

复分析第五次习题课

彭子鱼

2024 年 5 月 26 日

上次更新: 2024 年 5 月 29 日

1 作业

题 1 (5.1.2). 求函数在给定域上的 Laurent 展开.

(1) $\frac{1}{z^2(z-1)}$, $D = B(1, 1) \setminus \{1\}$;

(3) $\text{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)$, $D = B(\infty, 2)$;

(5) $\frac{1}{(z-5)^n}$, $n \geq 0$, $D = B(\infty, 5)$.

解. (1) 由于 $|z-1| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z-1)} &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(1+z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

(3) 易验证在 $B(\infty, 2)$ 上 $\text{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)$ 可取出单值全纯分支, 只需考虑主支.

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{z-1}{z-2}\right) &= \log\left(1 - \frac{1}{z}\right) - \log\left(1 - \frac{2}{z}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nz^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{nz^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{n} z^{-n}.\end{aligned}$$

故

$$\text{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{n} z^{-n} + 2k\pi i,$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$.

(5) 由于 $|\frac{5}{z}| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-5)^n} &= \frac{1}{z^n} \frac{1}{(1-\frac{5}{z})^n} \\ &= \frac{1}{z^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n(n+1) \cdots (n+k-1) \left(\frac{5}{z}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} 5^k z^{-n-k}.\end{aligned}$$

□

注记. 求 Laurent 级数时, 须注意在何处展开.

题 2 (5.2.2). 求函数 $f(z)$ 的奇点并判断其类型.

(3) $\sin \frac{1}{z-1}$;

(7) $\sin\left(\frac{1}{\cos \frac{1}{z}}\right)$;

(8) $e^{\tan z}$.

解. (3) 可能的奇点为 $1, \infty$. 因为 $\lim_{z \rightarrow 1} f(z)$ 不存在, $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \sin \frac{z}{z-1} = 0$, 所以 1 是本性奇点, ∞ 是可去奇点.

(7) 可能的奇点为 $0, \infty, \frac{2}{(2k+1)\pi}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. 因为 $\lim_{z \rightarrow \frac{2}{(2k+1)\pi}} f(z)$ 不存在, 所以 $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 是本性奇点. 从而 0 是非孤立奇点. 因为 $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{\cos z}\right) = \sin 1$, 所以 ∞ 是可去奇点.

(8) 可能的奇点为 $\infty, k\pi + \frac{\pi}{2}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. 因为 $\lim_{z \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} f(z)$ 不存在, 所以 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 是本性奇点. 从而 ∞ 是非孤立奇点. □

注记. 须讨论 ∞ 的类型. 注意非孤立奇点的概念.

题 3 (5.3.1). 求所有 \mathbb{C} 上亚纯函数 f , 使得 $|f(z)| = 1$ 对任意 $z \in \partial B(0, 1)$ 成立.

解. 由 f 亚纯且非零, 其在 $B(0, 1)$ 只有有限个零点和极点, 设 f 零点为 z_1, \dots, z_n , 极点为 w_1, \dots, w_m (可重复).

令

$$g(z) = f(z) \prod_{k=1}^n \frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} \prod_{l=1}^m \frac{z - w_l}{1 - \bar{w}_l z},$$

则 g 在 $\overline{B(0, 1)}$ 全纯且无零点, $|g(z)| = 1$ 对任意 $z \in \partial B(0, 1)$ 成立. 考虑 $\frac{1}{g}$ 并利用最大模原理, g 为常数, 即 $g(z) = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

故所有满足要求的函数为

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} \prod_{l=1}^m \frac{1 - \bar{w}_l z}{z - w_l},$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}$, n, m 为非负整数, $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m \in B(0, 1)$. □

题 4 (5.4.8). 求函数的孤立奇点并求出其留数.

(6) $\sin \frac{z}{z+1}$;

(8) $\frac{e^{\pi z}}{z^2+1}$.

