CH1 : Déterminants

Dans ce cours on note $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ la matrice obtenue en éliminant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A_{32} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Définition : Soit $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle déterminant l'application :

$$\det : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K$$

$\mathbb{R}$

définie de la manière suivante :

- Si $n=1$, c'est-à-dire $A=(a)$, on pose $\det A = a$
- Si $n>1$, on pose

$$\det A = a_{11}\det A_{11} + \cdots + (-1)^{k+1} a_{1k} \det A_{1k} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}$$

Notation : Le déterminant d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est noté par :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$A_{11} = (3)$

A_{12}

Exemple 1 :

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2} 6 \times \det A_{11} + (-1)^{3} (-1) \det A_{12} = 6 \times |3| + |2| = 6 \times 3 + 2 = 20$$

Plus généralement : $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Exemple 2 :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (1+5) + 2(2+1) + 3(10-1) = 39$$

Exercice 1 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

On a $\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Remarque : le déterminant d'une matrice où il y a une ligne (ou colonne) nulle est nul.

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (8+0) + 2(0+8)$$

$$= 24$$

$$\det A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3(2+2) = -3 \times 4 = -12$$

Exercice ①: Home Work

Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

1 - calculer $C = AB$ et calculer le déterminant de C.

2. En déduire le déterminant de B.

Proposition : le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments sur la diagonale.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\det A = 1 \times 4 \times (-1) = -4$

$\det B = 2 \times 3 \times 4 = 24$

Théorème : le déterminant est une application linéaire par rapport à chaque ligne (ou chaque colonne) :

Si $A = \| c_1, \dots, c_n \|$, $\lambda \in K$

a) $\det \| c_1, \dots, \lambda c_k, \dots, c_n \| = \lambda \det \| c_1, \dots, c_k, \dots, c_n \|$

b) $\det \| c_1, \dots, a_k + b_k, \dots, c_n \| = \det \| c_1, \dots, a_k, \dots, c_n \| + \det \| c_1, \dots, b_k, \dots, c_n \|$

Quelques propriétés du déterminant :

Les propriétés suivantes rendent le calcul du déterminant plus simple et plus rapide.

1. Si deux colonnes (ou lignes) sont égales, le déterminant est nul.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

2 - Quand échange deux ligne (ou colonne) le déterminant change de signe :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

3 - On peut factoriser dans un déterminant un facteur commun aux éléments d'une rangée

$$\begin{vmatrix} k a_1 & a_2 & a_3 \\ k b_1 & b_2 & b_3 \\ k c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

4- Si une ligne (ou colonne) est combinaison des autres le déterminant est nul

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & n a_1 + m a_2 \\ b_1 & b_2 & n b_1 + m b_2 \\ c_1 & c_2 & n c_1 + m c_2 \end{vmatrix} = 0$$

⑤ L'addition à une ligne (ou colonne) d'un multiple de l'autre ne change pas le déterminant. ← important.

$$\begin{vmatrix} a_1 + k a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + k b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + k c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

77 270 56 02