多机器人系统与控制

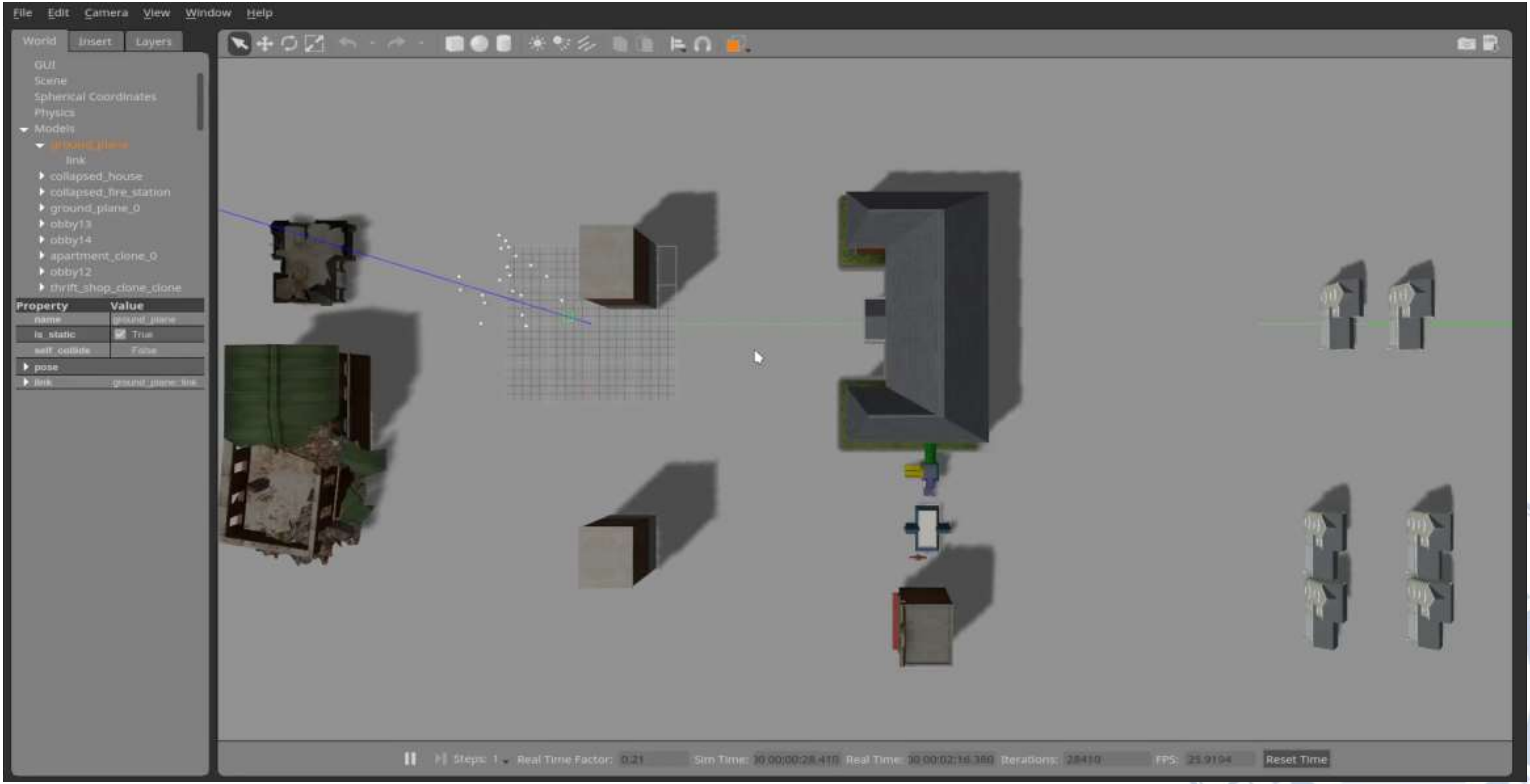
编队控制及其实现

讲 授 人：董　伟　博士、副教授

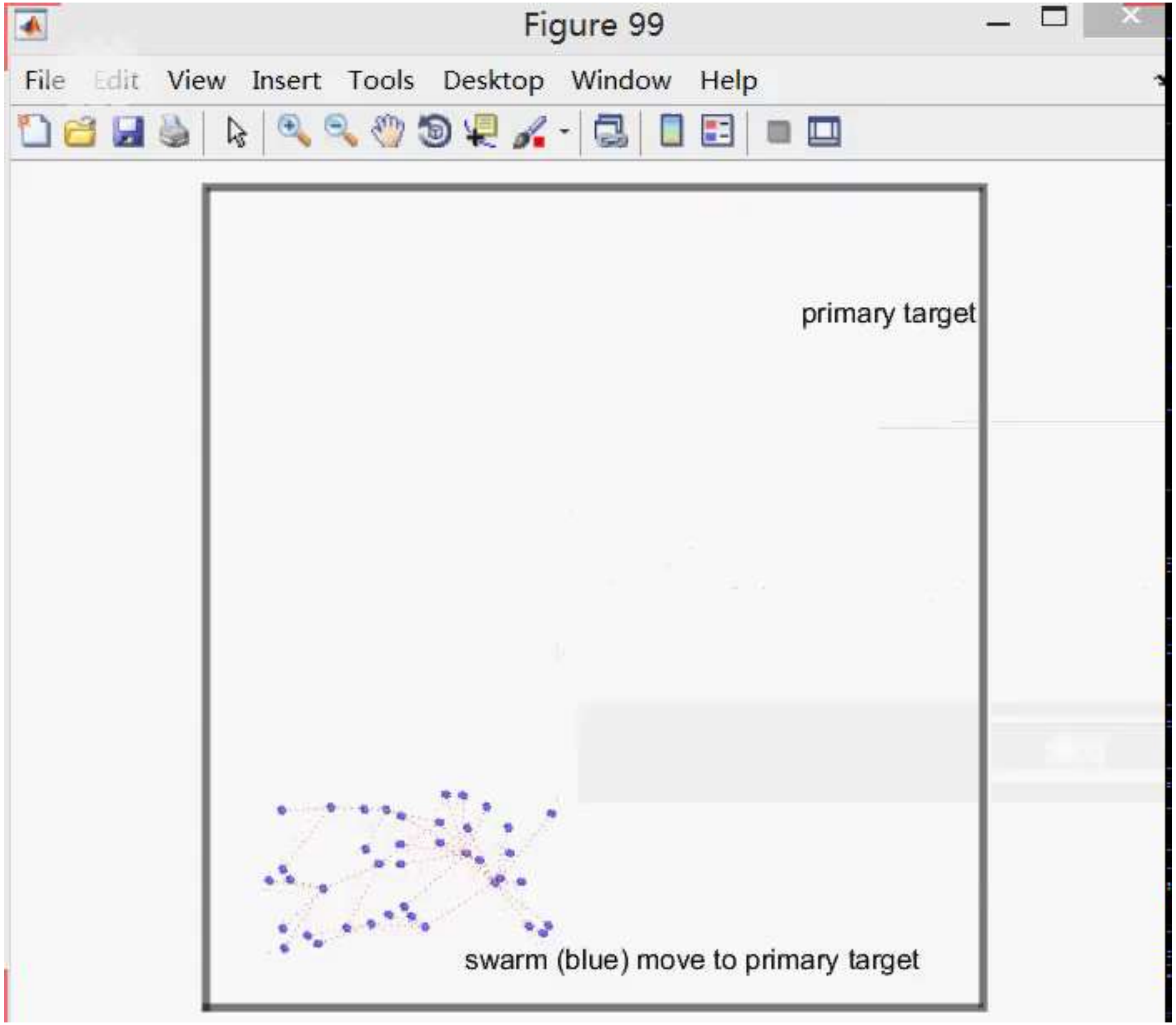
E－mail：dr.dongwei@sjtu.edu.cn

目 录

1.1 多机器人队形描述 - 巡查问题的例子



1.1 多机器人队形描述 - 编队控制中的拓扑结构



1.1 多机器人队形描述

形状描述

- 形状表述方法-赋权图

$$\mathcal{G}_f = (V, E_f, w) \qquad V\text{：顶点，}E_f\text{：边，}w\left(v_i v_j\right) = d_{ij}$$