解. (6) 可能的奇点为 $-1, \infty$. 因为 $\lim_{z \rightarrow -1} f(z)$ 不存在, 所以 -1 是本性奇点. 因为 $\lim_{z \rightarrow 0} f(\frac{1}{z}) = \sin 1$, 所以 ∞ 是可去奇点.

由 5.4.3,

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{(z+1)^2} \cos \frac{z}{z+1} = \cos 1.$$

由留数定理,

$$\operatorname{Res}(f, -1) = -\operatorname{Res}(f, \infty) = -\cos 1.$$

(8) 可能的奇点为 $\pm i, \infty$. 因为 $\lim_{z \rightarrow \pm i} f(z) = \infty$, 所以 $\pm i$ 是极点. 因为 $\lim_{z \rightarrow 0} f(\frac{1}{z})$ 不存在, 所以 ∞ 是本性奇点.

由 $\pm i$ 是 1 阶极点,

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \frac{i}{2},$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i)f(z) = -\frac{i}{2}.$$

由留数定理, $\operatorname{Res}(f, \infty) = 0$. □

注记. 本题说明, 即使 ∞ 是可去奇点, 该处的留数也可能不为 0.

题 5 (5.4.9). 设 f, g 在 $B(0, R)$ 中全纯, 在 $\overline{B(0, R)}$ 上连续, g 在 $\partial B(0, R)$ 上无零点, g 在 $B(0, R)$ 中的全部零点 z_1, \dots, z_n 都是 1 阶零点. 求

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{zg(z)} dz.$$

解. 记 $h(z) = \frac{f(z)}{zg(z)}$.

先证明: 若 $z_k \neq 0$, 则对充分小的 $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_k|=\varepsilon} \frac{f(z)}{zg(z)} dz = \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)}.$$

这可分两种情况讨论. 若 $f(z_k) \neq 0$, 则 z_k 是 h 的 1 阶极点,

$$\operatorname{Res}(h, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{f(z)}{z} \cdot \frac{z - z_k}{g(z)} = \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)}.$$

若 $f(z_k) = 0$, 则 z_k 是 h 的可去奇点, 从而 $\int_{|z-z_k|=\varepsilon} \frac{f(z)}{zg(z)} dz = 0$. 总之, 上式成立.

再讨论 0 处情形. 对充分小的 $\varepsilon > 0$, 记

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{zg(z)} dz.$$

若 0 不是 g 的零点, 则 0 是 h 的 1 阶极点或可去奇点, 由 $f(0)$ 是否为 0 决定. 和上面类似可知

$$I = \frac{f(0)}{g(0)}.$$

若 0 是 g 的零点, 对 f 在 0 处情况讨论.

若 0 是 f 的至少 2 阶零点, 则 0 是 h 的可去奇点, 从而

$$I = 0.$$

若 0 是 f 的 1 阶零点, 则 0 是 h 的 1 阶极点,

$$I = \text{Res}(h, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} zh(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)/z}{g(z)/z} = \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

若 0 不是 f 的零点, 则 0 是 h 的 2 阶极点,

$$I = \text{Res}(h, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} (z^2 h(z))' = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{zf(z)}{g(z)} \right)' = \frac{f'(0)}{g'(0)} - \frac{f(0)g''(0)}{2(g'(0))^2}.$$

由 Cauchy 积分定理,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{zg(z)} dz = I + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_k|=\varepsilon} \frac{f(z)}{zg(z)} dz.$$

故

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{zg(z)} dz = \sum_{k: z_k \neq 0} \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)} + \frac{f(0)}{g(0)} \mathbb{1}\{g(0) \neq 0\} + \left(\frac{f'(0)}{g'(0)} - \frac{f(0)g''(0)}{2(g'(0))^2} \right) \mathbb{1}\{g(0) = 0\}. \quad \square$$

题 6 (5.4.10). 求积分.

$$(1) \int_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)} dz;$$

$$(4) \int_{|z|=R} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3} - 1} dz.$$

