



基于图论的多机器人控制

面向连通保持的一致性控制

讲 授 人：董 伟 博士、副教授

E - mail : dr.dongwei@sjtu.edu.cn



引言

大通盛道

HARVARD
UNIVERSITY



哈佛大學



引言

④ 有限距离连通，具有以下拓扑连接特性的编队

$$\{v_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow \|x_i - x_j\| \leq \Delta$$

④ 编队控制中可能出现连通网络断开的情形

④ 移动机器人本身只具有有限的传感能力

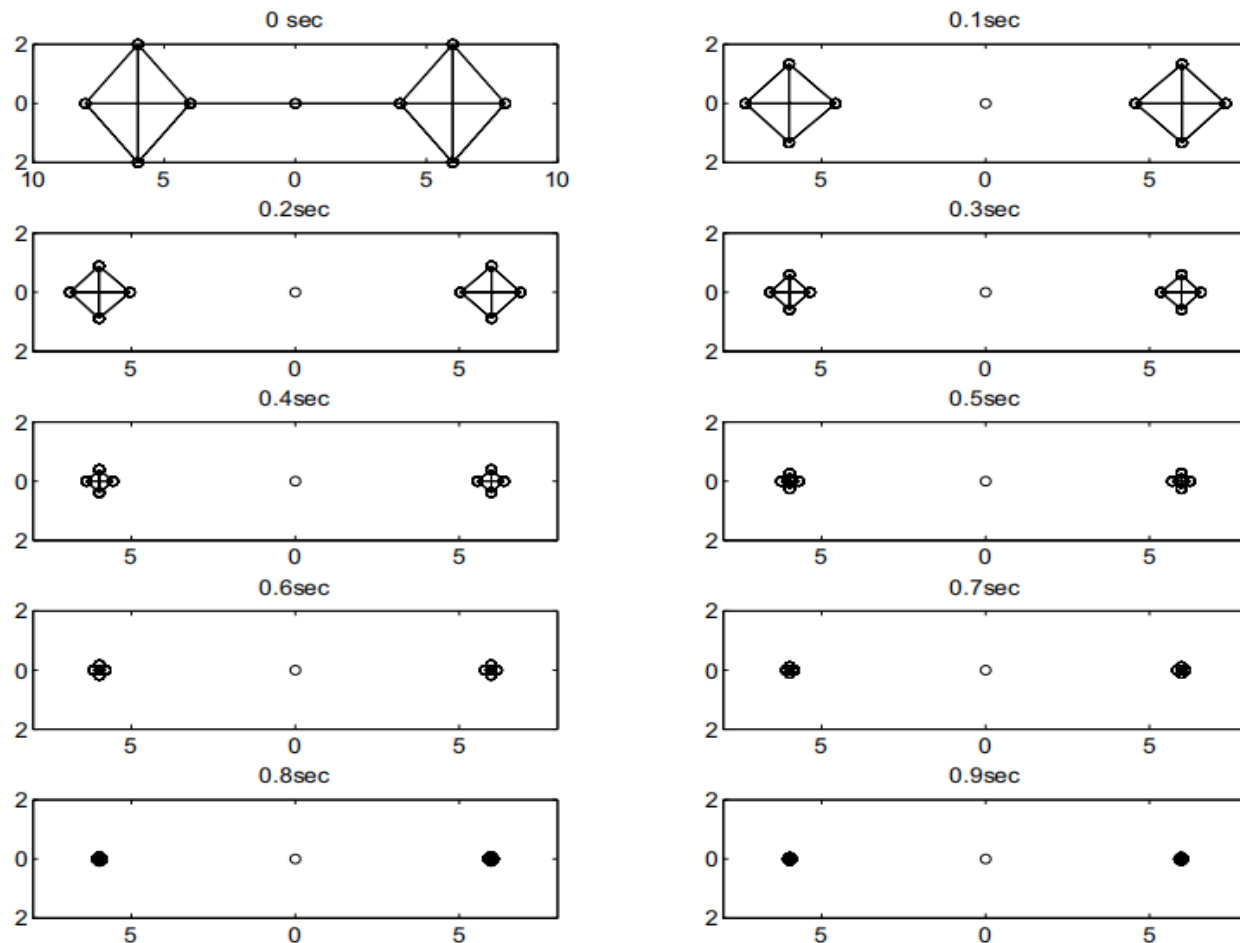
□ 例：单方向传感时，运动方向调整会影响网络通断

④ 需要采用非线性控制手段



引言

⑤ 有限距离连通，简单一致性协议，收敛性不一定得到保证

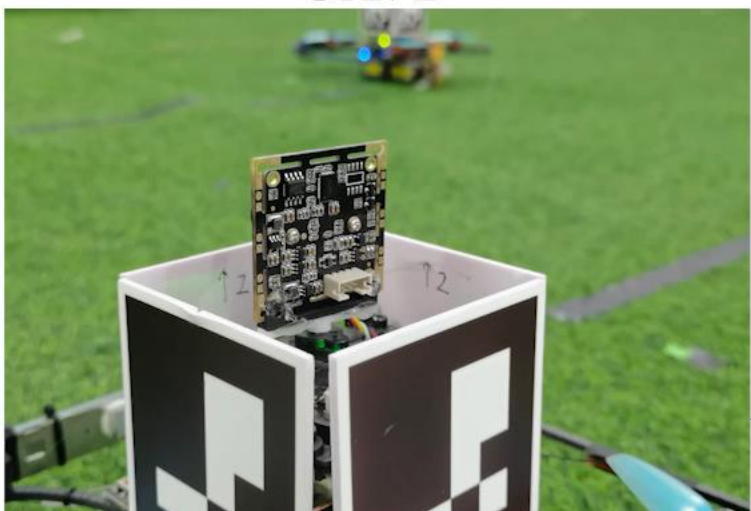


引言 - 主动视觉系统的例子

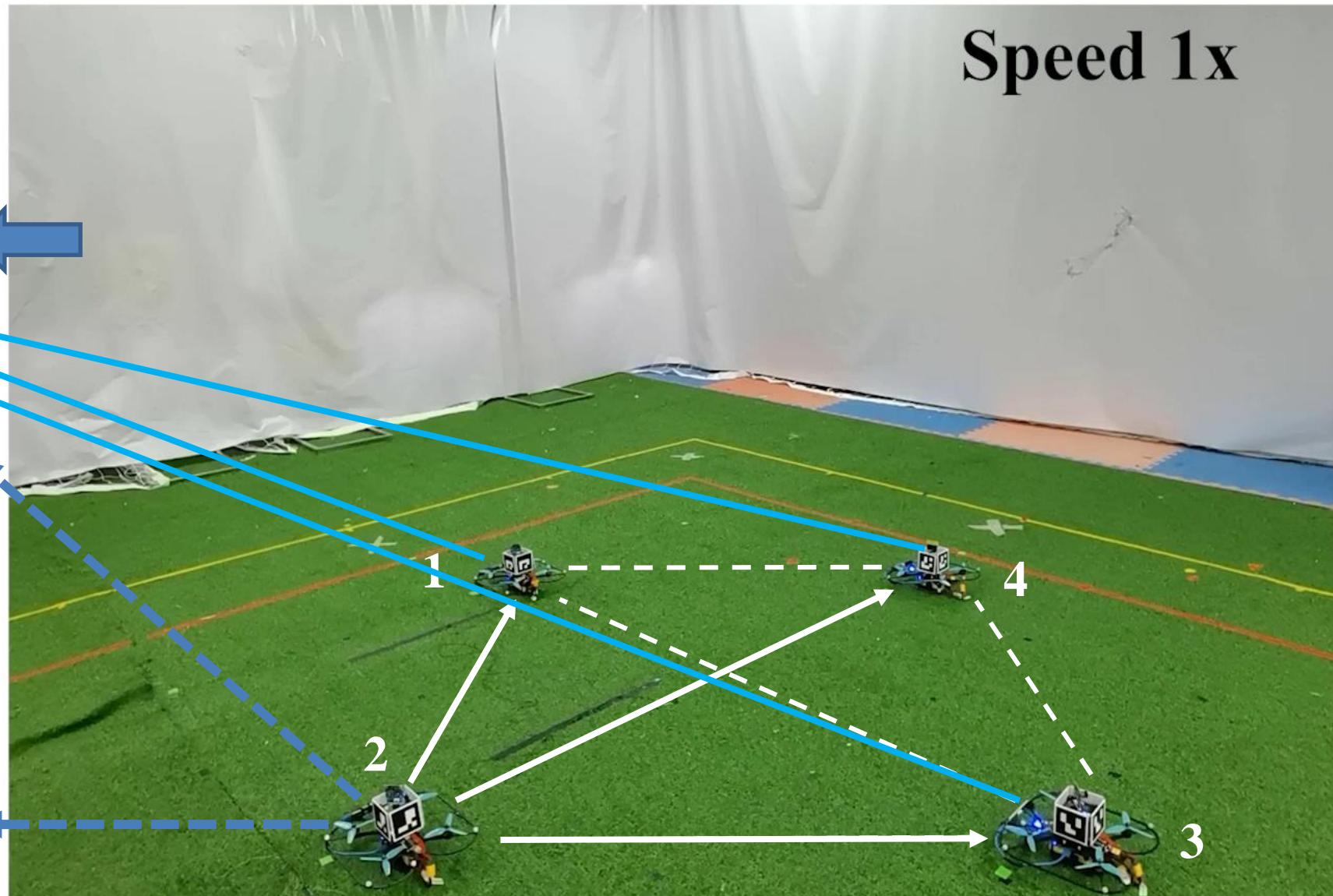
UAV2 FPV



UAV2



Main View



目录

- 一、面向连通保持的一致性控制
- 二、基于稳定性度量的控制器一般性设计方法
- 三、拉萨尔不变性原理与控制不变集
- 四、有限连通约束的非线性控制方法



1.1 连通半径约束下的拓扑保持

④ 连通模型

□ 定义权重反映通信质量的好坏：

$$\mathbf{A}_{ij} = a_{ij} = \begin{cases} e^{-\left(\|p_i - p_j\|^2\right) / (2\sigma^2)} & \text{if } \|p_i - p_j\| \leq \Delta, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad e^{-(\Delta^2)/(2\sigma^2)} = \delta \text{ 为预定义小量。}$$

□ $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{d}), \quad \mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$

☹☹拉氏矩阵有一个对应特征向量 $\mathbf{1}$ 的特征值为 0，其余特征值非负，即 $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ 。当且仅当 $\lambda_2 > 0$ ，图是连通的。

1.1 连通半径约束下的拓扑保持

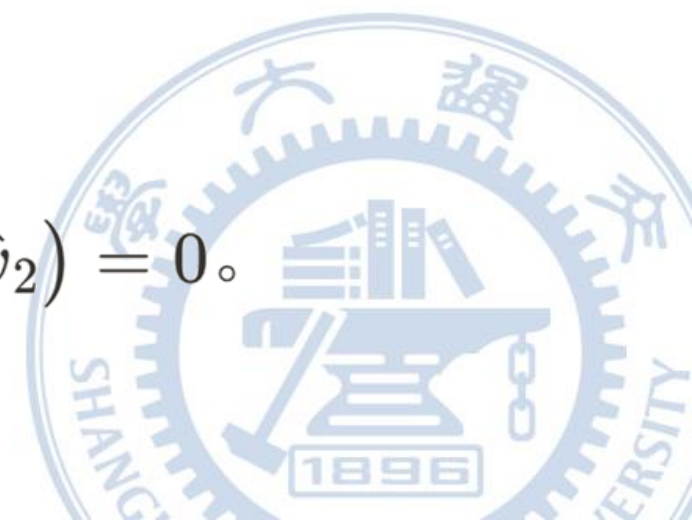
⑥ 连通保持: 次小特征值大于0