- 回忆：完全图一任意两节点间均有边相联

- 完全图是否是必要的？

  一通讯限制无法联接过长边；部分边为冗余联接;采用稀疏形式联接边更为恰当

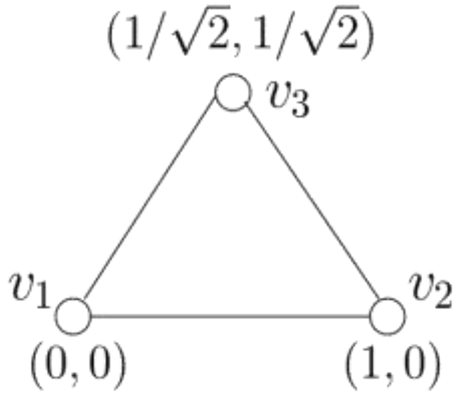
1.1 多机器人队形描述

形状描述

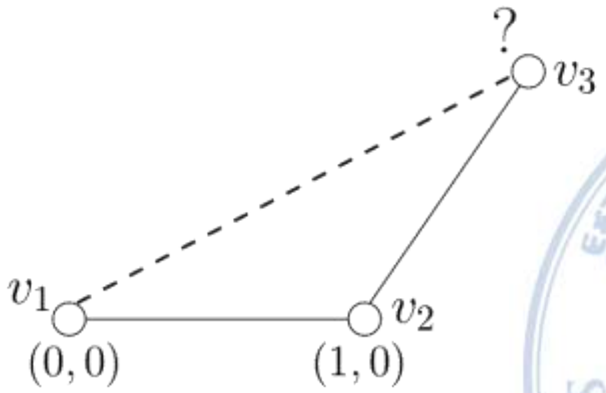
- 形状的定义

$$D=\{d_{ij}\in \mathbf{R}^p | d_{ij}>0, i,j=1,\cdots,n, i\neq j\},\ d_{ij}=\|\mathbf{V}_i-\mathbf{V}_j)\|$$

