作业 1

5、依据下列数据表所构造出的插值多项式 $p(x)$ 有多少次？为什么？
请具体给出 $p(x)$ 的表达式。

(1)

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-5	1	1	1	7	25

解：在坐标图中大致画出数据表的散点分布，由图可知，$p(x)$ 至少有3次

则设 $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

将 $(0,1)$ 点代入，得 $d=1$

再将 $(-1,1)$，$(1,1)$ 代入：$\begin{cases} -a+b-c+1=1 \\ a+b+c+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-c \end{cases}$

再将 $(2,7)$ 代入：$a\times2^3+0+(-a)\times2+1=7 \Rightarrow a=1$

$\therefore p(x) = x^3-x+1$，将 $(-2,-5)$，$(3,25)$ 代入，符合上式

$\therefore$ 综上：$p(x)=x^3-x+1$

(2)

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y_i	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3	$\frac{21}{4}$

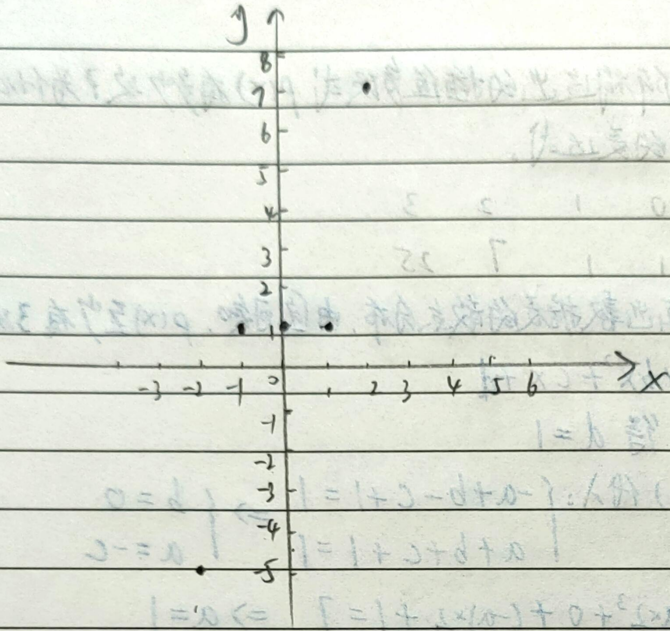
解：在坐标图中大致画出数据表的散点分布，由图可知 $p(x)$ 至少2次

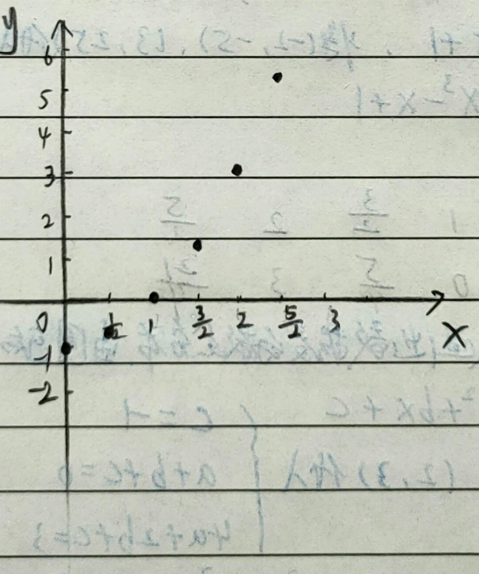
则设 $p(x)=ax^2+bx+c$

将 $(0,-1)$ $(1,0)$ $(2,3)$ 代入 $\begin{cases} c=-1 \\ a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}$

$\therefore p(x)=x^2-1$，将 $(\frac{1}{2},-\frac{3}{4})$．$(\frac{3}{2},\frac{5}{4})$ $(\frac{5}{2},\frac{21}{4})$ 代入，符合上式

$\therefore$ 综上：$p(x)=x^2-1$





6.

解

6、求作次数 ≤ 2 的多项式 $p(x)$，使之满足条件.

$p(0)=1 \quad p(1)=2 \quad p'(0)=0$

解：设 $p(x)=ax^2+bx+c \qquad p'(x)=2ax+b$

依所给插值条件：

$$\begin{cases} 1=0+0+c \\ 2=a+b+c \\ 0=0+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

故所求的插值多项式为：$p(x)=x^2+1$

9. 求作次数 ≤ 4 的多项式 $p(x)$，使满足条件.

$p(0)=-1, \quad p'(0)=-2$

$p(1)=0, \quad p'(1)=10, \quad p''(1)=40$

解：首先列满足条件 $q(1)=0$，$q'(1)=10$，$q''(1)=40$ 的 Taylor 多项式：

$q(x)=20x^2-30x+10$

令 $p(x)=q(x)+(x-1)^3(ax+b)$

$\therefore p'(x)=40x-30+3(x-1)^2(ax+b)+a(x-1)^3$

用剩下的插值条件列出方程：

$$\begin{cases} -1=p(0)=10-b \\ -2=p'(0)=-30+3b-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=11 \end{cases}$$

故所求的插值多项式为：$p(x)=20x^2-30x+10+(x-1)^3(5x+11)$

$\Rightarrow p(x)=5x^4-4x^3-18x^2+28x-11$

10、试作1.4节问题7的插值基函数 $\psi_0(x)$，$\psi_1(x)$，它们是三次式，分别满足条件：$\psi_0'(0)=1$，$\psi_0(0)=\psi_0(1)=\psi_0'(1)=0$

$\psi_1'(1)=1$，$\psi_1(0)=\psi_1(1)=\psi_1'(0)=0$

解：对 $\psi_0(x)$：有两个零点 $x=0,1$，

因而它具有形式：$\psi_0(x)=(ax+b)x(x-1)$

~~由条件~~ $\psi_0'(x)=a(x^2-x)+(ax+b)(2x-1)$

由条件：$\psi_0'(0)=1$，$\psi_0'(1)=0$ 可得：

$$\begin{cases}\psi_0'(0)=-b=1\\ \psi_0'(1)=a+b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$$

∴可得插值基函数 $\psi_0(x)=(x-1)x(x-1)$

$\Rightarrow \psi_0(x)=x(x-1)^2$

对 $\psi_1(x)$：有两个零点 $x=0,1$，

因而它具有形式：$\psi_1(x)=(cx+d)x(x-1)$

$\psi_1'(x)=c(x^2-x)+(cx+d)(2x-1)$

由条件：$\psi_1'(1)=1$，$\psi_1'(0)=0$ 可得：

$$\begin{cases}\psi_1'(1)=c+d=1\\ \psi_1'(0)=-d=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=1\\ d=0\end{cases}$$

∴可得插值基函数 $\psi_1(x)=x^2(x-1)$

$\Rightarrow \psi_1(x)=x^3-x^2$