□ 若对应 \mathbf{L} 次小特征值 λ_2 的单位特征向量为 \hat{v}_2 ($\|\hat{v}_2\| = 1$), 则对 λ_2 求偏导可得:

$$d\lambda_2 = d(\hat{v}_2^T \mathbf{L} \hat{v}_2) = d\hat{v}_2^T \mathbf{L} \hat{v}_2 + \hat{v}_2^T d\mathbf{L} \hat{v}_2 + \hat{v}_2^T \mathbf{L} d\hat{v}_2。$$

□ 对于无向图 $\mathbf{L}^T = \mathbf{L}$, 进一步可得:

$$\hat{v}_2^T \mathbf{L} d\hat{v}_2 = d\hat{v}_2^T \mathbf{L} \hat{v}_2 = \lambda_2 d\hat{v}_2^T \hat{v}_2 = \frac{1}{2} \lambda_2 d(\hat{v}_2^T \hat{v}_2) = 0。$$



1.1 连通半径约束下的拓扑保持

④ 连通保持: 控制率

□ 控制率可表达为:

$$u_i^c = \frac{\partial \lambda_2}{\partial p_i} = k \hat{v}_2^T \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} \hat{v}_2 = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial p_i} \left(\hat{v}_2^i - \hat{v}_2^j \right)^2.$$

☞ 根据 \mathbf{A} 矩阵的定义, $\frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial p_i} = -\mathbf{A}_{ij} (p_i - p_j) / \sigma^2$ ($i \neq j$)

由于 $\frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial p_j} = \mathbf{A}_{ij} (p_i - p_j) / \sigma^2$ ($i \neq j$), $\frac{\partial \mathbf{A}_{ii}}{\partial p_i} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial p_k} = 0$ 。

故有: $\frac{\partial \lambda_2}{\partial p_i} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} -\mathbf{A}_{ij} \left(\hat{v}_2^i - \hat{v}_2^j \right)^2 \frac{p_i - p_j}{\sigma^2}$ 。

