

复分析第二次习题课

彭子鱼

2024 年 3 月 31 日

1 作业

题 1 (2.4.8). 证明 $f(z) = z^2 + 2z + 3$ 在 $B(0, 1)$ 中单叶.

证明. 设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $z_1^2 + 2z_1 + 3 = z_2^2 + 2z_2 + 3$, 即 $(z_1 - z_2)(z_1 + z_2 + 2) = 0$. 而 $z_1, z_2 \in B(0, 1)$, 只能 $z_1 = z_2$. 故 $f(z)$ 在 $B(0, 1)$ 中单叶. \square

题 2 (2.4.15, 2.4.16). 考虑 Joukowski¹ 变换 $\phi(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. 证明下面 4 个域都是 $\phi(z)$ 的单叶域并求出它们的像:

1. 上半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$;
2. 下半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}$;
3. 无心单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$;
4. 单位圆盘的外部 $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

证明. 对 $z_1 \neq z_2$, $\phi(z_1) = \phi(z_2)$ 当且仅当 $z_1 z_2 = 1$, 这蕴含 $\Im z_1 \cdot \Im z_2 < 0$ 和 $|z_1 z_2| = 1$. 因此这 4 个域都是 $\phi(z)$ 的单叶域.

为求这 4 个域的像, 我们将 ϕ 写成一系列函数的复合:

$$z \longrightarrow z_1 = \frac{z-1}{z+1} \longrightarrow z_2 = z^2 \longrightarrow w = \frac{1+z_2}{1-z_2} = \phi(z).$$

结论: ϕ 将前两个域均映为 $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$, 后两个域均映为 $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. \square

题 3 (2.4.17). 证明下面 2 个域都是 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的单叶域:

1. $\{z \in \mathbb{C} : \theta_0 < \Re z < \theta_0 + 2\pi, \Im z > 0\}$;
2. $\{z \in \mathbb{C} : \theta_0 < \Re z < \theta_0 + 2\pi, \Im z < 0\}$.

¹Nikolay Zhukovsky (1847-1921) was a Russian mathematician and engineer. His surname is usually romanised as Joukovsky or Joukowski.

证明. 记 $\phi(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $\psi(z) = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})$, 则

$$\begin{aligned}\cos z &= \phi(e^{iz}), \\ \sin z &= \frac{1}{i}\psi(e^{iz}).\end{aligned}$$

在给定的域, $z \mapsto e^{iz}$ 是单射, 且像为 $\{re^{i\theta} : 0 < r < 1, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$ 和 $\{re^{i\theta} : r > 1, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$. 又已证 ϕ (ψ 类似) 在这两个域上单叶. 故 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在题所给域上单叶. \square

题 4 (2.4.22). 设 $f(z) = \frac{z^{p-1}}{(1-z)^p}$, $0 < p < 1$. 证明 f 能在 $D = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ 上选出单值全纯分支.

证明. 任取 D 中简单闭曲线 C , 则 C 内部或者同时不含 0 和 1, 或者同时含 0 和 1. 对于前者, 显然 $\Delta_C f(z) = 0$. 对于后者,

$$\begin{aligned}\Delta_C \operatorname{Arg} f(z) &= (p-1)\Delta_C \operatorname{Arg} z - p\Delta_C \operatorname{Arg}(1-z) \\ &= (p-1) \cdot 2\pi - p \cdot 2\pi \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

\square

题 5 (2.4.23). 证明 $f(z) = \operatorname{Log} \frac{z^2-1}{z}$ 能在 $D = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [0, 1])$ 上选出单值全纯分支.

证明. 考虑

$$\Delta_C f(z) = i(\Delta_C \operatorname{Arg}(z-1) + \Delta_C \operatorname{Arg}(z+1) - \Delta_C \operatorname{Arg}(z)).$$

由此可得支点为 0, ± 1 , ∞ .

任取 D 中简单闭曲线 C , 只需考虑 C 包含 0, 1. 此时

$$\Delta_C f(z) = i(2\pi + 0 - 2\pi) = 0.$$

故 $f(z)$ 能在 D 上选出单值全纯分支. \square

题 6 (2.4.26). 设 D 是复平面上去掉 $[-1, i]$, $[1, i]$ 和射线 $z = it$ ($1 \leq t < \infty$) 后的域. 证明 $\operatorname{Log}(1-z^2)$ 能在 D 上选出单值全纯分支. 设分支 f 满足 $f(0) = 0$, 求 $f(2)$.

