主观Bayes方法

陈志华

主要内容

- 1. 概率论基础
- 2. 主观Bayes方法的基本理论
- 3. 主观Bayes方法的基本模型

前言

- 主观Bayes方法
  - 杜达(Duda)等人1976年提出的一种不确定性推理算法
  - 以概率论中的Bayes公式为基础
  - 首先应用于专家系统PROSPECTOR（探矿者）系统

和前述推理方法的区别

- 不确定性推理
  - 当一个或多个新证据出现时，根据推理规则，计算结论的可信度
  - 推理前不知道结论的概率信息
- 主观Bayes方法（条件概率）
  - 当一个事件发生后，先验概率如何转变为后验概率
  - 推理前知道结论的先验概率信息
  - 规则的表示不一样

1. 概率论基础

条件概率：

设A，B是两个随机事件，$P(B)>0$，则

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

是在B事件已经发生的条件下， A事件发生的概率。

乘法定理：

$$P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)$$

1. 概率论基础

全概率公式：设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 事件满足：

(1) 两两互不相容，即当 $i \neq j$ 时，有 $A_i \cap A_j = \varnothing$

(2) $P(A_i) > 0 (1 \leq i \leq n)$

(3) 样本空间 $D = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

则对任何事件B, 有下式成立：

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B \mid A_i)$$

称为全概率公式

1. 概率论基础

- 根据全概率公式及乘法定理可以得到**Beyes公式:**

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \times P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P(B \mid A_j)} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

2. 基本理论

- 主观Bayes方法的基本思想
  - 由于证据E的出现，使得P(R)变为P(R|E)
  - 主观Bayes方法，是研究利用证据E，将先验概率P(R)更新为后验概率P(R|E)
- 先验概率P(R), 即不考虑证据E出现的前提下，结论R成立的概率

一. 知识不确定性的表示（产生式规则）

$$IF \quad E \quad THEN \quad (LS, LN) \quad R(P(R))$$

- 其中
  - **LS: 充分性量度**
  - **LN: 必要性量度**
  - **P(R) : R的先验概率**

二. 基本算法

- 证据E有3种情形
  - 1) 肯定存在，即$P(E)=1$
  - 2) 肯定不存在，即$P(E)=0$
  - 3) 不确定， $0<P(E)<1$
- 在不同的情形下，后验概率的计算方法不同

1) 证据E肯定存在

- 假设规则如下

  —IF E THEN R

- 根据乘法定理，得到

  —P(R|E)=P(E|R)P(R)/P(E)　　（式1）

  $P(\neg R|E)=P(E|\neg R)P(\neg R)/P(E)$

- 两式相除，得到

$$\frac{P(R|E)}{P(\neg R|E)}=\frac{P(E|R)}{P(E|\neg R)}\cdot\frac{P(R)}{P(\neg R)}$$

1) 证据E肯定存在

- 定义几率函数： $$O(x)=\frac{P(x)}{1-P(x)}$$
- 则 $$P(x)=\frac{O(x)}{1+O(x)}$$ （式2）
- 设： $$LS=P(E\mid R)/P(E\mid\neg R)$$ （式3）
- 则式1变为 $$O(R\mid E)=LS\cdot O(R)$$

2) 证据E肯定不存在

- P(E)=0
- 同样可以推导出
  - O(R|¬ E)=LN× O(R)
- 其中

$$LN = \frac{P(\neg E \mid R)}{P(\neg E \mid \neg R)} = \frac{1 - P(E \mid R)}{1 - P(E \mid \neg R)} \qquad \text{（式4）}$$

