2-11、集合基数

概念：

基数，等势

- 1638年，意大利天文学家Galieo比较集合大小的困惑：“部分”等于“整体”？

  $N=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

  $N^{(2)}=\{0, 1, 4, 9, \cdots\}$

- 1874-1897年，德国数学家Cantor

  冲破传统观念，采用数“数”的方法观察集合大小。

基数(Cardinality)

用来衡量集合大小的一个概念。 对于有限集合集来说，集合的基数就是其中所含元素的个数。

等势的（基数相同）

设A, B是集合, 如果存在着从A到B的双射函数, 就称A和B是等势的, 记作$A \approx B$. 如果A不与B 等势, 则记作$A \not\approx B$.

注：通常将A的基数记为 |A|.

重要等势结果

- $\mathbf{N} \approx \mathbf{Z} \approx \mathbf{Q} \approx \mathbf{N} \times \mathbf{N}$
- 任何实数区间都与实数集合R等势
- $\{0,1\}^{\mathbf{N}} \approx R$

（1）证明： Z≈N.

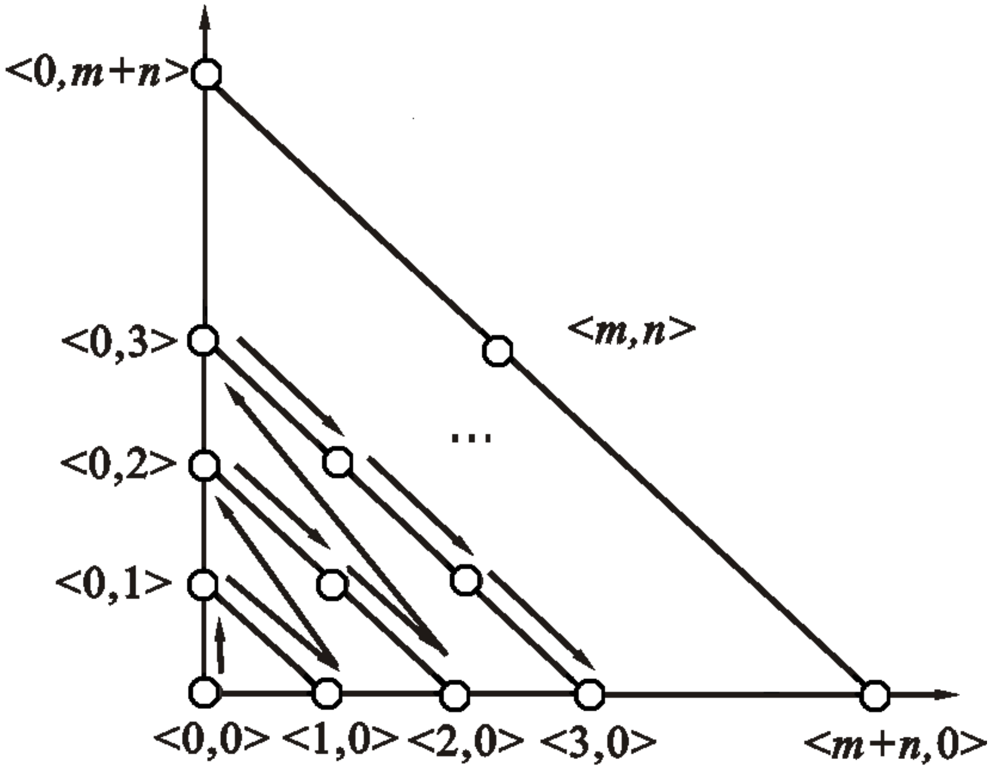
证：

$$f: \mathrm{Z} \to \mathrm{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

则 f 是Z到N的双射函数。从而证明了Z≈N.

