复分析第五次习题课

彭子鱼

2024 年 5 月 26 日
上次更新: 2024 年 5 月 26 日

1 作业

题 1 (5.1.2). 求函数在给定域上的 Laurent 展开.

(1) $\frac{1}{z^2(z-1)}$, $D = B(1,1)\backslash\{1\}$;

(3) $\mathrm{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)$, $D = B(\infty, 2)$;

(5) $\frac{1}{(z-5)^n}$, $n \geq 0$, $D = B(\infty, 5)$.

解. (1) 由于 $|z-1| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z-1)} &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(1+z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

(3) 易验证在 $B(\infty, 2)$ 上 $\mathrm{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)$ 可取出单值全纯分支, 只需考虑主支.

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{z-1}{z-2}\right) &= \log\left(1-\frac{1}{z}\right) - \log\left(1-\frac{2}{z}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nz^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{nz^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{n}z^{-n}.\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{n}z^{-n} + 2k\pi i,$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$.

(5) 由于 $|\frac{5}{z}|<1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-5)^n} &= \frac{1}{z^n}\frac{1}{(1-\frac{5}{z})^n} \\ &= \frac{1}{z^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}n(n+1)\cdots(n+k-1)\left(\frac{5}{z}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}5^k z^{-n-k}.\end{aligned}$$ □

注记. 求 Laurent 级数时, 须注意在何处展开.

题 2 (5.2.2)**.** 求函数 $f(z)$ 的奇点并判断其类型.

(3) $\sin\frac{1}{z-1}$;

(7) $\sin\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}\right)$;

(8) $e^{\tan z}$.

解. (3) 可能的奇点为 $1,\infty$. 因为 $\lim\limits_{z\to 1}f(z)$ 不存在, $\lim\limits_{z\to 0}f\left(\frac{1}{z}\right)=\lim\limits_{z\to 0}\sin\frac{z}{z-1}=0$, 所以 1 是本性奇点, ∞ 是可去奇点.

(7) 可能的奇点为 $0,\infty,\frac{2}{(2k+1)\pi}$, 其中 $k\in\mathbb{Z}$. 因为 $\lim\limits_{z\to\frac{2}{(2k+1)\pi}}f(z)$ 不存在, 所以 $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 是本性奇点. 从而 0 是非孤立奇点. 因为 $\lim\limits_{z\to 0}f\left(\frac{1}{z}\right)=\lim\limits_{z\to 0}\sin\left(\frac{1}{\cos z}\right)=\sin 1$, 所以 ∞ 是可去奇点.

(8) 可能的奇点为 $\infty, k\pi+\frac{\pi}{2}$, 其中 $k\in\mathbb{Z}$. 因为 $\lim\limits_{z\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(z)$ 不存在, 所以 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 是本性奇点. 从而 ∞ 是非孤立奇点. □

注记. 须讨论 ∞ 的类型. 注意非孤立奇点的概念.

题 3 (5.3.1)**.** 求所有 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数 f, 使得 $|f(z)|=1$ 对任意 $z\in\partial B(0,1)$ 成立.

解. 由 f 亚纯且非零, 其在 $B(0,1)$ 只有有限个零点和极点, 设 f 零点为 $z_1,\dots,z_n$, 极点为 $w_1,\dots,w_m$ (可重复).

令

$$g(z)=f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\bar{z}_k z}{z-z_k}\prod_{l=1}^{m}\frac{z-w_l}{1-\bar{w}_l z},$$

则 g 在 $\overline{B(0,1)}$ 全纯且无零点, $|g(z)|=1$ 对任意 $z\in\partial B(0,1)$ 成立. 考虑 $\frac{1}{g}$ 并利用最大模原理, g 为常数, 即 $g(z)=e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

故所有满足要求的函数为

$$f(z)=e^{i\theta}\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}\prod_{l=1}^{m}\frac{1-\bar{w}_l z}{z-w_l},$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}$, n, m 为非负整数, $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m \in B(0,1)$. $\square$

题 4 (5.4.8)**.** 求函数的孤立奇点并求出其留数.

(6) $\sin \frac{z}{z+1}$;

(8) $\frac{e^{\pi z}}{z^2+1}$.