—形状定义应充分考虑其可行性



$D=\{d_{12}=d_{13}=d_{23}=1\}$



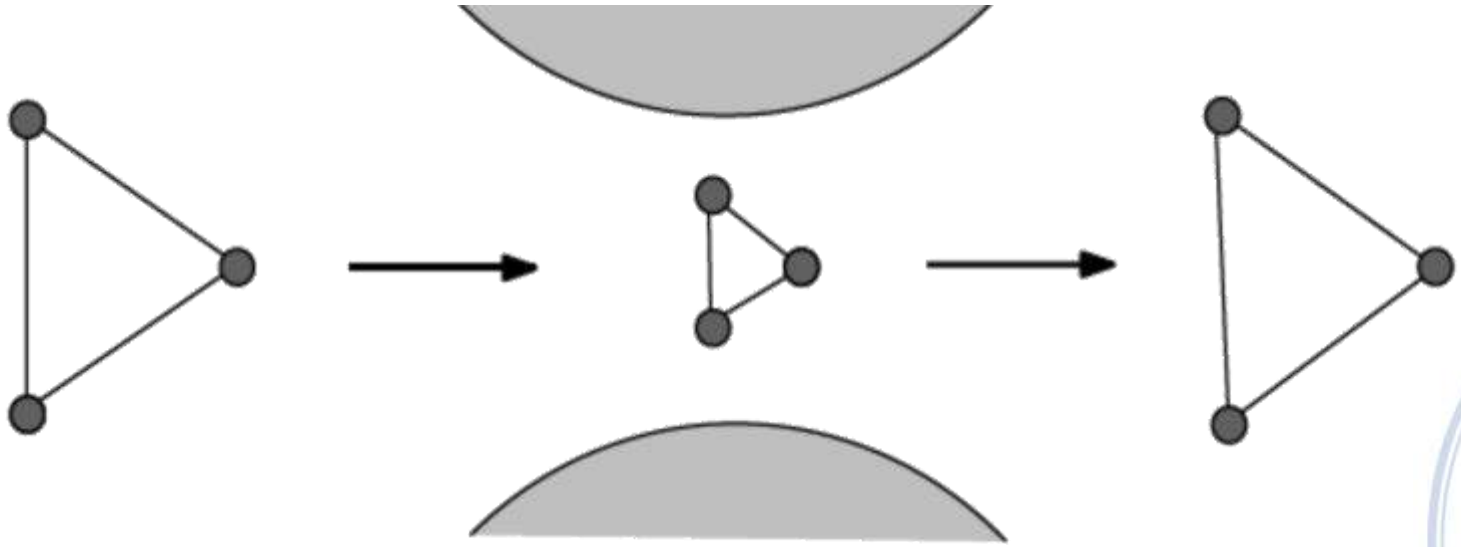
$D=\{d_{12}=d_{23}=1,\ d_{13}=3\}$

1.1 多机器人队形描述

常见队形形状

- 缩放型队形

$$D' = \alpha D, \alpha \in \mathbf{R}^+$$



1.1 多机器人队形描述

常见队形形状

- 刚性形状

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}, \xi_i \in \mathbf{R}^p$$
$$\|\xi_i - \xi_j\| = d_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

—回顾：刚性形状所有顶点间距离维持常量

- 平动型形状

$$x_i = \xi_i + p(t), p(t) \in \mathbf{R}^p$$

—不可转动的刚性形状

1.1 多机器人队形描述

常见队形形状

$D = \{d_{ij} = d_{ji} \geq 0, i, j = 1, \ldots, n, i \neq j\}$		
形状	简记	表达式
缩放型队形	D	$\|x_i - x_j\| = \alpha d_{ij}$
刚性队形	D	$\|x_i - x_j\| = d_{ij}$
平动型队形	Ξ	$x_i = \xi_i + \tau$

1.1 多机器人队形描述

队形的相对状态关系描述

- 以3个机器人为例，每个机器人位置表述为$x_i, i \in [1,3]$，则机器人相对关系描述为

$$z(t) = [x_1(t) - x_2(t), x_2(t) - x_3(t)]$$

—机器人位置为矢量，式中暗含了机器人1与机器人3的相对位置关系 $x_1(t) - x_3(t) = (x_1(t) - x_2(t)) + (x_2(t) - x_3(t))$

