复分析第五次习题课

彭子鱼

2024 年 5 月 26 日
上次更新: 2024 年 5 月 23 日

1 作业

题 1 (5.1.2)**.** 求函数在给定域上的 Laurent 展开.

(1) $\frac{1}{z^2(z-1)}$, $D = B(1,1)\backslash\{1\}$;

(3) $\mathrm{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)$, $D = B(\infty, 2)$;

(5) $\frac{1}{(z-5)^n}$, $n \geq 0$, $D = B(\infty, 5)$.

解. (1) 由于 $|z-1| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z-1)} &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(1+z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

(3) 易验证在 $B(\infty, 2)$ 上 $\mathrm{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)$ 可取出单值全纯分支, 只需考虑主支.

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{z-1}{z-2}\right) &= \log\left(1 - \frac{1}{z}\right) - \log\left(1 - \frac{2}{z}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nz^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{nz^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n - 1}{n}z^{-n}.\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{n}z^{-n} + 2k\pi i,$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$.

(5) 由于 $|\frac{5}{z}| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-5)^n} &= \frac{1}{z^n}\frac{1}{(1-\frac{5}{z})^n} \\ &= \frac{1}{z^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}n(n+1)\cdots(n+k-1)\left(\frac{5}{z}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}5^k z^{-n-k}.\end{aligned}$$

□

注记. 求 Laurent 级数时, 须注意在何处展开.

题 2 (5.2.2)**.** 求函数 $f(z)$ 的奇点并判断其类型.

(3) $\sin\frac{1}{z-1}$;

(7) $\sin\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}\right)$;

(8) $e^{\tan z}$.

解. (3) 可能的奇点为 $1, \infty$. 因为 $\lim\limits_{z\to 1} f(z)$ 不存在, $\lim\limits_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim\limits_{z\to 0}\sin\frac{z}{z-1} = 0$, 所以 1 是本性奇点, ∞ 是可去奇点.

(7) 可能的奇点为 $0, \infty, \frac{2}{(2k+1)\pi}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. 因为 $\lim\limits_{z\to\frac{2}{(2k+1)\pi}} f(z)$ 不存在, 所以 $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$ 是本性奇点. 从而 0 是非孤立奇点. 因为 $\lim\limits_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim\limits_{z\to 0}\sin\left(\frac{1}{\cos z}\right) = \sin 1$, 所以 ∞ 是可去奇点.

(8) 可能的奇点为 $\infty, k\pi + \frac{\pi}{2}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. 因为 $\lim\limits_{z\to k\pi+\frac{\pi}{2}} f(z)$ 不存在, 所以 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ 是本性奇点. 从而 ∞ 是非孤立奇点. □

注记. 须讨论 ∞ 的类型. 注意非孤立奇点的概念.

题 3 (5.3.1)**.** 求所有 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数 f, 使得 $|f(z)| = 1$ 对任意 $z \in \partial B(0,1)$ 成立.

解. 由 f 亚纯且非零, 其在 $B(0,1)$ 只有有限个零点和极点, 设 f 零点为 $z_1, \dots, z_n$, 极点为 $w_1, \dots, w_m$ (可重复).

令

$$g(z) = f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\bar{z}_k z}{z-z_k}\prod_{l=1}^{m}\frac{z-w_l}{1-\bar{w}_l z},$$

则 g 在 $\overline{B(0,1)}$ 全纯且无零点, $|g(z)| = 1$ 对任意 $z \in \partial B(0,1)$ 成立. 考虑 $\frac{1}{g}$ 并利用最大模原理, g 为常数, 即 $g(z) = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

故所有满足要求的函数为

$$f(z) = e^{i\theta}\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}\prod_{l=1}^{m}\frac{1-\bar{w}_l z}{z-w_l},$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}$, n, m 为非负整数, $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m \in B(0,1)$. □

题 4 (5.4.8)**.** 求函数的孤立奇点并求出其留数.

(6) $\sin \frac{z}{z+1}$;

(8) $\frac{e^{\pi z}}{z^2+1}$.

解. (6) 可能的奇点为 $-1, \infty$. 因为 $\lim_{z\to -1} f(z)$ 不存在, 所以 -1 是本性奇点. 因为 $\lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = \sin 1$, 所以 ∞ 是可去奇点.

由 5.4.3,

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \lim_{z\to\infty} z^2 f'(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^2}{(z+1)^2} \cos \frac{z}{z+1} = \cos 1.$$

由留数定理,

$$\operatorname{Res}(f,-1) = -\operatorname{Res}(f,\infty) = -\cos 1.$$

(8) 可能的奇点为 $\pm i, \infty$. 因为 $\lim_{z\to \pm i} f(z) = \infty$, 所以 $\pm i$ 是极点. 因为 $\lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z})$ 不存在, 所以 ∞ 是本性奇点.