解. (6) 可能的奇点为 $-1, \infty$. 因为 $\lim_{z\to -1} f(z)$ 不存在, 所以 -1 是本性奇点. 因为 $\lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = \sin 1$, 所以 ∞ 是可去奇点.

由 5.4.3,

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \lim_{z\to\infty} z^2 f'(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^2}{(z+1)^2} \cos \frac{z}{z+1} = \cos 1.$$

由留数定理,

$$\mathrm{Res}(f,-1) = -\mathrm{Res}(f,\infty) = -\cos 1.$$

(8) 可能的奇点为 $\pm i, \infty$. 因为 $\lim_{z\to \pm i} f(z) = \infty$, 所以 $\pm i$ 是极点. 因为 $\lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z})$ 不存在, 所以 ∞ 是本性奇点.

由 $\pm i$ 是 1 阶极点,

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \frac{i}{2},$$

$$\mathrm{Res}(f,-i) = \lim_{z\to -i} (z+i) f(z) = -\frac{i}{2}.$$

由留数定理, $\mathrm{Res}(f,\infty) = 0$. $\square$

注记. 本题说明, 即使 ∞ 是可去奇点, 该处的留数也可能不为 0.

题 5 (5.4.9)**.** 设 f, g 在 $B(0,R)$ 中全纯, 在 $\overline{B(0,R)}$ 上连续, g 在 $\partial B(0,R)$ 上无零点, g 在 $B(0,R)$ 中的全部零点 $z_1, \dots, z_n$ 都是 1 阶零点. 求

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z g(z)} dz.$$

解. 记 $h(z) = \frac{f(z)}{z g(z)}$.

先证明: 若 $z_k \neq 0$, 则对充分小的 $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_k|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z g(z)} dz = \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)}.$$

这可分两种情况讨论. 若 $f(z_k) \neq 0$, 则 z_k 是 h 的 1 阶极点,

$$\mathrm{Res}(h, z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{f(z)}{z} \cdot \frac{z - z_k}{g(z)} = \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)}.$$

若 $f(z_k) = 0$, 则 z_k 是 h 的可去奇点, 从而 $\int_{|z-z_k|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z g(z)} dz = 0$. 总之, 上式成立.

再讨论 0 处情形. 对充分小的 $\varepsilon>0$, 记

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{f(z)}{zg(z)}dz.$$

若 0 不是 g 的零点, 则 0 是 h 的 1 阶极点或可去奇点, 由 $f(0)$ 是否为 0 决定. 和上面类似可知

$$I=\frac{f(0)}{g(0)}.$$

若 0 是 g 的零点, 对 f 在 0 处情况讨论.
若 0 是 f 的至少 2 阶零点, 则 0 是 h 的可去奇点, 从而

$$I=0.$$

若 0 是 f 的 1 阶零点, 则 0 是 h 的 1 阶极点,

$$I=\mathrm{Res}(h,0)=\lim_{z\to 0}zh(z)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)/z}{g(z)/z}=\frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

若 0 不是 f 的零点, 则 0 是 h 的 2 阶极点,

$$I=\mathrm{Res}(h,0)=\lim_{z\to 0}(z^2h(z))'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{zf(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(0)}{g'(0)}-\frac{f(0)g''(0)}{2(g'(0))^2}.$$

由 Cauchy 积分定理,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{zg(z)}dz=I+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_k|=\varepsilon}\frac{f(z)}{zg(z)}dz.$$

故

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{zg(z)}dz=\sum_{k:z_k\neq 0}\frac{f(z_k)}{z_kg'(z_k)}+\frac{f(0)}{g(0)}\mathbb{1}\{g(0)\neq 0\}+\left(\frac{f'(0)}{g'(0)}-\frac{f(0)g''(0)}{2(g'(0))^2}\right)\mathbb{1}\{g(0)=0\}.\qquad\square$$

题 6 (5.4.10)**.** 求积分.

(1) $\int_{|z|=2}\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}dz$;

(4) $\int_{|z|=R}\frac{z^2}{e^{2\pi iz^3}-1}dz$.

