

用蒙特卡洛方法计算累计期权

一、背景知识

1、蒙特卡洛法

蒙特卡洛法为非确定性算法，通过大量随机采样计算得到近似结果。根据中心极限定理，取样本均值作为随机变量的推测值

2、几何布朗模型

在本报告中，采取几何布朗模型来模拟股票的金额。用 $S(t)$ 表示供应物在 t 时间下的金额，则满足 $dS(t)/dS = \alpha dt + \sigma dW(t)$ 。

3、累计认购期权

累积认购期权合约为一系列合成远期合约的结合。投资者将根据合约内容，每天以较进场价低的指定价格买入相关股票，直至定价日或合约触发障碍条款。

二、建模过程及参数选择

1、股票参数

本报告中，采用虚构的 A 股票数据。该股票在中性概率测度下的收益为 7%，波动系数 (volatility) 为 50%。市场的年化利润率为 5%。初始价格为每股 100 元

2、累计期权条款

本报告所研究的累计期权持续时间为六个月，每月有 21 个观察日。在每个观察日，投资者需购买 100 股该股票。但例外的，若在任意观察日：

股票价格小于 90 元：则投资者当日需要购买 200 股；

股票价格高于 105 元，则该交易提前终止，并以该日收盘价格计算全部投资收益。详细内容见附录条款

三、实验结果

通过 30000 次重复实验，并对各次收益取均值，推出

- 1、该期权公平价值为 -10280.53 元；根据中心极限定理，该公平价格的 95% 置信区间下界为 -13143.86 元，上界为 -7417.19 元；
- 2、其中 83.8% 的实验达到障碍条件提前中止，每次平均折扣收益为 76355 元；其他 16.2% 的实验未提前中止，每次平均折扣收益为 -457929 元；
- 3、该实验运行时间为 1.053 秒

四、反思总结

1、本实验构造矩阵时，采取了 `for` 循环，而并非矩阵计算，理由如下：

在布朗运动模型下，股票价格表达式为 $S(t) = S(0) \exp\left(\int_0^t \sigma dW + \int_0^t \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) ds\right)$,

计算时，需要对每个 $t \in \{1, \dots, T\}$ 计算出 $\int_0^t \sigma dW = W_1 + \dots + W_t$ 的结果

为避免出现 $O(n^2)$ 的时间复杂度，可事先储存每次的运算结果以用于下一次，但此法与本项目中使用的 `for` 循环类似，并未显著降低代码复杂性；

代替的，可以构建下三角矩阵 **A**，使用矩阵乘积的方式得出结果，但此法在过大的矩阵下计算耗时过长，故不予采用

附录 A 累计认购期权条款

障碍类型	障碍类型分为两种类型，类型一为暂停型，类型二为敲出型 对于障碍类型为敲出型的交易，本交易在发生障碍事件时提前终止。该交易适用于类型【敲出型】			
标的数量	10000 股			
起始日	期初观察日			
期初观察日	2022 年 1 月 1 日			
到期日	2022 年 7 月 1 日			
期间观察期(i)	i	期间观察起始日(i)	期间观察到期日(i)	
	1	2022 年 1 月 1 日	2022 年 2 月 1 日	
	2	2022 年 2 月 2 日	2022 年 3 月 1 日	
	3	2022 年 3 月 2 日	2022 年 4 月 1 日	
	4	2022 年 4 月 2 日	2022 年 5 月 1 日	
	5	2022 年 5 月 2 日	2022 年 6 月 1 日	
	6	2022 年 6 月 2 日	2022 年 7 月 1 日	
观察日	对于任何一个期间观察期(i)，观察日指从期间观察起始日(i)（含）至期间观察到期日(i)（含）之间的日子			
累计倍数	【2】			
标的数量（单日）	标的数量÷观察日总数			
期初价格（以交易货币计价）				
期末价格(i)（以交易货币计价）	对于任何一个期间观察期(i)，若未发生障碍事件的，标的证券在观察到期日(i)的结算价格。 对于任何一个期间观察期(i)，若发生障碍事件的，标的证券在该障碍观察日的结算价格，该交易在该障碍观察日提前终止。			
收盘价格	标的证券在其所在交易所公布的收盘价			
行权价格	期初价格×90%			
障碍价格	期初价格×105%			

二、交易结算支付金额条款	
障碍事件	在任一障碍观察日，若标的证券收盘价格大于或等于障碍价格，则触发障碍事件。
障碍观察日	从期初观察日（含）至到期日（含）之间所有的日子
障碍事件的结果	对于敲出型交易 ，交易在触发障碍事件当天提前终止，该触发障碍事件的障碍观察日为交易提前终止日
交易结算支付金额 （以结算货币计 价）	<p>对于敲出型交易：</p> <p><u>对于任何一个期间观察期(i)：</u></p> <p>✓ 若发生障碍事件的：</p> <p>（1）M1(i)表示在观察起始日(i)（含）到发生障碍事件的障碍观察日（含）内，标的证券收盘价格小于或等于行权价格的观察日的天数。</p> <p>（2）M2(i)表示在观察起始日(i)（含）到发生障碍事件的障碍观察日（含）内，标的证券收盘价格大于行权价格的观察日的天数。</p> <p>则：</p> <p>交易结算支付金额 = [M1(i) × 累计倍数 + M2(i)] × [期末价格(i) - 行权价格] × 标的数量（单日）。</p> <p>✓ 若未发生障碍事件的：</p> <p>（1）N1(i)表示在观察起始日(i)（含）到期间观察到到期日(i)（含）内，标的证券收盘价格小于或等于行权价格的观察日的天数。</p> <p>（2）N2(i)表示在观察起始日(i)（含）到期间观察到到期日(i)（含）内，标的证券收盘价格大于行权价格的观察日的天数。</p> <p>则：</p> <p>交易结算支付金额 = [N1(i) × 累计倍数 + N2(i)] × [期末价格(i) - 行权价格] × 标的数量（单日）。</p>