复分析第二次习题课

彭子鱼

2024 年 3 月 31 日
上次更新: 2024 年 3 月 31 日

1 作业

题 1 (2.4.8)**.** *证明 $f(z) = z^2 + 2z + 3$ 在 $B(0,1)$ 中单叶.*

证明. 设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $z_1^2 + 2z_1 + 3 = z_2^2 + 2z_2 + 3$, 即 $(z_1 - z_2)(z_1 + z_2 + 2) = 0$. 而 $z_1, z_2 \in B(0,1)$, 只能 $z_1 = z_2$. 故 $f(z)$ 在 $B(0,1)$ 中单叶. □

题 2 (2.4.15, 2.4.16)**.** *考虑 Joukowsky*[1]*变换 $\phi(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. 证明下面 4 个域都是 $\phi(z)$ 的单叶域并求出它们的像:*

1. *上半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$;*
2. *下半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}$;*
3. *无心单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$;*
4. *单位圆盘的外部 $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.*

证明. 对 $z_1 \neq z_2$, $\phi(z_1) = \phi(z_2)$ 当且仅当 $z_1 z_2 = 1$, 这蕴含 $\Im z_1 \cdot \Im z_2 \leq 0$ 和 $|z_1 z_2| = 1$. 因此这 4 个域都是 $\phi(z)$ 的单叶域.

为求这 4 个域的像, 我们将 ϕ 写成一系列函数的复合:

$$z \longrightarrow z_1 = \frac{z-1}{z+1} \longrightarrow z_2 = z^2 \longrightarrow w = \frac{1+z_2}{1-z_2} = \phi(z).$$

结论: ϕ 将前两个域均映为 $\mathbb{C}\backslash((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$, 后两个域均映为 $\mathbb{C}\backslash[-1, 1]$. □

注记. *关于 Joukowsky 变换更详细的讨论, 可参考《复变函数教程》第 3 章第 6 节以及李皓昭老师的讲义 (162 页开始).*

题 3 (2.4.17)**.** *证明下面 2 个域都是 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的单叶域:*

---

[1] Nikolay Zhukovsky (1847-1921) was a Russian mathematician and engineer. His surname is usually romanised as Joukovsky or Joukowsky.

1. $\{z \in \mathbb{C} : \theta_0 < \Re z < \theta_0 + 2\pi, \Im z > 0\}$;

2. $\{z \in \mathbb{C} : \theta_0 < \Re z < \theta_0 + 2\pi, \Im z < 0\}$.

证明. 记 $\phi(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $\psi(z) = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})$, 则

$$\cos z = \phi(e^{iz}),$$
$$\sin z = \frac{1}{i}\psi(e^{iz}).$$

在给定的域, $z \mapsto e^{iz}$ 是单射, 且像为 $\{re^{i\theta} : 0 < r < 1, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$ 和 $\{re^{i\theta} : r > 1, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$. 又已证 ϕ (ψ 类似) 在这两个域上单叶. 故 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在题所给域上单叶. □

题 4 (2.4.22)**.** 设 $f(z) = \frac{z^{p-1}}{(1-z)^p}$, $0 < p < 1$. 证明 f 能在 $D = \mathbb{C}\backslash[0, 1]$ 上选出单值全纯分支.

证明. 任取 D 中简单闭曲线 C, 则 C 内部或者同时不含 0 和 1, 或者同时含 0 和 1. 对于前者, 显然 $\Delta_C f(z) = 0$. 对于后者,

$$\begin{aligned}\Delta_C \mathrm{Arg} f(z) &= (p-1)\Delta_C \mathrm{Arg} z - p\Delta_C \mathrm{Arg}(1-z) \\ &= (p-1)\cdot 2\pi - p \cdot 2\pi \\ &= -2\pi,\end{aligned}$$

从而 $\Delta_C f(z) = 0$.

故 f 能在 D 上选出单值全纯分支. □

题 5 (2.4.23)**.** 证明 $f(z) = \mathrm{Log}\frac{z^2-1}{z}$ 能在 $D = \mathbb{C}\backslash((-\infty, -1] \cup [0, 1])$ 上选出单值全纯分支.

证明. 考虑

$$\Delta_C f(z) = i\left(\Delta_C \mathrm{Arg}(z-1) + \Delta_C \mathrm{Arg}(z+1) - \Delta_C \mathrm{Arg}(z)\right).$$

由此可得支点为 $0, \pm 1, \infty$.