由 $\pm i$ 是 1 阶极点,

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{i}{2},$$

$$\operatorname{Res}(f,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = -\frac{i}{2}.$$

由留数定理, $\operatorname{Res}(f,\infty) = 0$. □

题 5 (5.4.9)**.** 设 f, g 在 $B(0,R)$ 中全纯, 在 $\overline{B(0,R)}$ 上连续, g 在 $\partial B(0,R)$ 上无零点, g 在 $B(0,R)$ 中的全部零点 $z_1, \dots, z_n$ 都是 1 阶零点. 求

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{zg(z)} dz.$$

解. 记 $h(z) = \frac{f(z)}{zg(z)}$.

先证明: 若 $z_k \neq 0$, 则对充分小的 $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_k|=\varepsilon} \frac{f(z)}{zg(z)} dz = \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)}.$$

这可分两种情况讨论. 若 $f(z_k) \neq 0$, 则 z_k 是 h 的 1 阶极点,

$$\operatorname{Res}(h, z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{f(z)}{z} \cdot \frac{z-z_k}{g(z)} = \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)}.$$

若 $f(z_k) = 0$, 则 z_k 是 h 的可去奇点, 从而 $\int_{|z-z_k|=\varepsilon} \frac{f(z)}{zg(z)} dz = 0$. 总之, 上式成立.

再讨论 0 处情形. 对充分小的 $\varepsilon > 0$, 记

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{zg(z)} dz.$$

若 0 不是 g 的零点, 则 0 是 h 的 1 阶极点或可去奇点, 由 $f(0)$ 是否为 0 决定. 和上面类似可知

$$I = \frac{f(0)}{g(0)}.$$

若 0 是 g 的零点, 对 f 在 0 处情况讨论.
若 0 是 f 的至少 2 阶零点, 则 0 是 h 的可去奇点, 从而

$$I = 0.$$

若 0 是 f 的 1 阶零点, 则 0 是 h 的 1 阶极点,

$$I = \mathrm{Res}(h, 0) = \lim_{z\to 0} zh(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)/z}{g(z)/z} = \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

若 0 不是 f 的零点, 则 0 是 h 的 2 阶极点,

$$I = \mathrm{Res}(h, 0) = \lim_{z\to 0}(z^2 h(z))' = \lim_{z\to 0} \left(\frac{zf(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(0)}{g'(0)} - \frac{f(0)g''(0)}{2(g'(0))^2}.$$

由 Cauchy 积分定理,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{zg(z)}dz = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_k|=\varepsilon} \frac{f(z)}{zg(z)}dz.$$

故

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{zg(z)}dz = \sum_{k:z_k\neq 0} \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)} + \frac{f(0)}{g(0)}\mathbb{1}\{g(0)\neq 0\} + \left(\frac{f'(0)}{g'(0)} - \frac{f(0)g''(0)}{2(g'(0))^2}\right)\mathbb{1}\{g(0)=0\}. \quad \square$$

题 6 (5.4.10)**.** 求积分.

(1) $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)}dz$;

(4) $\int_{|z|=R} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}dz$.

解. (1) 易知 f 在 $B(\infty, 2)$ 上全纯, 且 ∞ 为可去奇点. 从而

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = 0.$$

故

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)}dz = -2\pi i \mathrm{Res}(f, \infty) = 0.$$

(4) 作换元 $w = z^3$. 注意 $z^2dz = \frac{1}{3}dw$, 换元后变成绕 3 圈, 二者抵消. 因此

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}dz = \int_{|w|=R^3} \frac{1}{e^{2\pi i w}-1}dw.$$

在 $|w| < R^3$, $\frac{1}{e^{2\pi i w}-1}$ 有 1 阶极点 $0, \pm 1, \dots, \pm n$, 且留数均为 $\frac{1}{2\pi i}$.