2) 证据E肯定不存在

- 将O(x)重新替换成概率，得到：

$$P(R \mid E) = \frac{LS \cdot P(R)}{(LS-1) \cdot P(R) + 1}$$ （式5）

$$P(R \mid \neg E) = \frac{LN \cdot P(R)}{(LN-1) \cdot P(R) + 1}$$ （式6）

讨论：O(x)与P(x)的单调性

- **O(x)与P(x)的单调性相同**，即可从数学上推导出：

$$P(R \mid E) > P(R) \text{当且仅当} O(R \mid E) > O(R)$$

$$P(R \mid \neg E) > P(R) \text{当且仅当} O(R \mid \neg E) > O(R)$$

LS和LN的讨论

- **LS表示证据E的存在，影响结论R为真的概率：**

$$O(R \mid E) = LS \cdot O(R)$$

当$LS \to +\infty$时，证据 E将使得 R为真；

当$LS > 1$时，可证明 $P(R \mid E) > P(R)$,

即E导致R为真的可能性增加；

当$LS = 1$时，E与R无关；

当$LS < 1$时，E导致R为真的可能性下降；

当$LS = 0$时，E导致R为假。

LS和LN的讨论

- LN表示证据E的不存在，影响结论R为真的概率：

O(R|¬ E)=LN× O(R)

当$LN \to +\infty$时，$\neg E$将使得 R为真；

当$LN > 1$时，$\neg E$导致R为真的可能性增加；

当$LN = 1$时，$\neg E$与R无关；

当$LN < 1$时，$\neg E$导致R为真的可能性下降；

当$LN = 0$时，$\neg E$导致R为假。

LS和LN的讨论

- 上述结论也可以直接从公式5,6推导出来
  - LS>1，使得$P(R|E)>P(R)$
  - LS<1，使得$P(R|E)<P(R)$
  - LN>1，使得$P(R|\neg E)>P(R)$
  - LN<1，使得$P(R|\neg E)<P(R)$

例子

- 假设有如下规则:
  - 规则1: IF E1 THEN(10,1) R1(0.03)
  - 规则2: IF E2 THEN (20,1) R2(0.05)
  - 规则3: IF E3 THEN (1,0.002) R3(0.3)
  - 求(1) 当E1,E2,E3都存在时, $P(R_i|E_i)$
  - (2) 当E1,E2,E3都不存在时, $P(R_i|\neg E_i)$

例子

- 分析：利用公式5，6
- 答案:

$$P(R1 \mid E1) = 0.24$$

$$P(R2 \mid E2) = 0.51$$

$$P(R3 \mid E3) = 0.3$$

$$P(R1 \mid \neg E1) = 0.03$$

$$P(R2 \mid \neg E2) = 0.05$$

$$P(R3 \mid \neg E3) = 0.00086$$

练习

- 设有如下推理规则：
  - R1: IF E1 THEN (2,0.5)H1
  - R2: IF E2 THEN (1,0.2)H2
  - R3: IF E3 THEN (5,0.1)H3
- 并且已知P(H1)=0.2, P(H2)=0.1, P(H3)=0.4
- 计算当证据E1,E2,E3存在或不存在时，P(Hi|Ei)或P(Hi|¬Ei)的值各是多少？(i=1,2,3)

3) 证据E不确定

- 在现实中证据往往是不确定的，无法肯定它一定存在或一定不存在
  - 用户提供的原始证据不精确
    - 用户的观察不精确
  - 推理出的中间结论不精确
- 假设S是对E的观察,则P(E|S)表示在观察S下, E为真的概率, 值在[0,1]；

3) 证据E不确定

- 此时0<P(E|S)<1，故计算后验概率P(R|S), 不能使用Bayes公式

- 可以采用下面的公式修正（杜达公式）

$$P(R|S)=P(R|E)\times P(E|S)+P(R|\neg E)\times P(\neg E|S)$$

（式7）

后验概率P(R|S)的计算-1

- 针对杜达公式，分四种情况讨论

- 1）E肯定存在，即P(E|S)=1, 且P(¬E | S)=0，
  杜达公式简化为：

$$P(R\mid S)=P(R\mid E)=\frac{LS\times P(R)}{(LS-1)P(R)+1}$$

- 注意：同时利用了公式5

后验概率P(R|S)的计算-2

- 2）E肯定不存在，即P(E|S)=0， P(¬ E | S)=1，

  杜达公式简化为：

$$P(R \mid S) = P(R \mid \neg E) = \frac{LN \times P(R)}{(LN-1)P(R)+1}$$

- 注意：同时利用了公式6

后验概率P(R|S)的计算-3

- 3） P(E|S)= P(E)，即E和S无关， 利用全概率公式，杜达公式可以化为：

$$P(R \mid S) = P(R \mid E) \times P(E) + P(R \mid \neg E) \times P(\neg E) = P(R)$$

