

# 复分析第五次习题课

彭子鱼

2024 年 5 月 26 日

上次更新: 2024 年 5 月 28 日

## 1 作业

题 1 (5.1.2). 求函数在给定域上的 Laurent 展开.

(1)  $\frac{1}{z^2(z-1)}, D = B(1, 1) \setminus \{1\};$

(3)  $\text{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right), D = B(\infty, 2);$

(5)  $\frac{1}{(z-5)^n}, n \geq 0, D = B(\infty, 5).$

解. (1) 由于  $|z-1| < 1$ ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z-1)} &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(1+z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

(3) 易验证在  $B(\infty, 2)$  上  $\text{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)$  可取出单值全纯分支, 只需考虑主支.

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{z-1}{z-2}\right) &= \log\left(1 - \frac{1}{z}\right) - \log\left(1 - \frac{2}{z}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nz^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{nz^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{n} z^{-n}.\end{aligned}$$

故

$$\text{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{n} z^{-n} + 2k\pi i,$$

其中  $k \in \mathbb{Z}$ .

(5) 由于  $|\frac{5}{z}| < 1$ ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-5)^n} &= \frac{1}{z^n} \frac{1}{(1-\frac{5}{z})^n} \\ &= \frac{1}{z^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n(n+1) \cdots (n+k-1) \left(\frac{5}{z}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} 5^k z^{-n-k}.\end{aligned}$$

□

**注记.** 求 Laurent 级数时, 须注意在何处展开.

**题 2** (5.2.2). 求函数  $f(z)$  的奇点并判断其类型.

(3)  $\sin \frac{1}{z-1}$ ;

(7)  $\sin\left(\frac{1}{\cos \frac{1}{z}}\right)$ ;

(8)  $e^{\tan z}$ .

解. (3) 可能的奇点为  $1, \infty$ . 因为  $\lim_{z \rightarrow 1} f(z)$  不存在,  $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \sin \frac{z}{z-1} = 0$ , 所以 1 是本性奇点,  $\infty$  是可去奇点.

(7) 可能的奇点为  $0, \infty, \frac{2}{(2k+1)\pi}$ , 其中  $k \in \mathbb{Z}$ . 因为  $\lim_{z \rightarrow \frac{2}{(2k+1)\pi}} f(z)$  不存在, 所以  $\frac{2}{(2k+1)\pi}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 是本性奇点. 从而 0 是非孤立奇点. 因为  $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{\cos z}\right) = \sin 1$ , 所以  $\infty$  是可去奇点.

(8) 可能的奇点为  $\infty, k\pi + \frac{\pi}{2}$ , 其中  $k \in \mathbb{Z}$ . 因为  $\lim_{z \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} f(z)$  不存在, 所以  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 是本性奇点. 从而  $\infty$  是非孤立奇点. □

**注记.** 须讨论  $\infty$  的类型. 注意非孤立奇点的概念.

**题 3** (5.3.1). 求所有  $\mathbb{C}$  上亚纯函数  $f$ , 使得  $|f(z)| = 1$  对任意  $z \in \partial B(0, 1)$  成立.

解. 由  $f$  亚纯且非零, 其在  $B(0, 1)$  只有有限个零点和极点, 设  $f$  零点为  $z_1, \dots, z_n$ , 极点为  $w_1, \dots, w_m$  (可重复).

令

$$g(z) = f(z) \prod_{k=1}^n \frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} \prod_{l=1}^m \frac{z - w_l}{1 - \bar{w}_l z},$$

则  $g$  在  $\overline{B(0, 1)}$  全纯且无零点,  $|g(z)| = 1$  对任意  $z \in \partial B(0, 1)$  成立. 考虑  $\frac{1}{g}$  并利用最大模原理,  $g$  为常数, 即  $g(z) = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

故所有满足要求的函数为

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} \prod_{l=1}^m \frac{1 - \bar{w}_l z}{z - w_l},$$

其中  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $n, m$  为非负整数,  $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m \in B(0, 1)$ . □

**题 4** (5.4.8). 求函数的孤立奇点并求出其留数.

(6)  $\sin \frac{z}{z+1}$ ;

(8)  $\frac{e^{\pi z}}{z^2+1}$ .