故

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2}{e^{2\pi i^3}-1}dz = 2\pi i \cdot (2n+1) \cdot \frac{1}{2\pi i} = 2n+1. \quad \square$$

题 7 (5.5.1(8)). 计算

$$I=\int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}dx.$$

解. 令 $f(z)=\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}$. 记 $\gamma_R=\{z=Re^{i\theta}:\theta\in[0,\pi]\}$. 由 Jordan 引理,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz=0.$$

由留数定理,

$$\int_{-R}^R f(x)dx+\int_{\gamma_R} f(z)dz=2\pi i\mathrm{Res}(f,i)=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\frac{e^{iz}}{(z+i)^3}=\frac{7}{8}\pi e^{-1}.$$

令 $R\to\infty$ 并注意 $\frac{\cos x}{(1+x^2)^3}$ 是偶函数, 取实部得

$$I=\frac{7}{16}\pi e^{-1}.$$

□

题 8 (5.5.1(9)). 计算

$$I=\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

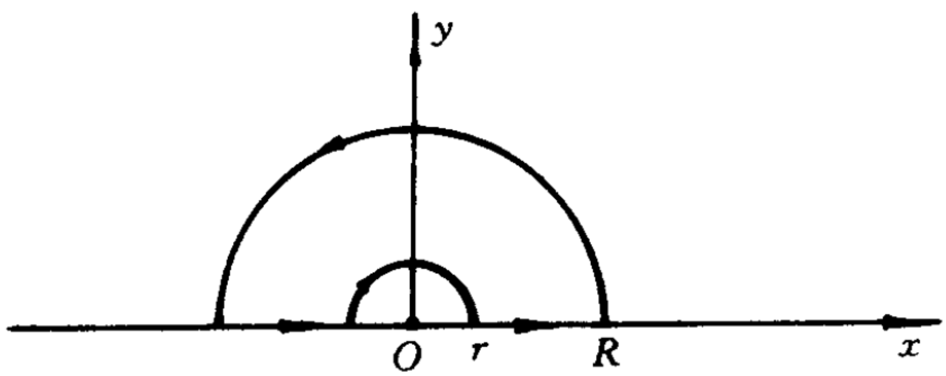

图 1: 题8的图示.

解. 令 $f(z)=\frac{e^{2iz}-1}{z^2}$. 考虑图1中围道. 则

$$\int_{-R}^{-r}-\int_{\gamma_r}+\int_r^R+\int_{\gamma_R} f(z)dz=:I_1-I_2+I_3+I_4=0.$$

作换元 $x\to -x$,

$$I_1+I_3=\int_r^R \frac{e^{-2ix}-1}{x^2}dx+\int_r^R\frac{e^{2ix}-1}{x^2}dx=-4\int_r^R\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx.$$

由 Jordan 引理,

$$\lim_{R\to\infty} I_4 = 0.$$

由引理 5.5.9,

$$\lim_{r\to 0} I_2 = i\pi \lim_{z\to 0} zf(z) = -2\pi.$$

令 $R\to\infty$, $r\to 0$ 得 $-4I + 2\pi = 0$, 即

$$I = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

题 9 (5.5.1(11)). 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2} dx,$$

其中 $-1 < p < 1$.

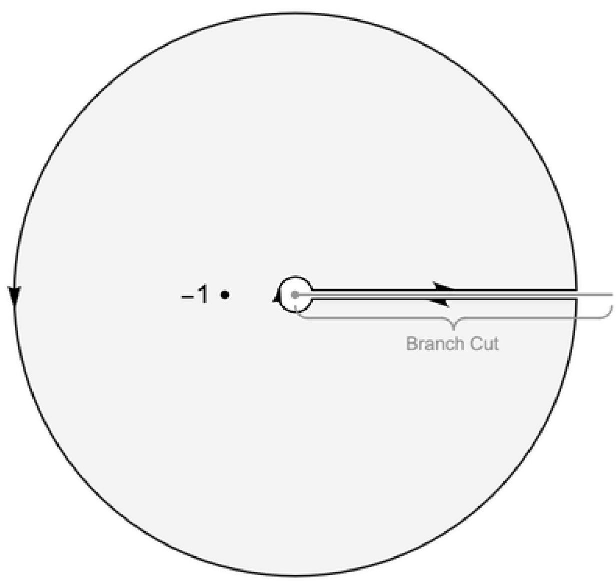

图 2: 题9的图示.

解. 一般地, 对 $-1 < a < b-1$, $b > 0$, 有

$$I = \int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b} dx = \frac{\pi}{b} \csc\left(\pi \frac{a+1}{b}\right).$$

作换元 $y = x^b$,

$$I = \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{y^{(a+1-b)/b}}{1+y} dy.$$

令 $f(z)=\frac{z^{(a+1-b)/b}}{1+z}$, 在正实轴上岸取正值. 考虑图2中围道. 则

$$\int_r^R+\int_{\gamma_R}-\int_{\gamma_1}-\int_{\gamma_r}f(z)dz=:I_1+I_2-I_3-I_4=2\pi i\mathrm{Res}(f,-1)=2\pi ie^{i\pi\frac{a+1-b}{b}}.$$

