80154 - אלגברה ליניארית 2 להנדסה ומדעים תשפ"ד 2023-2024 תרגול 9

הטלות ושיקופים

הגדרה: בהינתן V מרחב אוקלידי ו-U תת-מרחב של V , **המשלים הניצב של** U מוגדר ע"י $U^{\perp} = \{\vec{w} \in V \mid \forall \vec{u} \in U \ \vec{w} \perp \vec{u}\}$. **הגדרה:** בהינתן תת-מרחב U של מרחב אוקלידי V ו- $\vec{v} \in V$, **ההיטל של** $\vec{v}$ **על** U הוא וקטור $\vec{u} \in U$ אשר מקיים $\vec{v} - \vec{u} \in U^{\perp}$. נסמן את ההיטל ע"י Pr_U^v

טענה (מההרצאה): הינתן תת-מרחב סוף-מימדי U של מרחב אוקלידי V ו- $\vec{v} \in V$, היטל של $\vec{v}$ על U קיים ויחיד ונתון ע"י הנוסחה

$$Pr_U^v = \left\langle \vec{v}, \vec{b}_1 \right\rangle \vec{b}_1 + \ldots + \left\langle \vec{v}, \vec{b}_n \right\rangle \vec{b}_n$$

כאשר $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ הוא בסיס אורתונורמלי כלשהו של U.

טענה: יהי U תמ"ו ממימד סופי של מרחב אוקלידי V. אז לכל $\vec{v} \in U^{\perp}$ ו-$\vec{u} \in U$ מתקיים:

$$Pr_U^{u+v} = \vec{u}$$

הוכחה: יהי $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ בסיס אותונורמלי של U. נשתמש בנוסחה ונקבל:

$$Pr_U^{u+v} = \left\langle \vec{v} + \vec{u}, \vec{b}_1 \right\rangle \vec{b}_1 + \ldots + \left\langle \vec{v} + \vec{u}, \vec{b}_n \right\rangle \vec{b}_n =$$

$$\left\langle \vec{v}, \vec{b}_1 \right\rangle \vec{b}_1 + \ldots + \left\langle \vec{v}, \vec{b}_n \right\rangle \vec{b}_n + \left\langle \vec{u}, \vec{b}_1 \right\rangle \vec{b}_1 + \ldots + \left\langle \vec{u}, \vec{b}_n \right\rangle \vec{b}_n =$$

$$\left\langle \vec{u}, \vec{b}_1 \right\rangle \vec{b}_1 + \ldots + \left\langle \vec{u}, \vec{b}_n \right\rangle \vec{b}_n = \vec{u}$$

כשהשוויון האחרון נובע ממשפט בכיתה (פירוק של וקטור לפי בסיס אותונורמלי).

הגדרה: בהינתן תת-מרחב סוף-מימדי U של מרחב אוקלידי V ו- $\vec{v} \in V$, המרחק מ- $\vec{v}$ ל- U מוגדר ע"י $\|\vec{v} - Pr_U^v\|$.

הגדרה: בהינתן תת-מרחב סוף-מימדי U של מרחב אוקלידי V ו- $\vec{v} \in V$, השיקוף של $\vec{v}$ ביחס ל- U מוגדר ע"י $2Pr_U^v - \vec{v} = Pr_U^v + (Pr_U^v - \vec{v})$.

הערה: כדי להבין את המוטיבציה להגדרה הזו, נזכור כי $\vec{v} = (\vec{v} - Pr_U^v) + Pr_U^v$, וששני המחוברים מאונכים זה לזה.

השיקוף ישאיר את ההיטל האורתוגונלי Pr_U^v במקום, אבל ישלח את הרכיב המאונך לו ל-$-(\vec{v} - Pr_U^v)$. למשל, אם נסתכל ב- $V = \mathbb{R}^2$ עם המכפלה הסקלרית, וב-$U = span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$.

הטלה של $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ על U היא $\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}$, והרכיב המאונך הוא $\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}$. לכן השיקוף יקיים ש:

$$S_U\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}$$

וזהו פשוט השיקוף ביחס לציר ה-x.

שאלה 1:

- מצאו בסיס אורתונורמלי לת"מ $V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$ של $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסקלרית.

פתרון: נתחיל מהוקטור $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$. זהו וקטור ב-$V$. נחפש את תת המרחב של הניצב ל$\vec{b}_1$, כלומר את:

$$U = \left\{\vec{v} \in V \mid (\vec{v}, \vec{b}_1) = 0\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 = x_3\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_2 = -2x_1,\ x_1 = x_3\right\} = span\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

נשאר לנרמל את הוקטורים, ונקבל בסיס $B = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$.

- מצאו את ההיטל של $\vec{v} = \begin{bmatrix}5\\6\\1\end{bmatrix}$ על V.

פתרון: נעבוד לפי הנוסחה ונקבל:

$$Pr_V^v = \left(\begin{bmatrix}5\\6\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix}5\\6\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}(5-1)\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{6}(5-12+1)\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$$

- מצאו את המרחק מ- $\begin{bmatrix}5\\6\\1\end{bmatrix}$ ל- V.

פתרון: נציב בהגדרה ונקבל:

$$\left\|\begin{bmatrix}5\\6\\1\end{bmatrix} - Pr_V^v\right\| = \sqrt{\left(\begin{bmatrix}5\\6\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{\left(\begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{3\cdot 16} = 4\sqrt{3}$$

- מצאו את השיקוף של $\begin{bmatrix}5\\6\\1\end{bmatrix}$ ביחס V.

