复分析第五次习题课

彭子鱼

2024 年 5 月 26 日
上次更新: 2024 年 5 月 20 日

1 作业

题 1 (5.1.2)**.** 求函数在给定域上的 Laurent 展开.

(1) $\frac{1}{z^2(z-1)}$, $D = B(1,1)\backslash\{1\}$;

(3) $\operatorname{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)$, $D = B(\infty, 2)$;

(5) $\frac{1}{(z-5)^n}$, $n \geq 0$, $D = B(\infty, 5)$.

解. (1) 由于 $|z-1| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z-1)} &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(1+z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

(3) 易验证在 $B(\infty, 2)$ 上 $\operatorname{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)$ 可取出单值全纯分支, 只需考虑主支.

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{z-1}{z-2}\right) &= \log\left(1-\frac{1}{z}\right) - \log\left(1-\frac{2}{z}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nz^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{nz^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{n} z^{-n}.\end{aligned}$$

故

$$\operatorname{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{n} z^{-n} + 2k\pi i,$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$.

(5) 由于 $|\frac{5}{z}|<1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-5)^n} &= \frac{1}{z^n}\frac{1}{(1-\frac{5}{z})^n} \\ &= \frac{1}{z^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}n(n+1)\cdots(n+k-1)\left(\frac{5}{z}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}5^k z^{-n-k}.\end{aligned}$$

□

注记. 求 Laurent 级数时, 须注意在何处展开.

题 2 (5.2.2)**.** 求函数 $f(z)$ 的奇点并判断其类型.

(3) $\sin\frac{1}{z-1}$.

(7) $\sin\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}\right)$.

(8) $e^{\tan z}$.

解. (3) 可能的奇点为 $1,\infty$. 因为 $\lim_{z\to 1} f(z)$ 不存在, $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0}\sin\frac{z}{z-1} = 0$, 所以 1 是本性奇点, ∞ 是可去奇点.

(7) 可能的奇点为 $0,\infty,\frac{2}{(2k+1)\pi}$, 其中 $k\in\mathbb{Z}$. 因为 $\lim_{z\to\frac{2}{(2k+1)\pi}} f(z)$ 不存在, 所以 $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 是本性奇点. 从而 0 是非孤立奇点. 因为 $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0}\sin\left(\frac{1}{\cos z}\right) = \sin 1$, 所以 ∞ 是可去奇点.

(8) 可能的奇点为 $\infty, k\pi+\frac{\pi}{2}$, 其中 $k\in\mathbb{Z}$. 因为 $\lim_{z\to k\pi+\frac{\pi}{2}} f(z)$ 不存在, 所以 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 是本性奇点. 从而 ∞ 是非孤立奇点. □

注记. 须讨论 ∞ 的类型. 注意非孤立奇点的概念.

题 3 (5.3.1)**.** 求所有 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数 f, 使得 $|f(z)|=1$ 对任意 $z\in\partial B(0,1)$ 成立.

解. 设 f □