解. (6) 可能的奇点为  $-1, \infty$ . 因为  $\lim_{z \rightarrow -1} f(z)$  不存在, 所以  $-1$  是本性奇点. 因为  $\lim_{z \rightarrow 0} f(\frac{1}{z}) = \sin 1$ , 所以  $\infty$  是可去奇点.

由 5.4.3,

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{(z+1)^2} \cos \frac{z}{z+1} = \cos 1.$$

由留数定理,

$$\operatorname{Res}(f, -1) = -\operatorname{Res}(f, \infty) = -\cos 1.$$

(8) 可能的奇点为  $\pm i, \infty$ . 因为  $\lim_{z \rightarrow \pm i} f(z) = \infty$ , 所以  $\pm i$  是极点. 因为  $\lim_{z \rightarrow 0} f(\frac{1}{z})$  不存在, 所以  $\infty$  是本性奇点.

由  $\pm i$  是 1 阶极点,

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \frac{i}{2},$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i)f(z) = -\frac{i}{2}.$$

由留数定理,  $\operatorname{Res}(f, \infty) = 0$ . □

**注记.** 本题说明, 即使  $\infty$  是可去奇点, 该处的留数也可能不为 0.

**题 5** (5.4.9). 设  $f, g$  在  $B(0, R)$  中全纯, 在  $\overline{B(0, R)}$  上连续,  $g$  在  $\partial B(0, R)$  上无零点,  $g$  在  $B(0, R)$  中的全部零点  $z_1, \dots, z_n$  都是 1 阶零点. 求

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{zg(z)} dz.$$

解. 记  $h(z) = \frac{f(z)}{zg(z)}$ .

先证明: 若  $z_k \neq 0$ , 则对充分小的  $\varepsilon > 0$ ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_k|=\varepsilon} \frac{f(z)}{zg(z)} dz = \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)}.$$

这可分两种情况讨论. 若  $f(z_k) \neq 0$ , 则  $z_k$  是  $h$  的 1 阶极点,

$$\operatorname{Res}(h, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{f(z)}{z} \cdot \frac{z - z_k}{g(z)} = \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)}.$$

若  $f(z_k) = 0$ , 则  $z_k$  是  $h$  的可去奇点, 从而  $\int_{|z-z_k|=\varepsilon} \frac{f(z)}{zg(z)} dz = 0$ . 总之, 上式成立.

再讨论 0 处情形. 对充分小的  $\varepsilon > 0$ , 记

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{zg(z)} dz.$$

若 0 不是  $g$  的零点, 则 0 是  $h$  的 1 阶极点或可去奇点, 由  $f(0)$  是否为 0 决定. 和上面类似可知

$$I = \frac{f(0)}{g(0)}.$$

若 0 是  $g$  的零点, 对  $f$  在 0 处情况讨论.

若 0 是  $f$  的至少 2 阶零点, 则 0 是  $h$  的可去奇点, 从而

$$I = 0.$$

若 0 是  $f$  的 1 阶零点, 则 0 是  $h$  的 1 阶极点,

$$I = \text{Res}(h, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} zh(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)/z}{g(z)/z} = \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

若 0 不是  $f$  的零点, 则 0 是  $h$  的 2 阶极点,

$$I = \text{Res}(h, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} (z^2 h(z))' = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{zf(z)}{g(z)} \right)' = \frac{f'(0)}{g'(0)} - \frac{f(0)g''(0)}{2(g'(0))^2}.$$

由 Cauchy 积分定理,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{zg(z)} dz = I + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_k|=\varepsilon} \frac{f(z)}{zg(z)} dz.$$

故

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{zg(z)} dz = \sum_{k: z_k \neq 0} \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)} + \frac{f(0)}{g(0)} \mathbb{1}\{g(0) \neq 0\} + \left( \frac{f'(0)}{g'(0)} - \frac{f(0)g''(0)}{2(g'(0))^2} \right) \mathbb{1}\{g(0) = 0\}. \quad \square$$

**题 6** (5.4.10). 求积分.

$$(1) \int_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)} dz;$$

$$(4) \int_{|z|=R} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3} - 1} dz.$$

