NUMERIČNE METODE 2

TEORIJA APROKSIMACIJE

↳ Denimo, da imamo podano neko funkcijo f. Radi bi jo aproksimirali z neko enostavnejšo funkcijo f^*, ki bi jo bilo enostavno odvajat, integrirat, računati vrednosti...

↳ PRIMER

$f(x) = \sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

↳ KLJUČNA VPRAŠANJA:

1) v kakšni množici funkcij naj iščemo aproksimant f^*?
2) v čem naj si bo f^* podobna f?
3) Ali f^* obstaja tam, kjer jo iščemo?
4) če obstaja, ali je enolična?
5) kako f^* konstruirati?
6) Kako dobro nadomestilo je f^* za f?

↳ V splošnem aproksimacijski problem definiramo takole:

z X označimo vektorski prostor, katerega elemente želimo aproksimirati in naj $S \subseteq X$ označuje podprostor v katerem iščemo aproksimacijske elemente. Aproksimacijska shema je OPERATOR $A: X \longrightarrow S$

$f \longmapsto Af = f^*$

$A(f) = f^*$ to je pomen, pišemo pa kar tako kot je zgoraj

↳ PRIMERI VEKTORSKIH PROSTOROV

① $X = C([a,b])$, $X = C^k([a,b])$ prostor zveznih funkcij

② $X = \mathcal{L}^2_\rho([a,b]) = \{f: [a,b] \to \mathbb{R};\ \int_a^b f^2(x)\rho(x)\,dx < \infty\}$

ρ → pozitivna utež → $\rho(x) > 0$ za $\forall x \in [a,b]$

③ $X = \mathbb{R}^m$ prostor vektorjev

↳ PRIMERI PODPROSTOROV

① $S = \mathbb{P}_n = \mathcal{L}in\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ ⟵ polinomi stopnje $\le n$

② $S = \mathcal{L}in\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos(nx), \sin(nx)\}$ ⟵ trigonometrični polinomi

③ S = racionalne funkcije

④ S = odsekoma polinomske funkcije oziroma zlepke

↳ Da bomo lahko ocenili, kako dobra je aproksimacija, moramo prostore opremiti z normo.

Najbolj znane norme na $C([a,b])$

① NESKONČNA NORMA $\|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Diskretni numerični približek za neskončno normo:

na $[a,b]$ izberemo dovolj gosto zaporedje točka $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$

$\underline{x} = (x_i)_{i=0}^N$

podčrtaj bo v NUM2 oznaka za vektor

$\|f\|_{\infty,[a,b]} \approx \|f\|_{\infty,\underline{x}} = \max_{i=0,1,\dots,N} |f(x_i)|$

② **DRUGA NORMA** – norma porojena iz skalarnega produkta: $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$

kjer je $\langle \cdot,\cdot \rangle$ izbran skalarni produkt na X

Primeri skalarnih produktov:

- $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)$ $f,g \in \mathcal{L}^2_\rho([a,b])$
  pozitivna utež

$\Rightarrow \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx}$

Ponavadi je utež enaka $\rho(x) \equiv 1$. V tem primeru govorimo o standardnem skalarnem produktu

DISKRETNI SEMISKALARNI PRODUKT

Izberemo $\underline{x} = (x_i)_{i=0}^{N}$, $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_N \le b$

$\Rightarrow \langle f,g\rangle = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)g(x_i)\cdot\rho(x_i)$

$\|f\|_{2,\underline{x}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} f^2(x_i)\cdot\rho(x_i)}$

↳ **KAKO DOLOČITI APROKSIMANT f^*?**

Ločimo med a) optimalni aproksimacijski problem

b) interpolacijo

ⓐ **OPTIMALNI APROKSIMACIJSKI PROBLEMI**

Naj bo X izbran vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$, $S \subseteq X$ podprostor (končno dimenzionalen)

Za izbran $f \in X$ iščemo $f^* \in S$, da velja

$$\|f-f^*\| = \min_{s\in S}\|f-s\| = \underbrace{dist(f,S)}_{\text{razdalja elementa } f \text{ do podprostora } S}$$

Spoznali bomo
- optimalno polinomsko aproksimacijo
- aproksimacijo po metodi najmanjših kvadratov

↳ Za aproksimacijo funkcije bomo v glavnem uporabljali polinome, ki se jih da enostavno evalvirat, odvajat, integrirat, poleg tega pa velja naslednji izrek

WEIERSTRASSOV IZREK

Naj bo $f \in C([a,b])$. Potem za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja polinom p, da velja $\|f-p\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$.

Drugače povedano $dist_\infty(f, \mathbb{P}_n) \to 0$ ko $n \to \infty$

IDEJA DOKAZA:

Naj bo $[a,b] = [0,1]$

Za $f \in C([0,1])$ definiramo t.i. Bernsteinov aproksimacijski polinom

$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\tfrac{i}{n})\, \mathcal{B}_i^n(x), \quad \mathcal{B}_i^n(x) = \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i},\ i=0,1,\dots,n \longrightarrow \text{Bernsteinovi bazni polinomi}$$

Da se pokazati, da $\|f-\mathcal{B}_n f(x)\|_{\infty,[a,b]} \longrightarrow 0$ ko gre $n \to \infty$

Bernsteinov aproksimacijski polinom nam poda en možen način aproksimacije zveznih funkcij

Bernsteinov aproksimacijski operator je definiran kot

$$\mathcal{B}_n : C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{P}_n$$
$$f \longmapsto \mathcal{B}_n f$$

$$\boxed{\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(a + \tfrac{i}{n}(b-a))\, \mathcal{B}_i^n\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)}$$

APROKSIMACIJA PO METODI NAJMANJŠIH KVADRATOV

↳ Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Naj bo $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f \rangle}$ za $f \in X$. Naj bo $S \subseteq X$ končno dimenzionalen podprostor v X. $S = \mathrm{Lin}\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ($f_1,\dots,f_n$ so lin. neodvisni = baza za S) $\dim S = n$.

↳ **NALOGA**: Za izbran $f \in X$. Iščemo $f^* \in S$, da velja $\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$. f^* imenujemo element najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov (po MNK).

↳ **IZREK**: Naj bo $S \subseteq X$. Element $f^* \in S$ je element najboljše aproksimacije po MNK za $f \in X$ natanko takrat, ko je $f - f^* \perp S$

DOKAZ

($\Leftarrow$) Predpostavimo, da je $f - f^* \perp S$. Naj bo $s \in S$ poljuben element.

$$\|f-s\|_2^2 = \|(f-f^*)+(f^*-s)\|_2^2 = \langle (f-f^*)+(f^*-s), (f-f^*)+(f^*-s)\rangle =$$
$$= \|f-f^*\|_2^2 + 2\underbrace{\langle f^*-s, f-f^*\rangle}_{=0} + \underbrace{\|f^*-s\|_2^2}_{\geq 0} \geq \|f-f^*\|_2^2$$

($\Rightarrow$) Naj velja $\|f-f^*\|_2 = \min_{s\in S}\|f-s\|_2$. Izberimo poljuben $s \in S$ in $\lambda > 0$

$$\cancel{\|f-f^*\|_2^2} \leq \|f-(f^*-\lambda s)\|_2^2 = \langle (f-f^*)+\lambda s, (f-f^*)+\lambda s\rangle = \cancel{\|f-f^*\|_2^2} + 2\lambda\langle s, f-f^*\rangle + \lambda^2\|s\|_2^2$$
$$\Longrightarrow \; 0 \leq \lambda(2\cdot\langle s, f-f^*\rangle + \lambda\|s\|_2^2)$$

Recimo, da $\langle s, f-f^*\rangle \neq 0$. Izberimo tako majhen $\lambda > 0$, da bo člen $\lambda\|s\|_2^2$ po velikosti manjši kot $2\langle s, f-f^*\rangle > 0$.

Izberimo sedaj $-s \in S$. Na isti način dobimo, da je $0 \leq \lambda(2\cdot\langle s, f-f^*\rangle + \lambda\|s\|_2^2)$ sledi, da je $-\langle s, f-f^*\rangle > 0$ oziroma $\langle s, f-f^*\rangle < 0$ $\;\rightarrow\!\!\!\!\times$ ■

↳ Iz izreka sledi konstrukcija. Naj bo $f \in X$ podan element, $f^* \in S = \mathcal{L}in\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, $(f_i)_i$ so linearno neodvisni

$f^* = \sum_{j=1}^n \alpha_i f_i$ za neznane koeficiente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $\underline{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^n$.

f^* je element najboljše aproksimacije po MNK $\Longleftrightarrow f - f^* \perp S$

To bo res natanko tedaj, ko bo $f - f^* \perp f_i$ za $i = 1,2,\dots,n$: $\langle f - \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j, f_i\rangle = 0$ za $\forall i$

$$\langle f, f_i\rangle - \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle f_j, f_i\rangle = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \langle f_j, f_i\rangle = \langle f, f_i\rangle \quad \text{za } i = 1,2,\dots,n \longleftarrow \text{SISTEM LINEARNIH ENAČB}$$

$$\begin{bmatrix}\langle f_1,f_i\rangle & \langle f_2,f_i\rangle & \dots & \langle f_n,f_i\rangle\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix} = \langle f, f_i\rangle$$

V matrični obliki:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\langle f_1,f_1\rangle & \langle f_2,f_1\rangle & \dots & \langle f_n,f_1\rangle \\ \langle f_1,f_2\rangle & \langle f_2,f_2\rangle & \dots & \langle f_n,f_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle f_1,f_n\rangle & \langle f_2,f_n\rangle & \dots & \langle f_n,f_n\rangle\end{bmatrix}}_{G = \text{Gramova matrika (simetrična)}}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\langle f,f_1\rangle \\ \langle f,f_2\rangle \\ \vdots \\ \langle f,f_n\rangle\end{bmatrix} \longrightarrow \text{NORMALNI OZIROMA GRAMOV SISTEM ENAČB}$$

$G = (\langle f_j, f_i\rangle)_{i,j=1}^n$

G je pozitivno definitna $\forall x \neq 0$ velja $\underline{x^T G x \geq 0}$.

$$x^T G x = [x_1\ x_2 \dots x_n]\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^n x_j\langle f_j,f_1\rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j\langle f_j,f_i\rangle \\ \vdots\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i x_j \langle f_j, f_i\rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i f_i, \sum_{j=1}^n x_j f_j\rangle = \|\sum_{i=1}^n x_i f_i\|_2^2 > 0$$

Norma bi bila 0, če bi bila $\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i = 0$. To se ne more zgoditi, ker $x \neq 0$ in ker so $(\varphi_i)_i$ linearno neodvisni. Za numerično reševanje normalnega sistema uporabimo razcep Choleskega.

↳ **PRIMER**

$X = C([0,\pi])$ (oziroma splošneje $X = \mathcal{L}^2([0,\pi])$)

$\langle f,g \rangle = \int_0^{\pi} f(x)g(x)\,dx$

$S = \mathbb{P}_1 = \mathcal{L}in\{1,x\}$

Za $f(x) = \sin x$ poišči polinom iz $\mathbb{P}_1$, ki aproksimira f po MNK.

$\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$

$\langle \varphi_1,\varphi_1 \rangle = \int_0^{\pi} 1 \cdot 1\,dx = \pi$ $\quad \langle \varphi_1,\varphi_2 \rangle = \int_0^{\pi} 1 \cdot x\,dx = \frac{\pi^2}{2}$ $\quad \langle \varphi_2,\varphi_2 \rangle = \int_0^{\pi} x \cdot x\,dx = \frac{\pi^3}{3}$

$$G = \begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix}$$

$\langle \varphi_1, f \rangle = \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin x = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$ $\quad \langle \varphi_2, f \rangle = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x = \ldots = \pi$

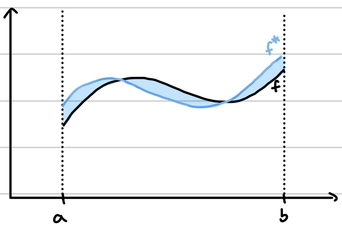
$p^*(x) = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x$

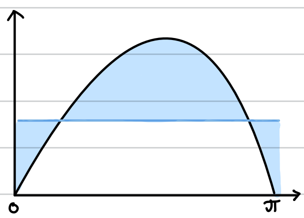
$$\begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix} \longrightarrow \alpha_1 = \frac{2}{\pi} \quad \alpha_2 = 0$$

$p^*(x) = \frac{2}{\pi}$

Geometrijska interpolacija $\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2 = \min_{s \in S} \sqrt{\langle f-s, f-s \rangle} = \min_{s \in S} \sqrt{\int_a^b (f(x) - s(x))^2 dx}$





↳ **PRIMER**

Točke $(1,2), (2,3), (3,5), (4,8)$ aproksimiraj po MNK s premico

$S = \mathbb{P}_1$ $\quad \underline{x} = (1,2,3,4) = (x_i)_{i=1}^{4}$

$\langle f,g \rangle = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)g(x_i)$

$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} f^2(x_i)}$

Aproksimiramo funkcijo f, ki jo poznamo v danih točkah x_i $f(x_i) = y_i$, $\quad y = (y_i)_{i=1}^{4} = (2,3,5,8)$

$p^*(x) = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x$

$\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$

$\langle \varphi_1,\varphi_1 \rangle = \sum_{i=1}^{4} 1 \cdot 1 = 4$ $\quad \langle \varphi_1,\varphi_2 \rangle = \sum_{i=1}^{4} 1 \cdot x_i = 10$ $\quad \langle \varphi_2,\varphi_2 \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot x_i = 30$

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$

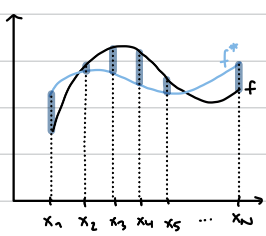
$\langle \varphi_1, f \rangle = \sum_{i=1}^{4} 1 \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{4} 1 \cdot y_i = 18$ $\quad \langle \varphi_2, f \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i\, f(x_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 55$

Gramov sistem $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 55 \end{bmatrix} \longrightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{2}, \ \alpha_2 = 2 \longrightarrow p^*(x) = -\frac{1}{2} + 2x$

Geometrijska interpolacija $\quad \underline{x} = (x_i)_{i=1}^{N}$

$\langle f,g \rangle = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)g(x_i)$

$\min_{s \in S} \|f - s\|_2 = \min_{s \in S} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - s(x_i))^2}$



↳ PRIMER

$X = C([0,1])$ $\quad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$

$S \subseteq \mathbb{P}_{n-1} = \mathcal{L}in\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$

$f_i(x) = x^{i-1} \quad i = 1,2,\dots,n$

Gramova matrika $\quad G = \left(\frac{1}{i+j-2}\right)_{i,j=1}^{n}$ $\qquad$ cond(hilb(n))?

