2-2 集合恒等式

概念：

集合恒等式，集合等式证明

集合恒等式

集合恒等式（算律）

1. 只涉及一个运算的算律：

   交换律、结合律、幂等律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C$ $=A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

集合算律

2．涉及两个不同运算的算律：

分配律、吸收律

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=$ $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=$ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)$ $=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合算律

3．涉及补运算的算律：

德摩根律，双重否定律

	$-$	$\sim$
德摩根律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

集合算律

4． 涉及全集和空集的算律：

补元律、零律、同一律、否定律

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap{\sim}A=\varnothing$	$A\cup{\sim}A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	${\sim}\varnothing=E$	${\sim}E=\varnothing$

集合证明题

证明方法：外延性原理、等式置换法

外延性原理证明的书写规范 (以下的X和Y代表集合公式)

(1) 证$X\subseteq Y$

任取x， $x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$

(2) 证$X=Y$

方法一 分别证明 $X\subseteq Y$ 和 $Y\subseteq X$

方法二

任取x，$x\in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\in Y$

注意：在使用方法二时，必须保证每步推理都是充分必要的。

集合等式的证明

方法一：外延性原理

例1： 证明$A\cup(A\cap B) = A$ （吸收律）

证 任取x,

$$
\begin{aligned}
& x\in A\cup(A\cap B) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\vee x\in A\cap B \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A
\end{aligned}
$$

因此得 $A\cup(A\cap B) = A$.

集合等式的证明

例2：　证明 $A-B = A\cap\sim B$

证　任取x,

$$x\in A-B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\cap\sim B$$

因此得 $A-B = A\cap\sim B$

等式置换法

方法二：等式置换法（利用集合恒等式）

例3 ：证明 $(A-B) \cup B = A \cup B$

证： $(A-B) \cup B$

$= (A \cap {\sim}B) \cup B$

$= (A \cup B) \cap ({\sim}B \cup B)$

$= (A \cup B) \cap E$

$= A \cup B$

等式置换法

例4： 已知$A\oplus B=A\oplus C$，证明 B = C.

证： 已知$A\oplus B=A\oplus C$，所以有

$$A\oplus(A\oplus B) = A\oplus(A\oplus C)$$

$$\Rightarrow \quad (A\oplus A)\oplus B = (A\oplus A)\oplus C$$

$$\Rightarrow \quad \varnothing\oplus B = \varnothing\oplus C$$

$$\Rightarrow \quad B = C$$

等式置换法

例4 ：证明 （A-B) ∪B = A ∪ B

证： （A-B) ∪B

$= (A \cap \sim B) \cup B$

$= (A \cup B) \cap (\sim B \cup B)$

$= (A \cup B) \cap E$

$= A \cup B$

总结

- 集合恒等式
- 集合等式证明