解. (1) 易知  $f$  在  $B(\infty, 2)$  上全纯, 且  $\infty$  为可去奇点. 从而

$$\text{Res}(f, \infty) = 0.$$

故

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)} dz = -2\pi i \text{Res}(f, \infty) = 0.$$

(4) 作换元  $w = z^3$ . 注意  $z^2 dz = \frac{1}{3} dw$ , 换元后变成绕 3 圈, 二者抵消. 因此

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3} - 1} dz = \int_{|w|=R^3} \frac{1}{e^{2\pi i w} - 1} dw.$$

在  $|w| < R^3$ ,  $\frac{1}{e^{2\pi i w} - 1}$  有 1 阶极点  $0, \pm 1, \dots, \pm n$ , 且留数均为  $\frac{1}{2\pi i}$ .

故

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3} - 1} dz = 2\pi i \cdot (2n+1) \cdot \frac{1}{2\pi i} = 2n+1. \quad \square$$

**题 7** (5.5.1(8)). 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx.$$

解. 令  $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}$ . 记  $\gamma_R = \{z = Re^{i\theta} : \theta \in [0, \pi]\}$ . 由 Jordan 引理,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

由留数定理,

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \frac{e^{iz}}{(z+i)^3} = \frac{7}{8} \pi e^{-1}.$$

令  $R \rightarrow \infty$  并注意  $\frac{\cos x}{(1+x^2)^3}$  是偶函数, 取实部得

$$I = \frac{7}{16} \pi e^{-1}. \quad \square$$

**题 8** (5.5.1(9)). 计算

$$I = \int_0^\infty \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$

解. 令  $f(z) = \frac{e^{2iz}-1}{z^2}$ . 考虑图1中围道. 则

$$\int_{-R}^{-r} - \int_{\gamma_r} + \int_r^R + \int_{\gamma_R} f(z) dz =: I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

作换元  $x \rightarrow -x$ ,

$$I_1 + I_3 = \int_r^R \frac{e^{-2ix}-1}{x^2} dx + \int_r^R \frac{e^{2ix}-1}{x^2} dx = -4 \int_r^R \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$

由 Jordan 引理,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_4 = 0.$$

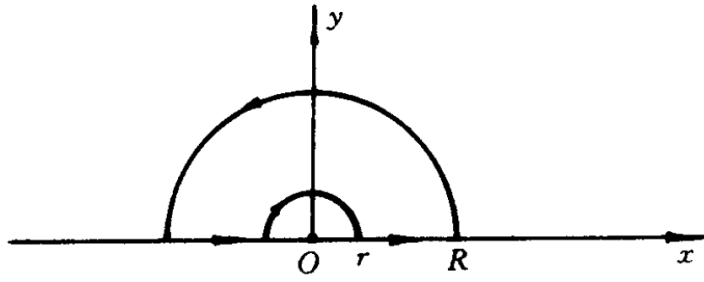


图 1: 题8的图示.

由引理 5.5.9,

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_2 = i\pi \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = -2\pi.$$

令  $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$  得  $-4I + 2\pi = 0$ , 即

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

□

**题 9** (5.5.1(11)). 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2} dx,$$

其中  $-1 < p < 1$ .

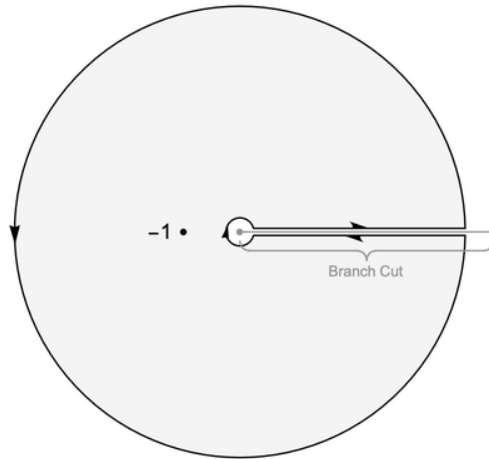


图 2: 题9的图示.

