-c-g_1}{2}\right)_+\right)$

- Skupaj proizvajata: $3\cdot\frac{P_{max}-c}{4}$

Cena produkta je $P_{max} - \frac{3}{4}(P_{max}-c) = \frac{1}{4}P_{max} + \frac{3}{4}c$

Dobiček:

→ 1. firma: $\frac{P_{max}-c}{2}\left(\frac{1}{4}P_{max}+\frac{3}{4}c-c\right) = \frac{1}{8}(P_{max}-c)^2$

→ 2. firma: $\frac{1}{16}(P_{max}-c)^2$

SKUPAJ: $\frac{3}{16}(P_{max}-c)^2$

Cournotov je bil: $u_1 = u_2 = \frac{1}{9}(P_{max}-c)^2$

4 ENTRY DETERRANCE

16.12

- Opazujemo variacijo Stakelbergova modela duopola. Vsaka firma (1. ali 2.) določi $g_i \in [0,+\infty)$

$P(g_1+g_2) = 17-g_1-g_2$ (isti rezultat z $P(g_1+g_2) = (17-g_1-g_2)_+$)

Stroški za firmo i so $\underbrace{9}_{\text{začetni strošek}} + g_i$, če $g_i > 0$ sicer pa 0.

- Dobiček, ki je tudi funkcija preferenc, je

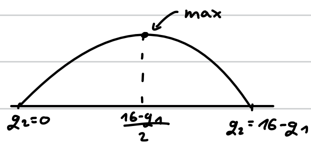
$$u_i(g_1,g_2) = \begin{cases} g_i\cdot(P(g_1+g_2)-1)-9 & ;\ g_i>0 \\ 0 & ;\ g_i = 0\end{cases}$$

Ta funkcija ni z

- VNR? Uporabimo povratno indukcijo oz. od spodaj navzgor

Γ_{g_1} = podigra, ko g_1 je fiksen (2 igralec izbere g_2)

$$\max_{g_2\in[0,\infty)} u_2(g_1,g_2) = \max_{g_2\in[0,\infty)} \begin{cases} \underbrace{g_2(16-g_1-g_2)-9}_{\text{max pri } g_2 = \frac{16-g_1}{2}} & ;\ g_2>0 \\ \underbrace{0}_{\text{max pri } g_2=0} & ;\ g_2 = 0\end{cases}$$



→ ko $g_2 = \frac{16-g_1}{2}$: $\left(\frac{16-g_1}{2}\right)\cdot\left(\frac{16-g_1}{2}\right)-9 = \frac{(16-g_1)^2}{4}-9$

→ ko $g_2 = 0$: 0

$\frac{(16-g_1)^2}{4}-9 \overset{?}{\geq} 0$

$(16-g_1)^2 \geq 36$

$|16-g_1| \geq 6$

$g_1 \in [0,10] \cup \cancel{[22,+\infty]}$ odstranimo, ker bi bil sicer $g_2 = \frac{16-g_1}{2}$ neg.

$$\to B_2(g_1) = \begin{cases} \frac{16-g_1}{2} & ;\ \text{če } g_1<10 \\ \{\frac{16-g_1}{2}, 0\} & ;\ \text{če } g_1=10 \\ 0 & ;\ \text{če } g_1>10 \end{cases}$$

→ Vsako VNR izgleda kot $(\underset{g_1}{\cdot}, S_2)$ ali $(\underset{g_1}{\cdot}, S_2')$ kjer

$$S_2 = \begin{cases} g_2 = \frac{16-g_1}{2} & ;\ \text{če } g_1<10 \\ g_2 = 0 & ;\ \text{če } g_1 \geq 10 \end{cases}$$

$$S_1 = \begin{cases} g_2 = \frac{16-g_1}{2} & ;\ \text{če } g_1 \leq 10 \\ g_2 = 0 & ;\ \text{če } g_1 > 10 \end{cases}$$

- Glejmo sedaj celo igro Γ.