任取 D 中简单闭曲线 C, 只需考虑 C 包含 0, 1. 此时

$$\Delta_C f(z) = i(2\pi + 0 - 2\pi) = 0.$$

故 $f(z)$ 能在 D 上选出单值全纯分支. □

题 6 (2.4.26)**.** 设 D 是复平面上去掉 $[-1, i]$, $[1, i]$ 和射线 $z = it \quad (1 \le t < \infty)$ 后的域. 证明 $\mathrm{Log}(1-z^2)$ 能在 D 上选出单值全纯分支. 设分支 f 满足 $f(0) = 0$, 求 $f(2)$.

证明. 考虑

$$\Delta_C \mathrm{Log}(1-z^2) = i\left(\Delta_C \mathrm{Arg}(z-1) + \Delta_C \mathrm{Arg}(z+1)\right).$$

由此可得支点为 $\pm 1, \infty$. 故 $\mathrm{Log}(1-z^2)$ 能在 D 上选出单值全纯分支.

计算

$$\begin{aligned} f(2) &= f(0) + \Delta_{C_0}\mathrm{Log}(1-z^2) \\ &= \Delta_{C_0}\log|1-z^2| + i\Delta_{C_0}\mathrm{Arg}(z-1) + i\Delta_{C_0}\mathrm{Arg}(z+1) \\ &= \log 3 + \pi i, \end{aligned}$$

其中 C_0 如图1所示. □

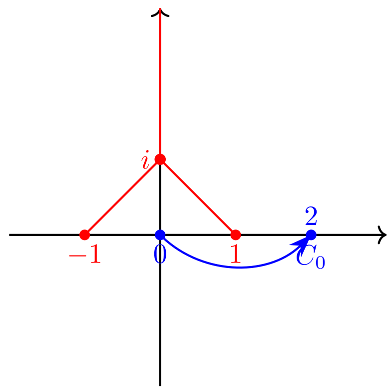

图 1: 2.4.26 中 C_0 的图示.

题 7 (2.4.27)**.** 证明 $\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$ 能在 $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ 上选出单值全纯分支 f, 满足 $f(i)=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i}$. 求 $f(-i)$.

证明. 任取 D 中简单闭曲线 C, 只需考虑 C 包含 ± 1. 此时

$$\Delta_C\mathrm{Arg}f(z) = \frac{3}{4}\Delta_C\mathrm{Arg}(z-1) + \frac{1}{4}\Delta_C\mathrm{Arg}(1+z) = 2\pi.$$

故 $\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$ 能在 D 上选出单值全纯分支.

计算

$$\begin{aligned} f(-i) &= f(i) + \Delta_{C_0}\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)} \\ &= f(i) + f(i)\left(e^{\frac{1}{4}i\Delta_{C_0}\mathrm{Arg}(1-z)^3(1+z)} - 1\right) \\ &= f(i) + f(i)\left(e^{\frac{1}{4}i(3\cdot(-\frac{3}{2}\pi)+(-\frac{1}{2}\pi))} - 1\right) \\ &= \sqrt{2}e^{\frac{5}{8}\pi i}, \end{aligned}$$

其中 C_0 如图2所示. □

题 8 (2.5.1)**.** 求将上半平面映为上半平面的分式线性变换, 使得 ∞, 0, 1 分别映为 0, 1, ∞.

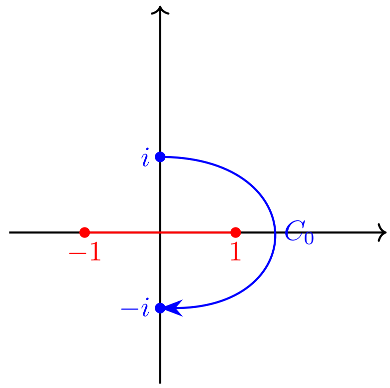

图 2: 2.4.27 中 C_0 的图示.

解. 交比不变:

$$(w,0,1,\infty)=(z,\infty,0,1).$$

化简得

$$w=\frac{1}{1-z}.$$

上半平面是 ∞, 0, 1 和 0, 1, ∞ 的左侧, 因此 $z\mapsto w$ 将上半平面映为上半平面.

故所求变换为 $w=\frac{1}{1-z}$. □

题 9 (2.5.2)**.** *求将上半平面映为单位圆盘的分式线性变换, 使得 -1, 0, 1 分别映为 1, i, -1.*

解. 交比不变:

$$(w,1,i,-1)=(z,-1,0,1).$$

化简得

$$w=\frac{z-i}{iz-1}.$$

上半平面是 -1, 0, 1 的左侧, 单位圆盘是 1, i, -1 的左侧, 因此 $z\mapsto w$ 将上半平面映为单位圆盘.