解. 一般地, 对  $-1 < a < b-1, b > 0$ , 有

$$I = \int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b} dx = \frac{\pi}{b} \csc\left(\pi \frac{a+1}{b}\right).$$

作换元  $y = x^b$ ,

$$I = \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{y^{(a+1-b)/b}}{1+y} dy.$$

令  $f(z) = \frac{z^{(a+1-b)/b}}{1+z}$ , 在正实轴上岸取正值. 考虑图2中围道. 则

$$\int_r^R + \int_{\gamma_R} - \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_r} f(z) dz =: I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1) = 2\pi i e^{i\pi \frac{a+1-b}{b}}.$$

当  $R \rightarrow \infty$  时,

$$|I_2| = O\left(R^{\frac{a+1-b}{b}-1+1}\right) \rightarrow 0.$$

当  $r \rightarrow 0$  时,

$$|I_4| = O\left(r^{\frac{a+1-b}{b}}\right) \rightarrow 0.$$

对  $x \in (0, \infty)$ ,

$$f(x_{\text{下}}) = f(x_{\text{上}}) \exp\left(2i\pi \frac{a+1-b}{b}\right),$$

从而

$$I_3 = I_1 \exp\left(i\pi \frac{a+1-b}{b}\right).$$

令  $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$ , 得

$$b\left(1 - e^{2i\pi \frac{a+1-b}{b}}\right) I = 2\pi i e^{i\pi \frac{a+1-b}{b}}.$$

取虚部可得

$$I = \frac{\pi}{b} \csc\left(\pi \frac{a+1}{b}\right).$$

□

**题 10** (5.5.1(15)). 计算

$$I = \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx,$$

其中  $-1 < p < 2$ .

解. 令  $f(z) = \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}$ , 在  $(0, 1)$  上岸取正实数. 考虑图3中围道. 则

$$\int_r^{1-r} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3} - \int_{\gamma_r} + \int_{\gamma_R} f(z) dz =: I_1 + I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i))$$

计算留数:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z+i} = \frac{1}{2i} 2^{p/2} \exp i \left( (1-p) \cdot \frac{\pi}{2} + p \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{3p\pi i}{4}},$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z-i} = -\frac{1}{2i} 2^{p/2} \exp i \left( (1-p) \cdot \frac{3\pi}{2} + p \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 2^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{5p\pi i}{4}}.$$

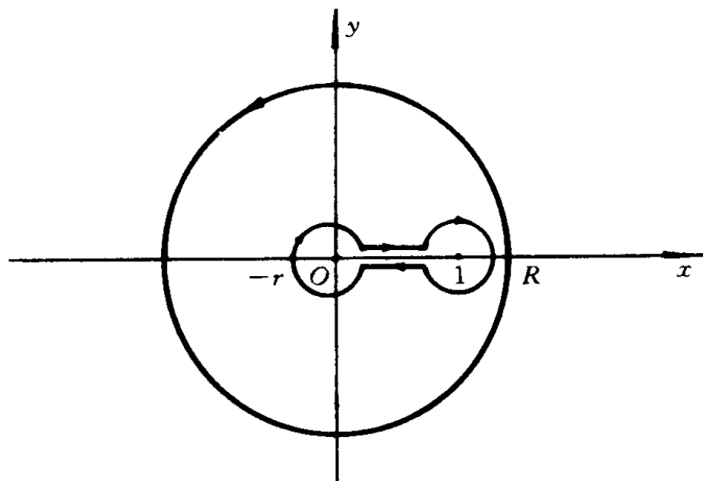


图 3: 题10的图示.

当  $R \rightarrow \infty$  时, 由引理 5.5.15,

$$I_5 \rightarrow 2\pi i e^{-i\pi p},$$

其中  $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = e^{-i\pi p}$  可如下计算:

令  $z$  沿实轴趋于  $+\infty$ , 则  $z f(z)$  模长趋于 1, 辐角趋于  $(2-p) \cdot 0 + p \cdot (-\pi) = -p\pi$ . 事实上, 沿任何方向趋于  $\infty$  都是一样的, 但注意考虑  $\frac{1}{1+z^2}$  的辐角变化.