解. (1) 易知 f 在 $B(\infty, 2)$ 上全纯, 且 ∞ 为可去奇点. 从而

$$\text{Res}(f, \infty) = 0.$$

故

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)} dz = -2\pi i \text{Res}(f, \infty) = 0.$$

(4) 作换元 $w = z^3$. 注意 $z^2 dz = \frac{1}{3} dw$, 换元后变成绕 3 圈, 二者抵消. 因此

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3} - 1} dz = \int_{|w|=R^3} \frac{1}{e^{2\pi i w} - 1} dw.$$

在 $|w| < R^3$, $\frac{1}{e^{2\pi i w} - 1}$ 有 1 阶极点 $0, \pm 1, \dots, \pm n$, 且留数均为 $\frac{1}{2\pi i}$.

故

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3} - 1} dz = 2\pi i \cdot (2n + 1) \cdot \frac{1}{2\pi i} = 2n + 1. \quad \square$$

题 7 (5.5.1(8)). 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx.$$

解. 令 $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}$. 记 $\gamma_R = \{z = Re^{i\theta} : \theta \in [0, \pi]\}$. 由 Jordan 引理,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

由留数定理,

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \frac{e^{iz}}{(z+i)^3} = \frac{7}{8} \pi e^{-1}.$$

令 $R \rightarrow \infty$ 并注意 $\frac{\cos x}{(1+x^2)^3}$ 是偶函数, 取实部得

$$I = \frac{7}{16} \pi e^{-1}. \quad \square$$

题 8 (5.5.1(9)). 计算

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$

解. 令 $f(z) = \frac{e^{2iz} - 1}{z^2}$. 考虑图1中围道. 则

$$\int_{-R}^{-r} - \int_{\gamma_r} + \int_r^R + \int_{\gamma_R} f(z) dz =: I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

作换元 $x \rightarrow -x$,

$$I_1 + I_3 = \int_r^R \frac{e^{-2ix} - 1}{x^2} dx + \int_r^R \frac{e^{2ix} - 1}{x^2} dx = -4 \int_r^R \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$

由 Jordan 引理,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_4 = 0.$$

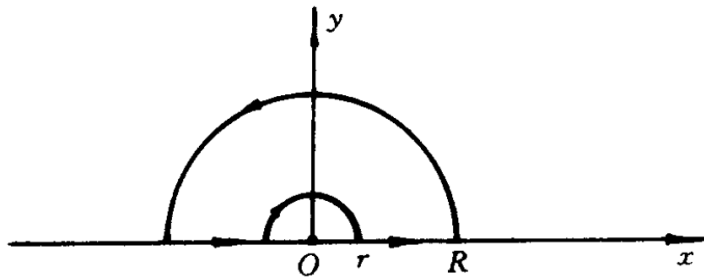


图 1: 题8的图示.

由引理 5.5.9,

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_2 = i\pi \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = -2\pi.$$

令 $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$ 得 $-4I + 2\pi = 0$, 即

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

□

题 9 (5.5.1(11)). 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2} dx,$$

其中 $-1 < p < 1$.

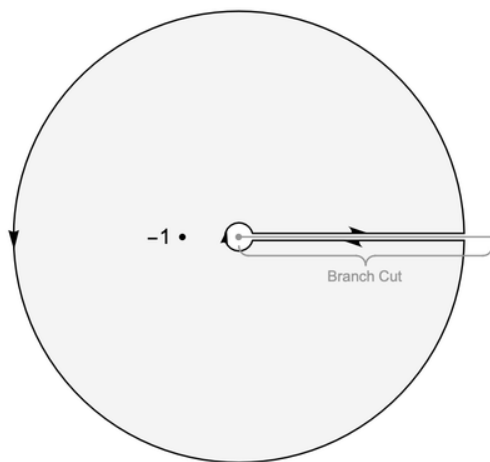


图 2: 题9的图示.