故所求变换为 $w=\frac{z-i}{iz-1}$. □

题 10 (2.5.4)**.** *求将单位圆盘的外部映为右半平面的分式线性变换, 使得*

1. *1, $-i$, -1 分别映为 i, 0, $-i$;*

2. *$-i$, i, 1 分别映为 i, 0, $-i$.*

解. 通过交比不变计算, 再用左右侧说明得到的映射将单位圆盘外部映为右半平面.

结论:

1. $w=\frac{z+i}{z-i}$;

2. $w=\frac{z-i}{(2-i)z+2i-1}$.

□

题 11 (2.5.5)**.** 求将上半平面映为自身的分式线性变换, 使得实轴上的 x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$ 分别映为 0, 1, ∞.

解. 交比不变:

$$(w, 0, 1, \infty) = (z, x_1, x_2, x_3).$$

化简得

$$w = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} \cdot \frac{z - x_1}{z - x_3}.$$

上半平面是 x_1, x_2, x_3 和 0, 1, ∞ 的左侧, 因此 $z \mapsto w$ 将上半平面映为上半平面.

故所求变换为 $w = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} \cdot \frac{z - x_1}{z - x_3}$. □

题 12 (2.5.13)**.** 求将 $B(0,1)$ 映为自身的分式线性变换, 使得 $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$ 分别映为 $\frac{1}{2}$, 2, ∞.

解. 通过交比不变, 可求得

$$w = \frac{(5 - 3i)z - 4}{4z - (5 + 3i)}.$$

为说明这是将 $B(0,1)$ 映为自身的变换, 利用例 *2.5.16* 的表示:

$$w = \frac{5 - 3i}{5 + 3i} \frac{z - \frac{4}{5-3i}}{1 - \frac{4}{5+3i} z}.$$

故所求变换为 $w = \frac{(5-3i)z-4}{4z-(5+3i)}$. □

题 13 (2.5.15)**.** 求单叶全纯映射, 将除去 $[0, 1 + i]$ 的第一象限映为上半平面.

解. 见图3. $w = \sqrt{z^4 + 4}$ ($\sqrt{\cdot}$ 取 $\sqrt{-1} = i$ 分支) 满足要求. □

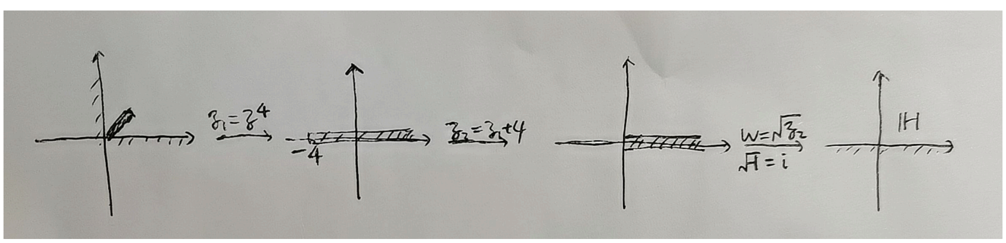

图 3: 2.5.15 的图示.

题 14 (2.5.16)**.** 求单叶全纯映射, 将 $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \Re z < \frac{\pi}{2}, \Im z > 0\}$ 映为上半平面, 且将 $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, 0 分别映为 1, -1, 0.

解. 可以验证 $w = \sin z$ 满足要求. 如对三角函数和 Joukowsky 变换不熟悉, 也可如图4构造. □

题 15 (2.5.18)**.** 求单叶全纯映射将 $|z| = 1$ 与 $|z + \sqrt{3}i| = 2$ 围成的月牙形域映为单位圆盘.

解. 见图5. $w = \frac{3z^2+1}{z^3+3z}$ 满足要求. □

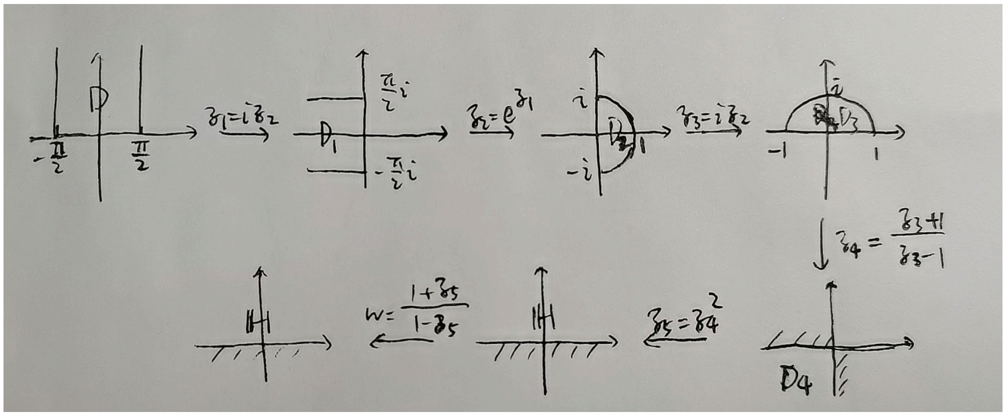

图 4: 2.5.16 的图示.

