2-4、关系的性质

概念：

自反的, 反自反的, 对称的, 反对称的, 传递的

注意：讨论关系性质时，均假定R为某个集合A上的二元关系，即$R \subseteq A\times A$.

自反的 Reflexive

若 $\forall x\in A$，都有$<x,x>\in R$, 则称 R 是自反的.

反自反的 Anti-Reflexive

若 $\forall x\in A$，都有$<x,x> \notin R$, 则称 R 是反自反的.

实例：$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$

$R_3=\{<1,3>\}$

R_2 自反，R_3 反自反，R_1既不是自反的也不是反自反的.

对称的 Symmetric

对任意$x,y\in A$,满足，若 $\langle x,y\rangle\in R$,则$\langle y,x\rangle\in R$

反对称的 Anti-symmetric

对任意$x,y\in A$,满足，若 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,x\rangle\in R$,则$x=y$

例：设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

R_1：对称和反对称； R_2：只有对称；R_3：只有反对称；

R_4：不对称、不反对称

传递的　Transitive

对任意的$x,y,z \in A$, 满足:

若$\langle x,y\rangle \in R$ 且 $\langle y,z\rangle \in R$, 则$\langle x,z\rangle \in R$,

则称R是传递的.

例： 设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$

$$R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$$

R_1和R_3是A上的传递关系, R_2不是A上的传递关系.

关系性质成立的充要条件

定理 设R为A上的关系, 则

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R 在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

(4) R 在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

必要性. 任取$\langle x,y \rangle$有

$$\langle x,y \rangle \in R \circ R$$

$$\Rightarrow \exists t\,(\langle x,t \rangle \in R \wedge \langle t,y \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in R$$

所以 $R \circ R \subseteq R$

充分性.

任取$\langle x,y \rangle, \langle y,z \rangle \in R$, 则

$$\langle x,y \rangle \in R \wedge \langle y,z \rangle \in R$$

$$\Rightarrow \langle x,z \rangle \in R \circ R \ \Rightarrow \langle x,z \rangle \in R$$

所以 R 在 A上是传递的

总结

- 自反的, 反自反的
- 对称的, 反对称的
- 传递的