# 1 作业

**题 1** (2.4.8)**.** *证明* $f(z)=z^2+2z+3$ *在* $B(0,1)$ *中单叶.*

*证明.* 设 $f(z_1)=f(z_2)$, 则 $z_1^2+2z_1+3=z_2^2+2z_2+3$, 即 $(z_1-z_2)(z_1+z_2+2)=0$. 而 $z_1,z_2\in B(0,1)$, 只能 $z_1=z_2$. 故 $f(z)$ 在 $B(0,1)$ 中单叶. □

**题 2** (2.4.15, 2.4.16)**.** *考虑Joukowsky*[1]*变换*$\phi(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$*. 证明下面 4 个域都是* $\phi(z)$ *的单叶域并求出它们的像:*

1. *上半平面* $\{z\in\mathbb{C}:\Im z>0\}$*;*
2. *下半平面* $\{z\in\mathbb{C}:\Im z<0\}$*;*
3. *无心单位圆盘* $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$*;*
4. *单位圆盘的外部* $\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$*.*

*证明.* 对 $z_1\neq z_2$, $\phi(z_1)=\phi(z_2)$ 当且仅当 $z_1z_2=1$, 这蕴含 $\Im z_1\cdot\Im z_2<0$ 和 $|z_1z_2|=1$. 因此这 4 个域都是 $\phi(z)$ 的单叶域.

为求这 4 个域的像, 我们将 $\phi$ 写成一系列函数的复合:

$$z\longrightarrow z_1=\frac{z-1}{z+1}\longrightarrow z_2=z^2\longrightarrow w=\frac{1+z_2}{1-z_2}=\phi(z).$$

结论: $\phi$ 将前两个域均映为 $\mathbb{C}\backslash((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))$, 后两个域均映为 $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$. □

**题 3** (2.4.17)**.** *证明下面 2 个域都是* $\cos z$ *和* $\sin z$ *的单叶域:*

1. $\{z\in\mathbb{C}:\theta_0<\Re z<\theta_0+2\pi,\Im z>0\}$*;*
2. $\{z\in\mathbb{C}:\theta_0<\Re z<\theta_0+2\pi,\Im z<0\}$*.*

*证明.* 记 $\phi(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $\psi(z)=\frac{1}{2}(z-\frac{1}{z})$, 则

$$\cos z=\phi(e^{iz}),$$
$$\sin z=\frac{1}{i}\psi(e^{iz}).$$

在给定的域, $z\mapsto e^{iz}$ 是单射, 且像为 $\{re^{i\theta}:0<r<1,\theta_0<\theta<\theta_0+2\pi\}$ 和 $\{re^{i\theta}:r>1,\theta_0<\theta<\theta_0+2\pi\}$. 又已证 $\phi$ ($\psi$ 类似) 在这两个域上单叶. 故 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在题所给域上单叶. □

[1] Nikolay Zhukovsky (1847-1921) was a Russian mathematician and engineer. His surname is usually romanised as Joukovsky or Joukowsky.

**题 4** (2.4.22)**.** 设 $f(z)=\frac{z^{p-1}}{(1-z)^p}$, $0<p<1$. 证明 $f$ 能在 $D=\mathbb{C}\backslash[0,1]$ 上选出单值全纯分支.

证明. 任取 $D$ 中简单闭曲线 $C$, 则 $C$ 内部或者同时不含 0 和 1, 或者同时含 0 和 1. 对于前者, 显然 $\Delta_C f(z)=0$. 对于后者,

$$\begin{aligned}\Delta_C \mathrm{Arg} f(z)&=(p-1)\Delta_C \mathrm{Arg} z-p\Delta_C \mathrm{Arg}(1-z)\\&=(p-1)\cdot 2\pi-p\cdot 2\pi\\&=-2\pi.\end{aligned}$$

□

**题 5** (2.4.23)**.** 证明 $f(z)=\mathrm{Log}\frac{z^2-1}{z}$ 能在 $D=\mathbb{C}\backslash((-\infty,-1]\cup[0,1])$ 上选出单值全纯分支.

证明. 考虑

$$\Delta_C f(z)=i\left(\Delta_C \mathrm{Arg}(z-1)+\Delta_C \mathrm{Arg}(z+1)-\Delta_C \mathrm{Arg}(z)\right).$$

由此可得支点为 0, $\pm1$, $\infty$.

任取 $D$ 中简单闭曲线 $C$, 只需考虑 $C$ 包含 0, 1. 此时

$$\Delta_C f(z)=i(2\pi+0-2\pi)=0.$$

故 $f(z)$ 能在 $D$ 上选出单值全纯分支. □

**题 6** (2.4.26)**.** 设 $D$ 是复平面上去掉 $[-1,i]$, $[1,i]$ 和射线 $z=it\quad(1\le t<\infty)$ 后的域. 证明 $\mathrm{Log}(1-z^2)$ 能在 $D$ 上选出单值全纯分支. 设分支 $f$ 满足 $f(0)=0$, 求 $f(2)$.

证明. 考虑

$$\Delta_C \mathrm{Log}(1-z^2)=i\left(\Delta_C \mathrm{Arg}(z-1)+\Delta_C \mathrm{Arg}(z+1)\right).$$

由此可得支点为 $\pm1$, $\infty$. 故 $\mathrm{Log}(1-z^2)$ 能在 $D$ 上选出单值全纯分支.