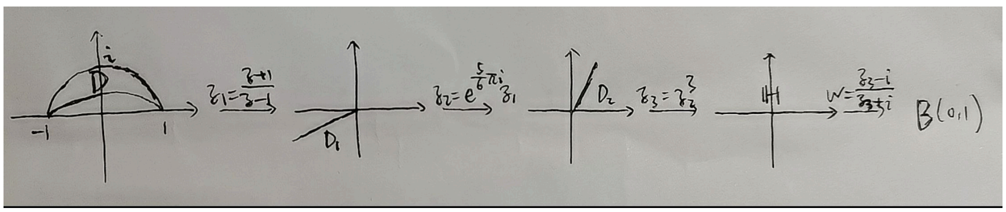

图 5: 2.5.18 的图示.

2 补充题

2.1 多值函数计算

参考第一次习题课习题 2.8 (2021 年 H 班期中).

2.2 共形映射构造

题 16 (2.5.19)**.** 求单叶全纯映射将除去 $[1,2]$ 的单位圆盘外部映为上半平面.

解. 见图6. $w = \sqrt{-\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + \frac{1}{9}}$ ($\sqrt{\cdot}$ 取 $\sqrt{-1} = i$ 分支) 满足要求. □

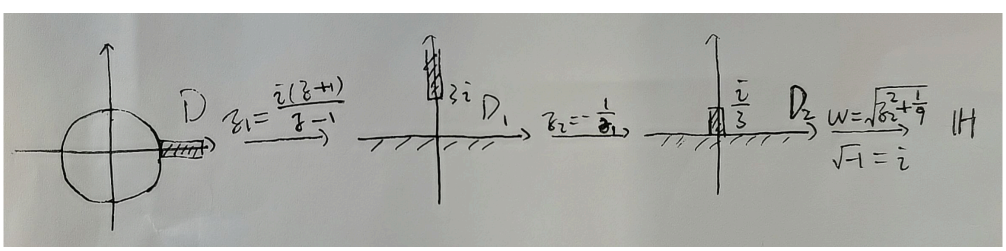

图 6: 2.5.19 的图示.

题 17. 求共形映射将双曲线 $x^2 - y^2 = a^2$ 的右半支映为单位圆盘, 使得焦点和顶点分别被映为 0 和 -1.

解. 见图7. $w = 1 - 2a^2 z^{-2}$ 满足要求. □

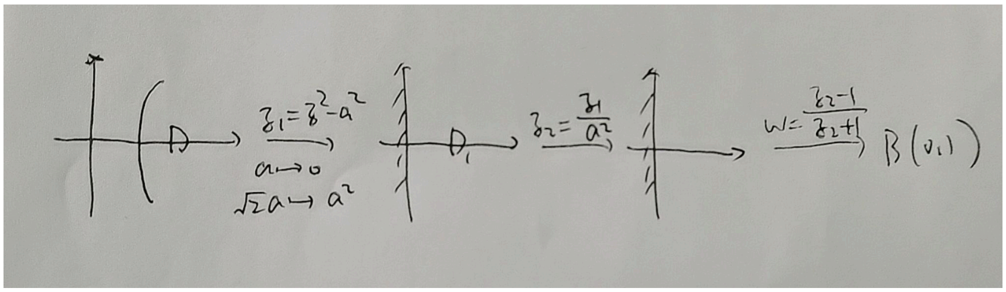

图 7: 题17的图示.

3 总结

3.1 多值函数

多值函数计算可使用沿曲线增量的方式, 参考课堂内容, 李皓昭老师的讲义, 第一次习题课及本讲义. 关于计算一点处导数的值可参考第一次习题课习题 2.8.

3.2 共形映射构造

2.5 节习题前半部分的题目给出了三个点被映到三个点, 基本做法: 先求出分式线性变换, 再验证其满足其他所有要求. 其中, 求分式线性变换可利用交比不变, 验证满足其他要求可利用分式线性变换的各种性质.

构造共形映射, 可分步作出映射并图示, 最后写出复合映射的表达式, 如用到多值函数, 须注明所取分支. 解题时应注意其他要求. 熟悉一些常见图形的处理办法对解题有帮助.