$\langle f_i, f_j\rangle = \int_0^1 x^{i-1}x^{j-1}\,dx = \int_0^1 x^{i+j-2}\,dx = \frac{1}{i+j-2}$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{3} & & & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

Hilbertova matrika (zelo občutljiva matrika)

↳ Gramova matrika je lahko zelo občutljiva. Temu problemu se lahko izognemo tako, da izberemo ORTONORMIRANO BAZO za izbran podprostor

$S = \mathcal{L}in\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ za $f_i \perp f_j \quad \forall i \neq j \quad (\langle f_i, f_j\rangle = 0 \quad \forall i \neq j)$

$\langle f_i, f_i\rangle = \|f_i\|_2^2 = 1$

Pri ON bazah je Gramova matrika identiteta $G = I$. koeficienti $\alpha_i = \langle f, f_i\rangle \quad i = 1,2,\dots,n$

$f^* = \sum_{i=1}^{n} \langle f, f_i\rangle f_i$ $\quad$ FOURIEROVA VRSTA

3.3

↳ PONOVITEV

X vektorski prostor s $\langle \cdot,\cdot\rangle$

$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$

$S = \mathcal{L}in\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$

$f \in X$, $f^* \in S$

$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$

$f^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$

$G = (\langle f_j, f_i\rangle)_{i,j=1}^{n}$ $\qquad d = (\langle f, f_i\rangle)_{i=1}^{n}$

$\Longrightarrow G \cdot \alpha = d$

↳ Če je $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ON baza, potem je $G = I$ in $f^* = \sum_{i=1}^{n} \langle f, f_i\rangle \cdot f_i$

Kako do ON baze?

odgovor: Uporabimo GRAM-SCHMIDTOV POSTOPEK

↳ ALGORITEM (MGS - modificiran Gram-Schmidtov postopek)

vhodni podatki: neka baza podprostora $S: \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$

- for $i = 1:n$
  $\varphi_i = \psi_i$
  end

  for $i = 1:n$
  $\varphi_i = \frac{1}{\|\varphi_i\|} \cdot \varphi_i$
  for $j = i+1:n$
  $\varphi_j = \varphi_j - \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \varphi_i$
  end
  end

- izhod: ON baza $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$

↳ Povezava "naše" teorije s predoločenimi sistemi (iz 1. semestra)

$Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\operatorname{rang} A = n$

MNK: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$

$A = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n]$ ($\underline{a}_j$ … j-ti stolpec)

$x \in \mathbb{R}^m$

$S = \operatorname{Im} A = \mathcal{L}in\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n\}$

za $b \in \mathbb{R}^m$ iščemo vektor $s^* \in \operatorname{Im} A$, da bo $\|b - s^*\|_2 = \min_{s \in \operatorname{Im} A} \|b - s\|_2$

[skalarni produkt: $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

če $s \in \operatorname{Im} A$ je oblika $s = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = Ax$

Torej je $\min_{s \in \operatorname{Im} A} \|b - s\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2$

Poglejmo kako dobimo Gramovo matriko

$$G = (\langle \underline{a}_j, \underline{a}_i \rangle)_{i,j=1}^{n} = (\underline{a}_j^T \cdot \underline{a}_i)_{i,j=1}^{n} = A^T A$$

Poglejmo kaj je še d: $d = (\langle \underline{a}_i, b \rangle)_{i=1}^{n} = (\underline{a}_i^T b)_{i=1}^{n} = A^T b = \begin{bmatrix} \underline{a}_1^T \\ \underline{a}_2^T \\ \vdots \\ \underline{a}_m^T \end{bmatrix} \cdot b$

$\Rightarrow Gx = d \iff \boxed{A^T A x = A^T b}$ normalni sistem

ENAKOMERNA APROKSIMACIJA ZVEZNIH FUNKCIJ S POLINOMI

↳ **PROBLEM**: Za dano funkcijo $f \in C([a,b])$ iščemo polinom $p^* \in \mathbb{P}_n$, da velja

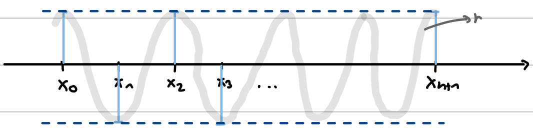
$$\|f-p^*\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p\in\mathbb{P}_n} \|f-p\|_{\infty,[a,b]} = \underbrace{\min_{p\in\mathbb{P}_n} \max_{x\in[a,b]} |f(x)-p(x)|}_{\text{nelinearen problem}}$$

Polinom p^* imenujemo polinom najboljše enakomerne aproksimacije za funkcijo f na intervalu $[a,b]$
P.N.E.A.

↳ **IZREK**

Naj bo $f \in \underbrace{C([a,b])}_{\text{zvezna } f \text{ na } [a,b]}$. Če je polinom $p \in \mathbb{P}_n$, da RESIDUAL $r = f-p$ alternirajoče doseže svojo normo v vsaj $n+2$ paroma različnih točkah na intervalu $[a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \le b$, potem je p polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f na $[a,b]$.

NATANČNEJE: $\|r\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |r(x)| = |r(x_i)|$ za $\forall i = 0,1,\ldots,n+1$ in $r(x_i)\cdot r(x_{i+1}) < 0$
↓
predznak $r(x)$ alternira



DOKAZ

Recimo, da p ni P.N.E.A. za f na $[a,b]$. Torej obstaja nek polinom $g \in \mathbb{P}_n$, da je $\|f-g\|_{\infty,[a,b]} < \|\underbrace{f-p}_{r}\|_{\infty,[a,b]} = |r(x_i)|$ za $i = 0,1,\ldots,n$

$$\|f-g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| \geq |f(x_i)-g(x_i)|$$

Za $\forall i = 0,1,\ldots,n+1$ je $|f(x_i)-g(x_i)| < |f(x_i)-p(x_i)|$

$$-\operatorname{sign}(f(x_i)-p(x_i))(f(x_i)-p(x_i)) < f(x_i)-g(x_i) < \operatorname{sign}(f(x_i)-p(x_i))(f(x_i)-p(x_i))$$

Recimo, da je $\operatorname{sign}(f(x_i)-p(x_i)) = 1$. Potem je $f(x_i)-g(x_i) < f(x_i)-p(x_i)$

$$\boxed{p(x_i)-g(x_i) < 0}$$

ker je po predpostavki $\operatorname{sign}(f(x_{i+1})-p(x_{i+1})) = -\operatorname{sign}(f(x_i)-p(x_i))$, je

$$f(x_{i+1})-p(x_{i+1}) < f(x_{i+1})-g(x_{i+1}) < -(f(x_{i+1})-p(x_{i+1}))$$

$$\Longrightarrow g(x_{i+1})-p(x_{i+1}) < 0$$

$$\boxed{p(x_{i+1})-g(x_{i+1}) > 0}$$

Torej ima polinom $p-g \in \mathbb{P}_n$ ničlo na intervalu (x_i, x_{i+1}) za $i = 0,1,\ldots,n+1$

Torej ima polinom $p-g$ $n+1$ različnih ničel na $[a,b]$, torej more biti $p-g=0$, oziroma $p \equiv g$

$\times$

■

↳ **OPOMBA**: Da se pokazati, da tak polinom p, ki zadošča pogojem izreka res obstaja (težko, dokaz izpustimo)

Iskanje p.n.e.a za f na $[a,b]$ se torej presede na iskanje ustrezne množice točk $E = \{x_i,\ a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \le b\}$

↳ DEFINICIJA

Naj bo $f \in C([a,b])$ in naj bo $E = \{x_i, a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leq b\}$ dana množica $n+2$ različnih točk. Definirajmo MINIMAKS za f na E:

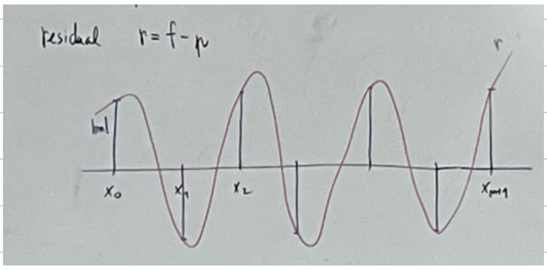
$$\boxed{M_n(f,E) = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in E} |f(x) - p(x)|}$$

Iskanje polinoma $p \in \mathbb{P}_n$, pri katerem je dosežen ta minimum, je LINEAREN problem. Ta polinom imenujemo p.n.e.a za f na množici E

BREZ IZPELJAVE: Dobimo ga z rešitvijo sistema linearnih enačb $f(x_i) - p(x_i) = (-1)^i m \qquad i = 0, 1, \ldots, n+1$

Neznanke so koeficienti polinoma (teh je $n+1$) in m

$M_n(f,E) = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{i=0,\ldots,n+1} |f(x_i) - p(x_i)| = |m|$

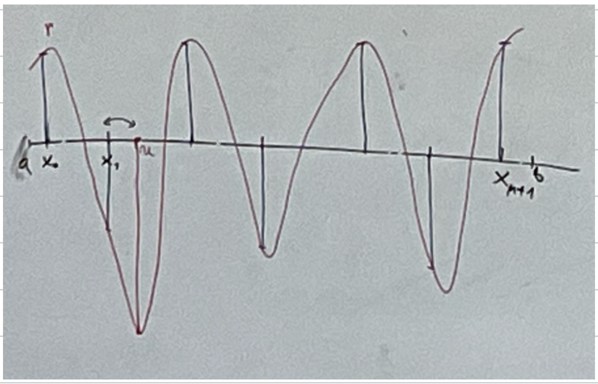


npr.: $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

↳ Najti moramo množico E $n+2$ točk, pri katerih bo veljalo $M_n(f,E) = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|$

Algoritem s katerim iterativno poiščemo to množico se imenuje REMESOV ALGORITEM

IDEJA ALGORITMA: Začnemo z poljubno množico E $n+2$ različnih točk. Izračunamo p.n.e.a za f na tej množici.



Poiščemo ekstrem residuala $r = f - p$ in naredimo zamenjavo ene točke iz množice E s točko, v kateri je dosežen ekstrem reziduala, tako, da ohranimo alternacijo

↳ PRIMER

Naj bo $f(x)=\frac{1}{1+x}$ na $[0,1]$ poišči $p^* \in \mathbb{P}_1$ p.n.e.a. za f na $[0,1]$

<u>Rešitev</u>: $E=\{0,\frac{1}{2},1\}$

$p(x)=a_0+a_1x$

$f(x_i)-p(x_i)=(-1)^i\cdot m$, $i=0,1,2$

$1-a_0=m$

$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}-a_0-a_1\cdot\frac{1}{2}=-m$

$\frac{1}{2}-a_0-a_1\cdot 1=m$

ko rešimo sistem dobimo: $a_0=\frac{23}{24}$, $a_1=-\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{24}$

$p_0^*(x)=\frac{23}{24}-\frac{1}{2}x$

$\hookrightarrow$ to je p.n.e.a. za f na E_0

Poiščimo ekstrem residuala: $r=f-p_0^*$, $r'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}+\frac{1}{2}=0$

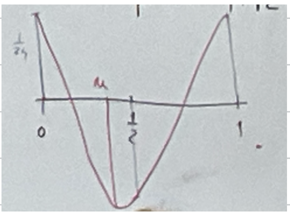
$\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{1}{2}$

$(1+x)^2=2$

$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$

moramo vzeti iz pravilnega intervala $\rightarrow$ $x=-1+\sqrt{2}$

ekstrem residuala bo dosežen pri $u=-1+\sqrt{2}=0{,}4142...$



Vzamemo novo množico $E_1=\{0,-1+\sqrt{2},1\}$

$p(x)=a_0+a_1x$

spet zapišemo sistem enačb:

$1-a_0=m$

$\frac{1}{\sqrt{2}}-a_0-a_1(-1+\sqrt{2})=-m$

$\frac{1}{2}-a_0-a_1=m$

rešitev: $a_0=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a_1=-\frac{1}{2}$

$m=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\doteq 0{,}04289$

$\Longrightarrow p_1^*(x)=\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1}{2}x$

residual: $r(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}x-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ekstrem dosežen pri $-1+\sqrt{2}$

Dobili smo 3 točke v katerih je alternirajoče dosežen ekstrem residuala,

sledi (po izreku) da je $p^*(x)=\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1}{2}x$ p.n.e.a za f na $[0,1]$

Interpolacija

INTERPOLACIJA - UVOD

↳ PROBLEM: Naj bodo podane vrednosti neke izbrane funkcije f v INTERPOLACIJSKIH TOČKAH na nekem intervalu $[a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$. Iščemo neko "preprostejšo" funkcijo g, za katero velja $g(x_i) = f(x_i)$ $i = 0, 1, \dots, n$

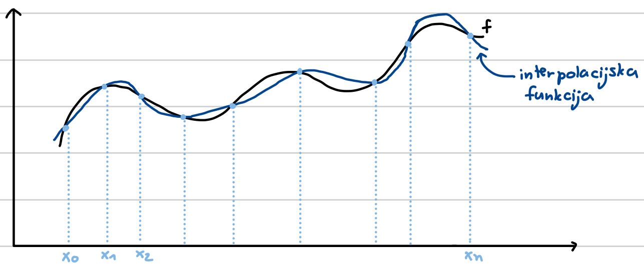
To funkcijo g imenujemo INTERPOLACIJSKA FUNKCIJA

Običajno za interpolacijsko funkcijo izberemo POLINOME, ODSEKOMA POLINOMSKE FUNKCIJE oz. ZLEPKE, ...

↳ Zakaj rabimo interpolacijsko funkcijo?

- za aproksimacijo izbrane funkcije f
- kadar f poznamo le v interpolacijskih točkah, zanima pa nas približek za f v poljubnem $x \in [a,b]$

  $f(x) \approx g(x)$
- za izpeljavo aproksimacijskih formul za numerično odvajanje, integriranje, reševanje NDE, ...



POLINOMSKA INTERPOLACIJA

↳ Naj bo f dana funkcija in $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ dane interpolacijske točke. Iščemo polinom p, ki zadošča pogoju

$$\underbrace{\boxed{p(x_i) = f(x_i)}}_{n+1 \text{ enačb}} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Ker želimo imeti enako število enačb kot neznank (neznanke so koeficienti polinoma v neki bazi), moramo izbrati $p \in \mathbb{P}_n$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

$$p(x_i) = f(x_i): \quad a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n = f(x_i) \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

sistem $n+1$ linearnih enačb za $n+1$ neznank

$$\underbrace{V(x_0, x_1, \ldots, x_n)}_{\text{Vandermondova matrika}} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

↳ Velja $\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0$

Torej obstaja <u>enoličen</u> polinom $p \in \mathbb{P}_n$, ki reši naš interpolacijski problem

Znano je, da so Vandermondove matrike zelo občutljive matrike. Poleg tega nimamo rešitve v zaključeni obliki.

Spoznali bomo:

1) LAGRANGEEVO obliko zapisa interpolacijskega polinoma

2) NEWTONOVO obliko zapisa interpolacijskega polinoma

① LAGRANGEVA OBLIKA ZAPISA INTERPOLACIJSKEGA POLINOMA

↳ Želeli bi najti bazo polinoma za $\mathbb{P}_n$, v kateri bi bila matrika sistema enačb, ki določa interpolacijski polinom [= kolokacijska matrika], enak identiteti.

<u>baza</u>: $\{f_1, \dots, f_n\}$

$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j f_j(x)$

<u>enačbe</u>: $p(x_i) = \sum_{j=0}^{n} c_j f_j(x_i) = f(x_i)$ za $i = 0, 1, \dots, n$

<u>kolovacijska matrika</u>: $(f_j(x_i))_{i,j=0}^{n}$

↳ Definiramo t.i. bazne polinome

$$\ell_{0,n}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$\ell_{1,n}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$\ell_{n,n}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

$$\boxed{\ell_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Velja $\ell_{i,n}(x_j) = \begin{cases} 1 \ ; & i = j \\ 0 \ ; & \text{sicer} \end{cases} = \delta_{ij}$

↳ **LEMA**: Lagrangevi bazni polinomi so BAZA za $\mathbb{P}_n$
$(\dim \mathbb{P}_n = n+1)$

DOKAZ: Preveriti moramo, da so linearno neodvisni:

Naj bo $\alpha_0 \ell_{0,n} + \alpha_1 \ell_{1,n} + \dots + \alpha_n \ell_{n,n} = 0$. Torej $\forall x$ naj bo $\alpha_0 \ell_{0,n}(x) + \dots + \alpha_n \ell_{n,n}(x) = 0$

Ustavimo $x = x_i$: $\alpha_i \underbrace{\ell_{i,n}(x_i)}_{1} = 0 \implies \alpha_i = 0$ za $\forall i$ □

↳ $\mathbb{P}_n = \text{Lin}\{\ell_{i,n} \ ; i = 0, 1, \dots, n\}$

Vsak polinom $p \in \mathbb{P}_n$ lahko zapišemo kot $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \ell_{i,n}(x)$ za neke koeficiente $(\alpha_i)_{i=0}^{n}$. Da dobimo interpolacijski polinom želimo $\alpha_i = f(x_i)$ za $i = 1, \dots, n$. Lagrangevo oblika zapisa interpolacijskega polinoma: $\boxed{p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \ell_{i,n}(x)}$

↳ **LEMA**

Če je $f \in \mathbb{P}_n$, potem je $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \ell_{i,n}(x)$

DOKAZ: Sledi iz enoličnosti interpolacijskega polinoma

↳ **POSLEDICA**:

Velja $\sum_{i=0}^{n} \ell_{i,n}(x) = 1$. Lagrangevi bazni polinomi tvorijo razčlenitev/particijo enote.

↳ IZREK

Naj bo $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$, $f \in C^{n+1}([a,b])$ in $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \ell_{i,n}(x)$ interpolacijski polinom za f.