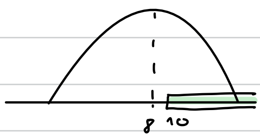
→ Ali ∃ VNR oblike $(\cdot, S_2)$?

$$\max_{g_1\in[0,\infty)} u_1(g_1, S_2(g_1)) = \max_{g_1\geq 0} \begin{cases} g_1\cdot(17-g_1-0-1)-9 & ;\ \text{če } g_1\geq 10 & ① \\ g_1(17-g_1-\frac{16-g_1}{2}-1)-9 & ;\ \text{če } g_1<10 & ② \\ 0 & ;\ \text{če } g_1=0 & ③ \end{cases}$$

① max za $g_1(16-g_1)-9$ bi bil $g_1=8$ (vrednost je $8\cdot 8-9 = 64-9 = 55$) ampak 8 ni "≥ 10"

$\Longrightarrow$ max prvega dela je pri $g_1=10$

vrednost $u_1(10, g_2(10)) = 10\cdot 6-9 = 51$



② $g_1(8-\frac{g_1}{2})-9$

max pri $g_1=8$, kjer je vrednost $8(8-4)-9 = 8\cdot 4-9 = 32-9 = 23$

③ max vrednost : 0

Torej je max za celo funkcijo u_1 pri $g_1=10$

VNR je $(g_1=10, S_2)$

Pri VNR $g_1=10$, $g_2=0$. Prva firma izbere 10, zato da drugo podjetje nebo začelo proizvajati

→ Ali ∃ VNR oblike $(\cdot, S_2')$

$\max_{g_1\geq 0} u_1(g_1, S_2'(g_1))$ NE OBSTAJA!

ker $\lim_{g_1\to 10} u_1(g_1, S_2'(g_1)) = 51$ ampak $u_1(10, S_2'(10)) = u_1(10,3)$

$= 10\cdot(17-10-3-1)-9$

$= 10\cdot 3-9$

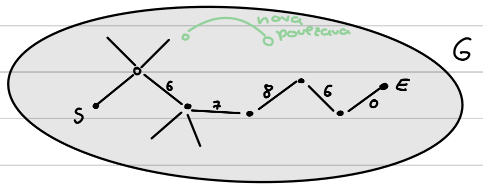
$= 21$

To samo pokaže, da max ni v drugem ali tretjem delu funkcije,

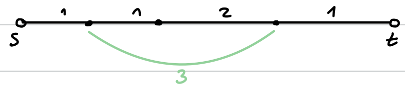
torej ∃ samo eno NR, ki je tisto ki smo ga našli prej

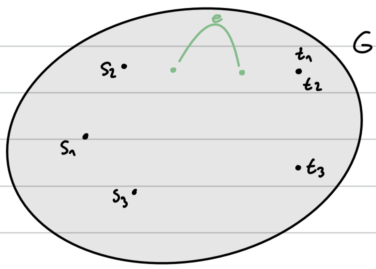
↳ STOKELBERG PRICING GAMES

- G, s, $t \in V(G)$



Dodano novo povezavo e v G in zanima nas sup cene za povezavo e, da bo najmanjso pot od s do t preko e.



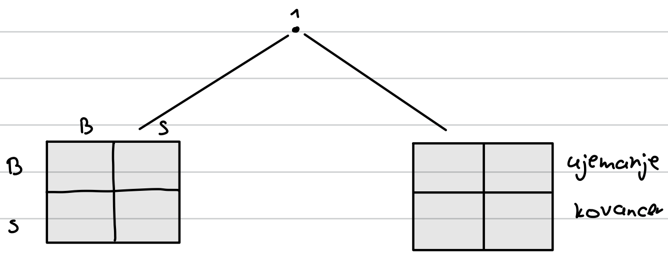
- 

G, $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$

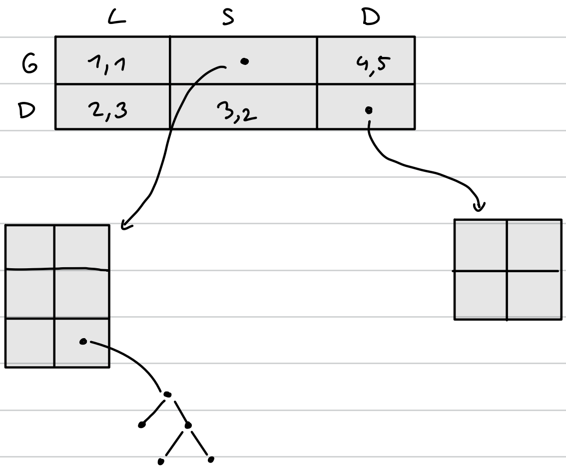
Dodamo ali že imamo dodatno povezavo e in hočemo določiti ceno povezave, da bo dobiček čim večji

- če plačajo fiksno ceno: hočemo določiti ceno povezave tako, da leži na max št. najkrajših poti od $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$
- če plačajo po uporabi: treba upoštevati uporabo

↳ KOMBINACIJE EKSTEZIVNIH IN STRATEŠKIH IGER

- 

Torej se 1. igralec odloči katero strateško igro bodo igrali

- 

Tu bi lahko imel funkcije koristnosti. Iščemo VNR.