当  $r \rightarrow 0$  时,

$$|I_4| = O(r^{1-p}r) \rightarrow 0,$$

$$|I_2| = O(r^p r) \rightarrow 0.$$

对  $x \in (0, 1)$ ,

$$f(x_{\text{F}}) = f(x_{\text{L}}) e^{-2i\pi p},$$

从而

$$I_3 = I_1 e^{-2i\pi p}.$$

令  $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$ ,

$$(1 - e^{-2i\pi p})I + 2\pi i e^{-i\pi p} = i\pi 2^{\frac{p}{2}} \left( e^{-i\frac{3\pi p}{4}} + e^{-i\frac{5\pi p}{4}} \right).$$

取虚部可得

$$I = -\frac{\pi}{\sin p\pi} + \frac{\pi 2^{p/2} \cos \frac{p\pi}{4}}{\sin p\pi}.$$

□

**题 11** (5.5.1(21)). 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} dx.$$



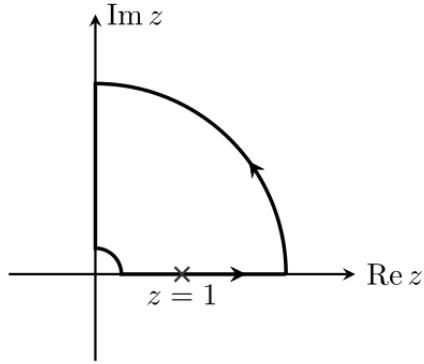


图 4: 题11的图示, 其中在 1 附近去掉半径为  $r$  的半圆

解. 令  $f(z) = \frac{\log z}{z^2 - 1}$ . 考虑图4中围道. 则

$$\int_r^{1-r} + \int_{\gamma_1} + \int_{1+r}^R + \int_{\gamma_R} - \int_{ri}^{Ri} - \int_{\gamma_r} f(z)dz =: I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

令  $z = yi$ ,

$$I_5 = \int_r^R \frac{\log y + \frac{\pi}{2}i}{-y^2 - 1} i dy = \frac{\pi}{2} \int_r^R \frac{dy}{1 + y^2} + \text{虚数}.$$

当  $R \rightarrow \infty$  时,

$$|I_4| = O\left(\frac{\log R}{R^2} \cdot R\right) \rightarrow 0.$$

当  $r \rightarrow 0$  时,

$$|I_2| = O\left(\frac{\log(1+r) + r}{r} \cdot r\right) \rightarrow 0$$

$$|I_5| = O\left(\frac{-\log r}{1 - r^2} \cdot r\right) \rightarrow 0.$$

令  $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$  并取实部得

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

□

**题 12** (5.5.1(25)). 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx.$$

解. 令  $f(z) = \frac{z^2}{e^z + 1}$ . 考虑图5中围道. 则

$$\int_0^R + \int_{\gamma_1} + \int_{R+2\pi i}^{2\pi i} - \int_{\pi i}^{2\pi i} - \int_{\gamma_2} - \int_0^{\pi i} f(z)dz =: I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 - I_6 = 0.$$

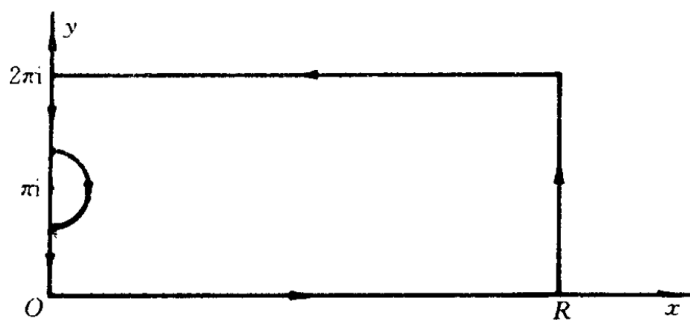


图 5: 题12的图示.