证明. 考虑

$$\Delta_C \operatorname{Log}(1-z^2) = i(\Delta_C \operatorname{Arg}(z-1) + \Delta_C \operatorname{Arg}(z+1)).$$

由此可得支点为 ± 1 , ∞ . 故 $\operatorname{Log}(1-z^2)$ 能在 D 上选出单值全纯分支.

计算

$$\begin{aligned}f(2) &= f(0) + \Delta_{C_0} \operatorname{Log}(1-z^2) \\ &= \Delta_{C_0} \log |1-z^2| + i\Delta_{C_0} \operatorname{Arg}(z-1) + i\Delta_{C_0} \operatorname{Arg}(z+1) \\ &= \log 3 + \pi i,\end{aligned}$$

其中 C_0 如图1所示. \square

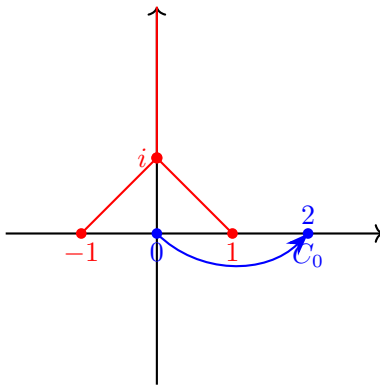


图 1: Illustration of C_0 in Problem 2.4.26.

题 7 (2.4.27). 证明 $\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$ 能在 $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ 上选出单值全纯分支 f , 满足 $f(i) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i}$. 求 $f(-i)$.

证明. 任取 D 中简单闭曲线 C , 只需考虑 C 包含 ± 1 . 此时

$$\Delta_C \operatorname{Arg} f(z) = \frac{3}{4} \Delta_C \operatorname{Arg}(z-1) + \frac{1}{4} \Delta_C \operatorname{Arg}(1+z) = 2\pi.$$

故 $\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$ 能在 D 上选出单值全纯分支.

计算

$$\begin{aligned} f(-i) &= f(i) + \Delta_{C_0} \sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)} \\ &= \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i} + f(i) \left(e^{\frac{1}{4}i \Delta_{C_0} \operatorname{Arg}(1-z)^3(1+z)} - 1 \right) \\ &= \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i} + f(i) \left(e^{\frac{1}{4}i(3 \cdot (-\frac{3}{2}\pi) + (-\frac{1}{2}\pi))} - 1 \right) \\ &= \sqrt{2}e^{\frac{5}{8}\pi i}, \end{aligned}$$

其中 C_0 如图2所示. □

题 8 (2.5.1). 求将上半平面映为上半平面的分式线性变换, 使得 $\infty, 0, 1$ 分别映为 $0, 1, \infty$.

解. 交比不变:

$$(w, 0, 1, \infty) = (z, \infty, 0, 1).$$

化简得

$$w = \frac{1}{1-z}.$$

上半平面是 $\infty, 0, 1$ 和 $0, 1, \infty$ 的左侧, 因此 $z \mapsto w$ 将上半平面映为上半平面.

故所求变换为 $w = \frac{1}{1-z}$. □

题 9 (2.5.2). 求将上半平面映为单位圆盘的分式线性变换, 使得 $-1, 0, 1$ 分别映为 $1, i, -1$.

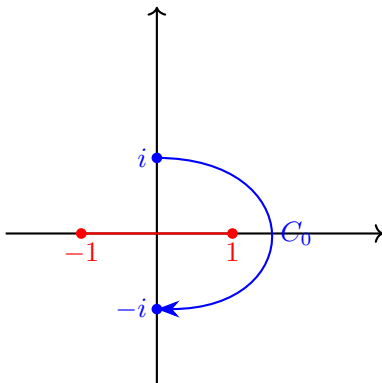


图 2: Illustration of C_0 in Problem 2.4.27.

解. 交比不变:

$$(w, 1, i, -1) = (z, -1, 0, 1).$$

化简得

$$w = \frac{z - i}{iz - 1}.$$

上半平面是 $-1, 0, 1$ 的左侧, 单位圆盘是 $1, i, -1$ 的左侧, 因此 $z \mapsto w$ 将上半平面映为单位圆盘. 故所求变换为 $w = \frac{z-i}{iz-1}$. \square

题 10 (2.5.4). 求将单位圆盘的外部映为右半平面的分式线性变换, 使得

1. $1, -i, -1$ 分别映为 $i, 0, -i$;
2. $-i, i, 1$ 分别映为 $i, 0, -i$.

