习题2

1.确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽可能地高，并指明求积公式所具有的代数精度：

(1) $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_0 f(-h) + A_1 f(0) + A_2 f(h)$

解：令原式对于 $y=1, x, x^2$ 准确成立，可列出方程组

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2h \\ -A_0 h + A_2 h = 0 \\ A_0 h^2 + A_2 h^2 = \frac{2}{3}h^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{1}{3}h \\ A_1 = \frac{4}{3}h \\ A_2 = \frac{1}{3}h \end{cases}$$

∴这样设计出的求积公式是：

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{1}{3}hf(-h) + \frac{4}{3}hf(0) + \frac{1}{3}hf(h)$$

$$\Rightarrow \int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{1}{3}h[f(-h) + 4f(0) + f(h)]$$

令 $y = x^3$ 代入上式：左端 $= 0 =$ 右端

$y = x^4$ 代入上式：左端 $= \frac{2}{5}h^5 \neq$ 右端 $= \frac{2}{3}h^5$

∴求积公式所具有的代数精度为3.

(2). $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4}f(0) + A_0 f(x_0)$

解：令原式对于 $y=1$，x 准确成立，可列出方程组：

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + A_0 = 1 \\ A_0 x_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{3}{4} \\ x_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

∴这样设计出的求积公式是：

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4}f(0) + \frac{3}{4}f\left(\frac{2}{3}\right)$$

令 $y=x^2$ 代入上式：左边 $=\frac{1}{3}$ = 右边 $=\frac{1}{3}$

$y=x^3$ 代入上式：左边 $=\frac{1}{4}$ ≠ 右边 $=\frac{2}{9}$

∴求积公式所具有的代数精度为 2

5、试设计求积公式 $\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(1)$

解：令原式对于 $y=1, x, x^2, x^3$ 准确成立，可列出方程组：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 x_1 + A_2 = \frac{1}{2} \\ A_1 x_1^2 + A_2 = \frac{1}{3} \\ A_1 x_1^3 + A_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{1}{6} \\ A_1 = \frac{2}{3} \\ A_2 = \frac{1}{6} \\ x_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

∴这样设计出的求积公式为

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{6}\left[f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}) + f(1)\right]$$

令 $y = x^4$ 代入上式，左边 $= \frac{1}{5} \neq$ 右边 $= \frac{5}{24}$

∴所设计出的求积公式为3阶精度

7. 试将二分前后的中矩形公式：

$$M_1=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$M_2=\frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]$$

加工成松弛公式：$\int_a^b f(x)dx \approx M_2+w(M_2-M_1)$

使其代数精度尽可能地高。

解：~~题意~~ 将 $y=1, x, x^2$ 代入验算可知，M_1、M_2 有1阶精度，

希望选取松弛因子 w 使上式有2阶精度，即对 $y=x^2$ 也准确成立：

$$\int_a^b x^2 dx = M_2+w(M_2-M_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}(b^3-a^3)=\frac{b-a}{2}\left[\left(\frac{3a+b}{4}\right)^2+\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2\right]+w\left[\frac{b-a}{2}\left[\left(\frac{3a+b}{4}\right)^2+\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2\right]-(b-a)\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(a-b)^2}{24}=w\times\frac{(a-b)^2}{8}$$

$$\Rightarrow \quad w=\frac{1}{3}$$

这样加工得到的松弛公式为 $\int_a^b f(x)dx \approx M_2+\frac{1}{3}(M_2-M_1)$

将 $y=x^3$ 代入，左边 ≠ 右边

∴ 该松弛公式具有2阶精度.

9、证明下列数值微分公式具有4阶代数精度：

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$$

证：令 $y=1$ 代入

左边 $=0$ = 右边 $= \frac{1}{12h} \times (1-8+8-1) = 0$

令 $y=x$ 代入

左边 $=1$ = 右边 $= \frac{1}{12h} \times [x_0-2h-8x_0+8h+8x_0+8h - x_0-2h] = 1$

令 $y=x^2$ 代入

右边 $= \frac{1}{12h} \times [(x_0-2h)^2 - 8(x_0-h)^2 + 8(x_0+h)^2 - (x_0+2h)^2]$

$= \frac{24x_0h}{12h} = 2x_0$

左边 $=2x_0$ 　左边 = 右边

令 $y=x^3$ 代入

右边 $= \frac{1}{12h} \times [(x_0-2h)^3 - 8(x_0-h)^3 + 8(x_0+h)^3 - (x_0+2h)^3]$

$= \frac{36x_0^2h}{12h} = 3x_0^2$

左边 $=3x_0^2$ 　左边 = 右边

令 $y=x^4$ 代入

右边 $= \frac{1}{12h} \times [(x_0-2h)^4 - 8(x_0-h)^4 + 8(x_0+h)^4 - (x_0+2h)^4]$

$= \frac{48x_0^3h}{12h} = 4x_0^3$

左边 $=4x_0^3$ 　左边 = 右边

当 $y=x^5$ 代入

右边 $=\frac{1}{12h}\cdot\left[(x_0-2h)^5-8(x_0-h)^5+8(x_0+h)^5-(x_0+2h)^5\right]$

左边 $=5x_0^4$

~~将 $x_0=0$ 代入上式，左边 $=0$， 右边 $=$~~

将 $x_0=0$ 代入上式，左边 $=0$， 右边 $=-48h^5$

$\therefore$ 左边 $\neq$ 右边

综上所述：上述数值微分公式具有4阶代数精度。