

2-7 偏序关系

概念：

偏序关系，全序(线序)关系，哈斯图

偏序 (Partial Ordering)

设 A 是一个集合. 如果 A 上的二元关系 R 是**自反的,反对称的和传递的**, 则称 R 是 A 上的一个**偏序关系**. 记 R 为“ \leq ”, 且称序偶 $\langle A, \leq \rangle$ 为**偏序集**。

例: 设 $A=\{a,b\}$,在 $P(A)$ 上的二元关系 R 为包含关系, 即

$$R=\{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in P(A) \text{ 且 } x \subseteq y \}$$

证明: $\langle P(A), R \rangle$ 是偏序集.

全序/线序(Total Ordering/ Linear Ordering)

设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, 若对任意的 $x, y \in A$ 满足:

$$x \leq y \text{ 或 } y \leq x$$

则称 \leq 为全序关系. $\langle A, \leq \rangle$ 为全序集.

例: (1) \mathbb{Z} 为整数集, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ 为全序集。

(2) 设 $A = \{a, b\}$, 则 $\langle P(A), \subseteq \rangle$ 是偏序集, 但不是全序集。

覆盖 (Covering)

设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, 若 $x, y \in A$,

$x \leq y, x \neq y$ 且没有其它元素 z 满足 $x \leq z, z \leq y$,

则称 y 覆盖 x . 记 $\text{cov}A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \text{ 且 } y \text{ 覆盖 } x \}$

例: 设 $A = \{a, b\}$, $\langle P(A), \subseteq \rangle$ 是偏序集。

则: $\text{cov}(P(A)) = \{ \langle \emptyset, \{a\} \rangle, \langle \emptyset, \{b\} \rangle, \langle \{a\}, \{a, b\} \rangle, \langle \{b\}, \{a, b\} \rangle \}$

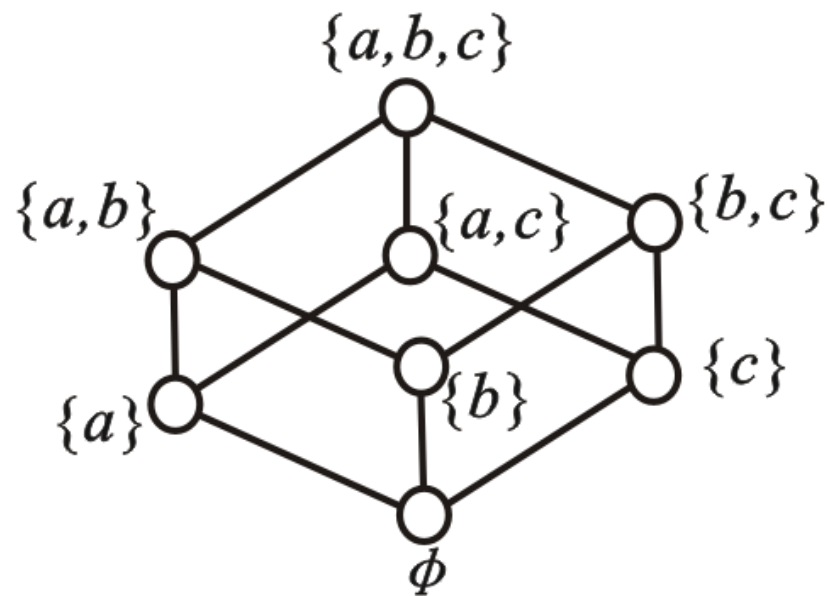
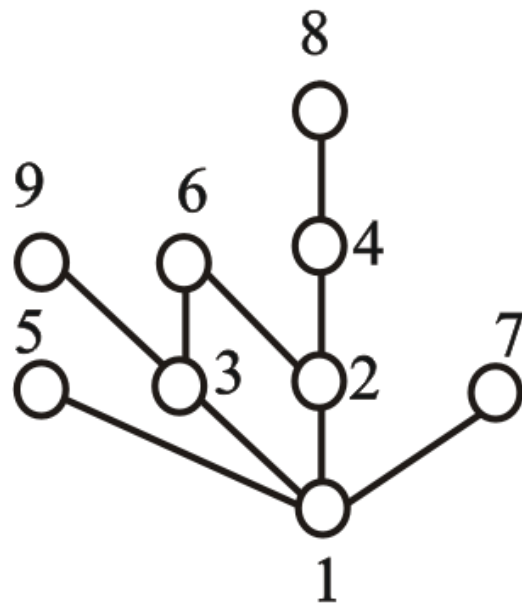
哈斯图(Hasse Diagram)

作图规则

- ① 用小元圈 \circ 代表元素;
- ② 若 $x \leq y$ 且 $x \neq y$,则将代表 y 的小元圈画在代表 x 的小元圈之上;
- ③ 若 $\langle x, y \rangle \in \text{cov}A$, 则在 x, y 之间用直线连接。

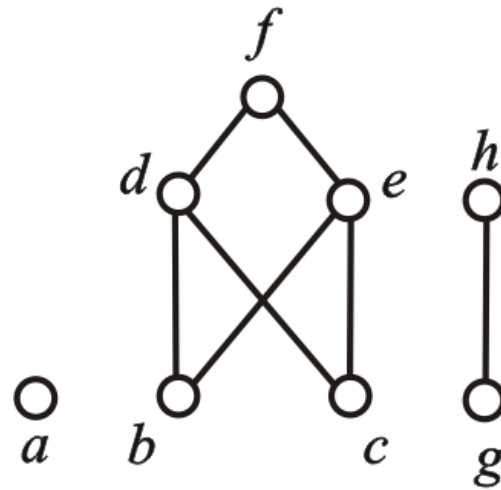
例子

偏序集 $\langle \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{\text{整除}} \rangle$ 和 $\langle P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq} \rangle$
的哈斯图.



实例

已知偏序集 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图如下图所示, 试求出集合 A 和关系 R 的表达式.



解 $A = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$

$R = \{ \langle b, d \rangle, \langle b, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle, \langle g, h \rangle \} \cup I_A$

总结

- 偏序关系
- 全序(线序)关系
- 哈斯图