—考虑虚拟原点：$z(t) = [x_0(t) - x_1(t), x_1(t) - x_2(t), x_2(t) - x_3(t)]$

1.1 多机器人队形描述

队形的相对状态关系描述

- 相对状态关系可以采用矩阵形式简化表达

$$z(t)=\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\otimes\mathbf{I}\right]^T\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}\Rightarrow z(t)=D(\mathcal{D})^T x(t)$$

—对于队形 i 向队形 j 的转换，表述为

$$T_{dj}D\left(\mathcal{D}_j\right)^T=D\left(\mathcal{D}_d\right)^T$$

1.1 多机器人队形描述

队形的相对状态关系描述

- 考虑三种情况下的状态转换

1) 任意图向子图的转换； 2) 树向图的转换;3) 任意图向任意图的转换

- 图向子图的转换

$$T_{dj}=\left[\hat{T}_{dj},\tilde{T}_{dj}\right]\in\mathbf{R}^{m_d\times m_j}\Rightarrow\hat{T}_{dj}=\mathbf{I},\tilde{T}_{dj}D\left(\mathcal{D}_{j/d}\right)=0$$

—向子图的转换过程实际代表了图的降维过程

1.1 多机器人队形描述

队形的相对状态关系描述

- 树向图的转换：树 j 向图 d 的转换矩阵为

$$T_{dj} = D(\mathcal{D}_d)^T D(\mathcal{D}_j)\left[D(\mathcal{D}_j)^T D(\mathcal{D}_j)\right]^{-1}$$

证明： 根据定义 $D(\mathcal{D}_j)T_{dj}^T = D(\mathcal{D}_d)$ 两边同时左乘 $D(\mathcal{D}_j)^T$ ，

可得 $D(\mathcal{D}_j)^T D(\mathcal{D}_j)T_{dj}^T = D(\mathcal{D}_j)^T D(\mathcal{D}_d)$

$D(\mathcal{D}_j)^T D(\mathcal{D}_j)$ 可逆，整理后可得 T_{dj}

1.1 多机器人队形描述

队形的相对状态关系描述

- 任意图向任意图的转换，根据问题分析，有以下两种思路
  - 先将图转换为具有树结构的子图，然后再实现树向图的转换
  - 先将图转换为完全图, 然后再变换为目标图的子图

目 录

2.1 静态队形控制

- 设目标队形描述为$\mathcal{G}_f = (V, E_f)$
  - 对于任意边$\{v_i, v_j\} \in E_f$，对应的顶点距离$\|x_i(t) - x_j(t)\|$应渐近收敛于d_{ij}
  - 如果 $\mathcal{G}_f$ 为动态图，则在有限时间 T 内，队形需收敛于 $\mathcal{G}_f$ 的一个静态父图，即当$t \geq T$ 时,有$E_f \in E(t)$

2.1 静态队形控制

- 假设目标队形位移 $\xi_i(t) = x_i(t) + \tau_i(t)$，可知平移量

$$\tau_i(t) = \xi_i(t) - x_i(t), i \in [1, n]$$

- 为达到队形控制目标，所有队形成员 τ_i 应为同一常量，即 $\tau_c \Rightarrow \tau_i - \tau_j = 0$, 其中

$$j \in N_f(i), N_f(i) = \{j \in [1, n] | \{v_i, v_j\} \in E_f\}$$

- 基于这一考虑，设计控制律

$$\dot{\tau}_i(t) = -\sum_{j \in N_f(i)} (\tau_i(t) - \tau_j(t))$$

2.1 静态队形控制

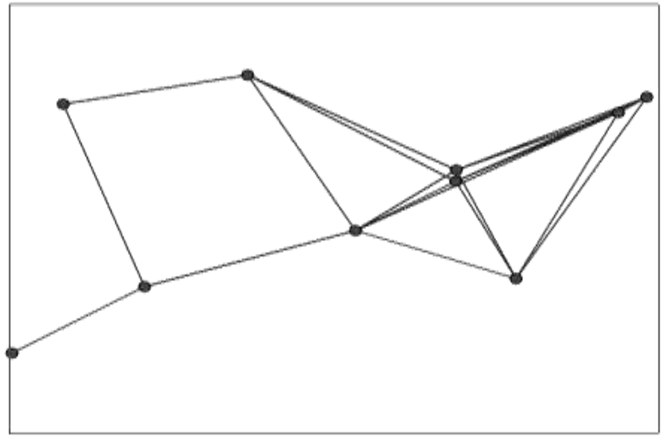
- 代入机器人自身状态描述

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j \in N_f(i)} \left(x_i(t) - x_j(t) - (\xi_i - \xi_j)\right)$$

