

插值法应用的实例分析^①

张洪波^②

(徐州建筑职业技术学院,江苏 徐州 221116)

摘 要:插值是数值分析领域的一个主要部分,插值理论能解决物理已知的表格数值中查找未知的值。结合插值理论建立插值函数进行插值计算,得到甘油在某一温度下的粘度。内插和外插在实际预测汽油价格中的比较,得到外插的稳定性、可信性和精度都不如内插。利用实例,通过分段线性插值得到解决画图中的 Runge 现象的方法。

关键词:插值理论,内插,外插,Runge 现象

中国分类号: O241.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672—7169(2010) 03—0071—03

很多领域中,经常要通过插值的方法找出表格条目间的中间值^[1],对拉格朗日插值公式和牛顿插值公式进行对比研究^{[2][3]}。文中应用插值理论,建立多项式插值函数得到甘油在 23℃ 的粘度;对比内插法和外插法对 93 号汽油随不同年份油价的插值计算,用 MATLAB^[4]实现,得到内插结果比外插结果的稳定性、可信性和精度都高的结论;结合函数逼近方法^[5],利用分段线性插值,得到解决画图中的 Runge 现象的方法即三次样条插值函数可以给出光滑的插值曲线,能解决画图

1 基本思想

内插是在已知数据集自变量的范围内建立和计算一个逼近函数的过程。假设数据(x_i, y_i)的顺序为 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ 。插值提供了一种在 $x_1 \leq x \leq \dots \leq x_n$ 上对 $y = f(x)$ 的逼近方法。外插是在给定自变量的范围之外求解函数插值的方法,假设数据(x_i, y_i)的顺序为 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ 。外插提供了 $x < x_1$ 或 $x > x_n$ 上求解函数插值的方法

1) 一般式

在插值的一般形式中,它主要是求出 n 个基本函数 $F(x_i) = y_i$ 的线性组合的系数,其中 $i = 1, \dots, n$ 基本函数可以为多项式

$$F(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1} \quad (1)$$

2) 拉格朗日插值公式

对给定的 n 个插值节点 x_1, x_2, \dots, x_n 及对应的函数值 y_1, y_2, \dots, y_n ,一般的拉格朗日基本插值公式中的 $n-1$ 阶多项式为

$$y(x) = \sum_{k=1}^n y_k \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) \quad (2)$$

3) 牛顿插值公式

考虑通过(x_i, y_i)的二阶多项式($i = 1, 2, 3$)
牛顿基本函数表示为

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) \quad (3)$$

2 实例 1: 甘油在不同温度下的粘度

甘油是一种液体,它的粘度是温度的函数,如表 1 所示:

表 1 不同温度下甘油粘度

T(℃)	0	10	20	30	40	50
$\mu(N \cdot s/m)$	10.60	3.810	1.492	0.629	0.2754	0.1867

对表格中的数据使用牛顿基本公式如式(3) 所示,可以估计出室温为 23(℃) 时甘油的粘度,插值形式为

$$\mu(T) = [T_1] + [T_1, T_2](T - T_1) + [T_1, T_2, T_3](T - T_1)(T - T_2) \quad (4)$$

在 $T = 23^\circ\text{C}$ 下,对插值式(4) 式求值,得(5) 式

$$\mu(23) = 3.810 - 0.2318 \times (23 - 10) + 7.2750 \times 10^{-3} \times (23 - 10) \times (23 - 20) = 1.0803 \quad (5)$$

(5) 式的结果取决于支点的选取和插值多项式的阶数。

① 收稿日期: 2010—05—06

② 作者简介:张洪波(1970—),女,河南上蔡人,硕士,徐州建筑职业技术学院讲师,从事光学工程中制作光栅的相关研究。

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3 实例 2:汽油价格

3.1 用内插法计算汽油价格

我国 93 号汽油随不同年份汽油年平均价格见表 2:

表 2 93 号汽油年平均价格

年 份	1998	2000	2002	2004	2006	2008
价格(元)	2.32	2.98	2.82	3.56	4.87	5.66

已知六个数据对,根据公式(1)对数据进行五阶多项式插值,得到(6)式

$$y=a_6+a_5x+a_4x^3+a_3x^3+a_2x^4+a_1x^5$$
 (6)

其中 y 是价格, x 是年份,拟合得到油价随年份变化曲线。如图 1 所示,圆圈代表表 2 中年份对应的油价,实线表示插值的拟合曲线,由公式(6)得到插值年份的油价。插值油价与实际油价的比较见表 3。