? 控制率设计的一般性原则

目录

- 一、面向连通保持的一致性控制
- 二、基于稳定性度量的控制器一般性设计方法**
- 三、拉萨尔不变性原理与控制不变集
- 四、有限连通约束的非线性控制方法



2.1 李雅普诺夫稳定性

④ 自治系统

□ 不显式含有时间 t ，没有输入作用的一类系统

$$\dot{x} = f(x) \text{——自治系统} \qquad \dot{x} = f(x, t) \text{——非自治系统}$$

④ 平衡状态

□ 若存在状态点 x_e ，当系统运动到该点时，系统状态各分量维持平衡，不再随时间变化，即

$$\dot{x}|_{x=x_e} = 0$$

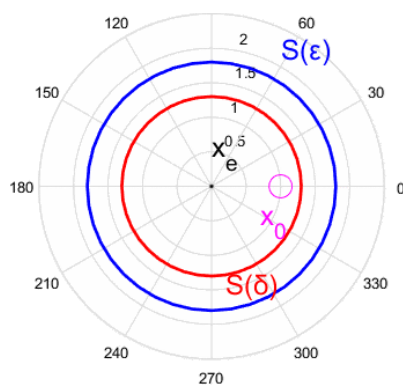
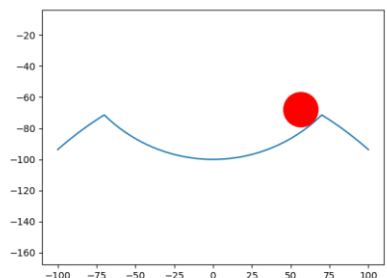
则称 x_e 为系统的平衡状态，换元后可不妨设

$$x_e = 0$$



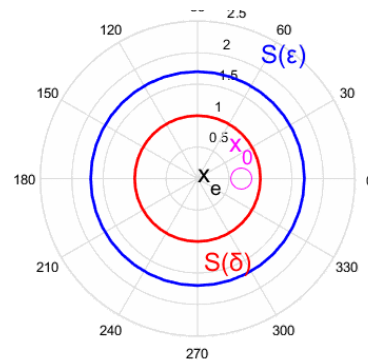
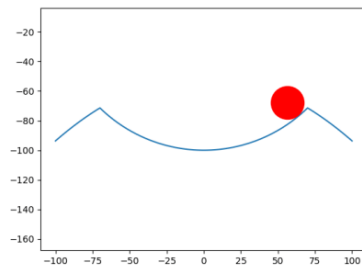
2.1 李雅普诺夫稳定性

李雅普诺夫稳定性



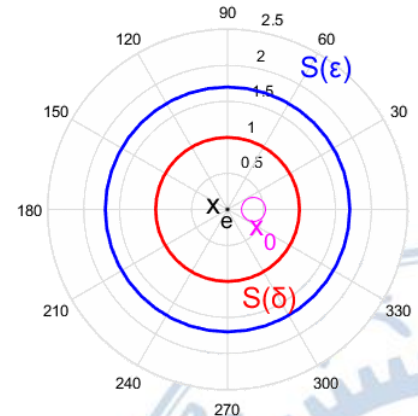
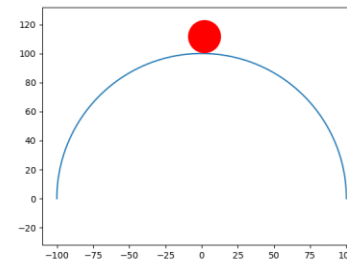
稳定

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Energy} \rightarrow 0$$



临界稳定

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Energy} \rightarrow \text{constant}$$



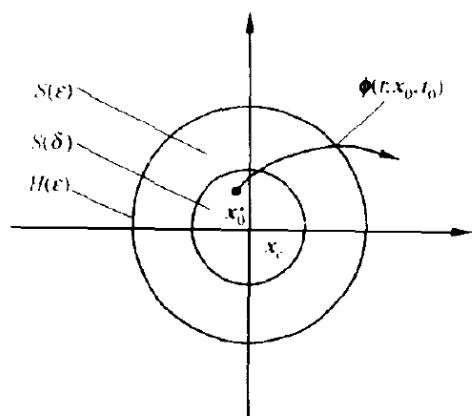
不稳定

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Energy} \rightarrow \text{increase}$$

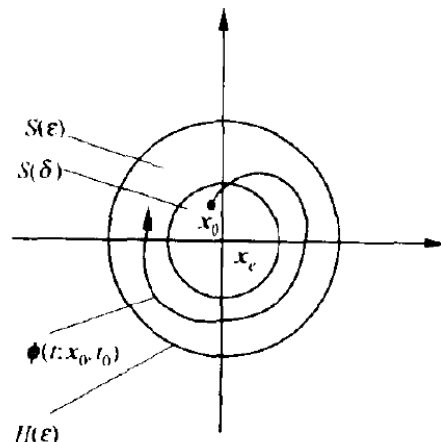
2.1 李雅普诺夫稳定性

李雅普诺夫稳定性

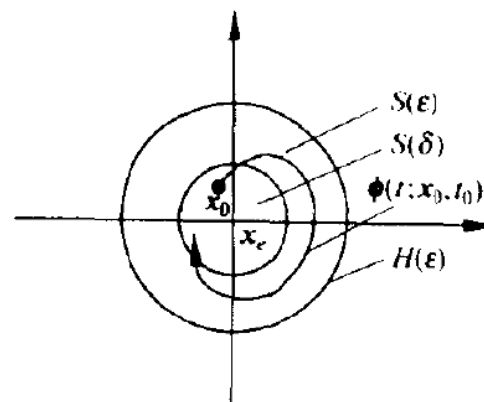
- 李雅普诺夫意义下的稳定：对每一个 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$
 $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$ 。（工程意义上的不稳定）
- 不稳定：发散，不满足稳定条件
- 渐进稳定：稳定，且 $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。（工程意义上的稳定）



不稳定



李雅普诺夫意义下的稳定



渐进稳定



2.1 李雅普诺夫稳定性

④ 稳定性判据

□ 自治系统 $\dot{x} = f(x)$ ，不妨设平衡点为原点，即 $f(0) = 0$

考虑一个一阶连续可微标量函数 $V(x)$ ：

- ✓ 若 $V(x) > 0, \dot{V}(x) \leq 0$ 对 $x \neq 0$ 成立，也即 $V(x)$ 正定， $\dot{V}(x)$ 半负定，则系统在李雅普诺夫意义下的稳定。
- ✓ 若 $V(x) > 0, \dot{V}(x) < 0$ 对 $x \neq 0$ 成立，也即 $V(x)$ 正定， $\dot{V}(x)$ 负定，则系统渐进稳定。
- ✓ 渐进稳定，且 $\|x\| \rightarrow \infty, V(x) \rightarrow \infty$ ，则系统大范围渐进稳定，也即初始条件扩大到整个状态空间，均收敛至唯一平衡点。

2.1 李雅普诺夫稳定性判据

④ 渐进稳定性判据

□ $V(x)$ 正定, $\dot{V}(x)$ 负定, 系统渐进稳定

④ 稳定性判据讨论

- 从物理意义角度考虑, $V(x)$ 可视为一种广义能量, $\dot{V}(x)$ 则为广义能量的变化率, 只要系统能量有限, 且能量的变化率始终为负, 则系统能量最终会趋于0。
- 在实际中, 李雅普诺夫函数 $V(x)$ 不能简单直接等同于能量, 通常是设计控制器时给系统构造此函数使系统渐进稳定。