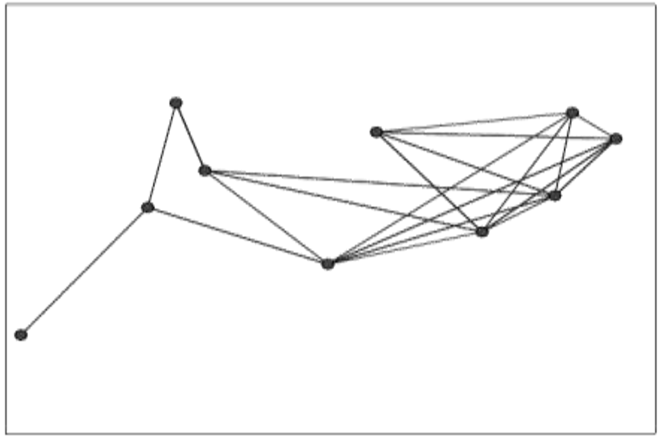
- 定理2.1：当目标队形由图 $\mathcal{G}_f = (V, E_f)$以及目标位置Ξ给定时，如果静态图 $\mathcal{G} = (V, E)$ 满足$E_f \subseteq E$，那么以上控制律将驱动机器人收敛于目标位置,即当 $t \to \infty$，$x_i(t) - \xi_i \to \tau$