解. 一般地, 对 $-1 < a < b-1, b > 0$, 有

$$I = \int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b} dx = \frac{\pi}{b} \csc\left(\pi \frac{a+1}{b}\right).$$

作换元 $y = x^b$,

$$I = \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{y^{(a+1-b)/b}}{1+y} dy.$$

令 $f(z) = \frac{z^{(a+1-b)/b}}{1+z}$, 在正实轴上岸取正值. 考虑图2中围道. 则

$$\int_r^R + \int_{\gamma_R} - \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_r} f(z) dz =: I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1) = 2\pi i e^{i\pi \frac{a+1-b}{b}}.$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时,

$$|I_2| = O\left(R^{\frac{a+1-b}{b}-1+1}\right) \rightarrow 0.$$

当 $r \rightarrow 0$ 时,

$$|I_4| = O\left(r^{\frac{a+1-b}{b}}\right) \rightarrow 0.$$

对 $x \in (0, \infty)$,

$$f(x_{\text{下}}) = f(x_{\text{上}}) \exp\left(2i\pi \frac{a+1-b}{b}\right),$$

从而

$$I_3 = I_1 \exp\left(i\pi \frac{a+1-b}{b}\right).$$

令 $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$, 得

$$b\left(1 - e^{2i\pi \frac{a+1-b}{b}}\right) I = 2\pi i e^{i\pi \frac{a+1-b}{b}}.$$

取虚部可得

$$I = \frac{\pi}{b} \csc\left(\pi \frac{a+1}{b}\right).$$

□

题 10 (5.5.1(15)). 计算

$$I = \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx,$$

其中 $-1 < p < 2$.

解. 令 $f(z) = \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}$, 在 $(0, 1)$ 上岸取正实数. 考虑图3中围道. 则

$$\int_r^{1-r} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3} - \int_{\gamma_r} + \int_{\gamma_R} f(z) dz =: I_1 + I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i))$$

计算留数:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z+i} = \frac{1}{2i} 2^{p/2} \exp i \left((1-p) \cdot \frac{\pi}{2} + p \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{3p\pi i}{4}},$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z-i} = -\frac{1}{2i} 2^{p/2} \exp i \left((1-p) \cdot \frac{3\pi}{2} + p \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 2^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{5p\pi i}{4}}.$$

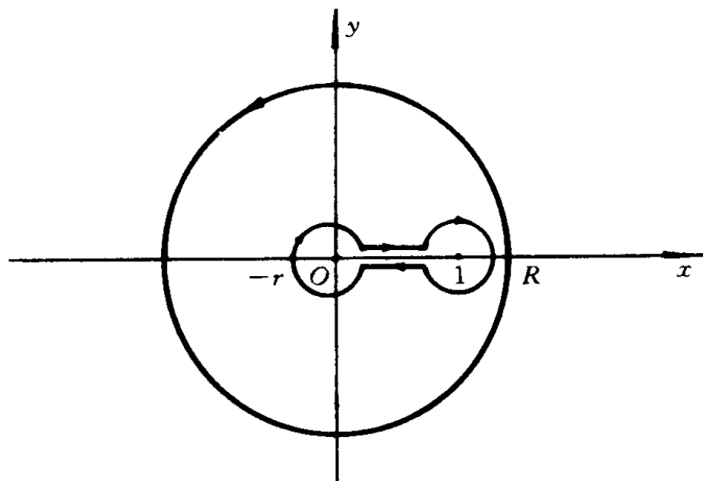


图 3: 题10的图示.

当 $R \rightarrow \infty$ 时, 由引理 5.5.15,

$$I_5 \rightarrow 2\pi i e^{-i\pi p},$$

其中 $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = e^{-i\pi p}$ 可如下计算:

令 z 沿实轴趋于 $+\infty$, 则 $z f(z)$ 模长趋于 1, 辐角趋于 $(2-p) \cdot 0 + p \cdot (-\pi) = -p\pi$. 事实上, 沿任何方向趋于 ∞ 都是一样的, 但注意考虑 $\frac{1}{1+z^2}$ 的辐角变化.