解. (1) 易知 f 在 $B(\infty,2)$ 上全纯, 且 ∞ 为可去奇点. 从而

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=0.$$

故

$$\int_{|z|=2}\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}dz=-2\pi i\mathrm{Res}(f,\infty)=0.$$

(4) 作换元 $w = z^3$. 注意 $z^2 dz = \frac{1}{3}dw$, 换元后变成绕 3 圈, 二者抵消. 因此

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3} - 1} dz = \int_{|w|=R^3} \frac{1}{e^{2\pi i w} - 1} dw.$$

在 $|w| < R^3$, $\frac{1}{e^{2\pi i w}-1}$ 有 1 阶极点 $0, \pm 1, \dots, \pm n$, 且留数均为 $\frac{1}{2\pi i}$.

故

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2}{e^{2\pi i^3} - 1} dz = 2\pi i \cdot (2n+1) \cdot \frac{1}{2\pi i} = 2n+1.$$

□

题 7 (5.5.1(8)). 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx.$$

解. 令 $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}$. 记 $\gamma_R = \{z = Re^{i\theta} : \theta \in [0, \pi]\}$. 由 Jordan 引理,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

由留数定理,

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2} \frac{e^{iz}}{(z+i)^3} = \frac{7}{8}\pi e^{-1}.$$

令 $R \to \infty$ 并注意 $\frac{\cos x}{(1+x^2)^3}$ 是偶函数, 取实部得

$$I = \frac{7}{16}\pi e^{-1}.$$

□

题 8 (5.5.1(9)). 计算

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

解. 令 $f(z) = \frac{e^{2iz}-1}{z^2}$. 考虑图1中围道. 则

$$\int_{-R}^{-r} - \int_{\gamma_r} + \int_r^R + \int_{\gamma_R} f(z)dz =: I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

作换元 $x \to -x$,

$$I_1 + I_3 = \int_r^R \frac{e^{-2ix}-1}{x^2} dx + \int_r^R \frac{e^{2ix}-1}{x^2} dx = -4\int_r^R \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

由 Jordan 引理,

$$\lim_{R\to\infty} I_4 = 0.$$

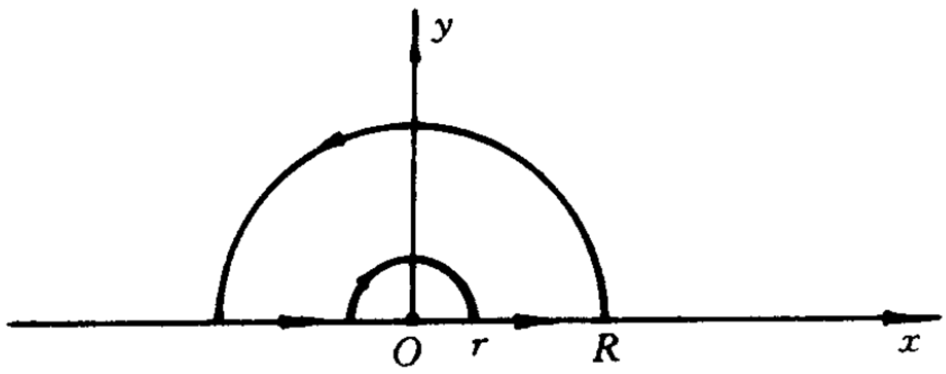

图 1: 题8的图示.

由引理 5.5.9,

$$\lim_{r\to 0} I_2 = i\pi \lim_{z\to 0} zf(z) = -2\pi.$$

令 $R \to \infty$, $r \to 0$ 得 $-4I + 2\pi = 0$, 即

$$I = \frac{\pi}{2}.$$ □

题 9 (5.5.1(11))**.** 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2} dx,$$

其中 $-1 < p < 1$.

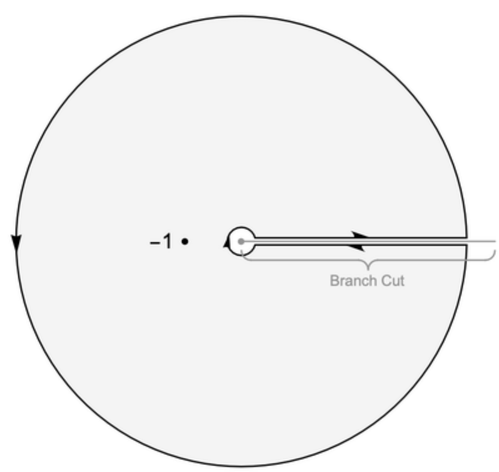

图 2: 题9的图示.