Potem za $\forall x \in [a,b]$ obstaja $\xi_x \in (a,b)$, da velja $\boxed{f(x) - p(x) = w(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}}$, kjer je $w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$

DOKAZ:

Če je $x = x_i$ za nek i, potem je $f(x_i) - p(x_i) = 0$, velja pa tudi $w(x_i) = 0$, torej enakost velja za poljuben ξ_x. Naj bo sedaj $x \neq x_i$, $i = 0,1,\ldots,n$.

x je fiksen! Definirajmo funkcijo $F(u) = f(u) - p(u) - C \cdot w(u)$ za neko konstanto C. Za $u = x_i$ velja $F(x_i) = 0$ za $i = 0,1,\ldots,n$. Izberemo konstanto

C tako, da bo $F(x) = 0$. F ima ničle $x_0, x_1, \ldots, x_n$ in x. $F \in C^{n+1}([a,b])$

F ima na $[a,b]$ vsaj $n+2$ paroma različnih ničel.

F' ima na $[a,b]$ vsaj $n+1$ paroma različnih ničel.

F'' ima na $[a,b]$ vsaj n paroma različnih ničel.

$\vdots$

$F^{(n+1)}$ ima na $[a,b]$ vsaj eno ničlo. Označimo jo za ξ_{1x}; torej $F^{(n+1)}(\xi_{1x}) = 0$

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_{1x}) = f^{(n+1)}(\xi_{1x}) - 0 - \underbrace{C w^{(n+1)}(\xi_{1x})}_{(n+1)!} \Longrightarrow C = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{1x})}{(n+1)!}$$

$F(x) = 0$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\, w(x)$$

$\square$

↳ OCENA NAPAKE INTERPOLACIJSKEGA POLINOMA

$$|f(x) - p(x)| = \frac{1}{(n+1)!}\, |f^{(n+1)}(\xi_{1x})|\, |w(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}\, \|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]}\, \|w\|_{\infty,[a,b]} \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\boxed{\|f - p\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{(n+1)!}\, \|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]}\, \|w\|_{\infty,[a,b]}}$$

v praksi je ta ocena
dostikrat zelo groba

↳ Lagrangeva oblika je zelo uporabna pri izpeljavi formul za numerično odvajanje

↳ POMANJKLJIVOSTI

- Pri dodajanju interpolacijskih točk moremo spremeniti vse Lagrangeve bazne polinome
- Ne moremo interpolirati odvodov
- Računanje vrednosti (glej vaje)
- Numerične težave, če so si interpolacijske točke zelo blizu

② NEWTONOVA OBLIKA ZAPISA

↳ Za bazo $\mathbb{P}_n$ v kateri bomo zapisali interpolacijski polinom izberemo PRESTAVLJENE POTENCE :

$$1,\ x-x_0,\ (x-x_0)(x-x_1),\ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \ldots,\ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

Očitno so baza

Vsak $p \in \mathbb{P}_n$ lahko zapišemo kot $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})$

↳ Kako izračunati koeficiente $(c_i)_{i=0}^{n}$, da bo $p(x_j) = f(x_j)$ za $j = 0, \ldots, n$, torej da bo p interpolacijski polinom

ODGOVOR: Interpolacijski polinom bomo konstruirali rekurzivno 17.3

IZPELJAVA: Naj bo p_{k-1} interpolacijski polinom za f na točkah $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}$. Radi bi določili p_k, ki bo dodatno interpoliral f v točki x_k $[p_k \in \mathbb{P}_k]$:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + \underbrace{C\cdot(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})}_{\text{bazni polinom}} \qquad (*)$$

Za $x = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ velja $p_k(x_i) = p_{k-1}(x) + C \cdot 0 = f(x_i)$ [ena od razlik v produktu bo 0]

Konstanto C izberemo tako, da velja je $p_k(x_k) = f(x_k)$

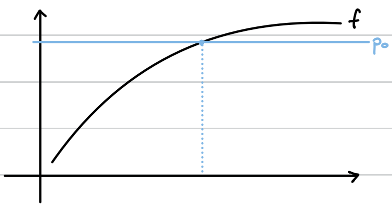
Vidimo, da je C vodilni koeficient interpolacijskega polinoma p_k. Označimo jo $C = [x_0, x_1, \ldots, x_k]f$ ... DELJENA DIFERENCA za funkcijo f na točkah $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

↳ DEFINICIJA

DELJENA DIFERENCA $[x_0, x_1, \ldots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k (koeficient pri potenci x^k), ki se z f ujema v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_k$

↳ PRIMER

• $k=0$: Iščemo $p_0 \in \mathbb{P}_0$, da velja $p_0(x_0) = f(x_0)$



$p_0(x) = f(x_0) \cdot 1$

Po definiciji je $[x_0]f = f(x_0)$

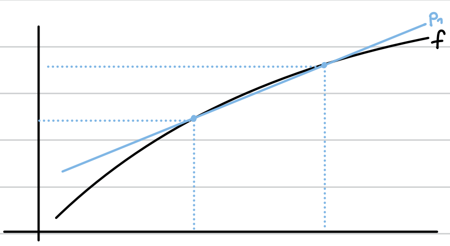
↳ Iz $(*)$ $[\Rightarrow p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \ldots, x_k]f\ (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})]$ sledi

$$\boxed{\begin{aligned} p_n(x) &= [x_0]f \cdot 1 + [x_0,x_1]f\,(x-x_0) + [x_0,x_1,x_2]f \cdot (x-x_0)(x-x_1) + \ldots + [x_0,x_1,\ldots,x_n]f \cdot (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} [x_0,x_1,\ldots,x_i]f \cdot (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1}) \end{aligned}}$$

NEWTONOVA OBLIKA ZAPISA
INTERPOLACIJSKEGA POLINOMA

↳ Kako izračunati deljene diference?

• $[x_0, x_1]f = ?$



$$p_1(x) = f(x_0)\cdot 1 + \underbrace{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}_{\substack{\text{smerni koef.}\\ \text{premice}}}(x-x_0)$$

Torej: $[x_0, x_1]f = \dfrac{f(x_1) f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0}$

↳ **IZREK: REKURZIVNA FORMULA ZA DELJENE DIFERENCE:**

Naj bodo $x_0, x_1, \dots, x_k$ paroma različne interpolacijske točke. Tedaj je:

$$\boxed{[x_0, x_1, \dots, x_k]f = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_k]f - [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}}$$

<u>DOKAZ</u>: Naj bo g_0 interpolacijski polinom za f na točkah $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$, g_1 pa interpolacijski za f na $x_1, x_2, \dots, x_k$ $[g_0, g_1 \in \mathbb{P}_{k-1}]$

konstruiramo z uporabo g_0 in g_1 polinom p, ki bo interpolacijski za f na $x_0, x_1, \dots, x_k$. $p \in \mathbb{P}_k$

$$p(x) = \ell_0(x)\, g_0(x) + \ell_1(x)\, g_1(x)$$

za neka polinoma $\ell_0, \ell_1 \in \mathbb{P}_1$ [pomnožimo z polinomom stopnje 1, da bomo g_0/g_1 dvignili stopnjo, do stopnje polinoma p, torej za 1]

za $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, k-1$: $p(x_i) = \ell_0(x_i)\, \underbrace{g_0(x_i)}_{f(x_i)} + \ell_1(x_i)\, \underbrace{g_1(x_i)}_{f(x_i)} = (\ell_0(x_i) + \ell_1(x_i)) \cdot f(x_i)$

Prav tako želimo tudi da velja:

$$p(x_0) = \ell_0(x_0)\, \underbrace{g_0(x_0)}_{f(x_0)} + \ell_1(x_0)\, \underbrace{g_1(x_0)}_{?} \stackrel{?}{=} f(x_0)$$

$$p(x_k) = \ell_0(x_k)\, \underbrace{g_0(x_k)}_{?} + \ell_1(x_k)\, \underbrace{g_1(x_k)}_{f(x_k)} \stackrel{?}{=} f(x_k)$$

Vidimo, da moramo izbrati $\ell_0(x) = \frac{x - x_k}{x_0 - x_k}$, $\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0}$, da bosta izpolnjeni zadnji dve enačbi.

[ker se Lagrangevi polinomi seštejejo v 1]. Velja $\ell_0(x) + \ell_1(x) \equiv 1$, zato veljajo tudi ostali pogoji

Torej $p(x) = \frac{x - x_k}{x_0 - x_k}\, g_0(x) + \frac{x - x_0}{x_k - x_0}\, g_1(x)$

Sedaj lahko še primerjamo vodilne koef:

$$\underbrace{\text{vodilni koeficient } (p)}_{[x_0, x_1, \dots, x_k]p} = \frac{1}{x_0 - x_k} \text{vod. koef.} (g_0) + \frac{1}{x_k - x_0} \text{vod. koef.} (g_1) = \frac{1}{x_0 - x_k}[x_0, \dots, x_{k-1}]f + \frac{1}{x_k - x_0}[x_1, \dots, x_k]f$$

$$= \frac{[x_1, \dots, x_k]f - [x_0, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}$$

↳ **ZGLED**: $[x_0, x_1, x_2]f = \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0}$

↳ Deljene diference računamo v trikotni shemi $n = 3$

	$[\cdot]f$	$[\cdot,\cdot]f$	$[\cdot,\cdot,\cdot]f$	$[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]f$
x_0	$[x_0]f$			
		$[x_0, x_1]f$		
x_1	$[x_1]f$		$[x_0, x_1, x_2]f$	
		$[x_1, x_2]f$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]f$
x_2	$[x_2]f$		$[x_1, x_2, x_3]f$	
		$[x_2, x_3]f$		
x_3	$[x_3]f$			

<u>OP</u>: Podčrtane potem potrebujemo, da zapišemo interpolacijski polinom

↳ **ZGLED**

Poišči interpolacijski polinom p, za katerega velja $p(0) = 1$, $p(1) = 3$, $p(3) = 5$, $p(4) = 2$

- stopnja: $n = 3$
- $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$
- $y_0 = 1$, $y_1 = 3$, $y_2 = 5$, $y_3 = 2$ $(y_i = f(x_i)$ za nek $f)$
- baza $= \{1, x - 0, (x-0)(x-1), (x-0)(x-1)(x-3)\}$

0	1	$\frac{3-1}{1-0}=2$	$\frac{1-2}{3-0}=-\frac{1}{3}$	$\frac{-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}{4-0}=-\frac{1}{4}$
1	3	$\frac{5-3}{3-1}=1$	$\frac{-3-1}{4-1}=-\frac{4}{3}$	
2	5	$\frac{2-5}{4-3}=-3$		
3	2			

$\Longrightarrow p(x) = 1 \cdot 1 + 2(x-0) + \left(-\frac{1}{3}\right)(x-0)(x-1) + \left(-\frac{1}{4}\right)(x-0)(x-1)(x-3)$

↳ **kako "ekonomično" izračunati vrednosti polinoma pri izbranem x v Newtonovi bazi?**

$p(x) = d_0 \cdot 1 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + d_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$

- Poskusimo, če kaj opazimo že v nižjih stopnjah

Naj bo $n=3$: $p(x) = d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + d_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$$= \underbrace{d_0 + (x-x_0)\underbrace{(d_1 + (x-x_1)\underbrace{(d_2 + (x-x_2)\cdot \underbrace{d_3}_{v_3})}_{v_2})}_{v_1}}_{v_0}$$

$v_3 = d_3$
$v_2 = d_2 + (x-x_2)\cdot v_3$
$v_1 = d_1 + (x-x_1)\cdot v_2$
$v_0 = d_0 + (x-x_0)\cdot v_1$

$\Longrightarrow \boxed{v_i = d_i + (x-x_i)\, v_{i+1}}$ za $i = 2, 1, 0$

- **ALGORITEM (POSPLOŠEN HORNERJEV ALGORITEM)**
  - → Vhodni podatki: koeficienti $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$
    Interpolacijske točke $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$
    Izbran x
  - → $v_n = d_n$
    for $i = n-1 : -1 : 0$
    $v_i = d_i + (x-x_i)\, v_{i+1}$
    end
  - → izhod: v_0
  - → št. operacij: $3n \in \mathcal{O}(n)$

- zakaj je to posplošen Hornerjev algoritem?

	d_n	d_{n-1} ($x-x_{n-1}$)	d_{n-2} ($x-x_{n-2}$)		d_1 ($x-x_1$)	d_0 ($x-x_0$)
x		$v_n(x-x_{n-1})$	$v_{n-1}\cdot(x-x_{n-2})$		$v_2(x-x_1)$	$v_1(x-x_0)$
	$d_n = v_n$	$d_{n-1} + v_n(x-x_{n-1}) = v_{n-1}$	v_{n-2}		v_1	v_0

↳ **ZGLED**

Nadaljujemo prejšnji zgled: $p(x) = 1 + 2\cdot x - \frac{1}{3}x(x-1) - \frac{1}{4}x(x-1)(x-3)$

$p(2) = ?$

	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$ $(x-3)$	2 $(x-1)$	1 $(x-0)$
$x=2$		$-\frac{1}{4}\cdot(2-3) = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}(2-1)$	$\frac{23}{12}\cdot(2-0)$
	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$	$2 - \frac{1}{12} = \frac{23}{12}$	$1 + \frac{23}{6} = \frac{29}{6}$

$\Longrightarrow p(2) = \frac{29}{6}$

↳ Poglejmo si interpolacijski polinom na dveh točkah x_0 in x_1:

$$p(x) = [x_0]f + (x-x_0)\,[x_0,x_1]f$$

$$= f(x_0) + (x-x_0)\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \xrightarrow{x_1 \to x_0} f(x_0) + (x-x_0)\underbrace{\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}_{f'(x_0)} = p(x)$$

$p(x_0) = f(x_0)$
$p(x_1) = f(x_1)$

$p(x_0) = f(x_0)$
$p'(x_0) = f'(x_0)$

↳ **DEFINICIJA:**

Pravimo, da se polinom p s f ujema v točki x_i $(k+1)$-kratno, če se ujema v vrednosti in v prvih k odvodih:

$$\left.\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i) \\ p'(x_i) &= f'(x_i) \\ &\vdots \\ p^{(k)}(x_i) &= f^{(k)}(x_i) \end{aligned}\right]$$

Polinom stopnje k, ki ustreza tem pogojem, je Taylorjev polinom

$$p(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x-x_i) + \tfrac{1}{2} f''(x_i)(x-x_i)^2 + \ldots + \underbrace{\tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_i)}_{(\Delta)}(x-x_i)^k$$

"Taylor je neke vrste interpolacijski polinom"

Če bomo v interpolacijski točki x_i zahtevali ujemanje s f $(k+1)$-kratno (v vrednosti in prvih k-odvodih), potem bomo to točko podali $(k+1)$-kratno: $x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_{i+k}$

Posplošiti moramo še deljive diference

$$\underbrace{[x_i, x_i, \ldots, x_i]}_{k+1}f = \underbrace{\tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_i)}_{(\Delta)} \quad \text{(po definiciji deljene diference)}$$

OPOMBA: Vrstni red točk v deljivi diferenci NI pomemben. Vendar jih vedno lahko uredimo po velikosti

SPLOŠNO:
$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f = \begin{cases} \dfrac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & ; \ x_i = x_{i+1} = \ldots = x_{i+k} \\[2ex] \dfrac{[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]f - [x_i,\ldots,x_{i+k-1}]f}{x_{i+k}-x_i} & ; \ x_i \neq x_{i+k} \end{cases}$$

↳ **PRIMER**

Poišči polinom p, za katerega velja $p(0)=1$, $p'(0)=2$, $p''(0)=3$, $p(1)=1$, $p'(1)=3$, $p(2)=4$

$n=5$,

$x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

$x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$

baza $= \{1, x-0, (x-0)(x-0), (x-0)^3, (x-0)^3(x-1), (x-0)^3(x-1)^2\}$

$$\begin{array}{c|cccccc}
x_i & & & & & & \\ \hline
0 & 1 & & & & & \\
 & & 2 & & & & \\
0 & 1 & & \frac{3}{2} & & & \\
 & & 2 & & \frac{-4-\frac{3}{2}}{1-0} = -\frac{11}{2} & & \\
0 & 1 & & \frac{-2-2}{1-0} = 4 & & \frac{9+\frac{11}{2}}{1-0} = \frac{29}{2} & \\
 & & \frac{-1-1}{1-0} = -2 & & \frac{5+4}{1-0} = 9 & & \frac{-\frac{21}{4}-\frac{29}{2}}{2-0} = -\frac{79}{8} \\
1 & -1 & & \frac{3+2}{1-0} = 5 & & \frac{-\frac{3}{2}-9}{2-0} = -\frac{21}{4} & \\
 & & 3 & & \frac{2-5}{2-0} = -\frac{3}{2} & & \\
1 & -1 & & \frac{5-3}{2-1} = 2 & & & \\
 & & \frac{4+1}{2-1} = 5 & & & & \\
2 & 4 & & & & &
\end{array}$$

formule: $[x_0, x_1]f = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

$[x_i, x_i]f = f'(x_i)$

$[x_i, x_i, x_i]f = \frac{1}{2} f''(x_i)$

$$\Longrightarrow p(x) = 1 \cdot 1 + 2(x-0) + \tfrac{3}{2}(x-0)^2 + \left(-\tfrac{11}{2}\right)(x-0)^3 + \tfrac{29}{2}(x-0)^3(x-1) + \left(-\tfrac{79}{8}\right)(x-0)^3(x-1)^2$$

↳ LASTNOSTI [nebomo naredili izpeljave]

- za $f \in C^k([a,b])$, $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq b$, velja

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \quad \text{za } \xi \in [x_i, x_{i+k}]$$

- za $f \in C^{n+1}([a,b])$, $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq b$ in $p \in \mathbb{P}_n$ interpolacijski polinom velja

$$\boxed{f(x) = p(x) + \omega(x)\underbrace{[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f}_{= \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}}} \quad \text{kjer je} \quad \omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

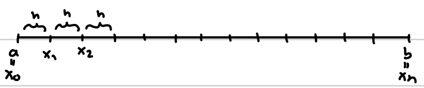
$$\Rightarrow f(x) - p(x) = \omega(x)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

↳ KAKO IZBRATI INTERPOLACIJSKE TOČKE NA $[a,b]$?

