泊松图像编辑实验报告

姓名：张钧　　日期：2020 年 10 月 31 日

摘要：本实验用$MATLAB$实现了泊松算法用以编辑图像，本报告对此算法做了相关的简单介绍与对应的结果展示。

一、 算法描述

问题：使用泊松算法将源图片的一部分无缝插入目标图片中。

1. 引导插值的泊松解

（1）引导插值：

定义：目标图像定义域S为R^2上的闭子集； 修改域Ω为S上闭子集，有边界$\partial\Omega$；f^*为定义在S/Ω上的已知标量函数，f为Ω上的未知标量函数，$\vec{\mathrm{v}}$为Ω上的矢量场。

Ω上f^*的最简插值函数f为插值膜函数，定义为如下最小化问题的根：

$$\begin{cases} min_f \iint_\Omega |\nabla f|^2 \\ f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

则须满足：

$$\begin{cases} (\Delta f)|_\Omega = 0 \\ f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

进一步，加入引导场$\vec{\mathrm{v}}$，则最小化问题转变为：

$$\begin{cases} min_f \iint_\Omega |\nabla f - \vec{\mathrm{v}}|^2 \\ f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

则须满足：

$$\begin{cases} (\Delta f)|_\Omega = div(\vec{\mathrm{v}}) \\ f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

若$\vec{\mathrm{v}}$为函数g梯度，定义校正函数$\tilde{f}$，$f = g + \tilde{f}$，则问题转化为：

$$\begin{cases} (\Delta\tilde{f})|_{\Omega} = 0 \\ \tilde{f}|_{\partial\Omega} = (f^* - g)|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

(2):离散泊松求解：

定义：S、Ω同上定义但已为无限离散网格上的有限集。记N_p为S中与p相连的四向点。$< p,q >$为$q \in \mathrm{N}_p$时的点对，$\partial\Omega = \{\mathrm{p} \in S\backslash\Omega: \mathrm{N}_p \cap \Omega \neq \emptyset\}$，$f_p$为$f$在$p$上值。目标变为计算$f|_{\Omega} = \{f_p, p \in \Omega\}$。

问题变成：

$$\begin{cases} min_{f|_{\Omega}} \sum_{<p,q>\cap\Omega\neq\emptyset} (f_p - f_q - \vec{v}_{pq})^2 \\ f_p|_{\partial\Omega} = {f_p}^*|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

其中，$\vec{v}_{pq} = \vec{v}\,(\frac{p+q}{2}) \cdot \overrightarrow{pq}$

即满足，$\forall p \in \Omega$，有：

$$|N_p| f_p - \sum_{q\in \mathrm{N}_p \cap \Omega} f_q = \sum_{q \in \mathrm{N}_p \cap \partial\Omega} {f_q}^* + \sum_{q\in\mathrm{N}_p} \vec{v}_{pq}$$

2. 无缝克隆

（1）：导入梯度变化：

$\vec{\mathrm{v}}$基本选择为源图像的梯度场，即：$\vec{\mathrm{v}} = \nabla g$，则：

$$\begin{cases} (\Delta f)|_{\Omega} = (\Delta g)|_{\Omega} \\ f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

并且有：$\vec{v}_{pq} = \vec{v}_p - \vec{v}_q$

（2）：混合梯度：

$\forall x \in \Omega$，有：

$$\vec{\mathrm{v}}(x) = \begin{cases} \nabla f^*(x) & if \ \ |\nabla f^*(x)| > |\nabla g(x)| \\ \nabla g(x) & otherwise \end{cases}$$

则对应离散项：

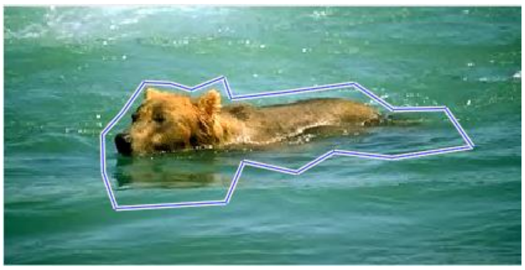
$$\vec{v}_{pq} = \begin{cases} {f_p}^* - {f_q}^* & if \ \ |{f_p}^* - {f_q}^*| > |g_p - g_q| \\ g_p - g_q & otherwise \end{cases}$$

二、　实验结果

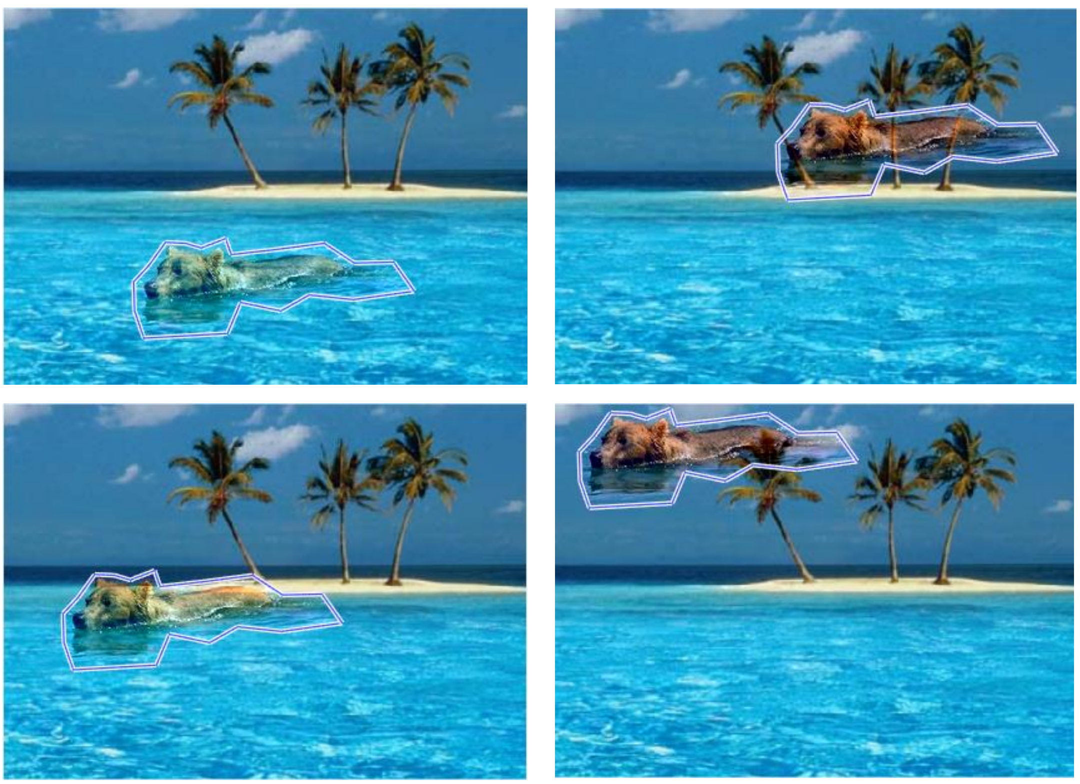
如下所示即为对不同源图作各自多边形区域截取所得到的图像在目标图不同区域所得到的不同效果图的展示

情形 1：

（源图上多边形区域截取）



（效果图）



情形 2：

（源图上多边形区域截取）

（效果图）