2.1 静态队形控制

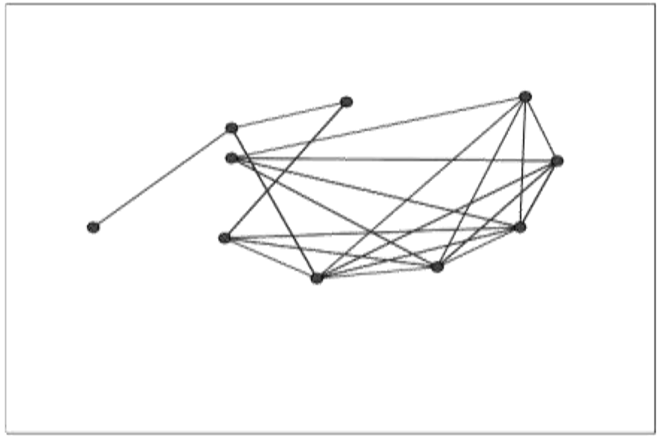
示意图



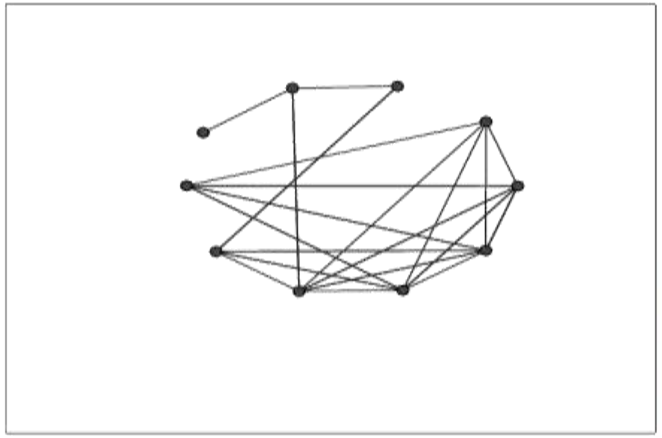
(a) $t = 0$



(b) $t = 0.5$



(c) $t = 2$



(d) $t = 5$

2.1 静态队形控制

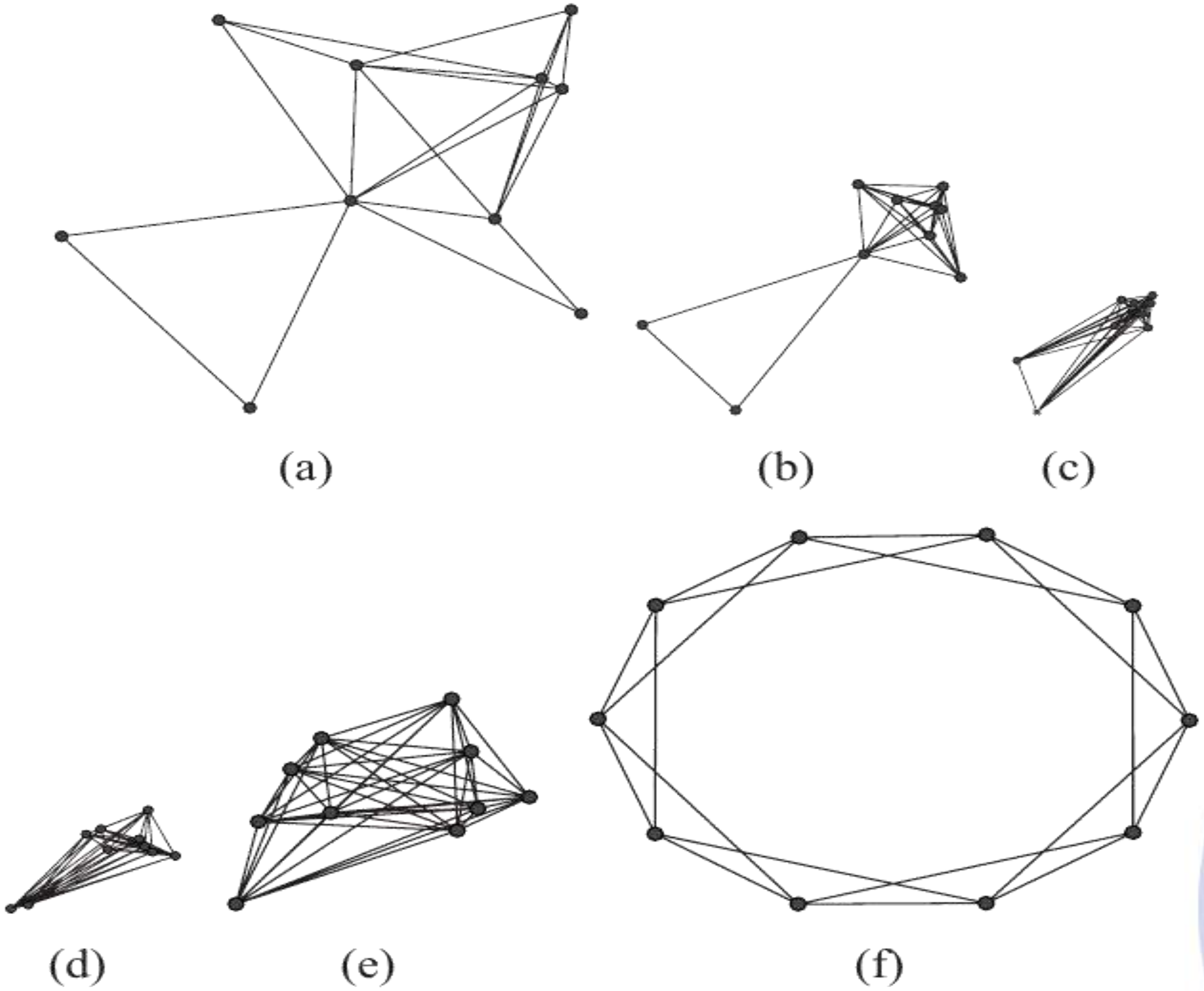
- 推论2.1：若目标队形所有编队图集为$E(t)$，给定目标编队图

$$\mathcal{G}_f = (V, E_f) \subseteq E(t)$$

- 采用静态图编队控制律，可渐进收敛于目标队形
- 对于 $E_f \subseteq E(t)$ 的情形，可先行转化为全连接图，然后再开展队形控制
- 若不满足条件$E_f \subseteq E(t)$，则需要采用其它非线性方法

2.1 静态队形控制

示意图



目 录

3.1 单积分线性系统队形控制

单积分线性系统队形控制

- 首先考虑单积分动力学系统的情形：$\dot{x}_i(t) = u_i(t), i \in [1, n]$

- 若目标队形可采用树形有向图 $\mathcal{D}$ 表示，记 $z(t) = D(\mathcal{D})^T x(t)$
  则编队误差为：$e(t) = z_{ref} - z(t) \Rightarrow \dot{e}(t) = -D(\mathcal{D})^T \dot{x}(t)$

- 从而可设计比例控制器 $u(t) = kD(\mathcal{D})e(t)$

3.1 单积分线性系统队形控制

单积分线性系统队形控制

- 闭环系统误差满足以下收敛性质： $\dot{e}(t) = -kL_e(\mathcal{D})e(t)$

  —由于 $L_e(\mathcal{D}) = D(\mathcal{D})D(\mathcal{D})^T$ 半正定，系统收敛性满足 $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$

- 综上，所有个体均采用此控制律，输入设计为：

$$\dot{x}(t) = -kL_e(\mathcal{D}))x(t) + kD(\mathcal{D})z_{ref}$$

  —当 $z_{ref} = 0$,则退化为一致性问题

3.2 双积分线性系统队形控制

- 类似的，对于双积分动力学系统：$\ddot{x}_i(t) = u_i(t), i \in [1, n]$

- 若目标队形定义 $\left[z_{ref}(t)^T, \dot{z}_{ref}^T\right]^T$，编队误差为 $e(t) = z_{ref} - D(\mathcal{D})^T x(t)$

- 求导并假定 $\ddot{z}_{ref} = 0$，可得 $\ddot{e}(t) = -D(\mathcal{D})^T \ddot{x}(t) = -D(\mathcal{D})^T u(t)$

- 从而可设计比例型控制器 $u(t) = k[D(\mathcal{D}), D(\mathcal{D})][e(t), \dot{e}(t)]^T$

3.2 双积分线性系统队形控制

前述控制律可重写为以下形式：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \mathcal{E}(\mathcal{D})\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \mathcal{F}(\mathcal{D})\begin{bmatrix} z_{\mathrm{ref}}(t) \\ \dot{z}_{\mathrm{ref}}(t) \end{bmatrix}$$