后验概率P(R|S)的计算-4

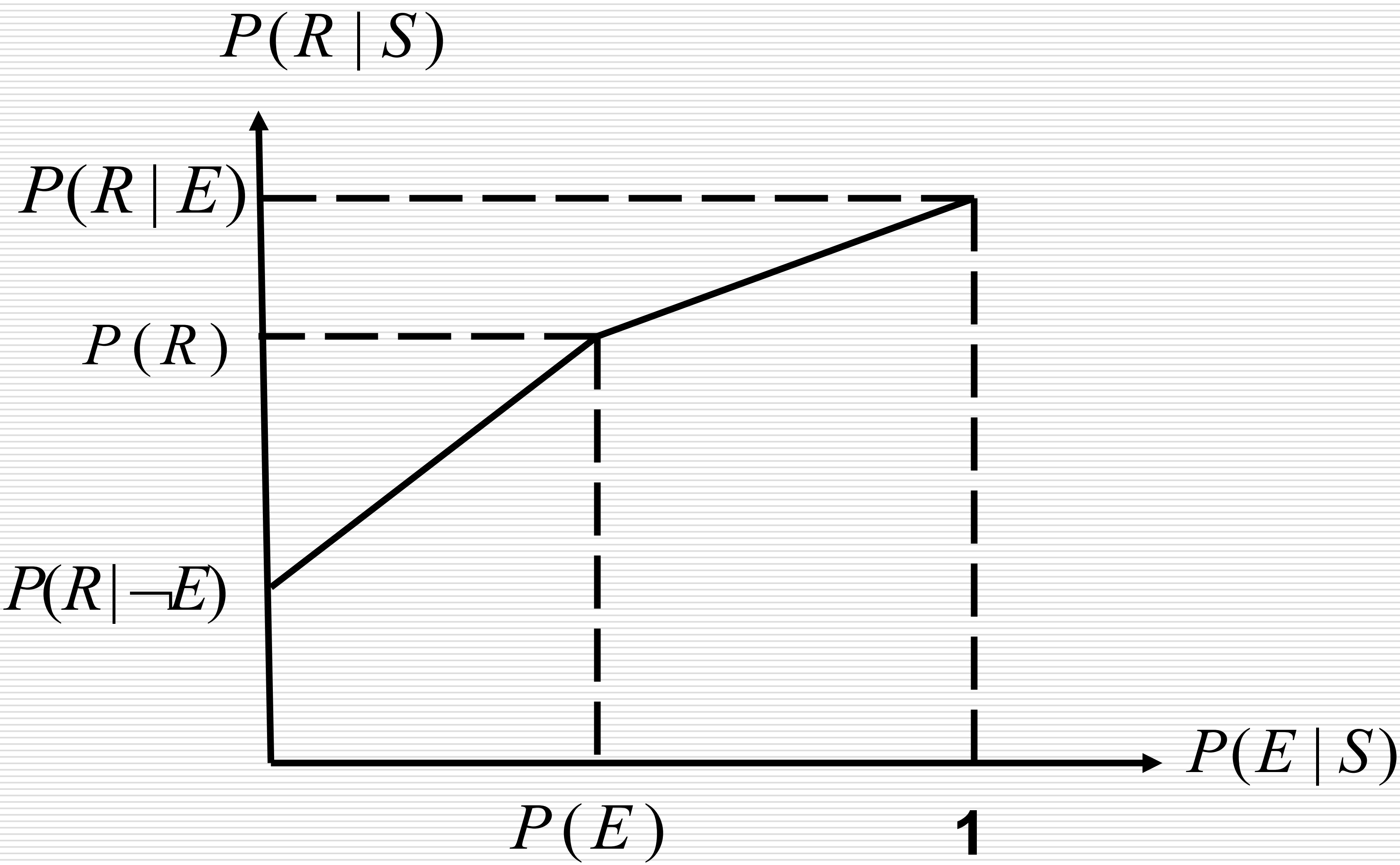
- 当P(E|S)为其它值（非0，非1，非P(E)）时，

  则需要通过分段线形插值计算：

$$P(R|S)=\begin{cases} P(R|\neg E)+\dfrac{P(R)-P(R|\neg E)}{P(E)}\cdot P(E|S), 当 0\le P(E|S)<P(E) \\ P(R)+\dfrac{P(R|E)-P(R)}{1-P(E)}\cdot [P(E|S)-P(E)], 当 P(E)\le P(E|S)\le 1 \end{cases}$$

