集合论

Set Theory

虞慧群
yhq@ecust.edu.cn

内容提要

1. 集合
2. 关系
3. 关系性质与闭包
4. 等价关系
5. 偏序关系
6. 函数
7. 集合基数

2-1、集合与运算

概念：

集合，外延性原理，$\in$，$\subseteq$ ，$\subset$，空集，全集，

幂集，文氏图，交，并，差，补，对称差

集合 一些可以明确区分的对象的整体, 对象的次序无关紧要. 对象称为元素.

- 约定: 用大写字母表示集合. 例:A ; 用小写字母表示元素. 例:a

  属于: $a \in A$ 不属于: $a \notin A$

- 集合表示:

  列举法 eg. A= { a,b,c }

  叙述法 eg. A={ x|x=a或x=b或x=c }

集合相等 (外延性原理)： 两个集合相等,当且仅当它们有相同的元素. 例:

$$\{ 1,2 \} = \{ 2,1 \}$$

$$\{ 1,2,2 \} = \{ 1,2 \}$$

集合与集合之间的关系：$\subseteq$, $=$, $\not\subseteq$, $\neq$, $\subset$, $\not\subset$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x\in A \rightarrow x\in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x\in A \wedge x\notin B)$$

空集 $\varnothing$　　不含有任何元素的集合

实例：　$\{ x \mid x \in R \wedge x^2+1=0 \}$

定理：　空集是任何集合的子集。

推论：　$\varnothing$是惟一的。

全集 E　　包含了所有元素的集合

注：全集具有相对性：与问题有关，不存在绝对的全集

幂集 $P(A)=\{\, x \mid x \subseteq A \,\}$

例: (1) 令 A= {1,2 }, 则 P(A)={∅,{1},{2},{1,2}}

(2) 计算 P(∅), P(P(∅)), P(P(P(∅))).

解：P(∅) = {∅}

P(P(∅)) = P({∅}) = {∅, {∅}}

P(P(P(∅))) = P（{∅，{∅}}）

= {∅，{∅}，{{∅}}, {∅，{∅}}}

定理：如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$.

集合的基本运算

并　　$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

交　　$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

差（相对补）　　$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

对称差　　$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

补（绝对补）　　$\sim A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

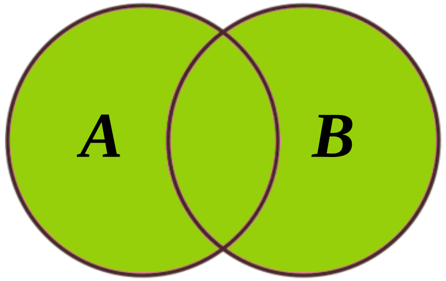
注：并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{ x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n \}$$

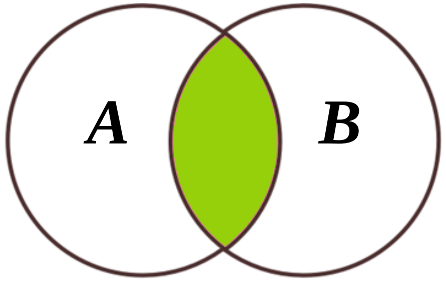
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{ x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n \}$$

文氏图 (Venn Diagram):将全集E看成二维的全平面上所有的点构成的集合.而E的子集表示成平面上由封闭曲线围成的点集.

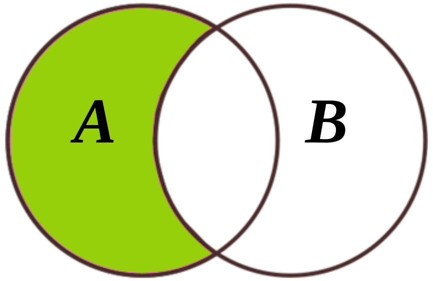
集合运算的表示



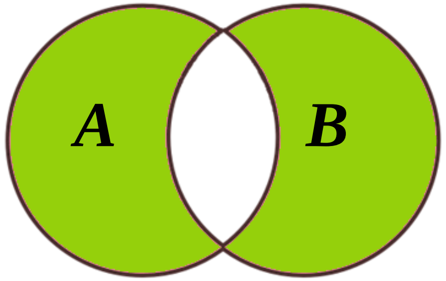
$A \cup B$



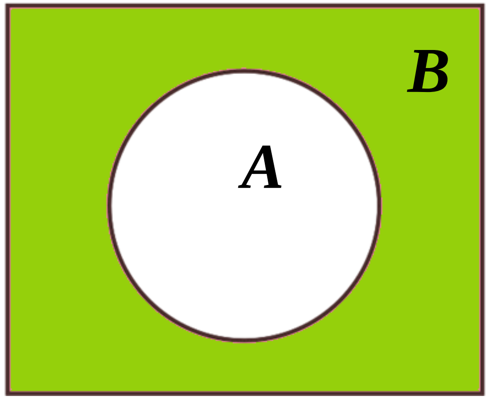
$A \cap B$



$A - B$



$A \oplus B$



$\sim A$

广义运算

广义并 $\cup A = \{ x \mid \exists z (z\in A \wedge x\in z)\}$

广义交 $\cap A= \{ x \mid \forall z (z\in A \rightarrow x\in z)\}$

例: $\cup\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$

$\cap\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1\}$

$\cup\{\{a\}\}=\{a\}$， $\cap\{\{a\}\}=\{a\}$

$\cup\{a\}=a$， $\cap\{a\}=a$

总结

- 集合
- 外延性原理
- $\in$，$\subseteq$，$\subset$，
- 空集，全集
- 幂集
- 文氏图
- 交，并，差，补，对称差