- 其中 $\mathcal{E}(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -kL_e(\mathcal{D}) & -kL_e(\mathcal{D}) \end{bmatrix}$ $\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ kL_e(\mathcal{D}) & kL_e(\mathcal{D}) \end{bmatrix}$

3.2 双积分线性系统队形控制

- 以关联矩阵的形式，可表述如下：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{D}})\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{D}})\begin{bmatrix} z_{\mathrm{ref}}(t) \\ \dot{z}_{\mathrm{ref}}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{D}}) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -kL(\mathcal{D}) & -kL(\mathcal{D}) \end{bmatrix} \qquad \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{D}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ kD(\mathcal{D}) & kD(\mathcal{D}) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -kL(\widetilde{\mathcal{D}})x(t) - kL(\widetilde{\mathcal{D}})\dot{x}(t) + kD(\mathcal{D})z_{\mathrm{ref}}(t) + kD(\mathcal{D})\dot{z}_{\mathrm{ref}}(t)$$

3.2 双积分线性系统队形控制 - 收敛性分析

- 由于 $\lambda \neq -1$，特征方程等效为：

$$\det\left(\lambda^2/(\lambda+1)I + kL_e(\mathcal{D})\right) = 0$$

- 令 $\mu = eig(-kL_e(\mathcal{D}))$ $\mu_i = \lambda_i^2 / (\lambda_i + 1) \Rightarrow \lambda_i = \frac{1}{2}\left(\mu_i \pm \sqrt{\mu_i^2 + 4\mu_i}\right)$

- 由于$k > 0$，μ 负定，$\mathbf{A}_{cl}$为Hurwitz矩阵 $\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} e(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = 0$

3.3 惯性系统队形控制

- 考虑如下惯性系统：$\dot{x}_i(t) = ax_i(t) + bu_i(t), \quad i \in [1, n]$
- 记目标编队图 $z(t) = D(\mathcal{D})^T x(t)$ 可通过一定变换操作后得到：

$$\dot{z}(t) = az(t) + bD(\mathcal{D})^T u(t)$$

- 设计控制律 $u(t) = kD(\mathcal{D})\left(z_{\text{ref}} - z(t)\right)$，可得编队
- 系统的闭环动力学描述：$\dot{z}(t) = \left(aI - kbL_e(\mathcal{D})\right) z + kbL_e(\mathcal{D}) z_{\text{ref}}$

3.3 惯性系统队形控制

- 系统稳定性是由如下矩阵的特征值决定的：

$$aI - kbL_e(\mathcal{D})$$

即为 $$a - \lambda_i(\mathcal{G})kb, \quad i = 2, \ldots, n$$

- 因此系统的稳定性由下式决定 $a - \lambda_i(\mathcal{G})kb < 0 \quad i > 2$

目 录

4 基于赋权图的反馈控制

队形控制

- 目标队形表述为 $\tau_i \in \mathbf{R}^n$， $d_{ij} = \tau_i - \tau_j$
- 记位移 $y_i(t) = x_i(t) - \tau_i$, 并令 $\ell_{ij}(t) = x_i(t) - x_j(t)$,

$\lambda_{ij}(t) = y_i(t) - y_j(t) = \ell_{ij}(t) - d_{ij}$， 设计能量函数

$$\mathcal{V}_{ij}(\delta - \|d_{ij}\|, y) = \begin{cases} \frac{\|\lambda_{ij}\|^2}{\Delta - \|d_{ij}\| - \|\lambda_{ij}\|} & \text{if } \{v_i, v_j\} \in E_d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

➡从而可设计分布式控制律

$$\sigma(i, j) = 1$$

$$f(x_i(t) - x_j(t)) = -\frac{\partial \mathcal{V}_{ij}(\Delta - \|d_{ij}\|, y)}{\partial y_i}$$

4 基于赋权图的反馈控制

队形控制

- 控制律最终表达为：

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j\in N_{\mathcal{G}_d}(i)} \frac{2(\Delta - \|d_{ij}\|) - \|\ell_{ij}(t) - d_{ij}\|}{(\Delta - \|d_{ij}\| - \|\ell_{ij}(t) - d_{ij}\|)^2}(x_i(t) - x_j(t) - d_{ij})$$

对于每一维度而言 $\frac{dc(y(t),j)}{dt} = -L_w(\Delta - \|d\|, y(t))c(y(t),j), j = 1,\ldots,n$

其中 $W(\Delta - \|d\|, y) = \mathrm{Diag}(w_k(\Delta - \|d_k\|, y)), \quad k = 1,2,\ldots,|E_d|$

$$w_k(\Delta - \|d_k\|, y) = \frac{2(\Delta - \|d_k\|) - \|\lambda_k\|)}{(\Delta - \|d_k\| - \|\lambda_k\|)^2}$$