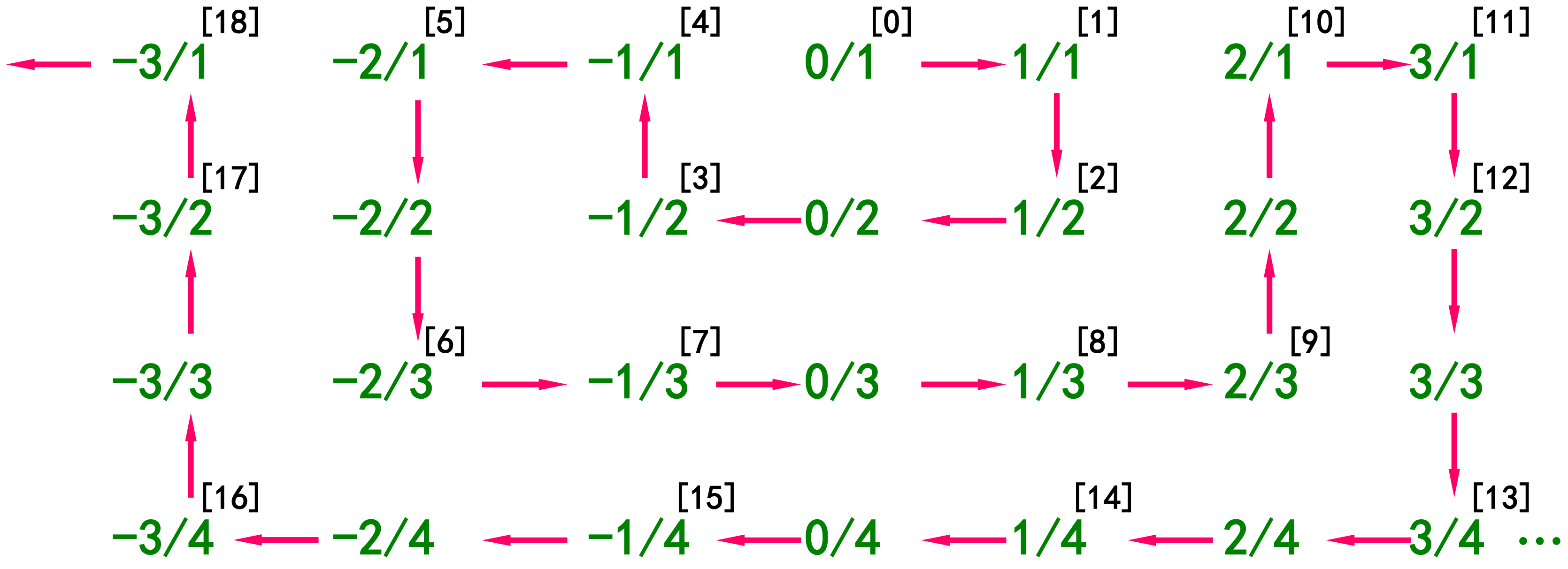
（2）N≈Q

① N×N≈N.　N×N中所有的元素排成有序图形



$$f: \mathrm{N}\times\mathrm{N}\to\mathrm{N},\quad f(<m,n>)=\frac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m$$

②N≈Q. 双射函数 f:N→Q, 其中$f(n)$是$[n]$下方的有理数.



PLAY

(3) (0,1)≈R. 其中实数区间 $(0,1)=\{x \mid x\in R\wedge 0<x<1\}$.

证：

$$f:(0,1)\to \mathrm{R},\quad f(x)=\tan\pi\frac{2x-1}{2}$$

(4) $[0,1]\approx(0,1)$. 其中(0,1)和[0,1]分别为实数开区间和闭区间.

证：令 $f:[0,1]\to(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}1/2 & x=0\\ 1/2^2 & x=1\\ 1/2^{n+2} & x=1/2^n,\ n=1,2,\ldots\\ x & \text{其它}x\end{cases}$$

(5) 对任何$a, b\in \mathrm{R}$, $a<b$, $[0,1]\approx[a,b]$。

证：双射函数 $f:[0,1]\to[a,b]$,

$$f(x)=(b-a)x+a$$

类似地可以证明, 对任何$a, b\in R$, $a<b$, 有$(0,1)\approx(a,b)$.

(6) 设A为任意集合, 则$P(A)\approx\{0,1\}^A$.

证 如下构造从$P(A)$ 到 $\{0,1\}^A$ 的函数

$$f:P(A)\to\{0,1\}^A,\quad f(A')=\chi_{A'},\ \forall A'\in P(A).$$

其中$\chi_{A'}$是集合A'的特征函数. 易证 f 是单射的.

对于任意的 $g\in\{0,1\}^A$, 那么有 $g:A\to\{0,1\}$. 令

$$B=\{\,x\mid x\in A\wedge g(x)=1\}$$

则$B\subseteq A$, 且$\chi_B=g$, 即$\exists B\in P(A)$, $f(B)=g$. 从而证明了f 是满射的.

由等势定义得 $P(A)\approx\{0,1\}^A$.

等势结果

- $N \approx Z \approx Q \approx N \times N$
- 任何实数区间都与实数集合R等势

总结

- 集合基数
- 等势