① EKVIDISTANTNE TOČKE

$x_i = a + ih \longrightarrow h = \frac{b-a}{n}$

$i = 0, 1, \ldots, n$



② IZBIRA PRI KATERI JE DOSEŽEN MINIMUM

$$\min_{a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b} \|\omega\|_{\infty,[a,b]} = \min_{a \leq x \ldots \leq b} \max_{x \in [a,b]} |\omega(x)|$$

rešitev: čebiševe točke $\quad x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad i = 0, 1, \ldots, n$

↳ VPRAŠANJE: Recimo, da si izberemo zaporedje interpolacijskih točk $(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\})_n$ in naj bo $(p_n)_n$ zaporedje pripadajočih interpolacijskih polinomov za izbrano funkcijo f. Zanima nas $\|f - p_n\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow{n\to\infty}$?

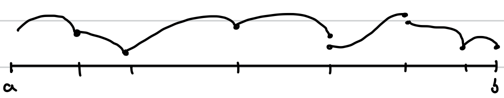
ODGOVOR: Žal ne velja nujno, da bi šla ta napaka proti nič.

PRIMER: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $[-5,5]$, ekvidistantna izbira interpolacijskih točk

Izkaže se, da $\|f - p_n\|_{\infty,[-5,5]} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

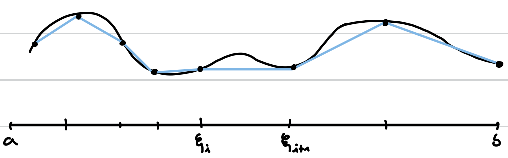
Pri izbiri čebiševih točk, gre napaka proti 0, v tem primeru

↳ V praksi se uporabljajo odsekoma polinomske funkcije oziroma zlepki (splines)



Na vsakem podintervalu imamo polinome neke izbrane stopnje

V stičnih točkah pa predpišemo pogoj gladkosti.



$p(\xi_i) = f(\xi_i) \qquad p'(\xi_i) = f'(\xi_i)$

$p(\xi_{i+1}) = f(\xi_{i+1}) \qquad p'(\xi_{i+1}) = f'(\xi_{i+1})$

2. NUMERIČNO ODVAJANJE

- **NALOGA**: Iščemo približek za odvod funkcije f pri nekem iskanem x. Približek bi radi izrazili s kombinacijo vrednosti funkcije f v nekih bližnjih točkah $x_0, x_1, \dots, x_n$
- **IDEJA ZA IZPELJAVO APROKSIMACIJSKIH FORMUL**: kot približek za odvod f-a pri izbranem x vzamemo odvod interpolacijskega polinoma za f v izbranih točkah

- Vemo že: $f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f$, kjer je $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \ell_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, \dots, x_i]f\, (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})$

$$f'(x) = \underbrace{p'(x)}_{\text{aproksimacija odvoda}} + \underbrace{\left(\omega(x)[x_0, \dots, x_n, x]f\right)'}_{\substack{\text{napaka} \\ \parallel \\ R(f) = Rf}}$$

$$p'(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\ell'_{i,n}(x)\Big|_{x=\tilde{x}}}_{\text{skalarji } A_i}$$

Velja [brez dokaza] $\frac{d}{dx}\left([x_0, x_1, \dots, x_n, x]f\right) = [x_0, x_1, \dots, x_n, x, x]f$ za "dovolj" gladko funkcijo f.

Tako dobimo: $Rf = \omega'(\tilde{x})[x_0, x_1, \dots, x_n, \tilde{x}]f + \omega(\tilde{x})[x_0, x_1, \dots, x_n, \tilde{x}, \tilde{x}]f$

Običajno za $\tilde{x}$ izberemo eno od interpolacijskih točk, npr. $x = x_k$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\boxed{f'(x_k) = p'(x_k) + \omega'(x_k)\underbrace{[x_0, \dots, x_n, x_k]f}_{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}}$$

- **PRIMER**

Izberemo $n=1$ in $x_1 = x_0 + h$, izračunajmo $f'(x_0) = ?$ Izpelji formulo oblike $f'(x_0) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + Rf$

24.3

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, x_1, \dots x_n, x]f$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{p(x)} + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]f$$

$$f'(x_0) = f(x_0)\frac{1}{-h} + f(x_1)\frac{1}{h} + \left((x - x_0)(x - x_1)\right)'\Big|_{x=x_0}[x_0, x_1, x_2]f + 0$$

$$f'(x_0) = \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}}_{\substack{\text{aproksimacija odvoda} \\ = \text{enostranska diferenca}}} + \underbrace{(-h)\frac{f''(\xi)}{2}}_{\text{napaka}} \quad \text{za } \xi \in [x_0, x_1]$$

za $f \in C^2([x_0, x_1])$

- **PRIMER**

Izpelji formulo $f'(x_1) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + Rf$, kjer so x_0, x_1, x_2 ekvidistantne točke, to je $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$. $n=2$

$$f(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{\underbrace{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}_{2h^2}} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{\underbrace{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}_{-h^2}} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{\underbrace{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}_{2h^2}} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}_{\omega(x)}[x_0, x_1, x_2, x]f$$

$$f'(x) = f(x_0)\frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} + f(x_1)\frac{2x - x_0 - x_2}{-h^2} + f(x_2)\frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} + \omega'(x)\cdot[x_0, x_1, x_2, x]f + \omega'(x)[x_0, x_1, x_2, x]f + \omega(x)[x_0, x_1, x_2, x, x]f$$

$$f'(x_1) = f(x_0)\frac{-h}{2h^2} + f(x_1)\frac{0}{-h^2} + f(x_2)\frac{h}{2h^2} + (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\frac{f'''(\xi)}{3!}$$

$$f'(x_1) = \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h}}_{\text{simetrična diferenca}} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \quad \text{za } \xi \in [x_0, x_2]$$

Izpeljimo še formulo za $f''(x_1) \approx \dots$

$$f''(x_1) = f(x_0)\frac{1}{h^2} - f(x_1)\frac{2}{h^2} + f(x_2)\frac{1}{h^2} + Rf$$

$$f''(x_1) = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2} + \underbrace{2\omega'(x_1)[x_0, x_1, x_2, x, x]f\Big|_{x=x_1}}_{\frac{-2h^2 f^{(4)}(\xi)}{4!} = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)}$$

$\omega(x_1) = 0$
$\omega'(x_1) = -h^2$
$\omega''(x_1) = 0$

vmesna točka?

$$f''(x_1) = \underbrace{\frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2}}_{\text{simetrična diferenca za 2. odvod}} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \quad \text{za } f \in C^4([x_0, x_2])$$

↳ Imamo 2 vrsti napak:

- napaka metode (gre proti 0, ko gre $h \to 0$)
- neodstranljiva napaka (dobimo jo, ker namesto z točnimi vrednostmi funkcije f računamo s približki)

Naj velja $|f(x_i) - \hat{f}(x_i)| < \varepsilon$

$\hat{f}(x_i)$ ↑ izračunane vrednosti

↳ PRIMER

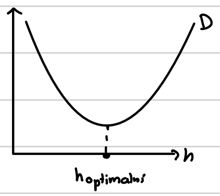
$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

Oceni za obe napaki:

$$D_{metode} = \frac{h^2}{6} \| f''' \|_\infty$$

$$D_n = \frac{\varepsilon + \varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h}$$

skupna napaka: $D_{metode} + D_n = D = \frac{h^2}{6} \| f''' \|_\infty + \frac{\varepsilon}{h}$



3 NUMERIČNO INTEGRIRANJE

NALOGA

Za dano funkcijo $f \in C([a,b])$ bi radi izračunali numerični približek za integral $Sf = \int_a^b f(x)dx$

$(S: C([a,b]) \to \mathbb{R})$

funkcional

Ta približek bi radi izrazili s kombinacijo vrednosti funkcije f v izbranih točkah $x_0, x_1, \dots, x_n$ iz intervala $[a,b]$

IDEJA ZA IZPELJAVO FORMUL

Namesto funkcije f bomo integrirali interpolacijski polinom za f na izbranih točkah.

Vemo že, da velja $f(x) = \underbrace{p(x)}_{\text{interpolacijski polinom}} + \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f$ (za $f \in C^{n+1}([a,b])$), $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \ell_{i,n}(x)$

Formulo integriramo: $\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{= Sf} = \underbrace{\int_a^b p(x)\,dx}_{\substack{\text{aproksimacija integrala} \\ = Ff}} + \underbrace{\int_a^b \omega(x)[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x]f\,dx}_{\substack{\text{napaka integracijskega pravila} \\ = Rf}}$

INTEGRACIJSKO PRAVILO oz. KVADRATNA FORMULA je oblika: $Sf = Ff + Rf$

$$Ff = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\ell_{i,n}(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b \ell_{i,n}(x)\,dx}_{A_i} = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{A_i}_{\text{uteži}}\, f(\underbrace{x_i}_{\text{vozli}})$$

$A_0, A_1, \dots, A_n$ so UTEŽI integracijskega pravila

$x_0, x_1, \dots, x_n$ so VOZLI integracijskega pravila

DEFINICIJA

Red oziroma stopnja integracijskega polinoma je enak r, če je pravilo točno za vse polinome stopnje $\le r$, ni pa več točno za polinome stopnje $r+1$. Natančneje: $Rp = 0$ za $\forall p \in \mathbb{P}_r$

$Rx^{r+1} \neq 0$

$\iff Sp = Fp$

$\boxed{\text{EKVIVALENTNO: } Rx^j = 0 \text{ za } j = 0, 1, \dots, r \text{ in } Rx^{r+1} \neq 0}$

Glede na izbiro vozlov ločimo med dvema razredoma pravil

- NEWTON-COTESOVA PRAVILA

  Vozle izberemo ekvidistantno na intervalu $[a,b]$: $x_0 = a$, $x_i = x_0 + ih$, $h = \frac{b-a}{2}$

  Ločimo: → pravila zaprtega tipa: $Ff = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$

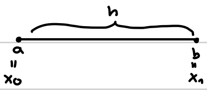
  → pravila odprtega tipa: $Ff = \sum_{i=1}^{n-1} A_i f(x_i)$

- GAUSSOVA PRAVILA

  Vozle in uteži določimo tako, da bo pravilo čim višjega reda

↳ Poglejmo si izpeljavo najbolj preprostih N-C pravil

· **1. PRIMER**



$n=1$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + Rf$$

$A_0, A_1, Rf = ?$

$$A_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,dx = -\frac{1}{h}\left.\frac{(x-x_1)^2}{2}\right|_{x_0}^{x_1} = -\frac{1}{h}\left(0-\frac{h^2}{2}\right) = \frac{h}{2}$$

$$A_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,dx = \frac{h}{2}$$

$$Rf = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)}_{\omega(x)}[x_0,x_1,x]f\,dx = [x_0,x_1,\xi]f\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\,dx = \frac{f''(\xi)}{2}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx =$$

ne spremeni predznaka na $[a,b]$

uporabimo poljuben izrek o povprečni vrednosti $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(\xi)\int_a^b f(x)\,dx$

če f ne spremeni predznaka na $[a,b]$

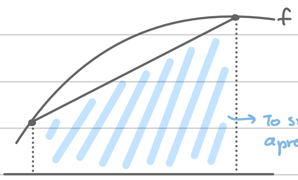
$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx = \int_0^1 (x_0+th-x_0)(x_0+th-x_0-h)\,h\,dt = h^3\int_0^1 t(t-1)\,dt = h^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{h^3}{6}}$$

$x = x_0 + th$
$dx = h\,dt$

$$\Longrightarrow Rf = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

Dobili smo $\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right) - \frac{h^3}{12} f''(\xi)}$ TRAPEZNO PRAVILO

kaj smo naredili, je grafično:



→ To smo dobili za našo aproksimacijo

Red trapeznega pravila bo vsaj 1

Je točno 1, ker $R(x-x_0)^2 \neq 0$ (D.N.)

· **PRIMER 2**

31.3

$a = x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h = b$ ⟶ ekvidistantne točke

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + Rf$$

$$A_0 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,dx = \frac{1}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)\,dx = \frac{1}{2h^2}\int_0^2 (x_0+th-x_0-h)(x_0+th-x_0-2h)\,h\,dt = \frac{1}{2}h\int_0^2 (t-1)(t-2)\,dt = \ldots = \frac{h}{3}$$

$x = x_0 + th$
$dx = h\,dt$

$$A_1 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,dx = \ldots = \frac{4h}{3}$$

$$A_2 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,dx = \ldots = \frac{h}{3}$$

$$\Longrightarrow \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) + Rf$$

→ Določimo najprej red oz. stopnjo pravila:

- red ≥ 2
- Ali je red $=3$? Torej nas zanima $Rf = ?$ za $f \in \mathbb{P}_3 = \mathcal{L}in\{1, (x-x_0), (x-x_0)^2, (x-x_0)^3\}$

  Izberemo za $f(x) = (x-x_0)^3$: $Rf = Sf - Ff = \int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)^3\,dx - \frac{h}{3}\left((x_0-x_0)^3 + 4(x_1-x_0)^3 + (x_2-x_0)^3\right)$

  $$= \left.\frac{(x-x_0)^4}{4}\right|_{x_0}^{x_2} - \frac{h}{3}\left(4h^3 + (2h)^3\right) =$$

  $$= 4h^4 - 4h^4$$

  $= 0$ ⟶ Torej imamo tudi je pravilo za stopnjo 3

- Ali je red $=4$? Preverimo za $f(x) = (x-x_0)^4$

  $$Rf = \int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)^4\,dx - \frac{h}{3}\left((x_0-x_0)^4 + 4(x_1-x_0)^4 + (x_2-x_0)^4\right) = \frac{(2h)^5}{5} - \frac{h}{3}\left(4h^4 + 16h^4\right) = \frac{32}{5}h^5 - \frac{20}{3}h^5 = -\frac{4}{15}h^5 \neq 0 \Longrightarrow \text{red} = 3$$

→ Določimo še napako pravila

$$Rf=\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,[x_0,x_1,x_2]f\,dx$$

Tu ne moremo več uporabiti "izrek o srednji vr."?