2.3 非线性时不变系统的控制器设计

④ 控制器设计思路

- 李雅普诺夫函数提供了系统渐进稳定的条件，由此构造出的控制器必然能使系统渐进稳定
- 设计中首先需要考虑李雅普诺夫函数的设计

④ 李雅普诺夫函数设计思路

- 构造主要依赖状态与状态导数两个条件，有变量梯度法与克拉夫斯基方法两种规则化方法



2.2 线性时不变系统的控制器设计

⑥ 线性时不变系统 $\dot{x} = Ax$

□ 定理：若 A 所有特征值实部小于零，则系统渐进稳定。

⑥ 李雅普诺夫函数设计控制率

□ 取 $V(x) = x^T Px$ ，满足 $V(x) > 0$ ，取 P 正定

□ 取 $\dot{V}(x) = x^T P\dot{x} + \dot{x}^T Px = x^T (PA + A^T P)x = -x^T Qx$ 满足 $\dot{V}(x) < 0$ ，取 Q 正定，解出满足 $PA + A^T P = -Q$ 的 A 即可



目录

- 一、面向连通保持的一致性控制
- 二、基于稳定性度量的控制器一般性设计方法
- 三、拉萨尔不变性原理与控制不变集**
- 四、有限连通约束的非线性控制方法



3.1 拉萨尔不变性原理

- ❑ 渐近稳定在实际系统中是个很重要很好的性质，我们总是希望能得到渐近稳定的结论，而不仅仅是稳定的结论。
- ❑ 李氏稳定性分析很多情况只是系统稳定或者渐近稳定的充分条件，因此具有很大的保守性，也就是说有些系统虽然基于李氏稳定性分析来说只能推出系统稳定有界的结论，但是系统其实是渐近稳定的。
- ❑ La Salle不变集原理基于李氏稳定性分析，却可能得出渐近稳定结论的或者确定系统具体收敛到哪个值。



3.1 拉萨尔不变性原理

④ 不变集的定义

- 如果系统从点 x 出发，且未来的状态位置一直保持不变，即一直待在出发点 x ，那么出发点 x 就叫做系统的不变点。
- 如果系统从某个区域内或者曲线出发上，例如以 0 为原点的半径为 r 的圆形区域或者有限环，系统的未来状态位置会一直待在该区域内或者曲线上，那么这个区域就叫做不变区。
- 所有这些不变点或者不变区域组成的集合，就叫做该系统的不变集。



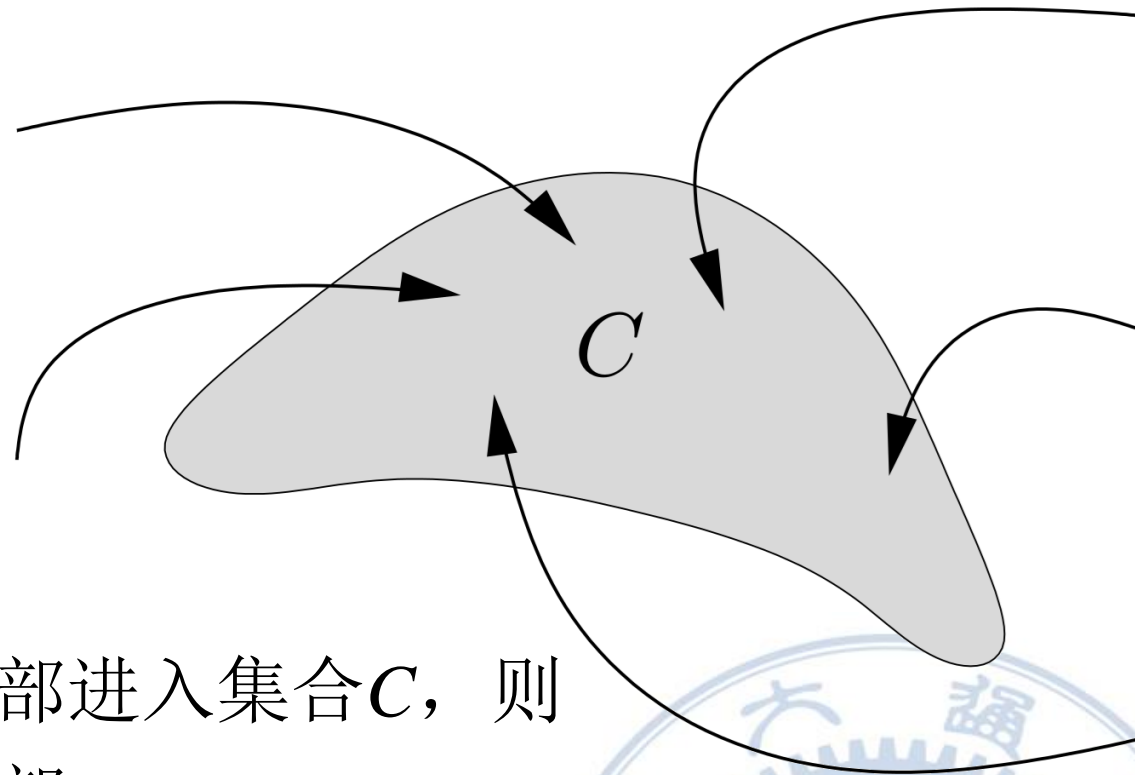
3.1 拉萨尔不变性原理

④ 不变集的定义

- 考虑如下动态系统 $\dot{x} = f(x)$ ，
则不变集 $C \subseteq \mathbf{R}^n$ 中的每一条轨迹具有如下性质：

$$x(t) \in C \implies x(\tau) \in C, \quad \forall \tau \geq t$$

- 若轨迹从不变集 C 出发，或从外部进入集合 C ，则该轨迹将始终停留在不变集 C 内部。
- 不变集 C 内的轨迹可能触碰其边界，但不会逃离集合 C 。



3.1 拉萨尔不变性原理

例：能量守恒系统

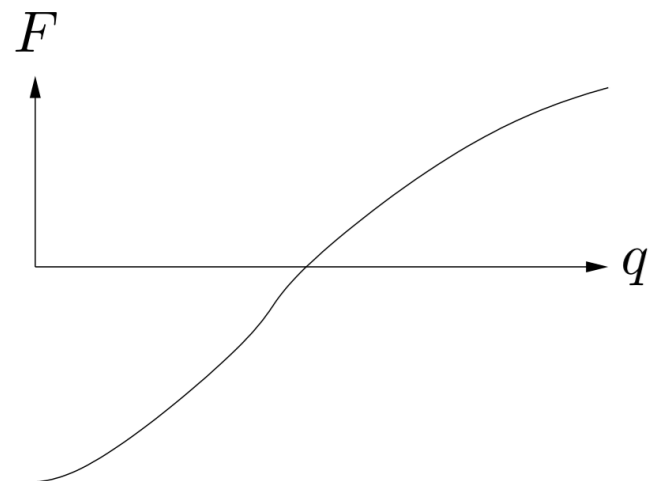
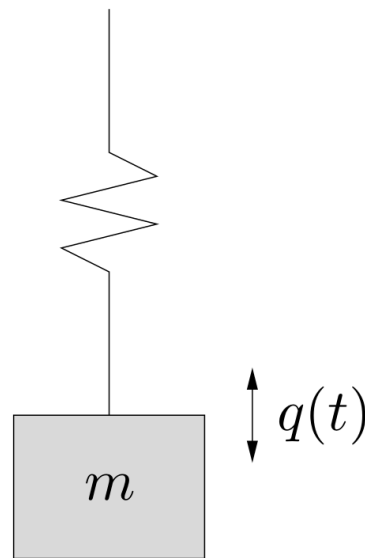
□ 考虑如右图所示机械系统：

$$m\ddot{q} = -F = -\phi(q)$$

记： $x = (q, \dot{q})$ ，可得

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(1/m)\phi(x_1) \end{bmatrix}$$