• $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 4 \\ 5 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \text{ZAČETEK} \longrightarrow = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ \hdashline 5 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Tu lahko računamo VNR.

rešujemo igro Γ_1 in dobimo $v(\Gamma_1)=1$

Γ_2 $v(\Gamma_2)=3$

$\Longrightarrow \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ← imata isto vrednost

↳ REKURZIVNE IGRA

• $\Gamma_1 = \begin{array}{c|cc} & 1 & 0 \\ \hline 1 & \Gamma_2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$ začetek

$\Gamma_2 = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & \Gamma_1 \end{array}$

če bi imel take št. se igra nebi nikoli končala
če pa bi npr. imel 1/2 vsepovsod, bi se lahko končala

• $\Gamma = \begin{array}{c|cc} & q & 1-q \\ \hline p & \Gamma & 0 \\ 1-p & 0 & 1 \end{array}$ $\not\equiv$ $\Gamma_1 = \begin{array}{c|cc} & q_1 & 1-q \\ \hline p_1 & \Gamma_2 & 0 \\ 1-p_1 & 0 & 1 \end{array}$ $\Gamma_2 = \begin{array}{c|cc} & q_2 & 1-q_2 \\ \hline p_2 & \Gamma_1 & 0 \\ 1-p_2 & 0 & 1 \end{array}$ NESKONČNA REKURZIJA

PROFILA: $\left(\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} \right)$ $\left(\begin{bmatrix} p_1 \\ 1-p_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_2 \\ 1-p_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_1 \\ 1-q_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_2 \\ 1-q_2 \end{bmatrix} \right)$

↳ STOHASTIČNA IGRA

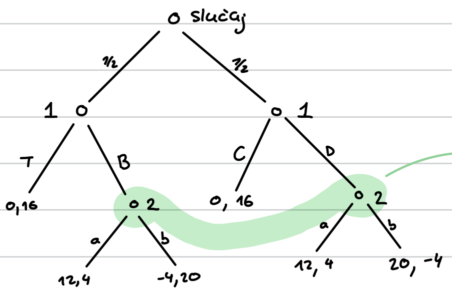
$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2}\Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_2 \end{bmatrix}$ → z verjetnostjo ½ igrajo Γ_1 in z verjetnostjo ½ igrajo Γ_2

$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$ $\Gamma_2 = \begin{bmatrix} \\ \frac{1}{2}\Gamma - 1 \\ \\ \end{bmatrix}$

več igralcev,
ni nujno matrična igra ?

EKSTENZIVNE IGRE Z NEPOPOLNO INFORMACIJO

↳ ZGLED



informacijska množica. Igralec tukaj ne ve v katerem vozlišču je

	a	b
TC	0,16	0,16
TD	6,10	10, 6
DC	6,10	-2,18
DT	12,4	8,8

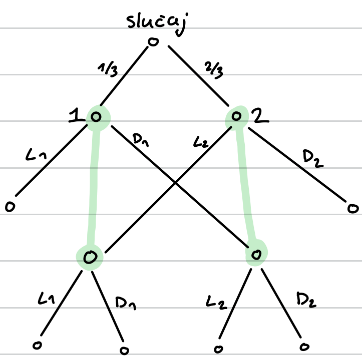
$\frac{1}{2}(0,16)+\frac{1}{2}(20,-4)$

N.R. $(\underbrace{1/2\,TD + 1/2\,BD}, \ 1/4\,a + 3/4\,b)$

med T in B 1/2 1/2

med C in D 0 1

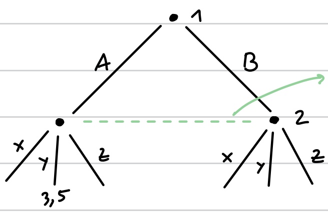
↳ ZGLED



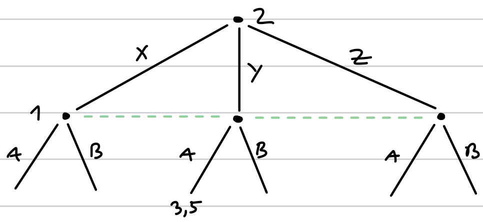
Igralca ne vesta ali so prvi, ki igra ali drugi.
Torej vrstni red ni jasen