当 $R\to\infty$ 时,

$$I_2=O\left(R^{\frac{a+1-b}{b}-1+1}\right)\to 0.$$

当 $r\to 0$ 时,

$$I_4=O\left(r^{\frac{a+1-b}{b}}r\right)\to 0.$$

对 $x\in(0,\infty)$,

$$f(x_{下})=f(x_{上})\exp\left(2i\pi\frac{a+1-b}{b}\right),$$

从而

$$I_3=I_1\exp\left(i\pi\frac{a+1-b}{b}\right).$$

令 $R\to\infty$, $r\to 0$, 得

$$b\left(1-e^{2i\pi\frac{a+1-b}{b}}\right)I=2\pi ie^{i\pi\frac{a+1-b}{b}}.$$

取虚部可得

$$I=\frac{\pi}{b}\csc\left(\pi\frac{a+1}{b}\right).$$ □

题 10 (5.5.1(15)). 计算

$$I=\int_0^1\frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}dx,$$

其中 $-1<p<2$.

解. 令 $f(z)=\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}$, 在 $(0,1)$ 上岸取正实数. 考虑图3中围道. 则

$$\int_r^{1-r}+\int_{\gamma_2}-\int_{\gamma_3}-\int_{\gamma_r}+\int_{\gamma_R}f(z)dz=:I_1+I_2-I_3-I_4+I_5=2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,-i)\right)$$

计算留数:

$$\mathrm{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z+i}=\frac{1}{2i}2^{p/2}\exp i\left((1-p)\cdot\frac{\pi}{2}+p\cdot(-\frac{\pi}{4})\right)=2^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{3p\pi i}{4}},$$

$$\mathrm{Res}(f,-i)=\lim_{z\to -i}\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z-i}=-\frac{1}{2i}2^{p/2}\exp i\left((1-p)\cdot\frac{3\pi}{2}+p\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{5p\pi i}{4}}.$$

当 $R\to\infty$ 时, 由引理 5.5.15,

$$I_5\to 2\pi ie^{i\pi p}.$$

对 $x\in(0,1)$,

$$f(x_{下})=f(x_{上})e^{-2i\pi p},$$

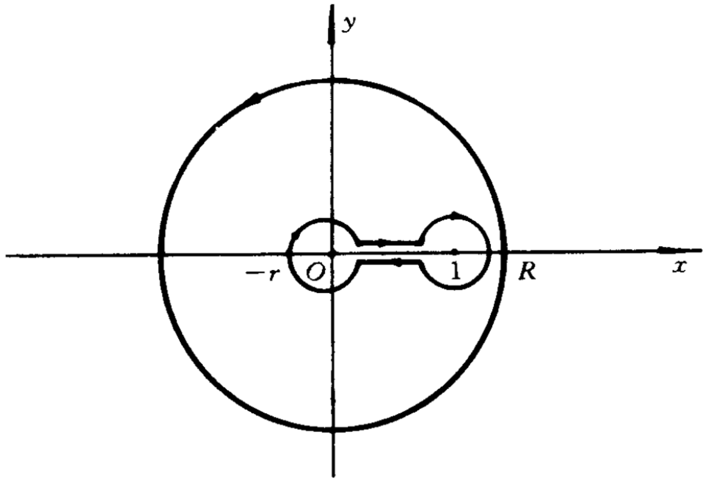

图 3: 题10的图示.

从而

$$I_3 = I_1 e^{-2i\pi p}.$$

令 $R \to \infty$, $r \to 0$,

$$(1-e^{-2i\pi p})I + 2\pi i e^{i\pi p} = i\pi 2^{\frac{p}{2}} \left(e^{-i\frac{3\pi p}{4}} + e^{-i\frac{5\pi p}{4}} \right).$$

取虚部可得

$$I = -\frac{\pi}{\sin p\pi} + \frac{\pi 2^{p/2} \cos \frac{p\pi}{4}}{\sin p\pi}.$$

□

题 11 (5.5.1(21)). 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1} dx.$$

解. 令 $f(z) = \frac{\log z}{z^2-1}$. 考虑图4中围道. 则

$$\int_r^R + \int_{\gamma_R} - \int_{ri}^{Ri} - \int_{\gamma_r} f(z)dz =: I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$

令 $z = yi$,

$$I_3 = \int_r^R \frac{\log y + \frac{\pi}{2} i}{-y^2-1} i dy = \frac{\pi}{2} \int_r^R \frac{dy}{1+y^2} + \text{虚数}.$$