解. 一般地, 对 $-1 < a < b-1$, $b > 0$, 有

$$I = \int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b} dx = \frac{\pi}{b} \csc\left(\pi \frac{a+1}{b}\right).$$

作换元 $y = x^b$,

$$I = \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{y^{(a+1-b)/b}}{1+y} dy.$$

令 $f(z) = \frac{z^{(a+1-b)/b}}{1+z}$, 在正实轴上岸取正值. 考虑图2中围道. 则

$$\int_r^R + \int_{\gamma_R} - \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_r} f(z)dz =: I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 2\pi i \mathrm{Res}(f, -1) = 2\pi i e^{i\pi \frac{a+1-b}{b}}.$$

当 $R \to \infty$ 时,

$$I_2 = O\left(R^{\frac{a+1-b}{b} - 1 + 1}\right) \to 0.$$

当 $r \to 0$ 时,

$$I_4 = O\left(r^{\frac{a+1-b}{b}} r\right) \to 0.$$

对 $x \in (0, \infty)$,

$$f(x_{\text{下}}) = f(x_{\text{上}}) \exp\left(2i\pi \frac{a+1-b}{b}\right),$$

从而

$$I_3 = I_1 \exp\left(i\pi \frac{a+1-b}{b}\right).$$

令 $R \to \infty$, $r \to 0$, 得

$$b\left(1 - e^{2i\pi \frac{a+1-b}{b}}\right) I = 2\pi i e^{i\pi \frac{a+1-b}{b}}.$$

取虚部可得

$$I = \frac{\pi}{b} \csc\left(\pi \frac{a+1}{b}\right).$$

□

题 10 (5.5.1(15)). 计算

$$I = \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx,$$

其中 $-1 < p < 2$.

解. 令 $f(z) = \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}$, 在 $(0,1)$ 上岸取正实数. 考虑图3中围道. 则

$$\int_r^{1-r} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3} - \int_{\gamma_r} + \int_{\gamma_R} f(z)dz =: I_1 + I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, i) + \mathrm{Res}(f, -i)\right)$$

计算留数:

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z+i} = \frac{1}{2i} 2^{p/2} \exp i\left((1-p) \cdot \frac{\pi}{2} + p \cdot (-\frac{\pi}{4})\right) = 2^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{3p\pi i}{4}},$$

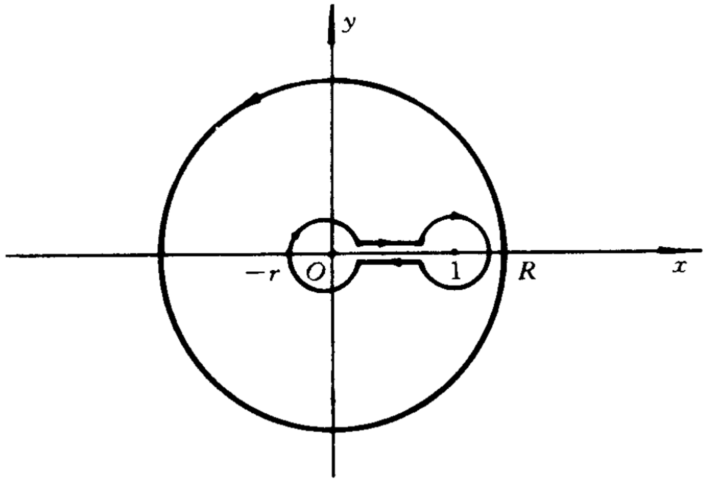

图 3: 题10的图示.

$$\mathrm{Res}(f,-i)=\lim_{z\to -i}\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z-i}=-\frac{1}{2i}2^{p/2}\exp i\left((1-p)\cdot\frac{3\pi}{2}+p\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{5p\pi i}{4}}.$$

当 $R\to\infty$ 时, 由引理 5.5.15,

$$I_5\to 2\pi ie^{-i\pi p}.$$

当 $r\to 0$ 时,

$$I_4=O(r^{1-p}r)\to 0,$$

$$I_2=O(r^pr)\to 0.$$

对 $x\in(0,1)$,

$$f(x_{\text{下}})=f(x_{\text{上}})e^{-2i\pi p},$$

从而

$$I_3=I_1e^{-2i\pi p}.$$

令 $R\to\infty$, $r\to 0$,

$$(1-e^{-2i\pi p})I+2\pi ie^{-i\pi p}=i\pi 2^{\frac{p}{2}}\left(e^{-i\frac{3\pi p}{4}}+e^{-i\frac{5\pi p}{4}}\right).$$