↳ ZGLED

	X	Y	Z
A		3,5	
B			



informacijska množica



Ta primer lahko zgleda tudi tako.
Tu prav tako vidimo, da ni nujno, da ima informacijska množica samo 2 elementa

↳ Ekstenzivna igra z nepopolno informacijo vsebuje:

- N - množico igralcev
- T drevo s korenom r, vsaka pot je končna
  - → $L(T)$ ... listi
  - → $V(T)^n$... vozlišča
  - → E_v ... povezave od v navzdol
- Informacijske množice : razdelitev $V(T) \setminus L(T)$

  $I_1, I_2, \dots, I_k \subseteq V(T) \setminus L(T)$

  $\bigcup_{i \in [n]} I_i = U(T) \setminus L(T)$

  $I_i \cap I_j = \emptyset$ za $\forall i \neq j$

  prav tako mora veljati $\forall v, v' \in I_j : |E_v| = |E_{v'}|$ [toraj mora biti enako št. opcij, saj bi drugače vedeli v katerem vozlišču smo]
- Za vsako informacijsko množico, kdo je na vrsti

  $P: \{\text{inf. množica}\} \longrightarrow N \cup \{\text{slučaj}\}$ /
- Za vsako informacijsko množico je bijekcija ali identifikacija, mi pove, katere izbire izgledajo isto za vsako vozlišče

  C_{I_j} = choices za inf. množico I_j
- ko je slučaj na vrsti, verjetnosti
- za $\forall i \in N$: $u_i : L(T) \to \mathbb{R}$ funkcije koristnosti

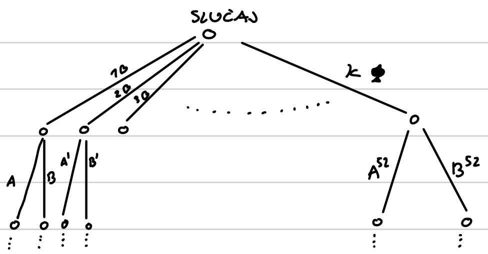
↳ Strategija igralca mora povedati, kaj igralec izbere, ko je na vrsti

$H_i = \{ I_j \mid P(I_j) = i \}$

$S_i = \prod_{\substack{I_j \text{ inf mn.} \\ P(I_j) = i}} C_{I_j} = \prod_{I_j \in H_i} C_I$ to je mn. čistih strategij za igralca i

Profil določi, kaj izbere vsak igralec

↳ ZGLED



Dobi eno od 52 kart

$\begin{cases} A & 1/3 \\ B & 2/3 \end{cases}$

$\begin{cases} A' & 1/4 \\ B' & 3/4 \end{cases}$

$\vdots$

$\begin{cases} A^{52} & 1/2 \\ B^{52} & 1/2 \end{cases}$

$|S_1| = 2^{52}$, če meša, moramo določiti $2^{52}-1$ števil strategije obnašanja :

za vsakega igralca pove verjatnost, da bi izbral povezavo od C_{I_j}, ko je I_j na vrsti.

Tukaj zadošča 52 števil.

↳ IZREK [Kuhn]

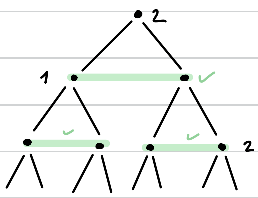
Če ima igralec i POPOLNI PREKLIC (perfect recall), potem za vsako strategijo igralca i obstaja strategija obnašanja za igralca i, ki je ekvivalentna.

POPOLNI PREKLIC ZA IGRALCA i:

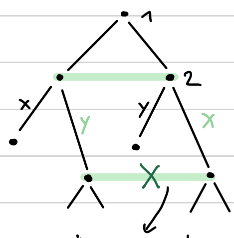
$\forall I_j$, kje je igralec i na vrsti, $\forall v, v' \in I_j$, so izbire igralca i, da gre igra do v, isto kot izbire igralca i, da gre igra do v'.

$\sigma_i(v)$ = zaporedje izbir igralca i, da gre igra do v

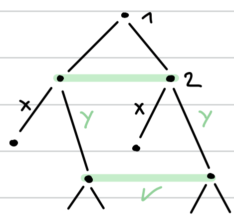
$\forall v, v' \in I_j : \sigma_i(v) = \sigma_i(v')$



imamo popolni preklic



nimamo popolnega preklica



imamo preklic