

复分析第五次习题课

彭子鱼

2024 年 5 月 26 日

上次更新: 2024 年 5 月 20 日

1 作业

题 1 (5.1.2). 求函数在给定域上的 Laurent 展开.

(1) $\frac{1}{z^2(z-1)}$, $D = B(1, 1) \setminus \{1\}$;

(3) $\operatorname{Log} \left(\frac{z-1}{z-2} \right)$, $D = B(\infty, 2)$;

(5) $\frac{1}{(z-5)^n}$, $n \geq 0$, $D = B(\infty, 5)$.

解. (1) 由于 $|z-1| < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(z-1)} &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(1+z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (z-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

(3) 易验证在 $B(\infty, 2)$ 上 $\operatorname{Log} \left(\frac{z-1}{z-2} \right)$ 可取出单值全纯分支, 只需考虑主支.

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{z-1}{z-2} \right) &= \log \left(1 - \frac{1}{z} \right) - \log \left(1 - \frac{2}{z} \right) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nz^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{nz^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{n} z^{-n}. \end{aligned}$$

故

$$\operatorname{Log} \left(\frac{z-1}{z-2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{n} z^{-n} + 2k\pi i,$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$.

(5) 由于 $|\frac{5}{z}| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-5)^n} &= \frac{1}{z^n} \frac{1}{(1-\frac{5}{z})^n} \\&= \frac{1}{z^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n(n+1) \cdots (n+k-1) \left(\frac{5}{z}\right)^k \\&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} 5^k z^{-n-k}.\end{aligned}\quad \square$$

注记. 求 Laurent 级数时, 须注意在何处展开.

题 2 (5.2.2). 求函数 $f(z)$ 的奇点并判断其类型.

(3) $\sin \frac{1}{z-1}$.

(7) $\sin\left(\frac{1}{\cos \frac{1}{z}}\right)$.

(8) $e^{\tan z}$.

解. (3) 可能的奇点为 $1, \infty$. 因为 $\lim_{z \rightarrow 1} f(z)$ 不存在, $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \sin \frac{z}{z-1} = 0$, 所以 1 是本性奇点, ∞ 是可去奇点.

(7) 可能的奇点为 $0, \infty, \frac{2}{(2k+1)\pi}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. 因为 $\lim_{z \rightarrow \frac{2}{(2k+1)\pi}} f(z)$ 不存在, 所以 $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 是本性奇点. 从而 0 是非孤立奇点. 因为 $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{\cos z}\right) = \sin 1$, 所以 ∞ 是可去奇点.

(8) 可能的奇点为 $\infty, k\pi + \frac{\pi}{2}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. 因为 $\lim_{z \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} f(z)$ 不存在, 所以 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 是本性奇点. 从而 ∞ 是非孤立奇点. \square

注记. 须讨论 ∞ 的类型. 注意非孤立奇点的概念.

题 3 (5.3.1). 求所有 \mathbb{C} 上亚纯函数 f , 使得 $|f(z)| = 1$ 对任意 $z \in \partial B(0, 1)$ 成立.

解. 设 \square