蕴含其中的弹性势能为： $\psi(q) = \int_0^q \phi(u)du$



3.1 拉萨尔不变性原理

例：能量守恒系统

□ 系统总能量为： $E(x) = (m/2)\dot{q}^2 + \psi(q)$

□ E 为守恒量：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(x(t)) &= (m/2)\frac{d}{dt}\dot{q}^2 + \frac{d}{dt}\psi(q) \\ &= m\dot{q}\ddot{q} + \phi(q)\dot{q} \\ &= m\dot{q}(-(1/m)\phi(q)) + \phi(q)\dot{q} \\ &= 0\end{aligned}$$

系统方程：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(1/m)\phi(x_1) \end{bmatrix}$$

弹性势能：

$$\psi(q) = \int_0^q \phi(u)du$$

3.1 拉萨尔不变性原理

例：耗散系统

□ 对于系统 $\dot{x} = f(x)$ 中的所有轨迹，能量函数 $\phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 均单调下降，即对于 $\tau \geq t$ ，有 $\phi(x(\tau)) \leq \phi(x(t))$ ，则我们称 $\phi(x(t))$ 为耗散量。

$$\dot{\phi}(z) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \phi(z)^T f(z) \leq 0$$

□ 两个典型的耗散系统：

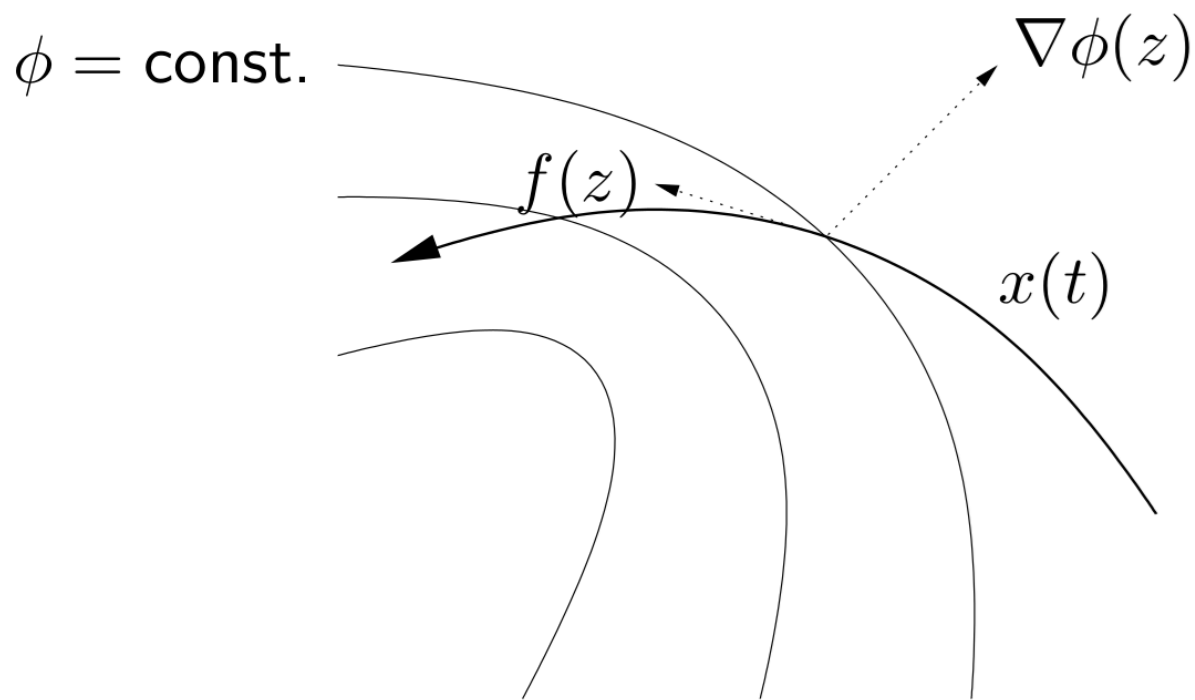
□ 带阻尼的机械系统

□ 泄流中的流体系统



3.1 拉萨尔不变性原理

几何示意



- 函数向量场总是指向下水平集。
- $\nabla \phi(z)^T f(z) \leq 0$, 即 $\nabla \phi$ 与 f 总是成钝角。
- 轨迹沿函数值减小方向运动。



3.1 拉萨尔不变性原理

④ 拉萨尔不变集原理

□ 对于不依赖于时间的自治系统 $\dot{x} = f(x)$ ，其中 $f(x)$ 连续，并且 $V(x)$ 具有对 x 一阶连续偏导。如果

1. 在某个区域 Ω_l 内， $V(x)$ 有上界 $V(x) < l (l > 0)$ ；
2. 并且在该区域内， $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0$ 。

则把该区域内所有使得 $\dot{V}(x) = 0$ 的点的集合记作 R ，而 M 是包含在 R 内最大的不变集。如果系统起始于该区域内，那么随着 $t \rightarrow \infty$ 系统一定会收敛于不变集 M 中的点。



3.1 拉萨尔不变性原理

④ 拉萨尔不变集原理

□ 对于不依赖于时间的自治系统 $\dot{x} = f(x)$ ，其中 $f(x)$ 连续，并且 $V(x)$ 具有对 x 一阶连续偏导。在原点的周围邻域 Ω 满足

1. $V(x)$ 局部正定；
2. \dot{V} 半负定；
3. La Salle 不变集原理中定义的 R 集合只有 $x=0$ 这个点。

那么，我们就说系统在平衡点 0 渐近稳定。进一步， Ω 内的最大的连通的区域 $V(x) < l (l > 0)$ 的区域 Ω_l 是原点 0 的吸引域的子集。



目录

- 一、面向连通保持的一致性控制
- 二、基于稳定性度量的控制器一般性设计方法
- 三、拉萨尔不变性原理与控制不变集
- 四、有限连通约束的非线性控制方法**



4.1 有限连通的机器人集群

④ 本讲主要考虑具有以下集群特性的编队

$$\{v_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow \|x_i - x_j\| \leq \Delta$$