公式8

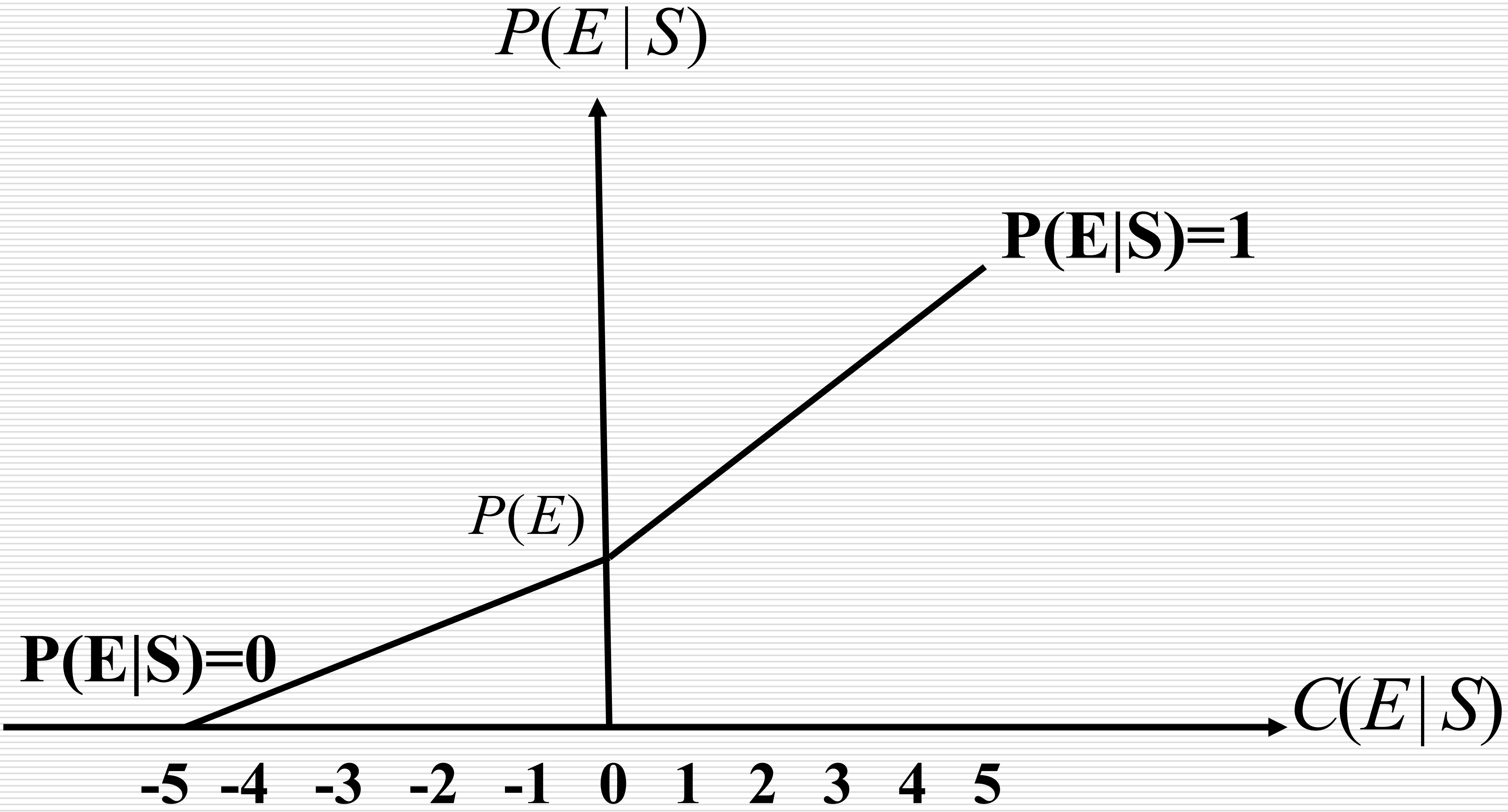
后验概率P(R|S)的线性插值图



杜达公式的说明

- P(E|S)
  - 由用户给定，但是P(E)和P(E|S)很难区分和取值
- 解决方法：替代法
  - 对于原始证据，由用户给定可信度 C(E|S)，对应 P(E|S)
  - C(E|S) 取值从-5到5的整数

杜达公式的说明



杜达公式的说明

此时公式8变换为公式9

$$P(R|S)=\begin{cases} P(R|\neg E)+(P(R)-P(R|\neg E))\times(\frac{1}{5}C(E|S)+1), C(E|S)\le 0 \\ P(R)+(P(R|E)-P(R))\times\frac{1}{5}C(E|S), C(E|S)>0 \end{cases}$$

公式9

3. 推理模型

- 一. 组合证据不确定性的计算
