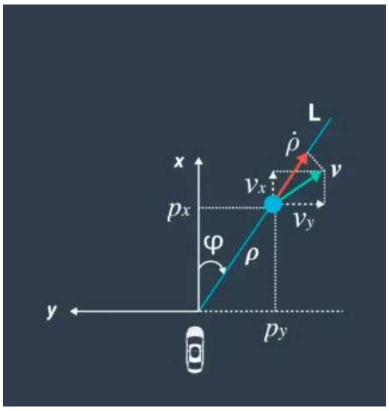
扩展卡尔曼滤波算法

1.融合案例场景



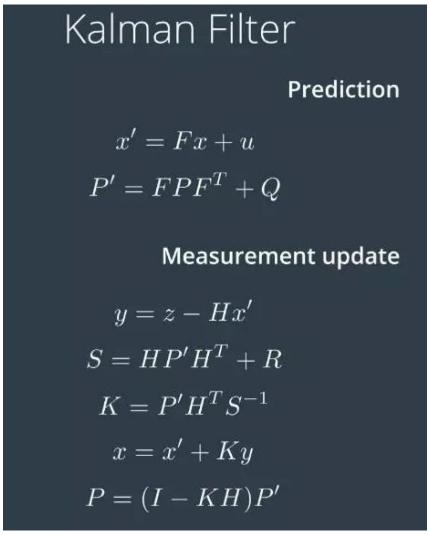
毫米波雷达观察世界的方式与激光雷达有所不同。

激光雷达直接获得障碍物在笛卡尔坐标系下 x 方向、y 方向和 z 方向上的距离；

毫米波雷达直接获得障碍物在极坐标下离雷达的距离 ρ 、方向角 φ 以及距离的变化率（径向速度） ρ '

注意：激光雷达数据用于预测，毫米雷达数据用于观测（测量）

扩展卡尔曼步骤：



1.预测部分

状态

$$x = \begin{pmatrix} px \\ py \\ vx \\ vy \end{pmatrix}$$

状态转移方程

$$
\begin{aligned}
x^{'} &= Fx+u \\
&= \begin{pmatrix} px+vx\cdot\Delta t \\ py+vy\cdot\Delta t \\ vx \\ vy \end{pmatrix}+u
\end{aligned}
$$

对于二维的匀速运动模型，加速度为 0，并不会对预测后的状态造成影响，因此

$$u=0$$

如果换成加速或减速运动模型，可以引入加速度 ax 和 ay，根据 s1 = s0 + vt + at^2/2 这里的 u 会变成：

$$u=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}ax\cdot(\Delta t)^2 \\ \frac{1}{2}ay\cdot(\Delta t)^2 \\ ax\cdot\Delta t \\ ay\cdot\Delta t \end{pmatrix}$$

简单起见，这里只考虑匀速模型

$$\begin{pmatrix} px+vx\cdot\Delta t \\ py+vy\cdot\Delta t \\ vx \\ vy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} px \\ py \\ vx \\ vy \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

预测模块第 2 个公式

$$P^{'}=FPF^{T}+Q$$

该公式中 P 表示系统的不确定程度，这个不确定程度，在卡尔曼滤波器初始化时会很大，随着越来越多的数据注入滤波器中，不确定程度会变小，P 的专业术语叫状态协方差矩阵（state covariance matrix）；这里的 Q 表示过程噪声（process covariance matrix），即无法用 x'=Fx+u 表示的噪声，比如车辆运动时突然到了上坡，这个影响是无法用之前的状态转移方程估计的。毫米波雷达测量障碍物在径向上的位置和速度相对准确，不确定度较低，因此可以对状态协方差矩阵 P 进行如下初始化