表 3 插值油价与实际油价

年 份	1999	2001	2003	2005	2007
插值油格(元)	2.975	2.832	3.065	4.209	5.393
实际油价(元)	2.383	2.891	3.142	3.987	4.779

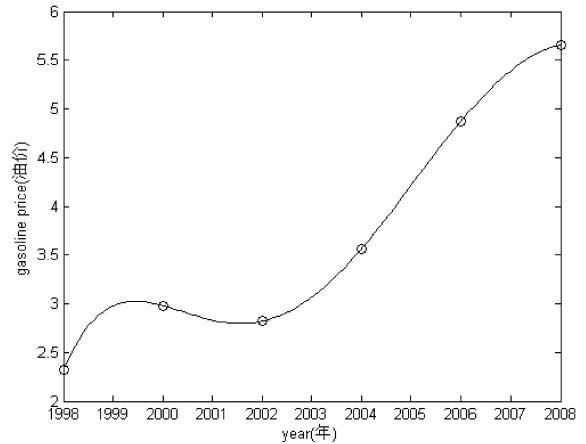


图 1 油价随年份变化曲线

由表 3 可知插值得到的价格与实际 93 号汽油在该年份的价格接近,说明内插法较稳定,数值可信度强,精度高。

3.2 用外插法计算汽油价格

我们已知 1998 到 2008 年的 93 号汽油的价格,要想预测 2009 年及以后的价格,可以用外插法得到。分别利用三次插值函数,三次样条插值函数对 2009—2012 年的油价进行外插,结果见表 4 和图 2

表 4 三次插值函数、三次样条插值函数得到的外插油价

外 插	2009 油价 (元)	2010 油价 (元)	2011 油价 (元)	2012 油价 (元)
三次插值	6.75	5.67	0.05	-12.48
三次样条插值	10.59	22.609	44.767	80.114

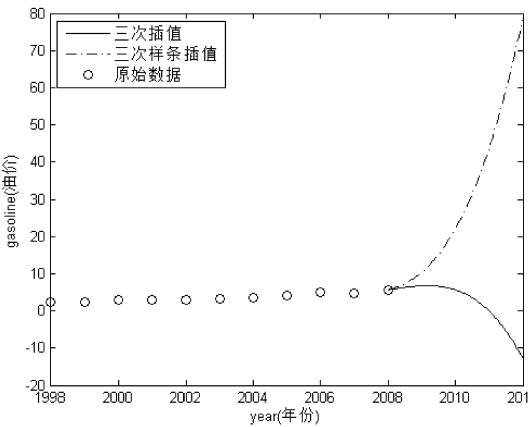


图 2 汽油价格的外插

由表 4、图 2 可以看出这两种外插方法预测结果不一致性,说明了外插本身固有的不确定性,实际问题使用外插值可能有一定风险。

4 分段线性插值解决 Runge 问题

所谓分段线性插值就是通过插值点用折线段连接起来逼近原曲线。它分为一维线性插值,三次插值,三次样条插值等。对于函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

的 Runge 问题是指,它在区间 $[-5, 5]$ 上的各阶导数存在,但在此区间上取 n 个节点所构成的拉格朗日插值多项式公式,如式(2)在区间内并非收敛,而且分散的很厉害如图 3(a) 所示,插值曲线虚线已经严重偏离了原曲线,使拟合产生 Runge 现象。这种情况可用分段线性插值中的一维线性插值修正如图 3(b) 所示,精度虽差一点,但不会出现不收敛的现象。要想进一步增加精度,可用分段线性插值中的三次样条插值拟合曲线,如图 3(c) 所示。三次样条插值函数可以给出光滑的插值曲线,因此在数值逼近、常微分方程和偏微分方程的数值解及科学和工程计算中都起着重要的作用。利用它可以解决画图中的 Runge 问题。