取虚部可得

$$I=-\frac{\pi}{\sin p\pi}+\frac{\pi 2^{p/2}\cos\frac{p\pi}{4}}{\sin p\pi}.$$ □

题 11 (5.5.1(21)). 计算

$$I=\int_0^\infty\frac{\log x}{x^2-1}dx.$$

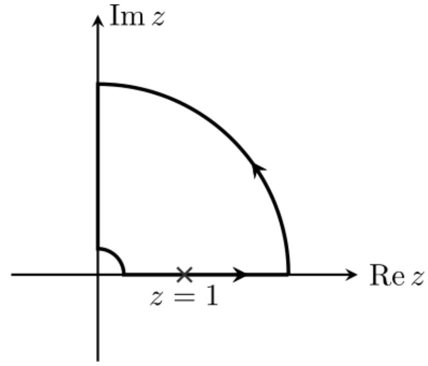

图 4: 题11的图示.

解. 令 $f(z)=\frac{\log z}{z^2-1}$. 考虑图4中围道. 则

$$\int_r^R+\int_{\gamma_R}-\int_{ri}^{Ri}-\int_{\gamma_r}f(z)dz=:I_1+I_2-I_3-I_4=0.$$

令 $z=yi$,

$$I_3=\int_r^R\frac{\log y+\frac{\pi}{2}i}{-y^2-1}idy=\frac{\pi}{2}\int_r^R\frac{dy}{1+y^2}+\text{虚数}.$$

当 $R\to\infty$ 时,

$$I_2=O\left(\frac{\log R}{R^2}\cdot R\right)\to 0.$$

当 $r\to 0$ 时,

$$I_4=O\left(\frac{\log r}{1-r^2}\cdot r\right)\to 0.$$

令 $R\to\infty$, $r\to 0$ 并取实部得

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty\frac{dy}{1+y^2}=\frac{\pi^2}{4}.$$ □

题 12 (5.5.1(25)). 计算

$$I=\int_0^\infty\frac{x}{e^x+1}dx.$$

解. 令 $f(z)=\frac{z^2}{e^z+1}$. 考虑图5中围道. 则

$$\int_0^R+\int_{\gamma_1}+\int_{R+2\pi i}^{2\pi i}-\int_{\pi i}^{2\pi i}-\int_{\gamma_2}-\int_0^{\pi i}f(z)dz=:I_1+I_2+I_3-I_4-I_5-I_6=0.$$

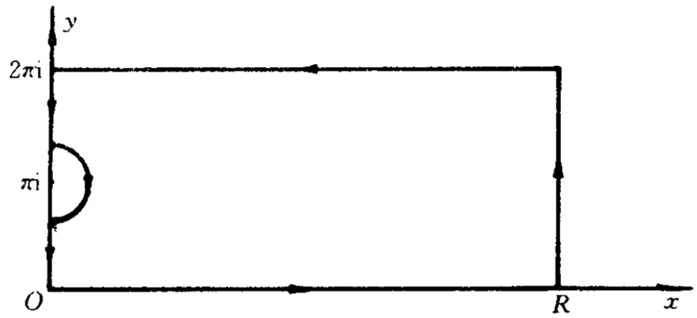

图 5: 题12的图示.

令 $z=x+2\pi i$,

$$I_1+I_3=\int_0^R\left(\frac{x^2}{e^x+1}-\frac{(x+2\pi i)^2}{e^x+1}\right)dx=-4\pi^2\int_0^R\frac{1}{e^x+1}dx-4\pi i\int_0^R\frac{x}{e^x+1}dx.$$

当 $R\to\infty$ 时,

$$I_2\to 0.$$

令 $z=ix$,

$$\begin{aligned}I_4+I_6&=\int_0^{\pi-r}+\int_{\pi+r}^{2\pi}\frac{(xi)^2}{e^{xi}+1}idx=-\int_0^{\pi-r}+\int_{\pi+r}^{2\pi}\frac{ix^2(1+\cos x-i\sin x)}{2+2\cos x}dx\\&=\text{实数}-i\left(\frac{4\pi^3}{3}+\frac{1}{6}(\pi-r)^3-\frac{1}{6}(\pi+r)^3\right).\end{aligned}$$