令  $z = x + 2\pi i$ ,

$$I_1 + I_3 = \int_0^R \left( \frac{x^2}{e^x + 1} - \frac{(x + 2\pi i)^2}{e^x + 1} \right) dx = -4\pi^2 \int_0^R \frac{1}{e^x + 1} dx - 4\pi i \int_0^R \frac{x}{e^x + 1} dx.$$

当  $R \rightarrow \infty$  时,

$$I_2 \rightarrow 0.$$

令  $z = ix$ ,

$$\begin{aligned} I_4 + I_6 &= \int_0^{\pi-r} + \int_{\pi+r}^{2\pi} \frac{(xi)^2}{e^{xi} + 1} i dx = - \int_0^{\pi-r} + \int_{\pi+r}^{2\pi} \frac{ix^2(1 + \cos x - i \sin x)}{2 + 2 \cos x} dx \\ &= \text{实数} - i \left( \frac{4\pi^3}{3} + \frac{1}{6}(\pi - r)^3 - \frac{1}{6}(\pi + r)^3 \right). \end{aligned}$$

由引理 5.5.9,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_5 = i\pi \lim_{z \rightarrow \pi i} f(z - \pi i)f(z) = \pi^3.$$

令  $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$  并取虚部得

$$-4\pi I + \frac{4\pi^3}{3} - \pi^3 = 0,$$

即

$$I = \frac{\pi^2}{12}.$$

□

## 2 补充题

**题 13** (5.2.6). 设  $f$  是  $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  上非常值的全纯函数. 证明: 若  $z_0$  是  $f$  的零点集的极限点, 则  $z_0$  是  $f$  的本性奇点.

证明. 由条件易知  $z_0$  是  $f$  的孤立奇点.

若  $z_0$  是  $f$  的可去奇点, 则由  $z_0$  是  $f$  的零点集的极限点知  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$ , 且补充定义  $f(z_0) = 0$  后  $f$  在  $B(z_0, R)$  全纯. 由唯一性定理知  $f \equiv 0$ , 矛盾.

若  $z_0$  是  $f$  的极点, 则对  $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  任意趋于  $z_0$  的序列  $\{w_n\}$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = \infty$ , 与  $z_0$  是  $f$  的零点集的极限点矛盾.

故  $z_0$  是  $f$  的本性奇点.  $\square$

**题 14 (5.2.7).** 若  $f$  是  $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  上的亚纯函数, 且  $z_0$  是  $f$  的极点集的极限点, 则对任意  $A \in \mathbb{C}_\infty$ , 存在  $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  中收敛于  $z_0$  的点列  $\{z_n\}$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ .

证明. 设题中所说点列为  $\{w_n\}$ .

若  $A = \infty$ , 则对任意  $n$ , 由于  $w_n$  是极点, 存在  $z_n \in B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ , 使得  $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$  且  $|f(z_n)| > n$ . 从而  $z_n \rightarrow z_0$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty = A$ .

设  $A$  是有限. 若  $z_0$  任一邻域中有  $f(z) - A$  的零点, 则结论成立. 若不然, 存在  $\delta > 0$ , 使得  $f(z) - A$  在  $0 < |z - z_0| < \delta$  中恒不为 0. 令  $g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ ,  $0 < |z - z_0| < \delta$ . 对  $f$  的任一极点  $w$ ,  $\lim_{z \rightarrow w} g(z) = 0$ , 补充定义  $g(w) = 0$ , 则  $g$  在  $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$  中全纯. 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(w_n) = 0$ , 所以  $z_0$  或者是  $g$  的本性奇点, 或者是可去奇点. 下面讨论这两种情况.

若  $z_0$  是  $g$  的可去奇点, 则补充定义  $g(z_0) = 0$ ,  $g$  在  $B(z_0, \delta)$  中全纯. 由唯一性定理,  $g \equiv 0$ , 与  $f$  在  $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  上亚纯矛盾.

若  $z_0$  是  $g$  的本性奇点, 则存在  $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  中收敛于  $z_0$  的点列  $\{z_n\}$ , 使得  $g(z_n) \rightarrow \infty$ , 从而  $f(z_n) \rightarrow A$ , 结论成立.  $\square$

**题 15 (5.2.8).** 设  $f$  在  $B(0, R) \setminus \{0\}$  上全纯. 证明: 若  $\Re f(z) > 0$  对所有  $z \in B(0, R) \setminus \{0\}$  成立, 则 0 是  $f$  的可去奇点.

证明. 由条件易知 0 是  $f$  的孤立奇点. 令  $g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$ , 则  $g$  在  $B(0, R) \setminus \{0\}$  上全纯, 0 是  $g$  的孤立奇点.