  - 组合证据为多个证据的合取时,即**E=E$_1$ AND E$_2$ AND … E$_n$**

$$CF(E)=\min\{CF(E_1),CF(E_2),\ldots,CF(E_n)\}$$

  - 组合证据为多个证据的析取时,即**E=E$_1$ OR E$_2$ OR … E$_n$**

$$CF(E)=\max\{CF(E_1),CF(E_2),\ldots,CF(E_n)\}$$

3. 推理模型

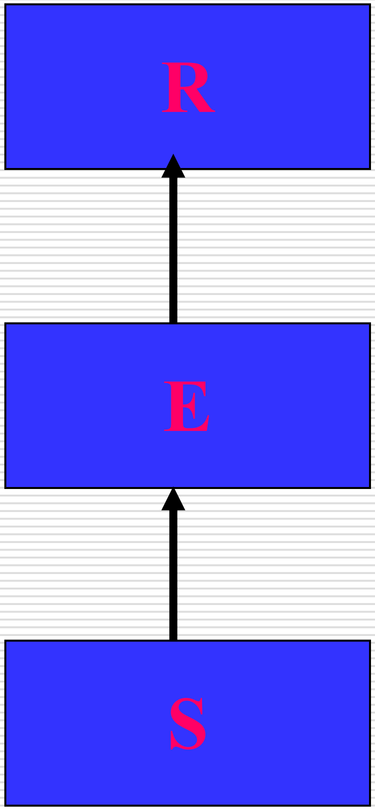
- 二. 证据不确定性的传递
- **(1) 对于叶结点证据E的传递**

$$P(R|S)=\begin{cases} P(R|\neg E)+(P(R)-P(R|\neg E))\times(\frac{1}{5}C(E|S)+1), & C(E|S)\le 0 \\ P(R)+(P(R|E)-P(R))\times\frac{1}{5}C(E|S), & C(E|S)>0 \end{cases}$$