- 编队控制中可能出现连通网络断开的情形
- 移动机器人本身只具有有限的传感能力
- 例：单方向传感时，运动方向调整会影响网络通断
- 需要采用非线性控制手段



4.1 有限连通的机器人集群

- ④ 本课程主要考虑高层次控制问题
- ④ 不分析机器人本身的复杂动力学特性
- ④ 基于一阶积分系统开展控制分析

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), i = 1, \dots, n$$

- ④ 借鉴一致性运动，控制律设计为

$$u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_\sigma(i)} f(x_i(t) - x_j(t))$$



4.1 有限连通的机器人集群

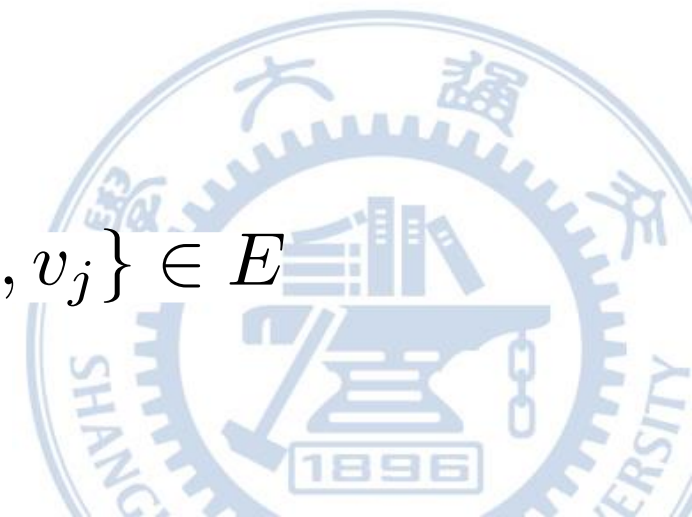
④ 一致性控制律设计为
$$u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_\sigma(i)} f(x_i(t) - x_j(t))$$

➡
$$j \in \mathcal{N}_\sigma(i) \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \in E(\mathcal{G}), \sigma(i, j) = 1$$

④ 关注两个问题：是否是邻接顶点，是否存在信息交互

④ 上述控制律一般假设有反对称性

$$f(x_i(t) - x_j(t)) = -f(x_j(t) - x_i(t)) \quad \forall \{v_i, v_j\} \in E$$



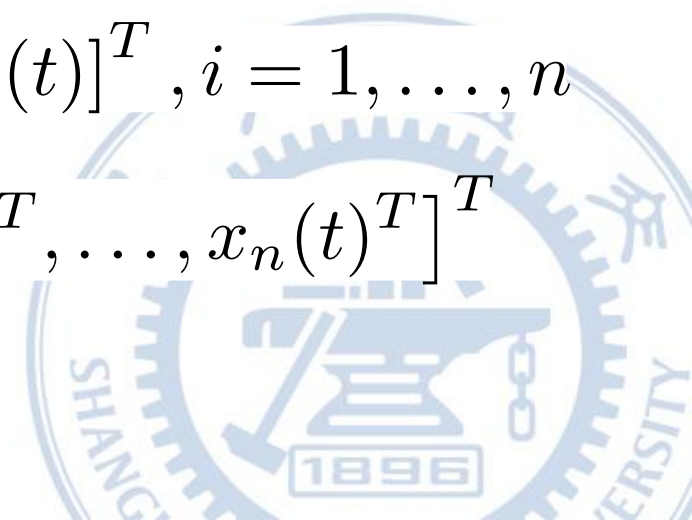
4.1 有限连通的机器人集群

④ 几点思考

- 同质机器人一般只适合获取系统间相对状态
- 上述控制律保证了同质化部署
- 机器人（理论上）将向系统中心汇聚

④ 控制律与动态交互图

- 设单机机器人的状态表示为 $x_i(t) = [x_{i,1}(t), \dots, x_{i,p}(t)]^T, i = 1, \dots, n$
- 多机器人状态进一步可以用向量表示 $x(t) = [x_1(t)^T, \dots, x_n(t)^T]^T$



4.1 有限连通的机器人集群

④ 定义分量运算符 $c(x(t), j) = [x_{1,j}(t), \dots, x_{n,j}(t)]^T$, $j = 1, \dots, p$

④ 则一致性运动可以表述为

$$\frac{d}{dt}c(x(t), j) = -L(\mathcal{G})c(x(t), j), j = 1, \dots, n \quad \leftarrow L(\mathcal{G}) = D(\mathcal{G})D(\mathcal{G})^T$$

□ 理论上, 对于动态图 $\mathcal{G}(t) = (V, E(t))$, $(\{v_i, v_j\} \in E(t))$

当且仅当 $\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq \Delta$ 机器人将汇聚于系统中心。

如何保证在有限连通距离下的 (局部) 连通保持与一致性收敛

4.2 基于赋权图的反馈控制

② 基本思路，为联接边进行非线性赋权

$$\sigma(i, j) = 1$$

$$f(x_i(t) - x_j(t)) = -w(x_i(t) - x_j(t))(x_i(t) - x_j(t))$$

② 设计控制律如下： $(w : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}_+, \quad \{v_i, v_j\} \in E(\mathcal{G}))$

$$\dot{x}_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} w(x_i(t) - x_j(t))(x_i(t) - x_j(t))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}c(x, j) = -D(\mathcal{G})W(x)D(\mathcal{G})^T c(x, j), j = 1, \dots, p$$

$$W(x) = \text{Diag} \left([w_1(x), \dots, w_m(x)]^T \right) \in \mathbf{R}^{m \times m}, m = \text{card}(E)$$

4.2 基于赋权图的反馈控制

⑤ 定义 $L_w(x) = D(\mathcal{G})W(x)D(\mathcal{G})^T$

➡ 保持联接情况下, $L_w(x)$ 半正定, 思考为什么? 核空间是什么?

⑤ 给定临界距离 δ , 以及任意小量 $\epsilon \in (0, \delta)$, 则采用合理的权值设定, 可以保证机器人从 $\delta - \epsilon$ 出发, 而运动不超出临界距离 δ

➡ 定义 $\mathcal{D}_{\mathcal{G}, \delta}^\epsilon = \{x \in \mathbf{R}^{pn} \mid \|\ell_{ij}\| \leq \delta - \epsilon \text{ for all } \{v_i, v_j\} \in E\}$

$$\ell_{ij}(x) = x_i - x_j \quad \{v_i, v_j\} \in E$$

4.2 基于赋权图的反馈控制

⑤ 定义势函数 $\mathcal{V}_{ij}(\delta, x) = \begin{cases} \frac{\|\ell_{ij}(x)\|^2}{\delta - \|\ell_{ij}(x)\|} & \text{if } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$



$$\frac{\partial \mathcal{V}_{ij}(\delta, x)}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{2\delta - \|\ell_{ij}(x)\|}{(\delta - \|\ell_{ij}(x)\|)^2} (x_i - x_j) & \text{if } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

⑤ 全局总势函数 $\mathcal{V}(\delta, x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathcal{V}_{ij}(\delta, x)$