פתרון: לפי ההגדרה מתקיים כי:

$$2Pr_V^v - \begin{bmatrix}5\\6\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\-6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5\\6\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-2\\-7\end{bmatrix}$$

הגדרה: בהינתן תת-מרחב סוף-מימדי U של מרחב אוקלידי V, נגדיר $P_U : V \to V$ ע"י $P_U(\vec{v}) = Pr_U^v$.

טענה: $P_U : V \to V$ הוא אופרטור לינארי.

הוכחה: יהיו $\vec{x}, \vec{y} \in V$ ו-$\lambda \in \mathbb{R}$, ויהיה $B = \left\{\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n\right\}$ בסיס אותונורמלי ל-U. מתקיים כי:

$$P_U(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = \left\langle \vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{b}_1 \right\rangle \vec{b}_1 + \ldots + \left\langle \vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{b}_n \right\rangle \vec{b}_n$$

אבל מלינאריות המכפלה הפנימית נקבל:

$$= \left\langle \vec{x}, \vec{b}_1 \right\rangle \vec{b}_1 + \ldots + \left\langle \vec{x}, \vec{b}_n \right\rangle \vec{b}_n + \lambda \left\langle \vec{y}, \vec{b}_1 \right\rangle \vec{b}_1 + \ldots + \lambda \left\langle \vec{y}, \vec{b}_n \right\rangle \vec{b}_n$$

$$= P_U(\vec{x}) + \lambda P_U(\vec{y})$$

הגדרה: בהינתן תת-מרחב סוף-מימדי U של מרחב אוקלידי V, נגדיר $S_U : V \to V$ ע"י $S_U(\vec{v}) = \vec{w}$ כאשר $\vec{w}$ הוא השיקוף של $\vec{v}$ ביחס ל- U.

טענה: $S_U : V \to V$ הוא אופרטור לינארי.

הוכחה: מהגדרת השיקוף, נקבל כי לכל $\vec{v} \in V$מתקיים:

$$S_U(\vec{v}) = 2Pr_U^v - \vec{v} = 2P_U(\vec{v}) - Id(\vec{v}) = (2P_U - Id)(\vec{v})$$

מהטענה הקודמת P_U לינארית, ולכן S_U לינארית כסכום של העתקות לינאריות.

אופרטור אורתוגונלי

הגדרה: יהי מרחב אוקלידי V. אופרטור לינארי $T: V \to V$ נקרא אורתוגונלי כאשר $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle$ לכל $\vec{v}, \vec{w} \in V$.

דוגמה: נבחר את $V = \mathbb{R}^2$ עם המכפלה הסקלרית ו- $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$. אז לכל $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) = \left(T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)\right)$$

הערה: שימו לב שהאופרטור T הוא למעשה השיקוף ביחס ל- $U = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

טענה: יהי V ממ"פ, ו-U תמ"ו. אז $S_U : V \to V$ הוא אופרטור אורתוגונלי.
הוכחה: יהיו $\vec{v}, \vec{w} \in V$. ממשפט ההיטל האורתוגונלי, נוכל לכתוב את $\vec{v}, \vec{w}$ ע"י:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \;\; \vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

כש-$\vec{v}_1, \vec{w}_1 \in U$ו-$\vec{v}_2, \vec{w}_2 \in U^{\perp}$. נשתמש בטענה מתחילת התרגול ונקבל:

$$S_U(\vec{v}) = 2P_U(\vec{v}) - \vec{v} = 2P_U(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) - \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

אותו תהליך נוכל לעשות עבור $\vec{w}$ ולקבל כי:

$$S_U(\vec{w}) = \vec{w}_1 - \vec{w}_2$$

כעת, נציב במכפלה הפנימית ונקבל:

$$\langle S_U(\vec{v}), S_U(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{w}_1 - \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{w}_1 \rangle - \langle \vec{v}_1, \vec{w}_2 \rangle - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{w}_1 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{w}_2 \rangle$$

מצד שני:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \rangle == \langle \vec{v}_1, \vec{w}_1 \rangle + \langle \vec{v}_1, \vec{w}_2 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{w}_1 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{w}_2 \rangle$$

כנדרש.

טענה: יהי $T : V \longrightarrow V$ אורתוגונלי. אז T חח"ע.
הוכחה: נראה שהגרעין של T טריוויאלי. יהי $\vec{v} \in V$ כך ש: $T(\vec{v}) = 0$. אז מתקיים:

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle T(\vec{v}), T(\vec{v}) \rangle = \left\langle \vec{0}, \vec{0} \right\rangle = 0$$

מתכונות המכפלה הפנימית, נקבל ש- $\vec{v} = 0$.

טענה: יהיו V ממ"פ סוף מימדי ו $T : V \longrightarrow V$ אורתוגונלי. אזי T הפיך וגם T^{-1} אורתוגונלי.

הוכחה: מכך ש Vממימד סופי ו Tחח"ע אזי ממשפט המימדים T על ולכן הפיכה.

עכשיו, עבור v,u $\in V$ מתקיים

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle TT^{-1}(\vec{v}), TT^{-1}(\vec{u}) \rangle = \langle T^{-1}(\vec{v}), T^{-1}(\vec{u}) \rangle$$

כנדרש.