公式9

- 该公式基于**R-E-S**的推理链

3. 推理模型



叶结点不确定性的传递

3. 推理模型

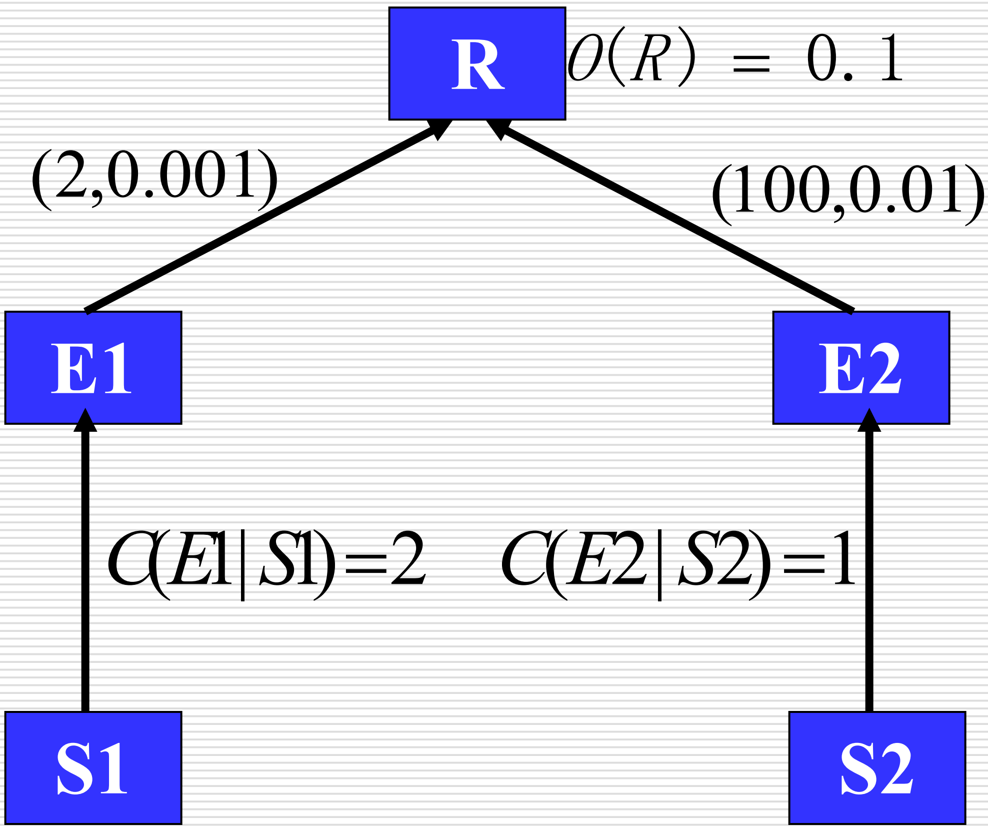
- 三. 结论不确定性的合成
  - n条规则都支持同一结论R,
  - 这些规则的前提条件$E_1, E_2, \ldots, E_n$ 相互独立
  - 每个证据所对应的观察为$S_1, S_2, \ldots, S_n$
- 先计算$O(R|S_i)$，然后再计算所有观察下， R的后验几率计算方法: (公式11)

$$O(R|S_1,S_2,\cdots,S_n)=\frac{O(R|S_1)}{O(R)}\times\frac{O(R|S_2)}{O(R)}\times\cdots\times\frac{O(R|S_n)}{O(R)}\times O(R)$$

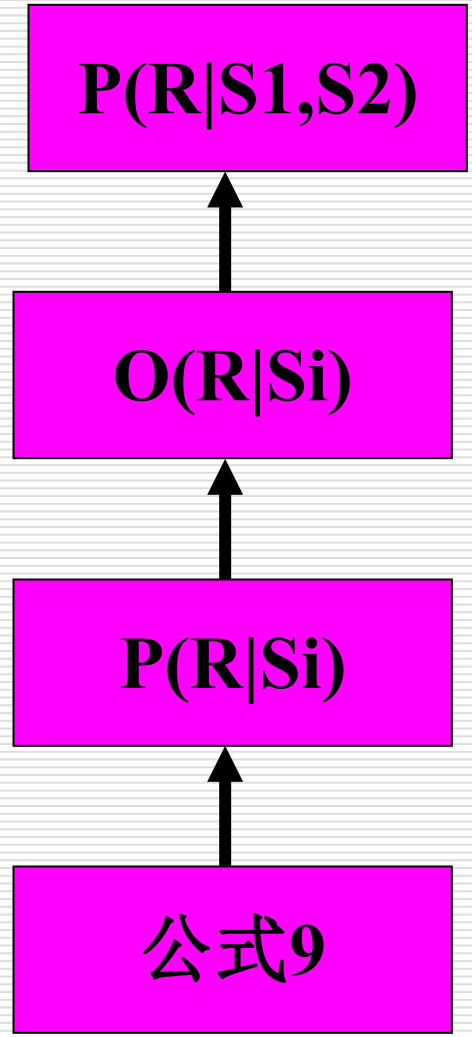
例 题

- 设有如下规则：
  - **规则1: IF E1 THEN (2,0.001) R**
  - **规则2: IF E2 THEN (100,0.001) R**
  - **且O(R)=0.1, C(E1|S1)=2, C(E2|S2)=1**
- 试画出推理树，并计算**O(R|S1,S2)**