4.2 基于赋权图的反馈控制

☞ 引理1: 给定 $x_0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}, \delta}^\epsilon$, $\epsilon \in (0, \delta)$, 若采用控制律

$$\dot{x}_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{2\delta - \|\ell_{ij}(x(t))\|}{(\delta - \|\ell_{ij}(x(t))\|)^2} (x_i(t) - x_j(t))$$

系统为不变集 $\Omega(\delta, x_0) = \{x | \mathcal{V}(\delta, x) \leq \mathcal{V}(\delta, x_0)\}$

☞ 证明: 首先, 确定机器人状态变化率

$$\dot{x}_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{\partial \mathcal{V}_{ij}(\delta, x)}{\partial x_i} = - \frac{\partial \mathcal{V}(\delta, x)}{\partial x_i} = - \nabla_{x_i} \mathcal{V}(\delta, x)$$



4.2 基于赋权图的反馈控制

⑤ 根据李氏稳定性判别原理

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}(\delta, x(\tau)) &= \nabla_x \mathcal{V}(\delta, x(\tau))^T \dot{x}(\tau) \\ &= - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(\tau)^T \dot{x}_i(\tau) \\ &= - \sum_{j=1}^n c(x(\tau), j)^T L_w(\delta, x(\tau))^2 c(x(\tau), j)\end{aligned}$$

其中

$$L_w(x) = D(\mathcal{G})W(x)D(\mathcal{G})^T$$

$$W(\delta, x) = \text{Diag}(w_k(\delta, x)), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$w_k(\delta, x) = \frac{2\delta - \|\ell_k(x)\|}{(\delta - \|\ell_k(x)\|)^2}$$



4.2 基于赋权图的反馈控制

② 若 $\epsilon > \epsilon'$, 有 $\mathcal{D}_{\mathcal{G},\delta}^\epsilon \subset \mathcal{D}_{\mathcal{G},\delta}^{\epsilon'}$; 可据此定义上界

$$\hat{\mathcal{V}}_\epsilon = \max_{x \in \mathcal{D}_{\mathcal{G},\delta}^\epsilon} \mathcal{V}(\delta, x)$$

② 如果所有机器人均不离开 $\mathcal{D}_{\mathcal{G},\delta}^\epsilon$, 则有

$$\hat{\mathcal{V}}_\epsilon = \frac{m(\delta - \epsilon)^2}{\epsilon}$$

如若 $\hat{\mathcal{V}}_\epsilon$ 由单一机器人贡献, 且 $\hat{\ell}_\epsilon \geq \delta - \epsilon$, 则有

$$\hat{\mathcal{V}}_\epsilon = \frac{\hat{\ell}_\epsilon^2}{\delta - \hat{\ell}_\epsilon}$$



4.2 基于赋权图的反馈控制

④ 由于 $\mathcal{D}_{\mathcal{G},\delta}^\epsilon$ 为不变集，因此可令 $\frac{m(\delta-\epsilon)^2}{\epsilon} = \frac{\hat{\ell}_\epsilon^2}{\delta-\hat{\ell}_\epsilon}$

这意味着 $\hat{\ell}_\epsilon \leq \delta - \frac{\epsilon}{m} < \delta$

④ 定理1：对于静态联接图，前述控制律将渐进收敛于系统重心 \bar{x} 。



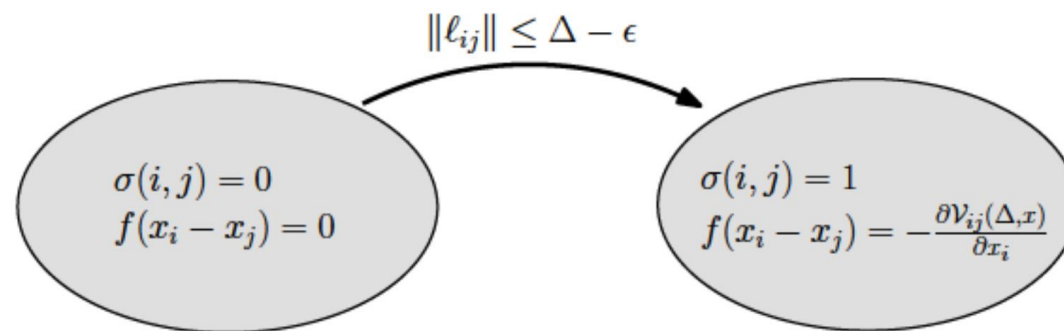
4.2 基于赋权图的反馈控制

④ 动态图的情形

对于 $w_k(\delta, x) = \frac{2\delta - \|\ell_k(x)\|}{(\delta - \|\ell_k(x)\|)^2}$, 当 $\|\ell_k\|$ 趋近于 Δ :

$$\lim_{\|\ell_k\| \uparrow \Delta} w_k(\Delta, \|\ell_k\|) = \infty$$

由于动态图的变换特性，可制定如下形式切换策略

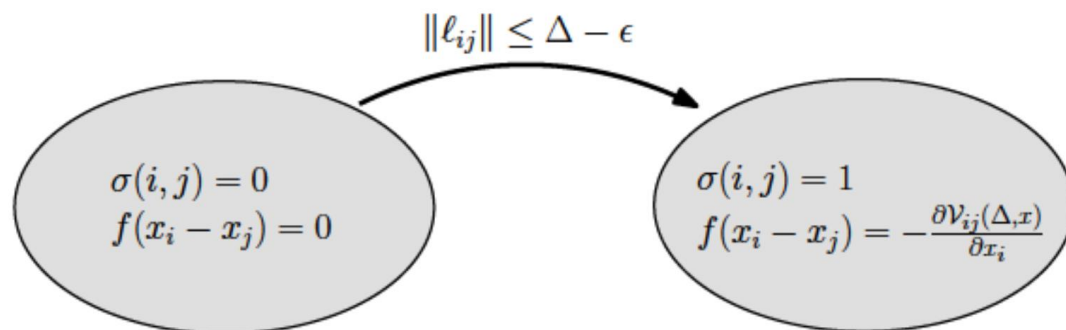


4.2 基于赋权图的反馈控制

⑥ 数学形式表达为

$$\sigma(i, j)[t^+] = \begin{cases} 0 & \text{if } \sigma(i, j)[t^-] = 0 \text{ and } \|\ell_{ij}\| > \Delta - \epsilon \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f(x_i - x_j) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sigma(i, j) = 0 \\ -\frac{\partial \mathcal{V}_{ij}(\Delta, x)}{\partial x_i} & \text{otherwise} \end{cases}$$



4.2 基于赋权图的反馈控制

② 定理2： 给定一个初始的 Δ 盘动态图 \mathcal{G}_0 ，以及切换阈值 $\epsilon > 0$ ，采用以下控制率，可达成连通子图 $\mathcal{G}_{0,\sigma}$ 以渐进收敛：

$$u_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_\sigma(i)} \frac{\partial \mathcal{V}_{ij}(\Delta, x)}{\partial x_i}$$