当 $r \rightarrow 0$ 时,

$$|I_4| = O(r^{1-p}r) \rightarrow 0,$$

$$|I_2| = O(r^p r) \rightarrow 0.$$

对 $x \in (0, 1)$,

$$f(x_{\text{F}}) = f(x_{\text{L}}) e^{-2i\pi p},$$

从而

$$I_3 = I_1 e^{-2i\pi p}.$$

令 $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$,

$$(1 - e^{-2i\pi p})I + 2\pi i e^{-i\pi p} = i\pi 2^{\frac{p}{2}} \left(e^{-i\frac{3\pi p}{4}} + e^{-i\frac{5\pi p}{4}} \right).$$

取虚部可得

$$I = -\frac{\pi}{\sin p\pi} + \frac{\pi 2^{p/2} \cos \frac{p\pi}{4}}{\sin p\pi}.$$

□

题 11 (5.5.1(21)). 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} dx.$$

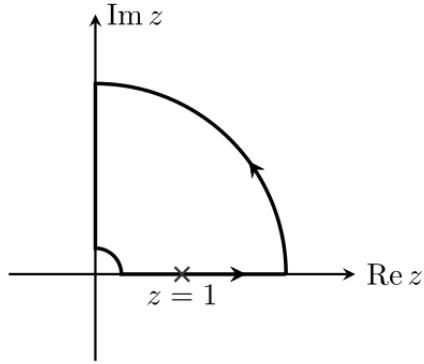


图 4: 题11的图示, 其中在 1 附近去掉半径为 r 的半圆

解. 令 $f(z) = \frac{\log z}{z^2 - 1}$. 考虑图4中围道. 则

$$\int_r^{1-r} + \int_{\gamma_1} + \int_{1+r}^R + \int_{\gamma_R} - \int_{ri}^{Ri} - \int_{\gamma_r} f(z)dz =: I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

令 $z = yi$,

$$I_5 = \int_r^R \frac{\log y + \frac{\pi}{2}i}{-y^2 - 1} i dy = \frac{\pi}{2} \int_r^R \frac{dy}{1 + y^2} + \text{虚数}.$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时,

$$|I_4| = O\left(\frac{\log R}{R^2} \cdot R\right) \rightarrow 0.$$

当 $r \rightarrow 0$ 时,

$$|I_2| = O\left(\frac{\log(1+r) + r}{r} \cdot r\right) \rightarrow 0$$

$$|I_5| = O\left(\frac{-\log r}{1 - r^2} \cdot r\right) \rightarrow 0.$$

令 $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$ 并取实部得

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

□

题 12 (5.5.1(25)). 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx.$$

解. 令 $f(z) = \frac{z^2}{e^z + 1}$. 考虑图5中围道. 则

$$\int_0^R + \int_{\gamma_1} + \int_{R+2\pi i}^{2\pi i} - \int_{\pi i}^{2\pi i} - \int_{\gamma_2} - \int_0^{\pi i} f(z)dz =: I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 - I_6 = 0.$$

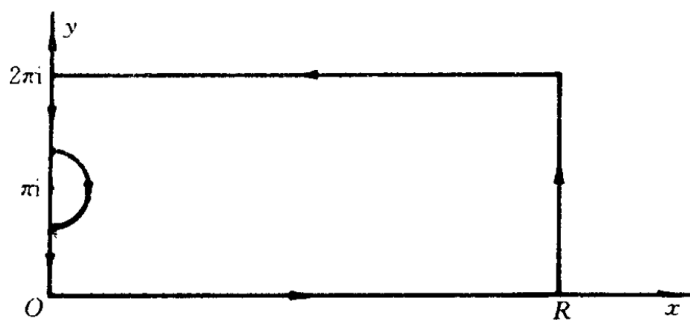


图 5: 题12的图示.