V tem primeru uporabimo naslednji nastavek, ki sledi iz Taylorjevega razvoja napak $e=f-p$ okrog točke a.

$$\boxed{Rf=C\cdot f^{(r+1)}(\xi)}$$ za $\xi\in[a,b]$ SIMPSONOVO PRAVILO

konstanta

r = red pravila

· KORAKI : - določimo red pravila [v tem primeru : $r=3$]

- Izberemo polinom stopnje $r+1$? [Izberemo $f(x)=(x-x_0)^4$] in izračunamo C

$$R(x-x_0)^4=C\cdot f^{(4)}(x)=C\cdot 4!$$

$$-\frac{4}{15}h^5=C\cdot 4!$$

$$C=-\frac{4}{15\cdot 24}h^5=-\frac{1}{90}h^5$$

- zapišemo napako po formuli

$$Rf=-\frac{h^5}{90}f^{(n)}(\xi)$$ → To velja za $f\in C^4([a,b])$

h? n? r? → I think da je 4

→ končni rezultat : $$\int_{x_0}^{x_2}f(x)\,dx=\frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right)-\frac{h^5}{90}f^{(n)}(\xi)$$

· ALTERNATIVA IZPELJAVA – METODA NEDOLOČENIH KOEFICIENTOV

Neznane uteži v pravilu določimo tako, da bo pravilo čim višjega reda, to je pravilo mora biti točno za polinome čim višjih stopenj.

Izberemo bazne polinome $\{1, x-x_0, (x-x_0)^2, \dots\}$. Poglejmo si to na primeru izpeljave Simpsonovega pravila.

$$\int_{x_0}^{x_2}f(x)\,dx=A_0f(x_0)+A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+Rf$$

$f(x)=1$: $\boxed{2h=A_0+A_1+A_2}$ $+0$ → saj želimo da bo rezultat točen, torej napaka $=0$

$f(x)=x-x_0$: $\frac{(2h)^2}{2}=0\cdot A_0+hA_1+2hA_2$ $+0$

$$\boxed{2h=A_1+2A_2}$$

$f(x)=(x-x_0)^2$: $\frac{(2h)^3}{3}=h^2\cdot A_1+(2h)^2A_2$ $+0$

$$\boxed{\frac{8}{3}h=A_1+4A_2}$$

Dobili smo 3 enačbe za 3 neznanke A_0, A_1, A_2

$$\begin{aligned}A_0+A_1+A_2&=2h\\ A_1+2A_2&=2h\\ A_1+4A_2&=\tfrac{8}{3}h\end{aligned}\implies A_0=A_2=\frac{h}{3},\quad A_1=\frac{4h}{3}$$

Poglejmo še red in napako

→ $f(x)=(x-x_0)^3$ $$\frac{(2h)^4}{4}=h^3A_1+(2h)^3A_2+R(x-x_0)^3$$ $$A_1=\frac{4h}{3},\quad A_2=\frac{h}{3},\quad R(x-x_0)^3=0$$

→ $f(x)=(x-x_0)^4$ $$\frac{(2h)^5}{5}=h^4A_1+(2h)^4A_2+R(x-x_0)^4\implies R(x-x_0)^4=-\frac{4}{15}h^5$$

↳ **NEODSTRANLJIVA NAPAKA**

Integracijsko pravilo $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot f(x_i) + Rf$ ← napaka metode

Recimo, da velja $|f(x_i) - \hat{f}(x_i)| \leq \varepsilon$. Ocena za neodstranljivo napako:

$$D_n = \left| \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) - \sum_{i=0}^{n} A_i \hat{f}(x_i) \right| = \left| \sum_{i=0}^{n} A_i \left(f(x_i) - \hat{f}(x_i)\right) \right| \leq \sum_{i=0}^{n} |A_i|\,|f(x_i) - \hat{f}(x_i)| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n} |A_i|$$

Ker morajo biti vsa pravila točna za konstante, velja: $\int_a^b 1\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot 1 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{n} A_i = b-a$

Če so uteži pozitivne, potem je $\boxed{D_n \leq \varepsilon (b-a)}$, torej ni težav

Žal se tako pri zaprtih N-C pravilih za $n \geq 8$ in odprtih za $n \geq 4$ pojavijo negativne uteži in $\sum_{i=0}^{n} |A_i|$ je lahko zelo veliko

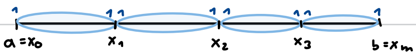
SESTAVLJENA INTEGRACIJSKA PRAVILA

↳ Računamo $\int_a^b f(x)\,dx$

↳ IDEJA: Interval $[a,b]$ razdelimo na m podintervalov in na vsakem uporabimo osnovno integracijsko pravilo, ki zahteva delitev na n podintervalov.

Torej je $h = \frac{b-a}{m \cdot n}$, $x_i = a + i h$ $\quad i = 0, 1, \dots, mn$

↳ **SESTAVLJENO TRAPEZNO PRAVILO**



m izberemo, $n = 1$, $h = \frac{b-a}{m}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dy = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) \right) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m) \right) + Rf$$

za integral uporabimo osnovno trapezno pravilo

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) \qquad \text{za } \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

za $f \in \mathcal{C}^2([x_i, x_{i+1}])$

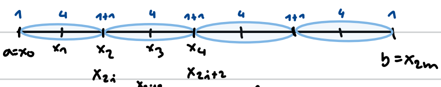
$$Rf = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{m-1} f''(\xi_i)$$

Naj bo $f \in C^2([a,b])$. $\min_{x \in [a,b]} f''(x) \leq \sum_{i=0}^{m-1} f''(\xi_i) \leq m \cdot \max_{x \in [a,b]} f''(x) \Longrightarrow \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f''(\xi_i) = f''(\eta)$ za $\eta \in [a,b]$

Sledi $\boxed{Rf = -\frac{h^3}{12}\, m \cdot f''(\eta) = -\frac{h^2}{12}(b-a) f''(\eta)}$

$m = \frac{b-a}{h}$

↳ **SESTAVLJENO SIMPSONOVO PRAVILO**



$h = \frac{b-a}{2m}$ $\quad x_i = a + ih$

za $f \in C^4([a,b])$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{h}{3}\left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i) \right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m}) \right) + Rf$$

$$Rf = \sum_{i=0}^{m-1} \left(-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i) \right) = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=0}^{m-1} f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{h^5}{90}\, m \cdot f^{4}(\eta) = -\frac{h^4}{180}(b-a) f^{4}(\eta)$$

$m = \frac{b-a}{2h}$

$m \cdot \min_{x \in [a,b]} f^{(4)}(x) \leq \sum_{i=0}^{m-1} f^{(4)}(\xi_i) \leq m \cdot \max_{x \in [a,b]} f^{(4)}(x)$, ker je $f^{(4)}$ zvezen, je $\sum_{i=0}^{m-1} f^{(4)}(\xi_i) = m \cdot f^{(4)}(\eta)$

OCENA NAPAKE IN RICHARDSONOVA EKSTRAPOLACIJA

↳ Recimo, da računamo numerični približek za integral podane funkcije f z izbranim N-C integracijskim pravilom s korakom h.
Zanima nas kako izbrati korak h in kako oceniti napako pravila

↳ Naj bo F_h približek za integral I, ki ga dobimo, če računamo s korakom h. Predpostavimo, da velja

$$I = F_h + \underbrace{c_0}_{\text{konsta neodvisna od } h} h^r + \underbrace{\mathcal{O}(h^{r+1})}_{\text{členi višjega reda za napako}}$$

Razpolovimo korak $h \to \frac{h}{2}$

$$I = F_{\frac{h}{2}} + \underbrace{c_0 \left(\tfrac{h}{2}\right)^r}_{*} + \mathcal{O}(h^{r+1}) \quad / \cdot 2^r$$

$$2^r I = 2^r F_{\frac{h}{2}} + c_0 h^r + \mathcal{O}(h^{r+1})$$

odštejemo

Po odštevanju dobimo: $(2^r-1)I = 2^r F_{\frac{h}{2}} - F_h + \mathcal{O}(h^{r+1})$

$$I = \boxed{\frac{2^r F_{\frac{h}{2}} - F_h}{2^r - 1}} + \mathcal{O}(h^{r+1})$$

nov približek za integral
= EKSTRAPOLIRAN PRIBLIŽEK

Ta postopek imenujemo Richardsonova ekstrapolacija

$$\begin{aligned}
↳ I &= F_{\frac{h}{2}} + \frac{2^r F_{\frac{h}{2}} - F_h}{2^r-1} - F_{\frac{h}{2}} + \mathcal{O}(h^{r+1}) \\
&= F_{\frac{h}{2}} + \frac{2^r F_{\frac{h}{2}} - F_h - 2^r F_{\frac{h}{2}} + F_{\frac{h}{2}}}{2^r-1} + \mathcal{O}(h^{r+1}) \\
&= F_{\frac{h}{2}} + \boxed{\frac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{2^r-1}}^{*} + \mathcal{O}(h^{r+1})
\end{aligned}$$

= ocena za vodilni člen napake integracijskega pravila ko računamo s korakom $\frac{h}{2}$

- Podobno: $I = F_h + \boxed{2^r \dfrac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{2^r-1}} + \mathcal{O}(h^{r+1})$

ocena za vodilni člen napake za korak h

↳ Sestavljeno trapezno pravilo : $Rf = -\frac{h^2}{12}(b-a) f''(\xi)$ $\quad r=2$

Sestavljeno Simpsonovo pravilo : $Rf = -\frac{h^4}{180}(b-a) f^{(4)}(\xi)$ $\quad r=4$

- Sestavljeno trapezno pravilo
  - → za $F_h, F_{\frac{h}{2}}$ ekstrapoliran približek : $\dfrac{4F_{\frac{h}{2}} - F_h}{3}$
  - → ocena za napako približka $F_{\frac{h}{2}}$ je $\dfrac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{3}$
  - → ocena za napako približka F_h je $\dfrac{4 \cdot F_{\frac{h}{2}} - F_h}{3}$

- Sestavljeno Simpsonovo pravilo :
  - → ekstrapoliran približek : $\dfrac{16 F_{\frac{h}{2}} - F_h}{15}$
  - → Ocena za napako približka $F_{\frac{h}{2}}$ je $\dfrac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{15}$
  - → Ocena za napako približka F_h je $16 \cdot \dfrac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{15}$

GAUSSOVA PRAVILA

↳ IDEJA ZA IZPELJAVO: Vozle in uteži v pravilu določimo tako, da bo red pravila čim višji, to je, da bo pravilo točno za polinome čim višjih stopenj

↳ $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + Rf}$ neznanke so → vozli: $x_0, x_1, \dots, x_n$

Imamo $2(n+1) = 2n+2$ neznak → uteži: $A_0, A_1, \dots, A_n$

↳ Izberemo $f(x) = x^k$ za $k = 0, 1, 2, \dots, 2n+1$

$$\boxed{\int_a^b x^k\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^k \qquad k = 0, 1, 2, \dots, 2n+1}$$

OP: Nočemo napake, zato tu ni zapisana

Tu imamo $2n+2$ enačb za $2n+2$ neznak → NELINEAREN SISTEM

↳ Poskusimo ločiti enačbe za neznane vozle od enačb za neznane uteži

Vemo: $f(x) = \underbrace{p(x)}_{\text{interpolacijski polinom za } f \text{ na točkah } x_0, x_1, \dots, x_n} + \omega(x)\,[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f$

red pravila $\geq n$

Izberimo $f(x) = x^{n+r}$, $r = 1, 2, \dots$

$$\underbrace{f(x)}_{\text{polinom stopnje } n+r} = \underbrace{p(x)}_{\text{stopnje } n} + \underbrace{\omega(x)}_{\text{stopnja } n+1}\underbrace{[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f}_{\text{polinom stopnje } r-1}$$

$$Rf = \int_a^b \omega(x)\,\underbrace{[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f}_{\text{polinom stopnje } r-1}\,dx$$

Definirajmo skalarni produkt $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$

Če izberemo $\omega \perp \mathbb{P}_{r-1}$, potem je zgornja napaka $Rf = 0$ in pravilo je reda vsaj $n+r$

<u>Koliko je lahko r največ?</u>

ODGOVOR: r je lahko največ $n+1$ stopnje, ker je tedaj $\omega \perp \mathbb{P}_n$

in tedaj je pravilo reda $n+r = n+n+1 = 2n+1$

↳ POVZETEK: Če vozle izberemo/izračunamo tako, da je $\omega \perp \mathbb{P}_n$, potem dobimo pravilo reda $2n+1$. Velja pa tudi obrat te trditve (brez dokaza). Taka pravila imenujemo GAUSSOVA PRAVILA

$\omega \perp \mathbb{P}_n \Longrightarrow \omega \perp 1, \omega \perp x, \dots, \omega \perp x^n \iff$

$$\left.\begin{aligned} \langle \omega, 1 \rangle &= \int_a^b 1 \cdot \omega(x)\,dx = 0, \\ \langle \omega, x \rangle &= \int_a^b x \cdot \omega(x)\,dx = 0, \\ &\vdots \\ \langle \omega, x^n \rangle &= \int_a^b x^n\,\omega(x)\,dx = 0 \end{aligned}\right] \ n+1 \text{ nelinearnih enačb za neznane vozle } x_0, x_1, \dots, x_n$$

<u>OP</u>: Še hitrejši način za izračun vozlov glede na izbran skalarni produkt izračunamo zaporedje ortonormiranih polinomov $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1}$. Velja, da je $Q_{n+1} \perp \mathbb{P}_n$. Za določitev vozlov moramo torej izračunati ničle tega polinoma Q_{n+1}. Teorija zagotavlja, da ima Q_{n+1} $n+1$ paroma različnih ničel na (a,b)

↳ PRIMER: Določite vozla x_0 in x_1, ter uteži A_0 in A_1 Gaussovega pravila.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + Rf$$

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \quad ,$$

$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)$

Enačbe za x_0 in x_1: $\omega \perp 1$, $\omega \perp x$

lihi členi padejo stran

$$\to 0 = \langle \omega, 1\rangle = \int_{-1}^{1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx = \int_{-1}^{1}(x^2 - x(x_0+x_1) + x_0x_1)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{1}(x^2 + x_0x_1)\,dx = 2\left(\tfrac{1}{3} + x_0x_1\right)$$

$$\to 0 = \langle \omega, x\rangle = \int_{-1}^{1}(x-x_0)(x-x_1)x\,dx = \int_{-1}^{1}(x^3 - x^2(x_0+x_1) + x\,x_0x_1)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{1} -x^2(x_0+x_1)\,dx = -\tfrac{2}{3}(x_0+x_1)$$

lihi stran

$\Longrightarrow x_0 = -x_1$, $\frac{1}{3} - x_0^2 = 0 \longrightarrow x_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Longrightarrow x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ [ker jih uredimo po vrstnem redu]

· Izračunajmo še uteži

$$A_0 = \int_{-1}^{1}\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-2\frac{\sqrt{3}}{3}}\,dx = \ldots = 1$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1}\frac{(x-x_0)}{x_1-x_0}\,dx = \ldots = 1$$

· Torej smo izpeljali pravilo: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + Rf$

Red pravila: $2n+2 = 2\cdot 1 + 2 = 3$

· $f(x) = x^4$

Nastavek nam pove: $Rf = C\cdot f^{(4)}(\xi)$

$$\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 + C\cdot 4!$$

$\Longrightarrow C = \frac{1}{135}$

$Rf = \frac{1}{135} f^{(4)}(\xi)$

↳ IZREK: Naj bo $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + Rf$ Gaussovo integracijsko pravilo reda $2n+1$. Potem velja, da so vse uteži A_i pozitivne.
Napaka je enaka $Rf = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega^2(x)\,dx$. To velja za dovolj gladke funkcije, predpostavka je $f \in C^{2n+2}([a,b])$.

DOKAZ 14.4

① Želimo $A_i > 0$ za $i = 0,1,\ldots,n$

red pravila $= 2n+1$, $\forall p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ velja $\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\,p(x_i)$

Če izberemo $p(x) = \ell_{j,n}^2(x)$ je $p \in \mathbb{P}_{2n}$ in $\int_a^b \ell_{j,n}^2(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\,\ell_{j,n}^2(x_i) = A_j$ ✓

② $Rf = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega^2(x)\,dx$

Naj bo g interpolacijski polinom za funkcijo f na točkah $x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n$ (g se z f ujema v vrednostih in prvih odvodih v točkah $x_0,\ldots,x_n$) $g \in \mathbb{P}_{2n+1}$. Sledi $\int_a^b g(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i \underbrace{g(x_i)}_{f(x_i)} + 0$

Velja tudi $f(x) = g(x) + \omega^2(x)\,[x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, x]f$ (za $f \in C^{2n+2}([a,b])$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{= \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = Ff} + \underbrace{\int_a^b \omega^2(x)[x_0, x_0, \ldots, x_n, x_n, x]f\,dx}_{= Rf}$$

$$Rf = [x_0, x_0, \ldots, x_n, x_n, \xi]f\int_a^b \omega^2(x)\,dx = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega^2(x)\,dx$$

$\omega^2(x)$ ne spremeni predznaka na $[a,b]$ ■

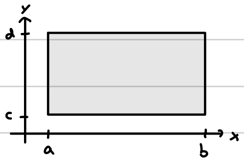
VEČDIMENZIONALNI INTEGRALI

DVOJNI INTEGRAL

Naj bo $\Omega = [a,b] \times [c,d]$, $f \in C(\Omega)$.