计算

$$\begin{aligned}f(2)&=f(0)+\Delta_{C_0}\mathrm{Log}(1-z^2)\\&=\Delta_{C_0}\log|1-z^2|+i\Delta_{C_0}\mathrm{Arg}(z-1)+i\Delta_{C_0}\mathrm{Arg}(z+1)\\&=\log 3+\pi i,\end{aligned}$$

其中 $C_0$ 如图1所示. □

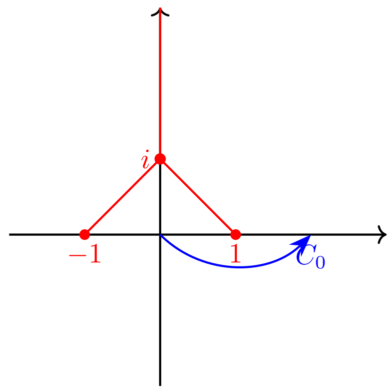


图 1: Illustration of $C_0$ in Problem 2.4.26.

**题 7** (2.4.27)**.** 证明 $\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$ 能在 $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ 上选出单值全纯分支 $f$, 满足 $f(i)=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i}$. 求 $f(-i)$.

证明. 任取 $D$ 中简单闭曲线 $C$, 只需考虑 $C$ 包含 $\pm 1$. 此时

$$\Delta_C \mathrm{Arg} f(z) = \frac{3}{4}\Delta_C \mathrm{Arg}(z-1) + \frac{1}{4}\Delta_C \mathrm{Arg}(1+z) = 2\pi.$$

故 $\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$ 能在 $D$ 上选出单值全纯分支.

计算

$$\begin{aligned} f(-i) &= f(i) + \Delta_{C_0}\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)} \\ &= \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i} + f(i)\left(e^{\frac{1}{4}i\Delta_{C_0}\mathrm{Arg}(1-z)^3(1+z)}-1\right) \\ &= \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i} + f(i)\left(e^{\frac{1}{4}i(3\cdot(-\frac{3}{2}\pi)+(-\frac{1}{2}\pi))}-1\right) \\ &= \sqrt{2}e^{\frac{5}{8}\pi i}. \end{aligned}$$

□

**题 8** (2.5.1)**.** 求将上半平面映为上半平面的分式线性变换, 使得 $\infty$, $0$, $1$ 分别映为 $0$, $1$, $\infty$.

解. 交比不变:

$$(w,0,1,\infty) = (z,\infty,0,1).$$

化简得

$$w = \frac{1}{1-z}.$$

上半平面是 $\infty, 0, 1$ 和 $0, 1, \infty$ 的左侧, 因此 $z \mapsto w$ 将上半平面映为上半平面.

故所求变换为 $w = \frac{1}{1-z}$. □

**题 9** (2.5.2)**.** 求将上半平面映为单位圆盘的分式线性变换, 使得 $-1, 0, 1$ 分别映为 $1, i, -1$.

*解.* 交比不变:

$$(w, 1, i, -1) = (z, -1, 0, 1).$$

化简得

$$w = \frac{z-i}{iz-1}.$$

上半平面是 $-1, 0, 1$ 的左侧, 单位圆盘是 $1, i, -1$ 的左侧, 因此 $z \mapsto w$ 将上半平面映为单位圆盘.

故所求变换为 $w = \frac{z-i}{iz-1}$. □

**题 10** (2.5.4)**.** 求将单位圆盘的外部映为右半平面的分式线性变换, 使得

1. $1, -i, -1$ 分别映为 $i, 0, -i$;
2. $-i, i, 1$ 分别映为 $i, 0, -i$.

*解.* 通过交比不变计算, 再用左右侧说明得到的映射将单位圆盘外部映为右半平面.

结论:

1. $w = \frac{z+i}{z-i}$;
2. $w = \frac{z-i}{(2-i)z+2i-1}$.

□

**题 11** (2.5.5)**.** 求将上半平面映为自身的分式线性变换, 使得实轴上的 $x_1$, $x_2$, $x_3$ $(x_1 < x_2 < x_3)$ 分别映为 $0, 1, \infty$.

*解.* 交比不变:

$$(w, 0, 1, \infty) = (z, x_1, x_2, x_3).$$

化简得

$$w = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} \cdot \frac{z - x_1}{z - x_3}.$$

上半平面是 $x_1$, $x_2$, $x_3$ 和 0, 1, $\infty$ 的左侧, 因此 $z \mapsto w$ 将上半平面映为上半平面.

故所求变换为 $w = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} \cdot \frac{z - x_1}{z - x_3}$. $\square$

**题 12** (2.5.13)**.** 求将 $B(0,1)$ 映为自身的分式线性变换, 使得 $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$ 分别映为 $\frac{1}{2}$, 2, $\infty$.

解. 通过交比不变, 可求得

$$w = \frac{(5-3i)z - 4}{4z - (5+3i)}.$$

为说明这是将 $B(0,1)$ 映为自身的变换, 利用例 *2.5.16*:

$$w = \frac{5-3i}{5+3i} \frac{z - \frac{4}{5-3i}}{1 - \frac{4}{5+3i} z}.$$

$\square$

**题 13** (2.5.15)**.** 求单叶全纯映射, 将除去 $[0, 1+i]$ 的第一象限映为上半平面.

解. $\square$

**题 14** (2.5.16)**.** 求单叶全纯映射, 将 $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \Re z < \frac{\pi}{2}, \Im z > 0\}$ 映为上半平面, 且将 $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, 0 分别映为 1, $-1$, 0.

解. $\square$

**题 15** (2.5.18)**.** 求单叶全纯映射将

## 2 补充材料