由引理 5.5.9,

$$\lim_{r\to\infty}I_5=i\pi\lim_{z\to\pi i}f(z-\pi i)f(z)=\pi^3.$$

令 $R\to\infty$, $r\to 0$ 并取虚部得

$$-4\pi I+\frac{4\pi^3}{3}-\pi^3=0,$$

即

$$I=\frac{\pi^2}{12}.$$

□

2 补充题

题 13 (5.2.6)**.** 设 f 是 $B(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ 上非常值的全纯函数. 证明: 若 z_0 是 f 的零点集的极限点, 则 z_0 是 f 的本性奇点.

证明. 由条件易知 z_0 是 f 的孤立奇点.

若 z_0 是 f 的可去奇点, 则由 z_0 是 f 的零点集的极限点知 $\lim_{z\to_0} f(z) = 0$, 且补充定义 $f(z_0) = 0$ 后 f 在 $B(z_0, R)$ 全纯. 由唯一性定理知 $f \equiv 0$, 矛盾.

若 z_0 是 f 的极点, 则对 $B(z_0, R)\backslash\{z_0\}$ 任意趋于 z_0 的序列 $\{w_n\}$, 有 $\lim_{n\to\infty} f(w_n = \infty)$, 与 z_0 是 f 的零点集的极限点矛盾.

故 z_0 是 f 的本性奇点. □

题 14 (5.2.7)**.** 若 f 是 $B(z_0, R)\backslash\{z_0\}$ 上的亚纯函数, 且 z_0 是 f 的极点集的极限点, 则对任意 $A \in \mathbb{C}_\infty$, 存在 $B(z_0, R)\backslash\{z_0\}$ 中收敛于 z_0 的点列 $\{z_n\}$, 使得 $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

证明. 设题中所说点列为 $\{w_n\}$.

若 $A = \infty$, 则对任意 n, 由于 w_n 是极点, 存在 $z_n \in B(z_0, R)\backslash\{z_0\}$, 使得 $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$ 且 $|f(z_n) > n$. 从而 $z_n \to z_0$ 且 $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty = A$.

设 A 是有限. 若 z_0 任一邻域中有 $f(z) - A$ 的零点, 则结论成立. 若不然, 存在 $\delta > 0$, 使得 $f(z) - A$ 在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 中恒不为 0. 令 $g(z) = \frac{1}{f(z)-A}$, $0 < |z - z_0| < \delta$. 对 f 的任一极点 w, $\lim_{z\to w} g(z) = 0$, 补充定义 $g(w) = 0$, 则 g 在 $B(z_0, \delta)\backslash\{z_0\}$ 中全纯. 因为 $\lim_{n\to\infty} g(w_n) = 0$, 所以 z_0 或者是 g 的本性奇点, 或者是可去奇点. 下面讨论这两种情况.

若 z_0 是 g 的可去奇点, 则补充定义 $g(z_0) = 0$, g 在 $B(z_0, \delta)$ 中全纯. 由唯一性定理, $g \equiv 0$, 与 f 在 $B(z_0, R)\backslash\{z_0\}$ 上亚纯矛盾.

若 z_0 是 g 的本性奇点, 则存在 $B(z_0, R)\backslash\{z_0\}$ 中收敛于 z_0 的点列 $\{z_n\}$, 使得 $g(z_n) \to \infty$, 从而 $f(z_n) \to A$, 结论成立. □

题 15 (5.2.8)**.** 设 f 在 $B(0, R)\backslash\{0\}$ 上全纯. 证明: 若 $\Re f(z) > 0$ 对所有 $z \in B(0, R)\backslash\{0\}$ 成立, 则 0 是 f 的可去奇点.

证明. 由条件易知 0 是 f 的孤立奇点. 令 $g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$, 则 g 在 $B(0, R)\backslash\{0\}$ 上全纯, 0 是 g 的孤立奇点.