Integralsko pravilo: $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \sum_{i,j} A_{ij} f(x_i, y_j) + Rf$ za izbrane točke $(x_i, y_j) \in \Omega$

TENZORSKA PRAVILA



Razdelimo interval $[a,b]$ na n delov: $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0,1,\dots,n$

in interval $[c,d]$ na m delov: $k = \frac{d-c}{m}$, $y_j = c + jk$ za $j = 0,1,\dots,m$

Uporabimo Fubinijev izrek: $I = \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{g(x)}$

Poglejmo si uporabo sestavljenega trapeznega pravila: $I = \frac{h}{2}\left(g(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) + g(x_n)\right) - \frac{h^2}{12}(b-a)\,g''(\xi) = \dots$

$$g(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\,dy = \frac{k}{2}\left(f(x_i, y_0) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_i, y_j) + f(x_i, y_m)\right) - \frac{k^2}{12}(d-c)\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_i, y)$$

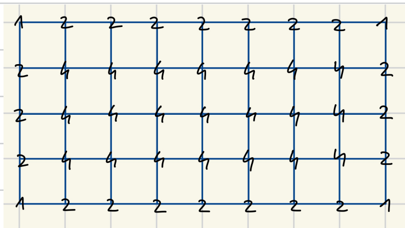
Sledi: $\boxed{\iint_\Omega f(x,y)\, f(x,y)\,dxdy = \frac{h \cdot k}{4} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} A_{ij} f(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^2 + k^2)}$

$A_{ij} = \alpha_i \beta_j$

$\alpha = (1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n-1}, 1)$

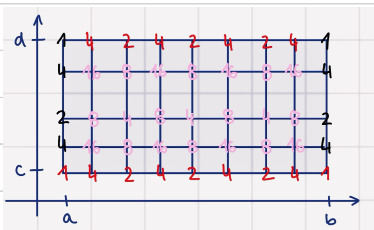
$\beta = (1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m-1}, 1)$

matrika uteži: $\boxed{A = \frac{h \cdot k}{4} \beta^T \alpha}$



SESTAVLJENO SIMPSONOVO TRAPEZNO PRAVILO

$$\boxed{\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} A_{ij} f(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^4 + k^4)}$$



NAPAKA

- $\Omega = [0,1]^d$
- Recimo, da v vsaki smeri/koordinati uporabimo n točk. Vseh izračunov vrednosti funkcije f je potem $N = n^d$ $(n = N^{\frac{1}{d}})$.
  Naj bo napaka pravila $\mathcal{O}(h^r)$ za nek r. $h \approx \frac{1}{n}$.
- Napaka je $\mathcal{O}((\frac{1}{n})^r) = \mathcal{O}(N^{-\frac{r}{d}})$
- Sestavljeno trapezno (tenzorsko) pravilo: $r = 2$, napaka $= \mathcal{O}(N^{-\frac{2}{d}})$
- Sestavljeno Simpsonovo pravilo: $r = 4$, napaka $= \mathcal{O}(N^{-\frac{4}{d}})$

METODA MONTE-CARLO

↳ Verjetnostna metoda za izračun približka za integral

↳ IDEJA: Naj bo X enakomerno porazdeljena slučajna spremenljivka na $[a,b]$

$$E(x) = \int_a^b \rho(t)\, t\, dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b t\, dt$$

$$E(f(x)) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, dt$$

↳ Naj bodo $x_1, x_2, \ldots$ neodvisne enakomerno porazdeljene slučajne spremenljivke

$E(x) \approx \frac{x_1 + \ldots + x_n}{N}$ [krepki zakon velikih števil]

$E(f(x)) \approx \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{N}$

↳ Sledi: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \boxed{\frac{(b-a)}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)}$ kjer so x_i naključne vrednosti na $[a,b]$. Velja (brez izpeljave) $\boxed{\text{napaka} = |I - I_n| = \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})}$

$= I_n$

↳ Za integral na $\Omega = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_d,b_d]$ velja $\int_\Omega f(\underline{x})\, d\underline{x} \approx \frac{\prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\underline{x}_i)$

Za napako še vedno velja, da je $\mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$

4 NUMERIČNO REŠEVANJE NAVADNIH DIFERENCIALNIH ENAČB

- DE je funkcijska enačba, v kateri poleg neznane funkcije nastopajo tudi njeni odvodi
- Red DE je red najvišjega odvoda, ki nastopa v enačbi.
- Rešitev DE reda p je p-parametrična družina funkcij. Če hočemo točno določeno rešitev, moramo podati p-pogojev. Ločimo med ZAČETNIMI problemi DE in ROBNIMI PROBLEMI DE

- Začetni problem 1. reda:

  $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $y' = f(x,y)$

  $y(a) = y_a \longrightarrow$ podana konstanta

- Začetni problem reda p:

  $y^{(p)} = f(x, y', y'', \dots, y^{(p-1)})$

  $y(a) = y_{a,0}$

  $y'(a) = y_{a,1}$ podane konstante

  $\vdots$

  $y^{(p-1)}(a) = y_{a,p-1}$

- Robni problem

  primer: $y^{(4)} + xy = 0$

  $y(a) = y_{a,0} \qquad y(b) = y_{b,0}$

  $y'(a) = y_{a,1} \qquad y'(b) = y_{b,1}$

- OPOMBA: Pri numeričnem reševanju in analizi rešitev se bomo omejili na probleme DE, pri katerih so izpeljani pogoji EKSISTENČNEGA IZREKA

- Numerične metode za reševanje začetnih problemov DE razdelimo na dva razreda

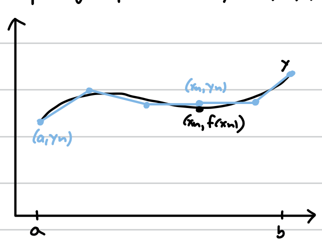
① DIFERENČNA METODA

Približek za rešitev (iskano funkcijo y odx) iščemo DISKRETNO. Numerična rešitev je sestavljena iz zaporedja točk $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

in zaporedja približkov $y_0, y_1, \dots, y_m$, kjer je $y_n \approx y(x_n)$

numerični približek

točna rešitev pri $x = x_n$



② PRIBLIŽEK ZA REŠITEV IŠČEMO KOT FUNKCIJO V NEKEM IZBRANEM PODPROSTORU

↳ METODE RAZDELIMO NA:

1. Enočlenske metode: za izračun približka y_{n+1} uporabimo y_n
   Veččlenske (k-členske) metode: za izračun y_{n+1} uporabimo $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k+1}$

2. Eksplicitne metode: imamo direktno formulo za izraču y_{n+1}
   Implicitne metode: y_{n+1} izračunamo kot rešitev neke (nelinearne) enačbe

↳ Poglejmo si izpeljavo ene od najpreprostejših metod za reševanje problema:
$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

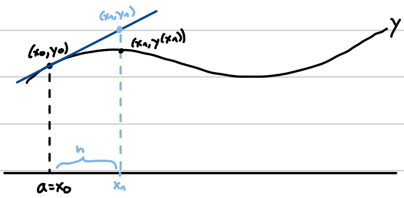
Na vsakem koraku moramo iz (x_n, y_n) izračunati (x_{n+1}, y_{n+1}).

Začetno točko poznamo: $(x_0, y_0) = (0, y_a)$

Za "premik" v x smeri uporabimo konstanten korak h: $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ...

$y_0 = y(x_0)$

Kako določiti $y_1 \approx y(x_1)$?



Iz DE poznamo tudi vrednost odvoda $y'(a) = f(a, y(a)) = f(x_0, y_0)$ → tangenta

Torej poznamo tangentno premico: $p(x) = y(a) + y'(a)(x-a) = y_0 + f(x_0,y_0)\cdot(x_1 - x_0) = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0)$

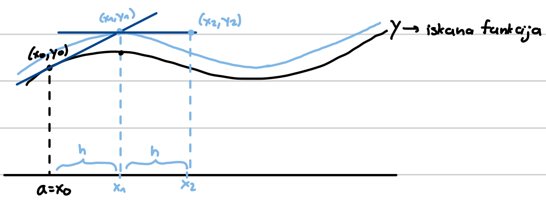
$p(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)\cdot h$

$\Rightarrow y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0)$

Od tod dobimo metodo - EULERJEVA METODA (EKSPLICITNA): $\boxed{y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

$y_n \approx y(x_{n+1})$

kako nadaljujemo postopek geometrijsko:



↳ Drugi način izpeljave:

$y' = f(x,y)$

Spomnimo se: $y'(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \frac{h}{2} y''(\xi)$ [ENOSTAVNA DIFERENCA]

$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$

Če enačbe združimo dobimo: $\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \underbrace{- \frac{h}{2} y''(\xi)} = f(x_n, y(x_n))$

Sedaj napako "odrežemo" in točne vrednosti $y(x_n)$ in $y(x_{n+1})$ nadomestimo s približki y_n in y_{n+1}, da ohranimo enačaj

$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$

$\boxed{y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)}$ ⟶ Spet dobimo Eulerjevo formulo

IMPLICITNA EULERJEVA METODA

Če uporabimo formulo $y'(x_{n+1}) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} + \frac{h}{2} y''(\xi)$ dobimo

$$y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} + \frac{h}{2} y''(\xi) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1})}$$

OPOMBA: Da numerično izračunamo y_{n+1} uporabimo NAVADNO ITERACIJO

$y_{n+1} = g(y_{n+1})$ $\quad (g(y_{n+1}) = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}))$

$y_{n+1}^{(0)} = y_n$

Ponavljaj $y_{n+1}^{(k+1)} = g(y_{n+1}^{(k)})$ dokler $|y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}^{(k)}| > \text{toleranca} \cdot |y_{n+1}^{(k)}|$

PRIMER

Rešujemo $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ z Eulerjevo metodo s korakom $h = \frac{1}{10}$. Določi $y_1 \approx y(\frac{1}{10})$ in $y_2 \approx y(\frac{2}{10})$

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = \frac{1}{10}$

$x_1 = 0 + \frac{1}{10}$, $x_2 = \frac{2}{10}$

- eksplicitna eulerjeva: $y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + \frac{1}{10}(0^2 + 1^2) = 1{,}1$

  $y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = 1{,}1 + \frac{1}{10}(0{,}1^2 + 1{,}1^2) = 1{,}222$

- implicitna eulerjeva: $y_1 = y_0 + h f(x_1, y_1) = 1 + \frac{1}{10}((\frac{1}{10})^2 + y_1^2) = g(y_1)$ $\cdots$ $y_1 = 1.128307863$

  $y_2 = y_1 + h f(x_2, y_2) = \ldots 1.301767805$

Kako v splošnem do predpisa, ki določa približek y_{n+1} iz že izračunanih y_i, $i \leq n$?

Omenimo 2 načina:

1) Odvode v DE $y' = f(x,y)$ nadomestimo s približki izraženimi z vrednostmi funkcije y v izbranih točkah.

2) DE $y' = f(x,y)$ integriramo

PRIMER

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\,dx$$

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \frac{h}{2}\left(f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))\right) - \underbrace{\frac{h^3}{12} f''(\xi, y(\xi))}$$

uporabimo trapezno pravilo

napako odrežemo in točne vrednosti nadomestimo s približki, da ohranimo enačaj

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)} \quad ; n = 0, 1, 2, \ldots$$

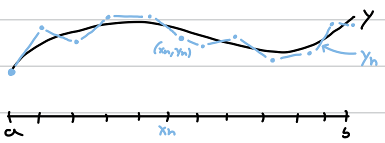
TRAPEZNA METODA
(implicitna metoda)

GLOBALNA IN LOKALNA NAPAKA

- Rešujemo DE $y' = f(x,y)$, $y(a) = y_a$. Rešitev iščemo na intervalu $[a,b]$. Predpostavimo, da DE na tem intervalu zadošča pogojem eksistenčnega izreka.

  Interval $[a,b]$ razdelimo na m delov s točkami $x_n = a + n \cdot h$, $h = \frac{b-a}{n}$

  Numerične približke $(y_n)_{n=0}^{m}$, $y_n \approx y(x_n)$, povežemo z odsekoma linearno funkcijo, ki jo označimo y_h



- **DEFINICIJA**

  Metoda je KONVERGENTNA, če za vse DE, ki zadoščajo pogojem E.I. (eksistenčni izrek), velja $\|y - y_h\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow{h \to 0} 0$

  oziroma $\max\limits_{0 \le n \le m} |y(x_n) - y_n| \xrightarrow{h \to 0} 0$

- **GLOBALNA NAPAKA** (na celem intervalu): $\max\limits_{0 \le n \le m} |y(x_n) - y_n|$
- **GLOBALNA NAPAKA v točki x_n**: $|y(x_n) - y_n|$

- **DEFINICIJA**

  Metoda je reda r, če velja: $\max\limits_{0 \le n \le m} |y(x_n) - y_n| = C h^r + \mathcal{O}(h^{r+1})$ za vse DE, ki zadoščajo pogojem E.I.

  konstanta neodvisno od h

- Pri določanju reda metode oziroma globalne napake, si pomagamo z LOKALNO NAPAKO

  DEFINICIJA: Lokalna napaka v točki $x_n = y(x_n) - y_n$ je razlika med točno rešitvijo in numeričnim približkom ob predpostavki, da se ti dve rešitvi ujemata na prejšnjih korakih

  $\boxed{\text{lokalna napaka} = y(x_n) - y_n}$ ob predpostavki $y(x_i) = y_i$ za $i < n$

- Velja (brez dokaza)

  Če je lokalna napaka reda $r+1$, potem je metoda reda r. močna trditev z zelo zakompliciranim dokazom

  5.5

- Pri določanju reda lokalne napake si pomagamo z razvojem točne in razvojem numerične rešitve v Taylorjevo ursto

  $$y(x_n + h) = y(x_n) + y'(x_n)h + \tfrac{1}{2}y''(x_n)h^2 + \dots$$
  $$\quad\ \ \, \| $$
  $$y(x_{n+1})$$

  $$y'(x) = f(x, y(x))$$

  $$y' = f \longleftarrow \text{pišimo krajše}$$
  $$y'' = f_x + f_y \cdot y' = f_x + f_y f$$
  $$y''' = f_{xx} + f_{xy} y' + (f_{yx} + f_{yy} y') f + f_y (f_x + f_y f) = f_{xx} + 2 f_{xy} f + f_{yy} \cdot f^2 + f_y (f_x + f_y f)$$

Pri razcepu numerične rešitve uporabljamo:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + f_x(x,y)\cdot\Delta x + f_y(x,y)\,\Delta y + \frac{1}{2} f_{xx}(x,y)\,\Delta x^2 + f_{x,y}(x,y)\,\Delta x\,\Delta y + \frac{1}{2} f_{yy}(x,y)\,\Delta y^2 + \dots$$

↳ Določimo red lokalne napake Eulerjeve metode [eksplicitna]

- eulerjeva metoda: $y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$
- $\underbrace{\text{lokalna napaka v } x_{n+1}}_{\tau_{n+1}(h)} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ ob predpostavki, da je $y(x_n) = y_n$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + h f(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f)(x_n, y(x_n)) + \mathcal{O}(h^3)$$ ← točna rešitev

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$ ← numerična rešitev

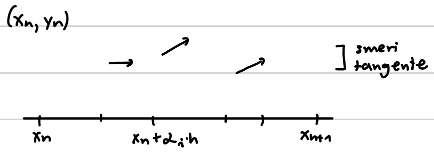
red lokalne napake

lokalna napaka: $\tau_{n+1}(h) = y(x_{n+1}) - y_{n+1} \underset{y(x_n) = y_n}{=} \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f)(x_n, y_n) + \mathcal{O}(h^3)$

red lokalne napake je 2; eulerjeva metoda je reda 1

RUNGE-KUTTA METODE

- So enočlenske metode višjih redov
- IDEJA



- s stopenjska R-K metoda:

  Izračunamo s koeficientov

$$\boxed{\begin{aligned} k_i &= h f\Big(x_n + \alpha_i \cdot h,\; y_n + \sum_{j=1}^{s} \beta_{ij} k_j\Big) \\ y_{n+1} &= y_n + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i k_i \end{aligned}} \qquad i = 1, 2, \dots, s$$

Pri tem so $\alpha_i, \beta_{ij}, \gamma_i$ koeficienti, ki jih določimo tako, da bo red metode čim višji. Izkaže se, da mora veljati

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{s} \beta_{ij} \qquad \alpha_i \in [0,1]$$

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_i = 1$$

- koeficiente R-K metode lahko predstavimo v t.i. BUTCHERJEVI SHEMI

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha_1 & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1s} \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_s & \beta_{s1} & \beta_{s2} & \dots & \beta_{ss} \\ \hline & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_s \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} k_1 &= h f(x_n + \alpha_1 h,\; y_n + \beta_{11} k_1 + \beta_{12} k_2 + \dots + \beta_{1s} k_s) \\ k_2 &= h f(x_n + \alpha_2 h,\; y_n + \beta_{21} k_1 + \beta_{22} k_2 + \dots + \beta_{2s} k_s) \\ &\vdots \\ k_s &= h f(x_n + \alpha_s h,\; y_n + \beta_{s1} k_1 + \beta_{s2} k_2 + \dots + \beta_{ss} k_s) \\ y_{n+1} &= y_n + \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2 + \dots + \gamma_s k_s \end{aligned}$$

R-K metoda je EKSPLICITNA če bodo $\beta_{ij} = 0$ za vse $j \geq i$, DIAGONALNO IMPLICITNA, če so $\beta_{ij} = 0$ za vse $j > i$ in je vsaj en $\beta_{ii} \neq 0$, sicer je IMPLICITNA

PRIMERI R-K METOD

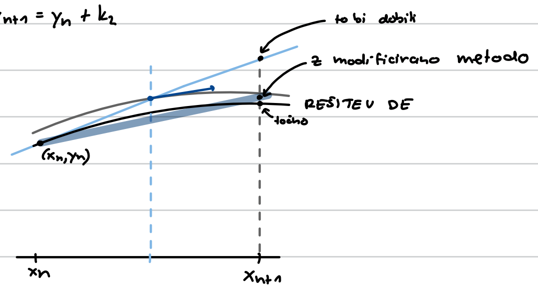
① MODIFICIRANA EULERJEVA METODA (2-stopenjski R-K)

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

$k_1 = h f(x_n, y_n)$

$k_2 = h f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2} k_1)$

$y_{n+1} = y_n + k_2$



MOJA RAZLAGA

- v smeri → se premaknemo iz začetnega približka

→ pa je tangenta na ⌒ v točki

② HEUNOVA METODA

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

Red lokalne napake je $\mathcal{O}(h^3)$, metoda je reda 2

③

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

Red lokalne napake je $\mathcal{O}(h^3)$, metoda je reda 2

④ 4-stopenjska R-K

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

$k_1 = hf(x_n, y_n)$

$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$

$k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2)$

$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Red lokalne napake je $\mathcal{O}(h^5)$, metoda je reda 4.

↳ PRIMER

$y' = x^2 + y^2$

$y(0) = 1$

$h = 0.1$

Z modificirano Eulerjevo metodo določi približek $y_1 = y(x_1)$, $x_1 = 0 + h = 0,1$

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$

$y_1 = ?$

$k_1 = h f(x_0, y_0) = 0,1 \cdot (0^2 + 1^2) = 0,1$

$k_2 = h f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0,1 \cdot f(\frac{1}{20}, 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}) = 0,1 \cdot \left((\frac{1}{20})^2 + (\frac{21}{20})^2\right) = 0,1105$

$y_1 = y_0 + k_2 = 1,1105$

SISTEMI DE 1.REDA

↳ Začetni problem: $y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_d)$, začetni pogoji: $y_1(a) = y_{1,a}$

$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_d)$ $\quad y_2(a) = y_{2,a}$

$\vdots \quad\quad \vdots$

$y_d' = f_d(x, y_1, y_2, \dots, y_d)$ $\quad y_d(a) = y_{d,a}$

↳ kompakten zapis

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix}, \quad F(x,Y) = \begin{bmatrix} f_1(x,Y) \\ f_2(x,Y) \\ \vdots \\ f_d(x,Y) \end{bmatrix}, \quad F: [a,b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad Y' = F(x,Y), \quad Y(a) = \begin{bmatrix} y_{1,a} \\ y_{2,a} \\ \\ \underset{\uparrow \text{mali } y}{y_{d,a}} \end{bmatrix} = Y_a \qquad Y_0 \to Y_1 \to Y_2 \to \dots$$

↳ Vse metode, ki smo jih spoznali, lahko direktno uporabimo za reševanje sistemov DE 1.reda.

↳ MATLAB (zapis za eulerjevo metodo)

```
function [x,y] = Euler(f,a,b,y0,h)
% ...
x=a:h:b;
y = zeros(length(y0), length(x));
y(:,1) = y0;
for n= 2:length(x)
    y(:,n) = y(:,n-1) + h*f(x(n-1), y(:,n-1)); (*)
end
```

↳ PRIMER

$y_1' = x^2 + y_1^2 - y_2^2 \qquad y_1(0) = 1$

$y_2' = x y_1 y_2 \qquad y_2(0) = 2$

→ MATLAB:

```
a=0
b=1
h = ...
f = @(x,y) ([x^2+y(1)^2-y(2)^2 ; x*y(1)*y(2)])
y0 = [1;2]
```

(*)

```
k1=h*f(x(n-1), y(:,n-1)),
k2=h*f(x(n-1)+1/2*h , y(:,n-1) + 1/2*k1);
y(:,n)=y(:,n-1) + k2
```

REŠEVANJE DE VIŠJIH REDOV

↳ Začetni problem DE reda p: $y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)})$, $y(a) = y_{a,0}$, $y'(a) = y_{a,1}$, $\vdots$, $y^{(p-1)}(a) = y_{a,p-1}$

↳ Problem rešujemo tako, da ga prevedemo na reševanje sistema DE 1. reda:

- $z_1 = y'$

  $z_2 = z_1' = y''$

  $z_3 = z_2' = y'''$

  $\vdots$

  $z_{p-1} = z_{p-2}' = y^{(p-1)}$

  $f(x, y, z_1, \dots, z_{p-1}) = z_{p-1}' = y^{(p)}$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{p-1} \\ z_p \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \\ \\ z_{p-2} \\ f(x, y, z_1, \dots, z_{p-1}) \end{bmatrix}$$

- $Y = \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{p-2} \\ z_{p-1} \end{bmatrix}$ $\quad Y(a) = \begin{bmatrix} y_{a,0} \\ y_{a,1} \\ \vdots \\ y_{a,p-1} \\ y_{a,p} \end{bmatrix}$ $\quad F(x, y) = \begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \\ \\ y(p) \\ f(x, y(1), \dots, y(p)) \end{bmatrix}$

↳ PRIMER

$y'' = xy' + y^2$, $z = y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $z' = y'' = xz + y^2$

sistem DE 1. reda: $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ xz + y^2 \end{bmatrix} = F(x, Y)$ $\quad Y = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$

z R-K metodo
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$
s korakom $h = 1/10$ določi numerični približek $Y_1 \approx y(1/10)$ in približek za $y'(1/10)$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = hF(x_0, Y_0) = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} z_0 \\ x_0 z_0 + y_0^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 \\ 1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/10 \\ 1/10 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = hF(x_0 + \tfrac{1}{2}h, Y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = \frac{1}{10} F\left(0 + \frac{1}{20}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2/10 \\ 1/10 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{10} F\left(\frac{1}{20}, \begin{bmatrix} 11/10 \\ 41/20 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 41/20 \\ 1/20 \cdot 41/20 + (11/10)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}205 \\ 0{,}13125 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = Y_0 + k_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}205 \\ 0{,}13125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}205 \\ 2{,}13125 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow y(1/10) \approx 1{,}205$$
$$y'(1/10) \approx 2{,}13125$$

VEČČLENSKE METODE

↳ $y' = f(x,y)$, $y(a) = y_a$

↳ **K-ČLENSKA METODA**: Pri izračunu približka $y_n \approx y(x_n)$ uporabimo k že izračunanih vrednosti $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-k}$.

$f_i := f(x_i, y_i)$

- SPLOŠNA (LINEARNA) k členska metoda je oblike $\boxed{y_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_{n-i} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n-i}, y_{n-i})}$ pri čemer so $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ in $\beta_0, \dots, \beta_k$ koeficienti, ki dolocajo metodo – določimo/izberemo jih tako da bo red metode čim višji.

  Če je $B_0 = 0$ je metoda EKSPLICITNA, sicer je IMPLICITNA

- Veččlenske metode so bistveno hitrejše od enočlenskih metod (potrebujemo manj izračunov vrednosti funkcije f) → Težje je spreminjati korak h.
- Prvih k vrednosti $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ izračunamo s kakšno od enočlenskih metod. Pri tem mora biti red izbrane metode enak ali večji od reda veččlenske metode.

↳ **NAJBOLJ ZNANE DRUŽINE K-ČLENSKIH METOD**

- Adamsove metode
- Milneove metode
- BDF metode

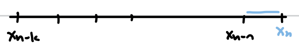
① ADAMSOVE METODE

- IDEJA: $y' = f(x,y)$, $y(a) = y_a$

  DE integriramo na $(x_{n-1}, x_n]$, funkcijo $f(x,y)$ pa nadomestimo z interpolacijskim polinomom na točkah

  a) $x_{n-k}, \dots, x_{n-1}$ ⟹ EKSPLICITNA METODA

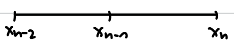
  b) $x_{n-k}, \dots, x_{n-1}, x_n$ ⟹ IMPLICITNA METODA



$$\boxed{\int_{x_{n-1}}^{x_n} y'(x)\,dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, y(x))\,dx = y(x_n) - y(x_{n-1})}$$

- PRIMER: k = 2, eksplicitna metoda

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} y'(x)\,dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, y(x))\,dx = y(x_n) - y(x_{n-1})$$



$$y(x_n) - y(x_{n-1}) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \Big(f(x_{n-2}, y(x_{n-2})) \frac{x - x_{n-1}}{\underbrace{x_{n-2} - x_{n-1}}_{= -h}} + f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) \frac{x - x_{n-2}}{\underbrace{x_{n-1} - x_{n-2}}_{= h}} \Big)\,dx + \underbrace{\text{napaka}}_{\text{odrežemo}} =$$

$$= f(x_{n-2}, y(x_{n-2})) \underbrace{\frac{-1}{h} \cdot \frac{h^2}{2}}_{= -\frac{h^2}{2}} + f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) \underbrace{\frac{1}{h} \cdot \frac{(2h)^2 - h^2}{2}}_{= \frac{3h}{2}} + \text{napaka}$$

$$\Rightarrow y(x_n) = y(x_{n-1}) + h\Big(-\tfrac{1}{2} \underbrace{f(x_{n-2}, y_{n-2})}_{f_{n-2}} + \tfrac{3}{2} \underbrace{f(x_{n-1}, y_{n-1})}_{f_{n-1}}\Big)$$

$$\Rightarrow y_n - y_{n-1} = -\tfrac{h}{2} f_{n-2} + \tfrac{3}{2} h f_{n-1}$$

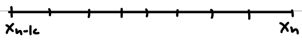
$$\Rightarrow y_n = y_{n+1} + h\left(\tfrac{3}{2} f_{n-1} - \tfrac{1}{2} f_{n-2}\right)$$

- Na podoben način dobimo EKSPLICITNE ADAMSOVE METODE
  - → $k=2$: $y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{3}{2} f_{n-1} - \frac{1}{2} f_{n-2}\right)$ red $=2$
  - → $k=3$: $y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{23}{12} f_{n-1} - \frac{4}{3} f_{n-2} + \frac{5}{12} f_{n-3}\right)$ red $=3$

- IMPLICITNE:
  - → $k=2$: $y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{5}{12} f_n + \frac{8}{12} f_{n-1} - \frac{1}{12} f_{n-2}\right)$ red $=3$
  - → $k=3$: $y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{9}{24} f_n + \frac{19}{24} f_{n-1} - \frac{5}{24} f_{n-2} + \frac{1}{24} f_{n-3}\right)$ red $=4$

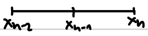
② MILNEOVE METODE

- IDEJA: DE integriramo na $[x_{n-k}, x_n]$ integral funkcije f pa nadomestimo z izbranim N-C integralskim pravilom
  - → odprta pravila ⟹ EKSPLICITNE METODE
  - → zaprta pravila ⟹ IMPLICITNE METODE



$$\boxed{\int_{x_{n-k}}^{x_n} y'(x)\,dx = \int_{x_{n-k}}^{x_n} f(x, y(x))\,dx}$$

- PRIMER - s simpsonovim pravilom



$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} y'(x)\,dx = \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x, y(x))\,dx$$

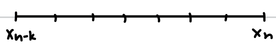
$$y(x_n) - y(x_{n-2}) = \frac{h}{3}\, f(x_{n-2}, y(x_{n-2})) + 4 f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) + f(x_n, y(x_n)) + \underbrace{\text{napaka}}_{\text{odrežemo}}$$

$$y_n = y_{n-2} + \frac{h}{3}\left(f_{n-2} + 4 f_{n-1} + f_n\right)$$

red $=4$

③ BDF METODE

- Implicitne metode: Odvod v DE $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ nadomestimo s približki, ki so izraženi z vrednostmi funkcije y v točkah $x_{n-k}, \dots, x_n$ [$y'(x_n)$ aproksimiramo z diferencami]



primer

$y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$

Z 2-člensko eksplicitno A.m. določi približek za $y(0{,}2)$. Uporabi korak $h = \frac{1}{10}$. Približek za $y(0{,}1)$ določi z modificirano Eulerjevo metodo.

$f(x,y) = x^2 + y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $f_0 = 1$

$h = \frac{1}{10}$; $x_1 = \frac{1}{10}$ $y_1 = 1{,}1105$, $f_1 = x_1^2 + y_1^2 = 1{,}24321025$

$x_2 = \frac{2}{10}$ $y_2 = y_1 + h\left(-\frac{1}{2} f_0 + \frac{3}{2} f_1\right) = 1{,}246981538$

PRIMER IZ PREJŠNJIH LET, [dodala sama]

5 NUMERIČNO RAČUNANJE LASTNIH VREDNOSTI

↳ KRATKA PONOVITEV

· DEF: Naj bo A $n\times n$ matrika (z realnimi ali kompleksnimi koef.). Če neničelni vektor $x \in \mathbb{C}^n$ in skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ zadoščata enačbi $Ax = \lambda x$

$\Rightarrow$ λ je lastna vrednost, x pa pripadajoči (desni) lastni vektor

· Neničelni vektor $y \in \mathbb{C}^n$, za katerega velja $y^H A = \lambda y^H$, se imenuje levi lastni vektor matrike A

· OPOMBA: Če imamo algoritem za računanje desnih lastnih vektorjev, lahko s tem algoritmom izračunamo tudi leve:

$y^H A = \lambda y^H$, $A^H y = \bar{\lambda} y$

19.5

↳ $Ax = \lambda x$

$Ax - \lambda x = 0$

$(A - \lambda I)x = 0$ → matrika mora biti singularna

$\Longrightarrow p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ .. KARAKTERISTIČNI POLINOM

↳ Za $n\times n$ matriko A imamo natanko n lastnih vrednosti. Če je λ enostavna ničla karakterističnega polinoma, je enostavna lastna vrednost.

Za večkratne ničle pa ločimo med algebraično vrednostjo lastne vr. in geometrijsko večkratnostjo. Alge

· Algebraična večkratnost lastne vr. je večkratnost ničle v karakterističnem polinomu.

· Geometrijska večkratnost je $\dim \ker(A - \lambda I)$

Matriko A lahko diagonaliziramo, če $\exists$ nesingularna matrika $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ in diagonalna matrika $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$,

da velja $A = X \Lambda X^{-1}$.

$$\Downarrow$$

$$AX = X\Lambda$$

$$\Downarrow$$

$$Ax_i = X \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_i x_i$$

← i-to mesto

[Diagonalizirati se da, ko sta za $\forall$ lastno vr. algebraična in geometrijska večkratnost enaki] moja OPOMBA

↳ Vsi algoritmi za računanje lastnih vrednosti in vektorjev so ITERATIVNI.