令 $z = x + 2\pi i$,

$$I_1 + I_3 = \int_0^R \left(\frac{x^2}{e^x + 1} - \frac{(x + 2\pi i)^2}{e^x + 1} \right) dx = -4\pi^2 \int_0^R \frac{1}{e^x + 1} dx - 4\pi i \int_0^R \frac{x}{e^x + 1} dx.$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时,

$$I_2 \rightarrow 0.$$

令 $z = ix$,

$$\begin{aligned} I_4 + I_6 &= \int_0^{\pi-r} + \int_{\pi+r}^{2\pi} \frac{(xi)^2}{e^{xi} + 1} i dx = - \int_0^{\pi-r} + \int_{\pi+r}^{2\pi} \frac{ix^2(1 + \cos x - i \sin x)}{2 + 2 \cos x} dx \\ &= \text{实数} - i \left(\frac{4\pi^3}{3} + \frac{1}{6}(\pi - r)^3 - \frac{1}{6}(\pi + r)^3 \right). \end{aligned}$$

由引理 5.5.9,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_5 = i\pi \lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) f(z) = \pi^3.$$

令 $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$ 并取虚部得

$$-4\pi I + \frac{4\pi^3}{3} - \pi^3 = 0,$$

即

$$I = \frac{\pi^2}{12}.$$

□

2 补充题

题 13 (5.2.6). 设 f 是 $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ 上非常值的全纯函数. 证明: 若 z_0 是 f 的零点集的极限点, 则 z_0 是 f 的本性奇点.

证明. 由条件易知 z_0 是 f 的孤立奇点.

若 z_0 是 f 的可去奇点, 则由 z_0 是 f 的零点集的极限点知 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$, 且补充定义 $f(z_0) = 0$ 后 f 在 $B(z_0, R)$ 全纯. 由唯一性定理知 $f \equiv 0$, 矛盾.

若 z_0 是 f 的极点, 则对 $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ 任意趋于 z_0 的序列 $\{w_n\}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = \infty$, 与 z_0 是 f 的零点集的极限点矛盾.

故 z_0 是 f 的本性奇点. □

题 14 (5.2.7). 若 f 是 $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ 上的亚纯函数, 且 z_0 是 f 的极点集的极限点, 则对任意 $A \in \mathbb{C}_\infty$, 存在 $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ 中收敛于 z_0 的点列 $\{z_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$.

证明. 设题中所说点列为 $\{w_n\}$.

若 $A = \infty$, 则对任意 n , 由于 w_n 是极点, 存在 $z_n \in B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, 使得 $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$ 且 $|f(z_n)| > n$. 从而 $z_n \rightarrow z_0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty = A$.

设 A 是有限. 若 z_0 任一邻域中有 $f(z) - A$ 的零点, 则结论成立. 若不然, 存在 $\delta > 0$, 使得 $f(z) - A$ 在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 中恒不为 0. 令 $g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$, $0 < |z - z_0| < \delta$. 对 f 的任一极点 w , $\lim_{z \rightarrow w} g(z) = 0$, 补充定义 $g(w) = 0$, 则 g 在 $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ 中全纯. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} g(w_n) = 0$, 所以 z_0 或者是 g 的本性奇点, 或者是可去奇点. 下面讨论这两种情况.

若 z_0 是 g 的可去奇点, 则补充定义 $g(z_0) = 0$, g 在 $B(z_0, \delta)$ 中全纯. 由唯一性定理, $g \equiv 0$, 与 f 在 $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ 上亚纯矛盾.

若 z_0 是 g 的本性奇点, 则存在 $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ 中收敛于 z_0 的点列 $\{z_n\}$, 使得 $g(z_n) \rightarrow \infty$, 从而 $f(z_n) \rightarrow A$, 结论成立. □

题 15 (5.2.8). 设 f 在 $B(0, R) \setminus \{0\}$ 上全纯. 证明: 若 $\Re f(z) > 0$ 对所有 $z \in B(0, R) \setminus \{0\}$ 成立, 则 0 是 f 的可去奇点.

证明. 由条件易知 0 是 f 的孤立奇点. 令 $g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$, 则 g 在 $B(0, R) \setminus \{0\}$ 上全纯, 0 是 g 的孤立奇点.