其中

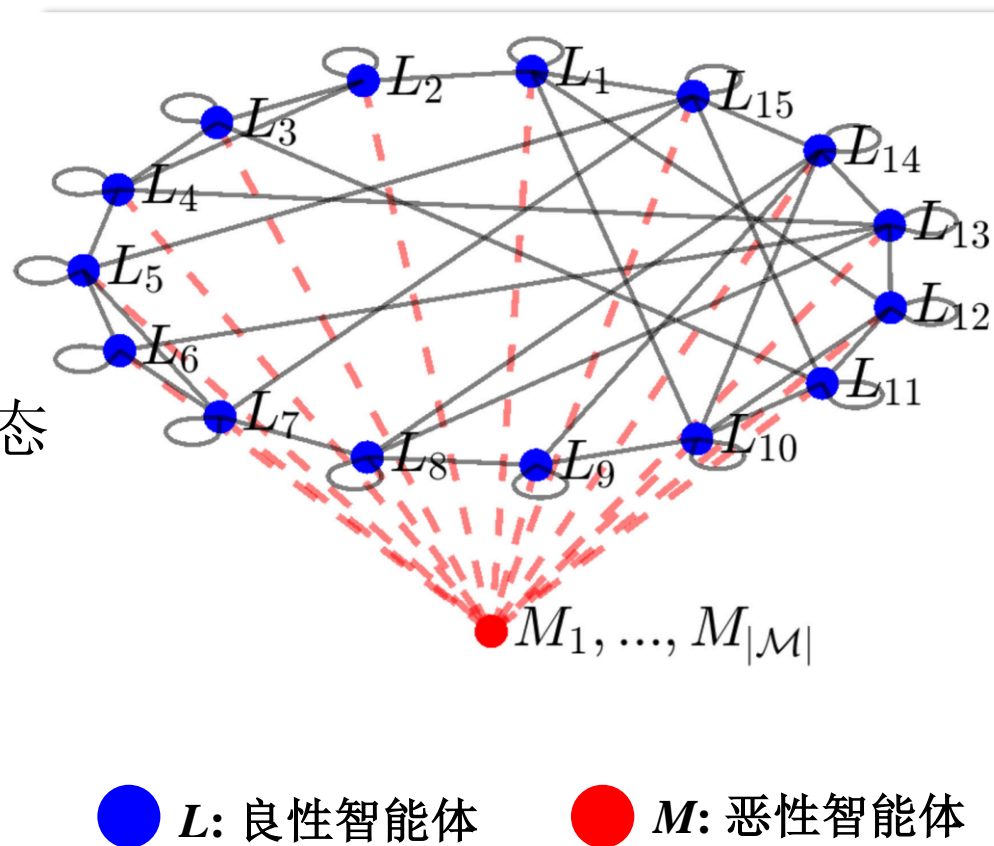
$$\mathcal{G}_\sigma = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}_\sigma))$$

$$E(\mathcal{G}_\sigma) = \{\{v_i, v_j\} \in E(\mathcal{G}) \mid \sigma(i, j) = 1\}$$



*4.3 存在不受控个体下的一致性

- ❑ 良性/恶性个体：受/不受控制
- ❑ 良性个体全连接
- ❑ 两个阶段
 - $t \in [0, T_0)$: 获取邻居信任值, 保持状态
 - $t \in [T_0, +\infty)$: 获取邻居信任值及状态, 更新状态
- ❑ 信任值 $\alpha \in [0, 1]$ 服从某一分布
 - 良性个体期望值 $E(\alpha) > 0.5$
 - 恶性个体期望值 $E(\alpha) < 0.5$



*4.3 存在恶性个体下的一致性

④ 控制律设计

□ $t \geq T_0 - 1$: 一致性控制律设计为

$$x_i(t+1) = w_{ii}(t)x_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(t)x_j(t)$$

其中 $x_i \in R$ 为单个个体的状态; 权重 $w_{ii}(t) > 0, w_{ij}(t) \geq 0, w_{ii}(t) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(t) = 1$; \mathcal{N}_i 为智能体 i 的邻居

□ 定义可信任邻居 $\mathcal{N}_i(t) = \left\{ j \in \mathcal{N}_i : \sum_{k=0}^t (\alpha_{ij}(k) - 1/2) \geq 0 \right\}$

□ 设计权重

$$n_{w_i}(t) = \max\{\kappa, |\mathcal{N}_i(t)| + 1\} \geq 1 \quad \text{for all } i \in \mathcal{L} \implies w_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{n_{w_i}(t)}, & \text{if } j \in \mathcal{N}_i(t) \\ 0, & \text{if } j \notin \mathcal{N}_i(t) \cup \{i\} \\ 1 - \sum_{m \in \mathcal{N}_i} w_{im}(t), & \text{if } j = i \end{cases}$$

其中 $\kappa > 0$ 为人为设定参数, \mathcal{L} 为良性个体集合。

*4.3 存在恶性个体下的一致性

④ 控制律设计

□ 整理成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_{\mathcal{L}}(t+1) \\ x_{\mathcal{M}}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{\mathcal{L}}(t) & W_{\mathcal{M}}(t) \\ \Theta(t) & \Omega(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathcal{L}}(t) \\ x_{\mathcal{M}}(t) \end{bmatrix}$$

其中 $x_{\mathcal{L}}(t) = [x_1(t), \dots, x_{|\mathcal{L}|}(t)]^T$, $x_{\mathcal{M}}(t) = [x_1(t), \dots, x_{|\mathcal{M}|}(t)]^T$ 为由良性和恶性个体组成的状态向量; $|\mathcal{L}|, |\mathcal{M}|$ 为良性、恶性个体数目; $W_{\mathcal{L}}(t), W_{\mathcal{M}}(t)$ 为相应权重矩阵。

□ 进一步有

$$x_{\mathcal{L}}(T_0, t) = \tilde{x}_{\mathcal{L}}(T_0, t) + \phi_{\mathcal{M}}(T_0, t)$$

其中 $\tilde{x}_{\mathcal{L}}(T_0, t) = \left(\prod_{k=T_0-1}^{t-1} W_{\mathcal{L}}(k) \right) x_{\mathcal{L}}(0)$ 受良性个体影响, $\phi_{\mathcal{M}}(T_0, t) = \sum_{k=T_0-1}^{t-1} \left(\prod_{l=k+1}^{t-1} W_{\mathcal{L}}(l) \right) W_{\mathcal{M}}(k) x_{\mathcal{M}}(k)$ 受恶性个体影响。

*4.3 存在恶性个体下的一致性

④ 定理1 - 收敛性

□ 1.1 存在一个处于良性个体初值的凸包内部的一个随机数 $y(T_0)$ ，当 $t \rightarrow \infty$ 时，若无恶性个体的影响，几乎必然有实现以下收敛， $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_{\mathcal{L}}(T_0, t) = y(T_0)\mathbf{1}$

其中 $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{L}| \times 1}$ 。

□ 1.2 当恶性个体的影响引入时，存在一个处于所有智能体初值的凸包内部的一个随机数 $z(T_0)$ ，当 $t \rightarrow \infty$ ，几乎必然有实现以下收敛 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\mathcal{L}}(T_0, t) = z(T_0)\mathbf{1}$

