2-10、函数的运算

概念：

复合函数，反函数

复合函数

设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$, 定义:

$f\circ g = \{<x,z>|x\in X$且$z\in Z$且可找到$y\in Y$使$y=f(x),z=g(y)\}$

称$f\circ g$为**f与 g 的复合函数**.

注: (1) 课本中关系、函数均使用“右复合”。函数复合在习惯上也常采用“左复合”，$g\circ f(a)=g(f(a))$。读文献时须留意。

(2) 函数的复合运算可结合.

函数复合与函数性质

定理 设$f:A\to B$, $g:B\to C$

(1) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是满射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是满射的;

(2) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是单射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是单射的 ;

(3) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是双射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是双射的 。

定理证明

(1) 如果 f:$A\to B$, g:$B\to C$是满射的, 则 $f\circ g$:$A\to C$也是满射的。

证：任取$c\in C$,

由g:$B\to C$的满射性, $\exists b\in B$使得 $g(b)=c$.

对于这个b, 由 f:$A\to B$的满射性，$\exists a\in A$使得 $f(a)=b$.

所以 $f\circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$

从而证明了$f\circ g$:$A\to C$是满射的。

(2)如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是单射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是单射的。

证：假设存在$x_1, x_2\in A$使得

$f\circ g(x_1)=f\circ g(x_2)$，即：$g(f(x_1))=g(f(x_2))$

因为$g:B\to C$是单射的, 故 $f(x_1)=f(x_2)$.

又由于$f:A\to B$是单射的, 所以$x_1=x_2$.

从而证明$f\circ g:A\to C$是单射的.

(3)如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是双射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是双射的 。

证：由(1)和(2)得证.

反函数（逆函数）

设f:A→B是一个双射函数，那么f^{-1}是B→A的双射函数，

称f^{-1}为f的反函数。

证： (1)首先证明f^{-1}是函数。

因为 f 是函数, 所以 f^{-1}是关系, 且 $\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran} f = B$， $\mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom} f = A$

对于任意的 $x \in B = \mathrm{dom}\, f^{-1}$, 假设有$y_1, y_2 \in A$使得

$$<x,y_1> \in f^{-1} \wedge <x,y_2> \in f^{-1}$$

成立, 则由逆的定义有

$$<y_1,x> \in f \wedge <y_2,x> \in f$$

根据 f 的单射性可得$y_1=y_2$, 从而证明了f^{-1}是函数，且是满射的。

（2）再证明f^{-1}是双射函数。

若存在$x_1, x_2 \in B$使得$f^{-1}(x_1)= f^{-1}(x_2)=y$, 从而有

$$<x_1, y>\in f^{-1} \wedge <x_2, y>\in f^{-1}$$

$$\Rightarrow <y, x_1>\in f \wedge <y, x_2>\in f \Rightarrow x_1=x_2$$

定理：设 $f:A\to B$是双射的, 则 $f^{-1}\circ f = I_B$, $f\circ f^{-1} = I_A$

证明思路：

根据定理可知 $f^{-1}:B\to A$也是双射的, 由合成基本定理可知 $f^{-1}\circ f:B\to B$, $f\circ f^{-1}:A\to A$，且它们都是恒等函数.

总结

- 复合函数
- 反函数