解. 通过交比不变计算, 再用左右侧说明得到的映射将单位圆盘外部映为右半平面.

结论:

1. $w = \frac{z+i}{z-i}$;
2. $w = \frac{z-i}{(2-i)z+2i-1}$.

\square

题 11 (2.5.5). 求将上半平面映为自身的分式线性变换, 使得实轴上的 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) 分别映为 $0, 1, \infty$.

解. 交比不变:

$$(w, 0, 1, \infty) = (z, x_1, x_2, x_3).$$

化简得

$$w = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} \cdot \frac{z - x_1}{z - x_3}.$$

上半平面是 x_1, x_2, x_3 和 $0, 1, \infty$ 的左侧, 因此 $z \mapsto w$ 将上半平面映为上半平面.

故所求变换为 $w = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} \cdot \frac{z - x_1}{z - x_3}$.

□

题 12 (2.5.13). 求将 $B(0, 1)$ 映为自身的分式线性变换, 使得 $\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$ 分别映为 $\frac{1}{2}, 2, \infty$.

解. 通过交比不变, 可求得

$$w = \frac{(5 - 3i)z - 4}{4z - (5 + 3i)}.$$

为说明这是将 $B(0, 1)$ 映为自身的变换, 利用例 2.5.16:

$$w = \frac{5 - 3i}{5 + 3i} \frac{z - \frac{4}{5 - 3i}}{1 - \frac{4}{5 + 3i}z}.$$

□

题 13 (2.5.15). 求单叶全纯映射, 将除去 $[0, 1 + i]$ 的第一象限映为上半平面.

解. 见图3. $w = \sqrt{z^4 + 4}$ ($\sqrt{\cdot}$ 取 $\sqrt{-1} = i$ 分支) 满足要求.

□

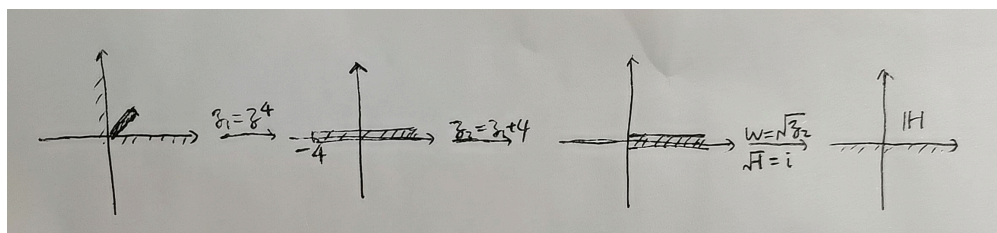


图 3: Illustration of Problem 2.5.15.

题 14 (2.5.16). 求单叶全纯映射, 将 $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \Re z < \frac{\pi}{2}, \Im z > 0\}$ 映为上半平面, 且将 $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0$ 分别映为 $1, -1, 0$.

解. 可以验证 $w = \sin z$ 满足要求. 如对三角函数和 Joukowski 变换不熟悉, 也可如图4构造.

□

题 15 (2.5.18). 求单叶全纯映射将 $|z| = 1$ 与 $|z + \sqrt{3}i| = 2$ 围成的月牙形域映为单位圆盘.

解. 见图5. $w = \frac{3z^2 + 1}{z^3 + 3z}$ 满足要求.

□

2 补充题

2.1 多值函数计算

参考第一次习题课习题 2.8 (2021 年 H 班期中).

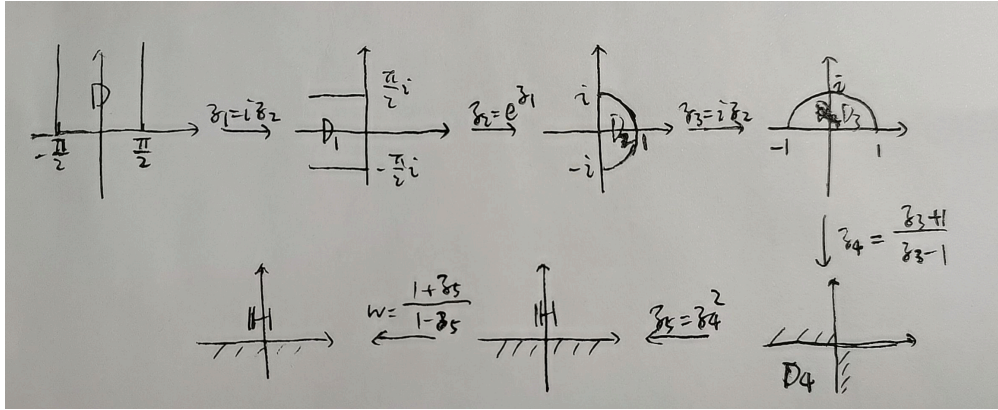


图 4: Illustration of Problem 2.5.16.