↳ Lastnih vrednosti numerično NE RAČUNAMO preko ničel karakterističnega polinoma. Razlogi:

· algoritmi za računanje koeficientov karakterističnega polinoma niso enostavni niti numerično stabilni

· Ničle polinoma so lahko zelo občutljive na motnje koeficientov (zgled: Wilkinsonov primer)

SCHUROVA FORMA

↳ **PONOVITEV**

$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je unitarna, če velja $U^H U = UU^H = I$, $(U^H = U^{-1})$

$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonalna , če velja $Q^T Q = QQ^T = I$

↳ **IZREK**

Za vsako matriko A (z realnimi ali kompleksnimi koeficienti) obstajata unitarna matrika U in zgornje trikotna matrika T, da velja $\boxed{A = UTU^H}$ SCHUROV RAZCEP

$\underbrace{T}_{\text{SCHUROVA FORMA}}$

↳ **OPOMBA**: Ker sta A in T (unitarno) podobni imata enake lastne vrednosti. Torej so diagonalni elementi matrike T lastne vrednosti.

↳ **DOKAZ IZREKA**

Z indukcijo na dimenzijo matrik

- Naj bo A 1×1 : $[a_{11}] = [1][a_{11}][1]^H$ ✓
- Predpostavimo, da velja za vse $(n-1)\times(n-1)$ matrike in naj bo A $n\times n$ matrika.

Dalje, naj bo λ lastna vrednost in x lastni vektor matrike A.

Naj bo U_1 taka unitarna matrika, da je $U_1 x = e_1$ [kompleksna različica Householderjevih zrcaljenj]

Naj bo $B = U_1 A U_1^H$

$$Be_1 = \underbrace{U_1 A \underbrace{U_1^H e_1}_{x}}_{\lambda x} = \lambda U_1 x = \lambda e_1$$

$$\Longrightarrow B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & d^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & d^T \\ \hline & U_2 \tilde{T} U_2^H \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array}\right]}_{\substack{\parallel \\ V,\ \text{je unitarna}}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \lambda & d^T U_2 \\ \hline 0 & \tilde{T} \end{array}\right]}_{\substack{\parallel \\ T \\ \text{je zgornje } \triangledown}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2^H \end{array}\right]}_{\substack{\parallel \\ V^H}}$$

IP: $C = U_2 \tilde{T} U_2^H$ Schurov razcep

Sledi $A = U_1^H B U_1 = \underbrace{U_1^H V}_{U} T \underbrace{V^H U_1}_{U^H}$ ■

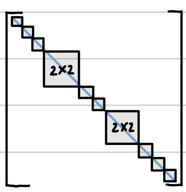
$B = VTV^H$

↳ **IZREK**

Za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obstajata ortogonalna matrika Q in KVAZI-ZGORNJE TRIKOTNA MATRIKA R, da velja $\boxed{A = QRQ^T}$

$\underbrace{R}_{\text{realna Schurova forma}}$

Kvazi-zgornje trikotna matrika R: bločno zgornje trikotna matrika, kjer po diagonali dopuščamo 2×2 bloke, ki ustrezajo kompleksno konjugiranemu paru lastnih vrednosti



POTENČNA METODA

↳ Naj bodo lastne vrednosti indeksirane tako, da velja
$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0$

λ_1 je DOMINANTNA LASTNA VR., če velja $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0$. Pripadajoč lastni vektor imenujemo DOMINANTNI LASTNI VEKTOR. Dominantno lastno vrednost lahko izračunamo s POTENČNO METODO.

↳ **ALGORITEM: POTENČNA METODA (OSNOVNA RAZLIČICA)**

- vhodni podatek: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Izberi začetni normiran vektor $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|z_0\| = 1$ $\quad (\|\cdot\| = \|\cdot\|_2)$
- ponavljaj za $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\left.\begin{aligned} y_{k+1} &= A z_k \\ z_{k+1} &= \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|} \end{aligned}\right] \quad z_{k+1} = \frac{A z_k}{\|A z_k\|}$$

povečaj k za 1

- Potenčna metoda nam da zaporedje normiranih vektorjev $z_0, z_1, z_2, \ldots$

↳ **IZREK**

Naj bo λ_1 dominantna lastna vrednost matrike A, torej $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0$. Potem za poljuben začetni vektor z_0, $\|z_0\| = 1$, zaporedje $(z_k)_k$, ki ga tvori potenčna metoda numerično konvergira proti dominantnemu lastnemu vektorju.

DOKAZ

Dokažimo izrek za matrike, ki se jih da diagonalizirat [sicer pa velja v splošnem]

Naj bo $A = X \Lambda X^{-1}$, $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

Lastni vektorji $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tvorijo bazo $\mathbb{R}^n$. Zato lahko $z_0 \in \mathbb{R}^n$ zapišemo kot $z_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, za neke $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

$$z_k = \frac{A z_{k-1}}{\|A z_{k-1}\|} = \frac{A \frac{A z_{k-2}}{\|A z_{k-2}\|}}{\left\|A \frac{A z_{k-2}}{\|A z_{k-2}\|}\right\|} = \frac{A^2 z_{k-2}}{\|A^2 z_{k-2}\|} = \ldots = \frac{A^k z_0}{\|A^k z_0\|}$$

$$A^k z_0 = A^k \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{A^k x_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k x_i$$

$$A^k x_i = A^{k-1} \underbrace{A x_i}_{\lambda_i x_i} = \lambda_i A^{k-1} x_i = \ldots = \lambda_i^k x_i$$

$$\Longrightarrow z_k = \frac{A^k z_0}{\|A^k z_0\|} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k x_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \lambda_i^k x_i}{\left\|\alpha_1 \lambda_1^k x_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \lambda_i^k x_i\right\|} \begin{matrix} /:\lambda_1^k \\ /:\lambda_1^k \end{matrix} = \frac{\alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overbrace{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k}^{k\to\infty \to 0} x_i}{\left\|\alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \underbrace{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k}_{k\to\infty \to 0} x_i\right\|} \cdot \operatorname{sign}(\lambda_1^k) \xrightarrow{k \to \infty} \pm \frac{\alpha_1 x_1}{\|\alpha_1 x_1\|} = \pm \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

$\alpha_1 \neq 0$

dominanten lastni vektor

KOMENTAR: V izrek ne damo predpostavke, da je $\alpha_1 \neq 0$, ker je ta pri numeričnem računanju vedno izpoljen, zaradi zaokrožitvenih napak aritmetike

↳ Sedaj smo izpeljali iskani lastni vektor iz tega pa moramo dobiti še pripadajočo lastno vrednost

↳ Recimo, da je x približek za lastni vektor matrike A. kako do "najboljšega" približka za lastno vrednost

$Ax = \lambda x$ ← izbran približek

$x\lambda = Ax$

$[x]\lambda = [Ax]$ To je predoločen sistem, iščemo λ

Za dan vektor x je najboljši približek za lastno vrednost dobljen z rešitvijo minimizacijskega problema

$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|Ax-\lambda x\|_2 = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|x\cdot\lambda - Ax\|_2$$

Rešitev predoločenega sistema $x\lambda = Ax$ po MNK je rešitev normalnega sistema $x^Tx\lambda = x^TAx$:

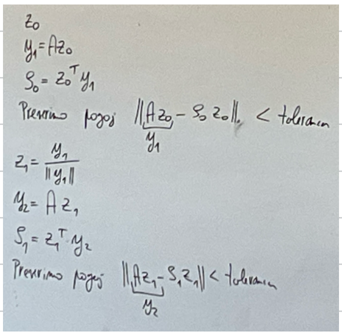
$$\boxed{\lambda = \frac{x^TAx}{\|x\|^2} = \rho(x,A)}$$

→ Rayleighov kvocient

Pri potenčni metodi za vsak izračunan približek z_k izračunano še približek za lastno vrednost $\boxed{\rho_k = z_k^T A z_k}$

Zaustavitveni kriterij: $\|Az_k - \rho_k z_k\| < \text{toleranca}$

↳ Nek njen random postopek



z_0

$y_1 = Az_0$

$\rho_0 = z_0^T y_1$

Preverimo pogoj $\|\underbrace{Az_0}_{y_1} - \rho_0 z_0\| < \text{toleranca}$

$z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$

$y_2 = Az_1$

$\rho_1 = z_1^T y_2$

Preverimo pogoj $\|\underbrace{Az_1}_{y_2} - \rho_1 z_1\| < \text{toleranca}$

↳ ALGORITEM: POTENČNA METODA

- vhodni podatek: A
- algoritem:
  - → izberi z_0
  - → $y_1 = Az_0$
  - → $\rho_0 = z_0^T y_1$
  - → $k = 0$
  - → while ($\|y_{k+1} - \rho_k z_k\| \geq \text{toleranca}$) && ($k \leq \text{max koraki}$) ← da nebomo delali v neskončnost, v primeru da metoda div.

    $k = k+1$

    $z_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$

    $y_{k+1} = Az_k$

    $\rho_k = z_k^T y_{k+1}$

  end

↳ Konvergenca potenčne metode je LINEARNA in je odvisna od razmerja $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$

NOVO 26.5

INVERZNA ITERACIJA

↳ Za dan približek $\sigma \in \mathbb{R}$ bi radi izračunali lastno vrednost, ki je najbližje temu približku, in pripadajoč lastni vektor.

↳ IZPELJAVA

Naj velja $|\lambda_i - \sigma| < |\lambda_j - \sigma|$ za $\forall j \neq i$

Poglejmo si matriko $(A - \sigma I)^{-1}$.

Recimo, da velja $A = X \Lambda X^{-1}$ [torej da A lahko diagonaliziramo], kjer je $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$(A-\sigma I)^{-1} = (X\Lambda X^{-1} - \sigma X X^{-1})^{-1} = (X(\Lambda - \sigma I)X^{-1})^{-1} = (X^{-1})^{-1}(\Lambda - \sigma I)^{-1} X^{-1} =$$

$$= X \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \sigma} & & & & \\ & \frac{1}{\lambda_2-\sigma} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{\lambda_i - \sigma} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{\lambda_n - \sigma} \end{bmatrix} X^{-1}$$

← dominantna L.VR.

Vidimo, da ima $(A - \sigma I)^{-1}$ enake lastne vektorje kot A

Ker velja $\frac{1}{|\lambda_i - \sigma|} > \frac{1}{|\lambda_j - \sigma|}$ za $\forall j \neq i$, je $\frac{1}{\lambda_i - \sigma}$ dominantna lastna vrednost matrike $(A - \sigma I)^{-1}$; pripadajoč lastni vektor je x_i

↳ ALGORITEM - INVERZNA ITERACIJA / INVERZNA POTENČNA METODA

- Vhodni podatki: matrika A, približek σ
- Izberi začetni normiran vektor z_0

ponavljaj za $k = 0, 1, 2, \dots$

$(y_{k+1} = (A - \sigma I)^{-1} z_k)$ ← namesto da računamo inverz raje rešimo naslednji sistem

reši sistem $(A - \sigma I) y_{k+1} = z_k$

$z_k = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}$

QR ITERACIJA

↳ metoda za izračun vseh lastnih vrednosti

↳ METODA (OSNOVNA RAZLIČICA) QR METODA

- vhodni podatki: matrika A
- $A_0 = A$

  ponavljaj $k = 0, 1, 2, \dots$

  → izračunaj QR razcep matrike A_k $\left(A_k = \underset{\text{ortogonalna}}{Q_k}\,\underset{\text{zgornjetrikotna}}{R_k}\right)$ $\qquad O(n^3)$

  → $A_{k+1} = R_k Q_k$

- dobimo zaporedje matrik $A_0, A_1, A_2, \dots$

↳ Matriki A_k in A_{k+1} sta ORTOGONALNO PODOBNI [op: iste lastne vr.]

- $A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k$

  $Q_k^T A_k = \underbrace{Q_k^T Q_k}_{I} R_k$

- $A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k = Q_k^T Q_{k-1}^T A_{k-1} Q_{k-1} Q_k = \underbrace{Q_k^T Q_{k-1}^T \dots Q_0^T}_{Q^T} \underbrace{A_0}_{A} \underbrace{Q_0 Q_1 \dots Q_k}_{Q}$

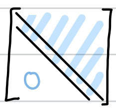
↳ IZREK ← pogosto vprasa na ustnem

Naj za lastne vrednosti velja $\overbrace{|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|}^{(*)}$. Potem zaporedje matrik, ki ga tvori QR iteracija, konvergira proti zgornje trikotni matriki iz Schurovega razcepa

↳ IZBOLJŠAVE ALGORITMA

- Redukcija na ZGORNJE HESSENBERGOVO MATRIKO

  [zmanjšamo časovno zahtevnost vsakega koraka iz $O(n^3)$ na $O(n^2)$]



- uvedba premikov

  [pospešimo konvergenco in se izognemo pogoju (*)]

↳ PRETVORBA MATRIKE A NA ZGORNJO HESSENBERGOVO OBLIKO:

- DEF: Matrika H je zgornje Hessenbergova, če velja $h_{ij} = 0$ za $i \geq j+2$
- Velja: za vsako matriko A lahko izračunamo/najdemo (z direktnim algoritmom) ortogonalno podobno zgornjo Hessenbergovo matriko H. Torej izračunamo razcep $A = QHQ^T$

Ideja algoritma (uporabimo nekej podobnega Householderjevim zrcaljenjem)

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{P_1 \cdot A} \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{pri tem mn.} \\ \text{se 1. stolpec} \\ \text{NE SPREMENI}}]{(P_1 \cdot A) \cdot P_1^T} \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{bmatrix} = A^{(1)} \xrightarrow{P_2 \cdot A^{(1)}}$$

na podlagi tega vektorja določimo Householderjevo zrcaljenje $\hat{P}_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, da je

$$\hat{P}_1 \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P_1 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \hat{P}_1 \end{array}\right]$$

$P_1^T = P$

določimo $\hat{P}_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tako da..

$$P_2 = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & 1 & \\ \hline & & \hat{P}_2 \end{array}\right]$$

$$P_2 A^{(1)} \longrightarrow \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{(P_2 A^{(1)}) P_2^T} \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} & * & * \end{bmatrix} = A^{(2)} \xrightarrow{P_3 A^{(2)}}$$

1. in 2. stolpec se ne spremenita

določimo $\hat{P}_3 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $P_3 = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & 1 & \\ \hline & & \hat{P}_3 \end{array}\right]$

$$P_3 A^{(2)} \longrightarrow \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{(P_3 A^{(2)}) P_3^T} \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} = H$$

Dobili smo Hessenbergovo matriko H in velja $\underbrace{(P_3 P_2 P_1)}_{Q^T} A (P_1^T P_2^T P_3^T) = H$

· OPOMBA

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right]$$

V tem primeru problem razpade

↳ OPOMBA: Zgornje Hessengergova oblika se v zaporedju matrik $(A_k)_k$ ohranja

↳ ALGORITEM - QR ITERACIJA S PREMIKI

· Vhodni podatki: H.. zgornje Hessenbergova matrika

· Algoritem:

$A_0 = H$

ponavljaj $k = 0, 1, 2, \dots$

→ izberi premik σ_k ★

→ Izračunaj QR razcep matrike $A_k - \sigma_k I$ $(A_k - \sigma_k I = Q_k R_k)$

→ $A_{k+1} = R_k Q_k + \sigma_k I$

· A_k in A_{k+1} sta ortogonalno podobni

dokaz: $A_{k+1} = Q_k^T (A_k - \sigma_k I) Q_k - \sigma_k I = Q_k^T A_k Q_k$

· Možnosti izbire premikov ★

→ enojni premik $\sigma_k = A_k(n,n)$

→ dvojni premik [Izračunamo lastni vrednosti 2x2 matrik $A_k(n-1:n, n-1:n)$; označimo ju z $\sigma_k^{(1)}$ in $\sigma_k^{(2)}$ in naredimo oba koraka iteracije]

ZA USTNO: · v spletni učilnici so objavljena "vprašanja/teme" za ustno

· v bližnji prihodnosti bo v spletni učilnici razpisala datume za ustno, izbereš katerega ti ustreza

· na ustno greš ko opraviš pisni izpit

· od 16.–20. ustnih ne bo ustnih, ker nje ni