由  $\Re f(z) > 0$  可得  $|g(z)| < 1$ , 从而 0 是  $g$  的可去奇点. 因此  $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = A \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

故  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{1+A}{1-A}$ , 从而 0 是  $f$  的可去奇点.  $\square$

**题 16 (5.3.5).** 设  $f$  是整函数, 证明:

1. 若  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ ,  $f(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$ , 则  $f$  是奇函数;
2. 若  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ ,  $f(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ , 则  $f$  是偶函数.

证明. 1. 令  $g(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}$ ,  $g$  是整函数. 任意  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \overline{f(x)} = \overline{f(\bar{x})}$ , 即  $g(x) = 0$ . 从而  $g \equiv 0$ , 即  $f(z) \equiv \overline{f(\bar{z})}$ .

令  $h(z) = f(z) + \overline{f(-\bar{z})}$ . 任意  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-xi) = \overline{f(xi)} = -\overline{f(xi)}$ , 即  $h(x) = 0$ . 从而  $h \equiv 0$ .

故  $f$  是奇函数.

2. 同 1 可知  $f(z) \equiv \overline{f(\bar{z})}$ .

令  $h(z) = f(z) - f(-z)$ . 任意  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-xi) = \overline{f(-xi)} = f(xi)$ , 即  $h(x) = 0$ . 从而  $h \equiv 0$ .  
故  $f$  是偶函数. □

**题 17** (5.4.3). 设  $f$  在  $B(\infty, R)$  上全纯, 证明:

1. 若  $\infty$  是  $f$  的可去奇点, 则

$$\text{Res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z);$$

2. 若  $\infty$  是  $f$  的  $m$  阶极点, 则

$$\text{Res}(f, \infty) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{m+2} f^{(m+1)}(z).$$

证明. 1. 令  $g(z) = f(1/z)$ .  $0$  是  $g$  的可去奇点. 于是

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, \infty) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R_0} f(z) dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{R_0}} \frac{g(z)}{z^2} dz \\ &= -g'(0) \\ &= -\lim_{z \rightarrow 0} g'(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'(1/z)}{z^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z). \end{aligned}$$

2. 可设  $f$  的 Laurent 展开为

$$f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots.$$

因此

$$\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1} = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{m+2} f^{(m+1)}(z). \quad \square$$

### 3 概率分布特征函数的计算

**题 18** (正态分布). 设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 有 p.d.f.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

则其特征函数为

$$\phi(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right).$$

证明. 令  $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ , 则

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}} dy.$$

只需证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}.$$

令  $f(z) = e^{-\frac{(z-it\sigma)^2}{2}}$ . 考虑以  $\Im z = 0$  和  $\Im z = t\sigma$  为上下边, 宽为  $2R$  的关于虚轴对称的矩形围道. 由 Cauchy 积分定理,  $f$  沿围道积分为 0. 而在两竖边上,  $|f(z)| = O(e^{-R^2})$ . 令  $R \rightarrow \infty$ , 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}. \quad \square$$

**题 19** (Gamma 分布). 设  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ , 有 p.d.f.

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x},$$

其中  $\alpha > 0, \beta > 0, \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ . 则其特征函数为

$$\phi(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}.$$

证明. 令  $f(z) = z^{\alpha-1} e^{(it-\beta)z} = e^{(\alpha-1)\log z + (it-\beta)z}$ . 则

$$\phi(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x) dx.$$

考虑扇形围道, 半径为  $R$ , 两边为正实轴和  $\{z = \frac{x}{-it+\beta} : x \geq 0\}$ , 且在原点附近去掉半径为  $r$  的小圆弧. 由 Cauchy 积分定理,  $f$  沿围道积分为 0.

沿大圆弧,  $|f(z)|$  关于  $R$  指数衰减, 从而积分趋于 0.

沿小圆弧,  $|f(z)| = O(r^{\alpha-1})$ , 从而积分趋于 0.

令  $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$ , 有

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{-it+\beta}\right) \frac{1}{-it+\beta} dx = \Gamma(\alpha) \left(\frac{1}{\beta-it}\right)^\alpha.$$

故

$$\phi(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}. \quad \square$$