队形控制

- 引理4.1：总能量方程定义如下

$$\mathcal{V}(\Delta - \|d\|, y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{V}_{ij}(\Delta - \|d_{ij}\|, y)$$

若 $y_0 \in \mathcal{D}^{\epsilon}_{\mathcal{G}_d, \Delta-\|d\|}$, 且 $\mathcal{G}_d$ 为静态生成图，则

$$\Omega(\Delta - \|d\|, y_0) = \{y \mid \mathcal{V}(\Delta - \|d\|, y) \leq \mathcal{V}_0\}$$

为前述能量方程引出控制作用下的状态不变集。

4 基于赋权图的反馈控制

队形控制

- 证明：由总能量方程引出的控制律

$$\dot{y}_i = -\sum_{j\in\mathcal{N}_{\mathcal{G}_d}(i)} \frac{\partial \mathcal{V}_{ij}(\Delta - \|d_{ij}\|, y)}{\partial y_i} = -\frac{\partial \mathcal{V}(\Delta - \|d\|, y)}{\partial y_i} = -\nabla_{y_i}\mathcal{V}(\Delta - \|d\|, y)$$

因而对于给定的初始 $y_0 \in \mathcal{D}^{\epsilon}_{\mathcal{G}_d,\Delta-\|d\|}$，与一致性控制等效，

$\Omega(\Delta - \|d\|, y_0)$ 为不变集。

4 基于赋权图的反馈控制

队形控制

- 引理4.2：给定初定状态 $y_0=(x_0-\tau_0)\in\mathcal{D}^{\epsilon}_{\mathcal{G}_d,\Delta-\|d\|}$，若

$$\dot{x}_i(t)=-\sum_{j\in N_{\mathcal{G}_d}(i)}\frac{2(\Delta-\|d_{ij}\|)-\|\ell_{ij}(t)-d_{ij}\|}{(\Delta-\|d_{ij}\|-\|\ell_{ij}(t)-d_{ij}\|)^2}(x_i(t)-x_j(t)-d_{ij})$$

则满足 $\|x_i(t)-x_j(t)\|=\|l_{ij}(t)\|<\Delta$ （$t>0$，$\{v_i,v_j\}\in E_d$）

- 证明：对于连通节点 i 与 j，设若 $\|\lambda_{ij}\|=\|y_i-y_j\|$ 趋近 $\Delta-\|d_{ij}\|$

由于 $\lim_{\|\lambda_{ij}\|\uparrow(\Delta-\|d_{ij}\|)}\mathcal{V}_{ij}=\infty$，则 $\mathcal{V}\to\infty$，这与引理4.1矛盾。因此

$$\|\ell_{ij}\|=\|\lambda_{ij}+d_{ij}\|\leq\|\lambda_{ij}\|+\|d_{ij}\|<\Delta-\|d_{ij}\|+\|d_{ij}\|=\Delta$$

4 基于赋权图的反馈控制

队形控制

- 定理4.1：基于引理4.2同样的假设，对生成图中的所有节点，均满足 $\|\ell_{ij}(t)\| = \|x_i(t) - x_j(t)\|$ 渐近收敛于 $\|d_{ij}\|$。

- 证明：由前述赋权一致性控制可知,对于

$$\frac{dc(y,j)}{dt} = -L_w(\Delta - \|d\|, y)c(y,j), \quad j = 1, 2, \ldots, p$$

渐近收敛，可知 $\lim_{t\to\infty} y_i(t) = \lim_{t\to\infty}(x_i(t) - \tau_i) = \zeta, \quad \text{for } i = 1, \ldots, n$

因此 $\lim_{t\to\infty} \ell_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty}(x_i(t) - x_j(t)) = \zeta + \tau_i - \zeta - \tau_j = d_{ij}$

4 基于赋权图的反馈控制

汇合-编队控制

- 记K_n为n个机器人的完全图，K_n^{Δ}为满足以下连接关系的完全图

$$\begin{cases} \mathcal{G} = K_n \\ \ell_{ij} \leq \Delta \quad \text{for all } i \neq j \end{cases}$$

若要在队形控制中满足定理3，则要求初始条件

$$y_0 = (x_0 - \tau_0) \in \mathcal{D}^{\epsilon}_{\mathcal{G}_d, \Delta - \|d\|}$$

由于采用控制器$u_i(t) = -\sum_{j \in \mathcal{N}_\sigma(i)} \frac{\partial \mathcal{V}_{ij}(\Delta, x)}{\partial x_i}$，系统将在有限时间内收敛于$K_n^{\varepsilon}$（$0 < \varepsilon < \Delta$）。此后，编队控制可行。因此可设定切换点以实行汇合-编队的切换。

4 基于赋权图的反馈控制

汇合-编队控制