习题3

1. 列出求解下列初值问题的Euler格式：

(1) $y' = x^2 - y^2 \quad (0 \le x \le 0.4)$，$y(0)=1$，取 $h=0.2$

(2) $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} \quad (1 \le x \le 1.2)$，$y(1)=1$，取 $h=0.1$

解：(1).
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n^2 - y_n^2) = y_n + 0.2\left[(0.2n)^2 - y_n^2\right] & n=0,1,2 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

(2).
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0.1\left[\left(\frac{y_n}{x_n}\right)^2 - \frac{y_n}{x_n}\right] \\ \qquad = y_n + 0.1\left[\left(\frac{y_n}{1+0.1n}\right)^2 - \frac{y_n}{1+0.1n}\right] & n=0,1,2 \\ y(1)=1 \end{cases}$$

4. 设计下列两步格式：

$$y_{n+1}=ay_n+by_{n-1}+h[cf(x_n,y_n)+df(x_{n-1},y_{n-1})]$$

使其精度尽可能地高.

解：令 $n=0$，$h=1$，考察对应的近似关系式：

$$y(1)\approx ay(0)+by(-1)+cy'(0)+dy'(-1)$$

可见其中有4个未知参数.

令上式对于 $y=1, x, x^2, x^3$ 准确成立，可列出方程组：

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -b+c+d=1 \\ b-2d=1 \\ -b+3d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \\ c=4 \\ d=2 \end{cases}$$

这样得出的差分格式是：

$$y_{n+1}=-4y_n+5y_{n-1}+2h[2f(x_n,y_n)+f(x_{n-1},y_{n-1})]$$

具有3阶精度.

对于 $y=x^4$，左边 $=1$

右边 $=b-4d=5-8=-3\neq$ 左边

∴ 最终设计得到的差分格式是3阶精度.

5. 用梯形格式求解初值问题 $y'+y=0$，$y(0)=1$，试验证其近似解有显式表达式

$$y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

并证明当 $h\to 0$ 时，y_n 收敛到原初值问题的精确解 $y=e^{-x}$.

解：梯形格式通式如下：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

$$\Rightarrow y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[y_n'+y_{n+1}']$$

又∵ $\begin{cases} y_n'+y_n=0 \\ y_{n+1}'+y_{n+1}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_n'=-y_n \\ y_{n+1}'=-y_{n+1} \end{cases}$

∴代入通式得到：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(-y_n-y_{n+1})$$

整理得到：$y_{n+1}=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)y_n$，等比系数为 $\frac{2-h}{2+h}$

又∵ $y(0)=1$.

∴其近似解有显式表达式 $y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$

又∵ $y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{-\frac{1}{h}\cdot(-nh)}=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{-\frac{1}{h}\cdot(-x_n)}$

当 $h\to 0$ 时.

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{-\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}e^{-\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{2-h}{2+h}\right)}=e$$

∴当 $h\to 0$ 时，$y_n\to e^{-x_n}$

∴当 $h\to 0$ 时，y_n 收敛到原初值问题的精确解为 $y=e^{-x}$

8. 试设计差分格式 $y_{n+1}=(1-b)y_n+by_{n-1}+\frac{h}{4}[(b+3)y'_{n+1}+(3b+1)y'_{n-1}]$

使其精度尽可能地高，并证明当 $b\neq-1$ 时方法为二阶，而当 $b=-1$ 时为三阶。

解：令 $n=0$，$h=1$，考察其对应的近似关系式。

$$y(1)\simeq(1-b)y(0)+by(-1)+\frac{1}{4}[(b+3)y'(1)+(3b+1)y'(-1)]$$

当 $y=1$ 时，左边 $=1=1-b+b=$ 右边

$y=x$ 时，左边 $=1$

右边 $=-b+\frac{1}{4}(b+3+3b+1)=1$

$y=x^2$ 时，左边 $=1$

右边 $=b+\frac{1}{4}(2b+6-6b-2)=1$

$y=x^3$ 时，左边 $=1$

右边 $=-b+\frac{1}{4}\times(3b+9+9b+3)=2b+3$

∴ 当 $2b+3=1$，即 $b=-1$ 时，方法为~~3阶精度~~ 至少3阶精度

当 $2b+3\neq1$，即 $b\neq-1$ 时，方法为2阶精度

当 $b=-1$ 时，$y(1)\simeq2y(0)-y(-1)+\frac{1}{4}[2y'(1)-2y'(-1)]$

代入 $y=x^4$，左边 $=1$

右边 $=-1+\frac{1}{4}\times(8+8)=3\neq$ 左边

∴ 当 $b=-1$ 时，方法为3阶精度.