2-3、关系与运算

概念：

序偶, 笛卡尔积, 关系, **domR**, **ranR**, 关系图, 空关系, 全域关系, 恒等关系，复合关系，逆关系

序偶（有序对， Pair）

由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组，

记作$<x,y>$.

序偶性质:

(1) 有序性 $<x,y> \neq <y,x>$ （当$x \neq y$时）

(2) $<x,y>$与$<u,v>$相等的充分必要条件是

$$<x,y>=<u,v> \Leftrightarrow x=u \wedge y=v.$$

笛卡儿积 设A,B为集合，A与B的**笛卡儿积**记作A×B定义为

$$A\times B = \{\langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B\}.$$

例： $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B=$

$\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}$

$B\times A=$

$\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,3\rangle\}$

- 注意: $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$ 时, $A\times B=\varnothing$
- “×” 不满足结合律.

当 $A_1\times A_2\times\ldots A_n$时,约定"×"左结合,即

$$A_1\times A_2\times\ldots A_n=(\ldots(A_1\times A_2)\times\ldots A_{n-1})\times A_n$$

$A^n=A\times A\times\ldots A$ (n个 A)

性质证明

证明 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$\langle x,y\rangle$

$$\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B\vee\langle x,y\rangle\in A\times C$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以：$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

实例

例2 ：(1) 证明$A=B,C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$是否推出 $A=B,C=D$? 为什么？

解 (1) 任取$\langle x,y\rangle$

$$\langle x,y\rangle\in A\times C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C$$

$$\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in D$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in B\times D$$

(2) 不一定.反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则$A\times C = B\times D$但是$A \neq B$.

关系(Relation)：两个定义

(1) 序偶的一个集合, 确定了一个二元关系R。R 中任一序偶 <x,y>,可记作 $\langle x, y\rangle \in R$ 或 xRy

(2) 笛卡尔积的子集： $R \subseteq A \times B$

对通常的"关系"给出了一种抽象的描述.

例： 令 A=B={1,2,3} R={<1,2>,<1,3>,<2,3>}，其实R就是通常意义下的 ‘<' 关系。

前域 dom(R) $= \{x \mid \exists y.\langle x,y\rangle \in R\}$

值域 ran(R) $= \{y \mid \exists x.\langle x,y\rangle \in R\}$

域 fld(R) $= \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$

例5 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

设R为二元关系, A是集合

(1) R在A上的限制记作 $R\upharpoonright A$, 其中 $R\upharpoonright A = \{ <x,y> \mid xRy \wedge x \in A \}$

(2) A在R下的像记作$R[A]$, 其中$R[A]=\mathrm{ran}(R\upharpoonright A)$

例：设$R=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$, 则

$R\upharpoonright\{1\} = \{<1,2>,<1,3>\}$

$R\upharpoonright\varnothing = \varnothing$

$R\upharpoonright\{2,3\} = \{<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$

$R[\{1\}] = \{2,3\}$

$R[\varnothing] = \varnothing$

$R \subseteq A \times B$,则称R是从A到B的关系.

当 A=B 时称 R 为 A 上的二元关系.

全域关系 $A \times B$

空关系 $\varnothing$

恒等关系 $I_A = \{\langle x,x \rangle \mid x \in A\}$

关系的表示

关系矩阵

若$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\, r_{ij} \,]_{m\times n}$, 其中

$$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, y_j \rangle \in R.$$

实例

A={1,2,3,4}, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$,
R的关系矩阵M_R如下：

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

关系的表示

关系图

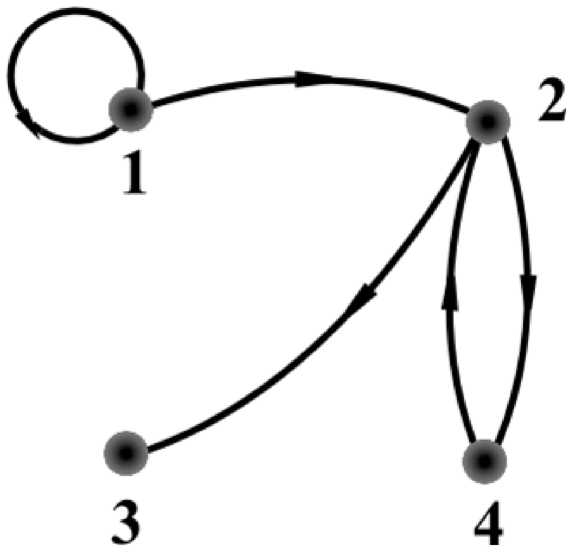
若$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$R$是从$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=\langle A, R\rangle$, 其中$A$为结点集，$R$为边集.

如果$\langle x_i,x_j\rangle$属于关系R，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

实例

***A*={1,2,3,4}, *R*={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>},**

***R*的关系图G_R如下：**



复合关系 (Composition)

$$R \circ S = \{ <x, z> \mid \exists y\ (<x, y> \in R \wedge <y, z> \in S) \}$$

例： $R = \{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$S = \{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R \circ S = \{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

$S \circ R = \{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$

- $(R \circ S) \circ P = R \circ (S \circ P)$

  (设 $R \in X \times Y$, $S \in Y \times Z$, $P \in Z \times W$)

- $R^m = R \circ R \circ \ldots \circ R$ (m个R)

逆关系 (Inverse)

$$R^{-1} = \{ <y, x> \mid <x, y> \in R \}$$

互逆 $(R^{-1})^{-1} = R$

定理1：设R , S都是从A到B的二元关系,则

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$(A \times B)^{-1} = B \times A$$

$$(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$$

定理2: 设R⊆ X× Y,S⊆ Y×Z,则 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

总结

- 序偶, 笛卡尔积
- 关系, domR, ranR,
- 关系图, 空关系, 全域关系, 恒等关系
- 复合关系，逆关系