5 结论

本文从测定甘油不同温度下的粘度,预测不同年份 93 号汽油的价格出发,运用插值理论中的

一维线性插值公式,拉格朗日插值公式,牛顿插值公式进行计算,并通过比较内插与外插得到外插的稳定性和精度都不如内插。对 Runge 现象的研究

可知在多项式次数越高的情况下,拉格朗日插值公式会出现不收敛,可用一维线性插值和三次样条插值进行修正,得到较好的拟合曲线。

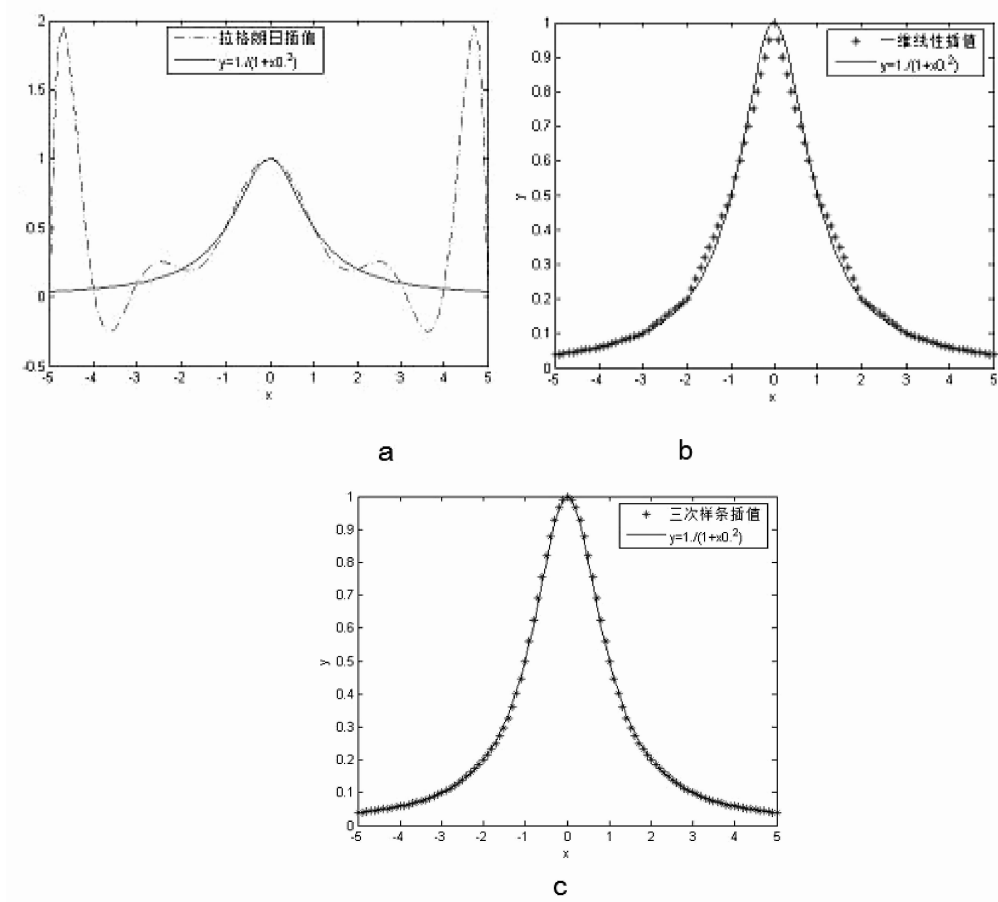


图 3 函数拟合

参考文献:

[1] 李朝奎,陈良,王勇.降雨量分布的空间插值方法研究[J].矿产与地质.2007, 21(6)

[2] 王波,张书毕,李益斌,等.精密 GPS 卫星钟差两种插值方法的比较[J].全球定位系统,2007(6) 33—34

[3] 吴燕仙,何妮.拉格朗日插值公式的完全展开[J].通化师范学院学报,2007, 28(2): 10—12

[4] 王沫然. MATLAB 与科学计算[M].电子工业出版社,2003

[5] Gerald Reckterwald. Numerical Methods with MATLAB Implementation and Application[M]. ChinaMachine Press 2004

[6] 徐力治,王仁宏,周蕴时.函数逼近的理论和方法[M].上海科学技术出版社,1983

A Case Analysis of Interpolation Application

ZHANG Hongbo

(Office of Teaching Affairs Xuzhou Institute of Architectural Technology Xuzhou Jiangsu 221116)

Abstract: Interpolation is a major part of the numerical analysis field. Interpolation Theory can be used to find the unknown value in a physical form sheet. Based on Interpolation Theory, glycerol's viscosity can be known through Interpolation function calculation. Compared with interpolation, extrapolation is not as good as interpolation in Stability, credibility and accuracy. Examples are given to explain how piecewise linear interpolation method can be used to solved the Runge Phenomenon.

Key Words: Interpolation Theory; interpolation; extrapolation; the Runge Phenomenon