由 $\Re f(z) > 0$ 可得 $|g(z)| < 1$, 从而 0 是 g 的可去奇点. 因此 $\lim_{z\to 0} g(z) = A \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

故 $\lim_{z\to 0} f(z) = \frac{1+A}{1-A}$, 从而 0 是 f 的可去奇点. □

题 16 (5.3.5)**.** 设 f 是整函数, 证明:

1. 若 $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $f(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$, 则 f 是奇函数;
2. 若 $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $f(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, 则 f 是偶函数.

证明. 1. 令 $g(z) = f(z) - \overline{f(\overline{z})}$, g 是整函数. 任意 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \overline{f(x)} = \overline{f(\overline{x})}$, 即 $g(x) = 0$. 从而 $g \equiv 0$, 即 $f(z) \equiv \overline{f(\overline{z})}$.

   令 $h(z) = f(z) + f(-z)$. 任意 $x \in \mathbb{R}$, $f(-xi) = \overline{f(xi)} = -f(xi)$, 即 $h(x) = 0$. 从而 $h \equiv 0$.

   故 f 是奇函数.

2. 同 1 可知 $f(z) \equiv \overline{f(\overline{z})}$.

令 $h(z)=f(z)-f(-z)$. 任意 $x\in\mathbb{R}$, $f(-xi)=\overline{f(-xi)}=f(xi)$, 即 $h(x)=0$. 从而 $h\equiv 0$. 故 f 是偶函数. □

题 17 (5.4.3)**.** 设 f 在 $B(\infty,R)$ 上全纯, 证明:

1. 若 ∞ 是 f 的可去奇点, 则
$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\lim_{z\to\infty}z^2f'(z);$$
2. 若 ∞ 是 f 的 m 阶极点, 则
$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty}z^{m+2}f^{(m+1)}(z).$$

证明. 1. 令 $g(z)=f(1/z)$. 0 是 g 的可去奇点. 于是
$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,\infty)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R_0}f(z)dz\\&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{R_0}}\frac{g(z)}{z^2}dz\\&=-g'(0)\\&=-\lim_{z\to 0}g'(z)\\&=\lim_{z\to 0}\frac{f'(1/z)}{z^2}\\&=\lim_{z\to\infty}z^2f'(z).\end{aligned}$$

2. 可设 f 的 Laurent 展开为
$$f(z)=a_mz^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots.$$
因此
$$\operatorname{Res}(f,\infty)=-a_{-1}=\frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty}z^{m+2}f^{(m+1)}(z).$$
□

3 概率分布特征函数的计算

题 18 (正态分布)**.** 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 有 p.d.f.
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$
则其特征函数为
$$\phi(t)=\exp\left(i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right).$$

证明. 令 $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, 则

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}} dy.$$

只需证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}.$$

令 $f(z) = e^{-\frac{(z-it\sigma)^2}{2}}$. 考虑以 $\Im z = 0$ 和 $\Im z = t\sigma$ 为上下边, 宽为 $2R$ 的关于虚轴对称的矩形围道. 由 Cauchy 积分定理, f 沿围道积分为 0. 而在两竖边上, $|f(z)| = O(e^{-R^2})$. 令 $R \to \infty$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}. \qquad \square$$

题 19 (Gamma 分布)**.** 设 $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$, 有 p.d.f.

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x},$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$. 则其特征函数为

$$\phi(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}.$$

证明. 令 $f(z) = z^{\alpha-1} e^{(it-\beta)z} = e^{(\alpha-1)\log z + (it-\beta)z}$. 则

$$\phi(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x) dx.$$

考虑扇形围道, 半径为 R, 两边为正实轴和 $\{z = \frac{x}{-it+\beta} : x \geq 0\}$, 且在原点附近去掉半径为 r 的小圆弧. 由 Cauchy 积分定理, f 沿围道积分为 0.

沿大圆弧, $|f(z)|$ 关于 R 指数衰减, 从而积分趋于 0.

沿小圆弧, $|f(z)| = O(r^{\alpha-1})$, 从而积分趋于 0.

令 $R \to \infty$, $r \to 0$, 有

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{-it+\beta}\right) \frac{1}{-it+\beta} dx = \Gamma(\alpha) \left(\frac{1}{\beta - it}\right)^\alpha.$$

故

$$\phi(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}. \qquad \square$$