当 $R \to \infty$ 时,

$$I_2 = O\left(\frac{\log R}{R^2} \cdot R \right) \to 0.$$

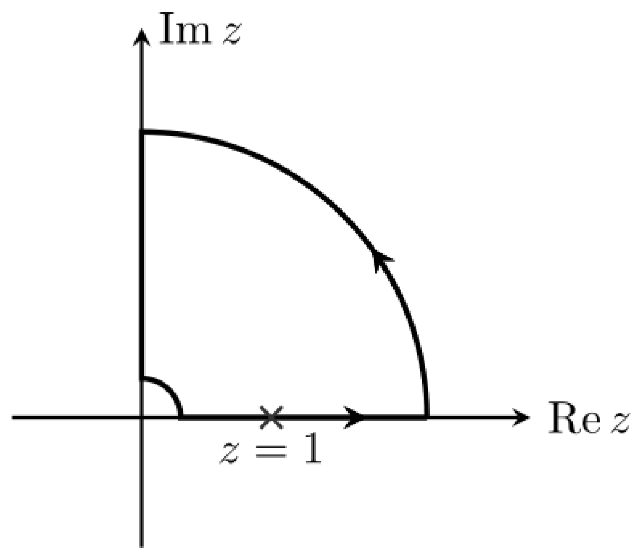

图 4: 题11的图示.

当 $r \to 0$ 时,

$$I_4 = O\left(\frac{\log r}{1-r^2}\cdot r\right) \to 0.$$

令 $R \to \infty$, $r \to 0$ 并取实部得

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$ □

题 12 (5.5.1(25)). 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}dx.$$

解. 令 $f(z) = \frac{z^2}{e^z+1}$. 考虑图5中围道. 则

$$\int_0^R + \int_{\gamma_1} + \int_{R+2\pi i}^{2\pi i} - \int_{\pi i}^{2\pi i} - \int_{\gamma_2} - \int_0^{\pi i} f(z)dz =: I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 - I_6 = 0.$$

令 $z = x + 2\pi i$,

$$I_1 + I_3 = \int_0^R \left(\frac{x^2}{e^x+1} - \frac{(x+2\pi i)^2}{e^x+1}\right)dx = -4\pi^2\int_0^R \frac{1}{e^x+1}dx - 4\pi i\int_0^R \frac{x}{e^x+1}dx.$$

当 $R \to \infty$ 时,

$$I_2 \to 0.$$

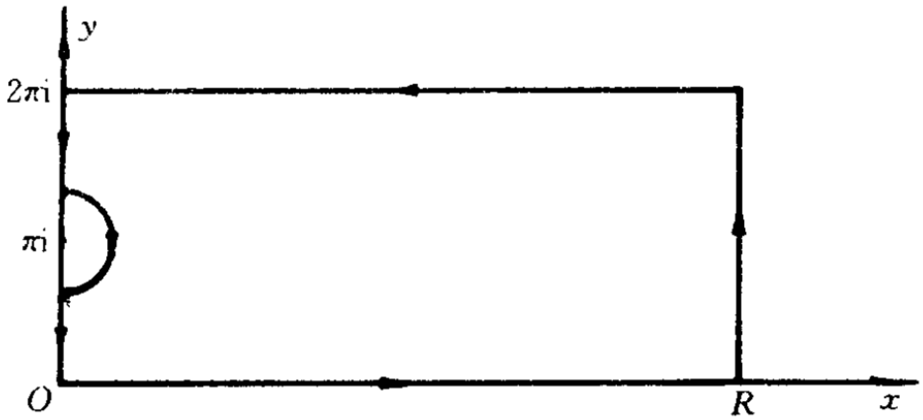

图 5: 题12的图示.

令 $z = ix$,

$$I_4 + I_6 = \int_0^{\pi-r} + \int_{\pi+r}^{2\pi} \frac{(xi)^2}{e^{xi}+1} i dx = -\int_0^{\pi-r} + \int_{\pi+r}^{2\pi} \frac{ix^2(1+\cos x - i\sin x)}{2+2\cos x} dx$$
$$= 实数 - i\left(\frac{4\pi^3}{3} + \frac{1}{6}(\pi-r)^3 - \frac{1}{6}(\pi+r)^3\right).$$

由引理 5.5.9,

$$\lim_{r\to\infty} I_5 = i\pi \lim_{z\to\pi i} f(z-\pi i) f(z) = \pi^3.$$

令 $R\to\infty$, $r\to 0$ 并取虚部得

$$-4\pi I + \frac{4\pi^3}{3} - \pi^3 = 0,$$

即

$$I = \frac{\pi^2}{12}.$$ □