例 题


R
$O(R) = 0.1$
(2,0.001)
(100,0.01)
E1
E2
$C(E1|S1)=2$
$C(E2|S2)=1$
S1
S2

推理树


P(R|S1,S2)
O(R|Si)
P(R|Si)
公式9

例 题

解题步骤：

- (1)先计算P(R|S1), 并计算O(R|S1);
  - 利用公式2，公式5，公式9
- (2)两条规则支持同一个结论，计算O(R|S1,S2);
  - 利用公式11

例 题

步骤1：计算$P(R \mid Si)$和$O(R \mid Si)$

$$P(R)=\frac{O(R)}{1+O(R)}=\frac{0.1}{1+0.1}=0.09$$

$$P(R \mid E1)=\frac{LS1\times O(R)}{1+LS1\times O(R)}=\frac{2\times 0.1}{1+2\times 0.1}=0.17$$

因为$C(E1 \mid S1)>0$

所以$P(R \mid S1)=P(R)+(P(R \mid E1)-P(R))\times\frac{1}{5}C(E1 \mid S1)$

$$=0.09+(0.17-0.09)\times\frac{1}{5}\times 2=0.122$$

$$O(R \mid S1)=\frac{P(R \mid S1)}{1-P(R \mid S1)}=\frac{0.122}{1-0.122}=0.14$$

例 题

$$P(R \mid E2) = \frac{LS2 \times O(R)}{1 + LS2 \times O(R)} = \frac{100 \times 0.1}{1 + 100 \times 0.1} = 0.91$$

因为$C(E2 \mid S2) > 0$

所以$P(R \mid S2) = P(R) + (P(R \mid E2) - P(R)) \times \frac{1}{5} C(E2 \mid S2)$

$$= 0.09 + (0.91 - 0.09) \times \frac{1}{5} \times 1 = 0.254$$

$$O(R \mid S2) = \frac{P(R \mid S2)}{1 - P(R \mid S2)} = \frac{0.254}{1 - 0.254} = 0.34$$

例 题

步骤2 : 规则的合成，计算 $O(R \mid S1, S2)$

$$O(R \mid S1, S2)$$

$$= \frac{O(R \mid S1)}{O(R)} \times \frac{O(R \mid S2)}{O(R)} \times O(R)$$

$$= \frac{0.139}{0.1} \times \frac{0.34}{0.1} \times 0.1 = 0.476$$

主观Bayes方法的特点

- 优点
  - 计算公式基于概率论，具有坚实的理论基础
  - LS、LN由专家给出，可全面反映证据和结论的因果关系
- 缺点:
  - 推理前必须要知道结论的先验概率信息
  - 事件独立性的要求过于苛刻

小 结

- 主观Bayes方法（条件概率）
  - 当一个事件发生后，先验概率如何转变为后验概率
  - 推理前知道结论的先验概率信息
- 证据不确定时，必须采用杜达等人推导的公式:
  - $P(R|S)=P(R|E)\times P(E|S)+P(R|\neg E)\times P(\neg E|S)$
- 传递公式: 公式9和公式10

练 习

- 设有如下规则：
  - 规则1: IF E1 THEN (2,0. 1) R
  - 规则: IF E2 THEN (10, 1) R
  - 且P(R)=0.01, C(E1|S1)=2, C(E2|S2)=2,
  - 试根据主观Bayes方法，计算O(R|S1,S2)

练 习

- 设有如下规则：
  - 规则1: IF E1 THEN(2,0.1) R
  - 规则2: IF E2 THEN(10,0.1)R
  - 且已知O(R)=0.1, C(E1|S1)=3, C(E2|S2)= -1,

    试用主观Bayes方法计算：O(R|S1, S2)=?