2-12、有限集与无限集

概念：

康托定理，有限集，无限集，可数集，不可数集

康托定理

(1)N $\not\approx$ R；

(2)对任意集合A都有$A \not\approx P(A)$.

证明思路（对角线方法 **Diagonal method**）：

(1) 只需证明任何函数 f:N→[0,1]都不是满射的.

任取函数 f:N→[0,1], 列出 f 的所有函数值，
然后构造一个[0,1]区间的小数b，使得b与所有的函数值都不相等.

(2) 任取函数 $f:A \to P(A)$，构造$B \in P(A)$，使得B与 f 的任何函数值都不等.

康托定理的证明

证 (1) 规定[0,1]中数的表示. 对任意的$x \in [0,1]$, 令

$$x = 0.\, x_1 x_2 \ldots, \qquad 0 \le x_i \le 9$$

设 f: $N \to [0,1]$是任何函数，列出 f 的所有函数值：

$$f(0) = 0.a_1^{(1)} a_2^{(1)} \ldots$$
$$f(1) = 0.a_1^{(2)} a_2^{(2)} \ldots$$
$$\ldots$$
$$f(n-1) = 0.a_1^{(n)} a_2^{(n)} \ldots$$
$$\ldots$$

令 y 的表示式为$0.b_1 b_2 \ldots$, 并且满足$b_i \ne a_i^{(i)}$, $i=1,2,\ldots$, 那么 $y \in [0,1]$, 且y与上面列出的任何函数值都不相等.

这就推出$y \notin \mathrm{ran} f$, 即 f 不是满射的.

康托定理的证明

(2) 证：任何函数 $g:A\to P(A)$都不是满射的.

设 $g:A\to P(A)$是从A到$P(A)$的函数, 如下构造集合B:

$$B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin g(x)\}$$

则$B\in P(A)$, 但对任意$x\in A$都有

$$x\in B \Leftrightarrow x\notin g(x)$$

从而证明了对任意的 $x\in A$都有 $B\neq g(x)$. 即$B\notin \mathrm{ran}g$.

注意：根据康托定理可以知道$\mathrm{N}\not\approx P(\mathrm{N})$，$\mathrm{N}\not\approx\{0,1\}^{\mathrm{N}}$.

集合的优势

定义 (1) 设A, B是集合, 如果存在从A到B的单射函数, 就称B优势于A, 记作$A \preccurlyeq\cdot B$. 如果B不是优势于A, 则记作$A \not\preccurlyeq\cdot B$.

(2) 设A, B是集合, 若$A \preccurlyeq\cdot B$ 且 $A \not\approx B$, 则称 B 真优势于A, 记作$A \prec\cdot B$. 如果 B 不是真优势于A, 则记作$A \not\prec\cdot B$.

实例 $\mathbf{N} \preccurlyeq\cdot \mathbf{N}$, $\mathbf{N} \preccurlyeq\cdot \mathbf{R}$, $\mathbf{A} \preccurlyeq\cdot P(\mathbf{A})$,

$\mathbf{R} \not\preccurlyeq\cdot \mathbf{N}$

$\mathbf{N} \prec\cdot \mathbf{R}$, $\mathbf{A} \prec\cdot P(\mathbf{A})$, 但$\mathbf{N} \not\prec\cdot \mathbf{N}$

集合的优势

定理 设 A, B, C是任意的集合, 则

(1) $A \preccurlyeq \cdot A$

(2) 若$A \preccurlyeq \cdot B$且$B \preccurlyeq \cdot A$, 则$A \approx B$

(3) 若$A \preccurlyeq \cdot B$且$B \preccurlyeq \cdot C$, 则$A \preccurlyeq \cdot C$

有限集(Finite set)/无限集 (Infinite set)

设A为一个集合. 若存在某个自然数n, 使得A与集合{0,1,…,n-1}等势, 则称A是有限的. 若集合A不是有限的, 则称A是无限的.

注：有限集也称为有穷集；无限集也称为无穷集。

结论

(1) 自然数集合N是无限的.

(2) 无限集必与它的一个真子集为等势.

推论:凡不能与自身的任一真子集等势的集合为有限集.

可数集(可列集) (Countable Set, Enumerable Set)

与自然数集**N**等势的任意集合称为可数的. 其基数为$\aleph_0$.

例： **N**，**Q**是可数集；

R不是可数集（也称不可数集）。

基数的常识

① 对于有穷集合A, 基数是其元素个数n，$|A| = n$;

② 自然数集合N的基数记作$\aleph_0$;

③ 实数集R的基数记作$\aleph$, 即$\mathrm{card}R = \aleph$;

④ 没有最大的基数。将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到：

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$$

连续统猜想（Continuum Hypothesis）

不存在这样的无限集,基数严格介于$\aleph_0$ 与 $\aleph$ 之间.

(1900年Hilbert在巴黎第二届世界数学家大会上提出的23个数学问题中的第一个问题.)

总结

- 康托定理
- 有限集
- 无限集
- 可数集
- 不可数集