由 $\Re f(z) > 0$ 可得 $|g(z)| < 1$, 从而 0 是 g 的可去奇点. 因此 $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = A \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

故 $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{1+A}{1-A}$, 从而 0 是 f 的可去奇点. □

题 16 (5.3.5). 设 f 是整函数, 证明:

1. 若 $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $f(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$, 则 f 是奇函数;
2. 若 $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $f(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, 则 f 是偶函数.

证明. 1. 令 $g(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}$, g 是整函数. 任意 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \overline{f(x)} = \overline{f(\bar{x})}$, 即 $g(x) = 0$. 从而 $g \equiv 0$, 即 $f(z) \equiv \overline{f(\bar{z})}$.

令 $h(z) = f(z) + \overline{f(-\bar{z})}$. 任意 $x \in \mathbb{R}$, $f(-xi) = \overline{f(xi)} = -\overline{f(xi)}$, 即 $h(x) = 0$. 从而 $h \equiv 0$.

故 f 是奇函数.

2. 同 1 可知 $f(z) \equiv \overline{f(\bar{z})}$.

令 $h(z) = f(z) - f(-z)$. 任意 $x \in \mathbb{R}$, $f(-xi) = \overline{f(-xi)} = f(xi)$, 即 $h(x) = 0$. 从而 $h \equiv 0$.
故 f 是偶函数. □

题 17 (5.4.3). 设 f 在 $B(\infty, R)$ 上全纯, 证明:

1. 若 ∞ 是 f 的可去奇点, 则

$$\text{Res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z);$$

2. 若 ∞ 是 f 的 m 阶极点, 则

$$\text{Res}(f, \infty) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{m+2} f^{(m+1)}(z).$$

证明. 1. 令 $g(z) = f(1/z)$. 0 是 g 的可去奇点. 于是

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, \infty) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R_0} f(z) dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{R_0}} \frac{g(z)}{z^2} dz \\ &= -g'(0) \\ &= -\lim_{z \rightarrow 0} g'(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'(1/z)}{z^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z). \end{aligned}$$

2. 可设 f 的 Laurent 展开为

$$f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots.$$

因此

$$\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1} = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{m+2} f^{(m+1)}(z). \quad \square$$

3 概率分布特征函数的计算

题 18 (正态分布). 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 有 p.d.f.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

则其特征函数为

$$\phi(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right).$$

证明. 令 $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, 则

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}} dy.$$

只需证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}.$$

令 $f(z) = e^{-\frac{(z-it\sigma)^2}{2}}$. 考虑以 $\Im z = 0$ 和 $\Im z = t\sigma$ 为上下边, 宽为 $2R$ 的关于虚轴对称的矩形围道. 由 Cauchy 积分定理, f 沿围道积分为 0. 而在两竖边上, $|f(z)| = O(e^{-R^2})$. 令 $R \rightarrow \infty$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}. \quad \square$$

题 19 (Gamma 分布). 设 $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, 有 p.d.f.

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x},$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$. 则其特征函数为

$$\phi(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}.$$

证明. 令 $f(z) = z^{\alpha-1} e^{(it-\beta)z} = e^{(\alpha-1)\log z + (it-\beta)z}$. 则

$$\phi(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x) dx.$$

考虑扇形围道, 半径为 R , 两边为正实轴和 $\{z = \frac{x}{-it+\beta} : x \geq 0\}$, 且在原点附近去掉半径为 r 的小圆弧. 由 Cauchy 积分定理, f 沿围道积分为 0.

沿大圆弧, $|f(z)|$ 关于 R 指数衰减, 从而积分趋于 0.

沿小圆弧, $|f(z)| = O(r^{\alpha-1})$, 从而积分趋于 0.

令 $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$, 有

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{-it+\beta}\right) \frac{1}{-it+\beta} dx = \Gamma(\alpha) \left(\frac{1}{\beta-it}\right)^\alpha.$$

故

$$\phi(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}. \quad \square$$