2-9、函数

概念：

函数， 常函数， 恒等函数， 满射，单射，双射，

特殊函数

函数

设X,Y为两个集合,f$\subseteq$ X$\times$Y, 若对$\forall x\in X$,$\exists! y\in Y$,满足:

$$<x,y>\in f,$$

则称f为**函数**.记为:**$f:X\to Y$**

- **定义域**: domf=X
- **值域**: ranf (有时记为f(X))={f(x)|x$\in$X}

例: 判别下列关系能否构成函数.

$f1 = \{< y_1,y_2> | y_1,y_2\in R \text{ 且} y_2^2=y_1\}$

$f2 = \{< y_1,y_2> | y_1,y_2\in R \text{ 且 } y_2 = y_1^2\}$

$f3 = \{< y_2,y_1> | y_1,y_2\in R \text{ 且} y_2^2 =y_1\}$

$f4 = \{< y_1,y_2> | y_1,y_2\in N \text{ 且} y_1 + y_2<10\}$

函数相等

设f和g都是从A到B的函数, 若对任意$x \in A$,有$f(x)=g(x)$,

则称**f和g相等**.记为$f=g$

函数的个数

设$f:A\to B$,$|A|=m$, $|B|=n$.记 $B^A=\{f|f: A\to B\}$,

则$| B^A |= n^m$

实例

设$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 求B^A.

解：$B^A=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$$f_0 = \{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$$

$$f_1 = \{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$$

$$f_2 = \{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$$

$$f_3 = \{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$$

$$f_4 = \{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$$

$$f_5 = \{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$$

$$f_6 = \{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$$

$$f_7 = \{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$$

满射(Surjective)　(到上映射)

设 $f: X \to Y$, 若 $\mathrm{ran}f = Y$, 则称 f 为满射的.

入射(Injective)　(一对一映射)

设 $f: X \to Y$, 对 $\forall\, x_1, x_2 \in X$, 满足:

若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$,

称 f 为入射的.

双射(bijective) (一一对应映射)

设 $f: X \to Y$, 若f既是满射的, 又是入射的. 则称f是双射的.

例：判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) f:R→R, $f(x) = -x^2+2x-1$

(2) f:Z^+→R, $f(x) = \ln x$, Z^+为正整数集

(3) f:R→Z, $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(4) f:R→R, $f(x)=2x+1$

(5) f:R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.

	单射	满射	双射
（1）	×	×	×
（2）	√	×	×
（3）	×	√	×
（4）	√	√	√
（5）	×	×	×

几个特殊函数

(1)设 $f:A\to B$, 如果存在$c\in B$使得对所有的 $x\in A$都有 $f(x)=c$,

则称 $f:A\to B$是**常函数**.

(2) 称 A上的恒等关系I_A为A上的**恒等函数**, 对所有的$x\in A$都有$I_A(x)=x$.

几个特殊函数

(3) 设$<A, \preccurlyeq>$, $<B, \preccurlyeq>$为偏序集，$f:A\to B$，如果对任意的 x_1, $x_2\in A$, $x_1 \prec x_2$, 就有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的；如果对任意的x_1, $x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有$f(x_1) \prec f(x_2)$, 则称 f 为严格单调递增的. 类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数。

几个特殊函数（续）

(4) 设A为集合, 对于任意的$A'\subseteq A$, A'的特征函数

$\chi_A{}'$:$A\to\{0,1\}$定义为

$$\chi_A{}'(a)=1,\ a\in A'$$

$$\chi_A{}'(a)=0,\ a\in A-A'$$

几个特殊函数（续）

(5) 设R是A上的等价关系, 令

$$g:A\to A/R$$

$$g(a)=[a],\ \forall a\in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射

总结

- 函数
- 满射, 入射, 双射
- 常函数，恒等函数，单调函数，特征函数，自然映射