

# 复分析第五次习题课

彭子鱼

2024 年 5 月 26 日

上次更新: 2024 年 5 月 20 日

## 1 作业

题 1 (5.1.2). 求函数在给定域上的 Laurent 展开.

(1)  $\frac{1}{z^2(z-1)}$ ,  $D = B(1, 1) \setminus \{1\}$ ;

(3)  $\text{Log} \left( \frac{z-1}{z-2} \right)$ ,  $D = B(\infty, 2)$ ;

(5)  $\frac{1}{(z-5)^n}$ ,  $n \geq 0$ ,  $D = B(\infty, 5)$ .

解. (1) 由于  $|z-1| < 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(z-1)} &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(1+z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (z-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

(3) 易验证在  $B(\infty, 2)$  上  $\text{Log} \left( \frac{z-1}{z-2} \right)$  可取出单值全纯分支, 只需考虑主支.

$$\begin{aligned} \log \left( \frac{z-1}{z-2} \right) &= \log \left( 1 - \frac{1}{z} \right) - \log \left( 1 - \frac{2}{z} \right) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nz^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{nz^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{n} z^{-n}. \end{aligned}$$

故

$$\text{Log} \left( \frac{z-1}{z-2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{n} z^{-n} + 2k\pi i,$$

其中  $k \in \mathbb{Z}$ .

(5) 由于  $|\frac{5}{z}| < 1$ ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-5)^n} &= \frac{1}{z^n} \frac{1}{(1-\frac{5}{z})^n} \\&= \frac{1}{z^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n(n+1) \cdots (n+k-1) \left(\frac{5}{z}\right)^k \\&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} 5^k z^{-n-k}.\end{aligned}\quad \square$$

**注记.** 求 Laurent 级数时, 须注意在何处展开.

**题 2** (5.2.2). 求函数  $f(z)$  的奇点并判断其类型.

(3)  $\sin \frac{1}{z-1}$ .

(7)  $\sin \left( \frac{1}{\cos \frac{1}{z}} \right)$ .

(8)  $e^{\tan z}$ .

解. (3) 可能的奇点为  $1, \infty$ . 因为  $\lim_{z \rightarrow 1} f(z)$  不存在,  $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \sin \frac{z}{z-1} = 0$ , 所以  $1$  是本性奇点,  $\infty$  是可去奇点.

(7) 可能的奇点为  $0, \infty, \frac{2}{(2k+1)\pi}$ , 其中  $k \in \mathbb{Z}$ . 因为  $\lim_{z \rightarrow \frac{2}{(2k+1)\pi}} f(z)$  不存在, 所以  $\frac{2}{(2k+1)\pi}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 是本性奇点. 从而  $0$  是非孤立奇点. 因为  $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \sin \left( \frac{1}{\cos z} \right) = \sin 1$ , 所以  $\infty$  是可去奇点.

(8) 可能的奇点为  $\infty, k\pi + \frac{\pi}{2}$ , 其中  $k \in \mathbb{Z}$ . 因为  $\lim_{z \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} f(z)$  不存在, 所以  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 是本性奇点. 从而  $\infty$  是非孤立奇点.  $\square$

**注记.** 须讨论  $\infty$  的类型. 注意非孤立奇点的概念.

**题 3** (5.3.1). 求所有  $\mathbb{C}$  上亚纯函数  $f$ , 使得  $|f(z)| = 1$  对任意  $z \in \partial B(0, 1)$  成立.

解. 设  $f$   $\square$