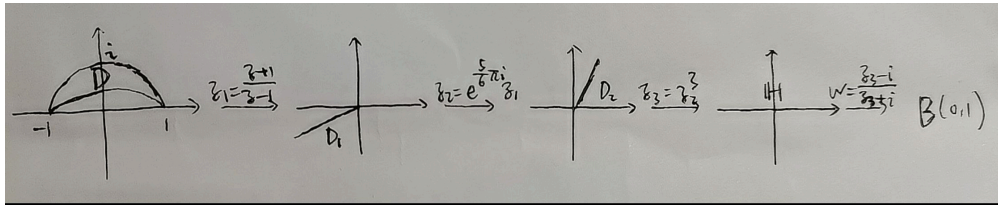


图 5: Illustration of Problem 2.5.18.

2.2 共形映射构造

题 16 (2.5.19). 求单叶全纯映射将除去 $[1, 2]$ 的单位圆盘外部映为上半平面.

解. 见图6. $w = \frac{\sqrt{-\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + \frac{1}{9}} - i}{\sqrt{-\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + \frac{1}{9}} + i}$ ($\sqrt{\cdot}$ 取 $\sqrt{-1} = i$ 分支) 满足要求. □

题 17. 求共形映射将双曲线 $x^2 - y^2 = a^2$ 的右半支映为单位圆盘, 使得焦点和顶点分别被映为 0 和 -1 .

解. 见图7. $w = 1 - 2a^2 z^{-2}$ 满足要求. □

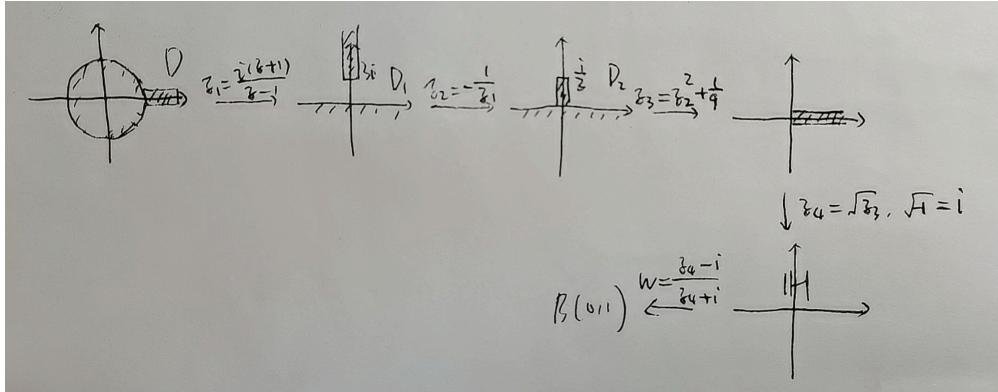


图 6: Illustration of Problem 2.5.19.

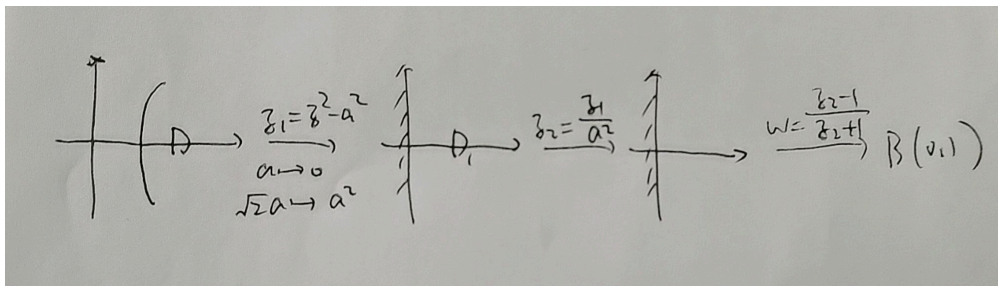


图 7: Illustration of Problem