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

由于 Q 对整个系统存在影响，但又不能太确定对系统的影响有多大。对于简单的模型来说，

这里可以直接使用单位矩阵或空值进行计算，即

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

观测模块

第 1 个公式

$$y=z-Hx^{'}$$

这个公式的目的是计算观测到的观测值 z 与预测值 x'之间差值 y。

前面提到过毫米波雷达观测值 z 的数据特性，如下图所示

$$z=\begin{pmatrix}\rho\\\varphi\\\dot{\rho}\end{pmatrix}$$

由图可知观测值 z 的数据维度为 3×1，为了能够实现矩阵运算，y 和 Hx'的数据维度也都为 3×1。

使用基本的数学运算可以完成预测值 x'从笛卡尔坐标系到极坐标系的坐标转换，求得 Hx'，再与观测值 z 进行计算。需要注意的是，在计算差值 y 的这一步中，我们通过坐标转换的方式避开了未知的旋转矩阵 H 的计算，直接得到了 Hx’的值。

注意：激光雷达数据用于预测，毫米雷达数据用于观测（测量）

为了简化表达，我们用 px，py 以及 vx 和 vy 表示预测后的位置及速度，如下所示

$$y=\begin{pmatrix}\rho\\\varphi\\\dot{\rho}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\sqrt{px^2+py^2}\\\arctan(px/py)\\\dfrac{px\cdot vx+py\cdot vy}{\sqrt{px^2+py^2}}\end{pmatrix}$$

其中测量值 z 和预测后的位置 x'都是已知量，因此我们很容易计算得到观测与预测的差值 y。

毫米波雷达在转换时涉及到笛卡尔坐标系和极坐标系的位置、速度转换，这个转化过程是非线性的。因而在处理类似毫米波雷达这种非线性的模型时，习惯于将计算差值 y 的公式写成如下，以作线性和非线性模型的区分。

$$y=z-h(x^{'})$$

对应上面式子

$$h(x') = \begin{pmatrix} \sqrt{px^2 + py^2} \\ \arctan(px/py) \\ \dfrac{px \cdot vx + py \cdot vy}{\sqrt{px^2 + py^2}} \end{pmatrix}$$

接下来扩展卡尔曼最重要的一步了，就是将非线性转换为线性

毫米波雷达观测 z 是包含位置、角度和径向速度的 3x1 的列向量，状态向量 x'是包含位置和速度信息的 4x1 的列向量，根据公式 y=z-Hx'可知测量矩阵（Measurement Matrix）H 的维度是 3 行 4 列。即：

$$h(x') = \begin{pmatrix} \sqrt{px^2 + py^2} \\ \arctan(px/py) \\ \dfrac{px \cdot vx + py \cdot vy}{\sqrt{px^2 + py^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & H_{02} & H_{03} \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{20} & H_{21} & H_{22} & H_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} px \\ py \\ vx \\ vy \end{pmatrix} = Hx'$$

从上面的公式很容易看出，等式两边的转化是非线性的，并不存在一个常数矩阵 H，能够使得等式两边成立。

如果将高斯分布作为输入，输入到一个非线性函数中，得到的结果将不再符合高斯分布，也就将导致卡尔曼滤波器的公式不再适用。因此我们需要将上面的非线性函数转化为近似的线性函数求解。

非线性函数 y=h(x)可通过泰勒公式在点(x0,y0)处展开为泰勒级数：

$$h(x) = h(x_0) + \frac{\dot{h}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{\ddot{h}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ..$$

忽略二次以上的高阶项，即可得到**近似的线性化方程**，用以替代非线性函数h(x)，即：

$$h(x) \approx h(x_0) + \dot{h}(x_0)(x - x_0)$$

将非线性函数h(x)拓展到多维，即求各个变量的偏导数，即：

$$h(x) \approx h(x_0) + \frac{\partial h(x_0)}{\partial x}(x - x_0)$$

对x求偏导数所对应的这一项被称为雅可比（Jacobian）式。

我们将求偏导数的公式与我们的之前推导的公式对应起来看x的系数，会发现这里的测量矩阵H其实就是泰勒公式中的雅可比式。

$$h(x) \approx h(x_0) + \underbrace{\boxed{\frac{\partial h(x_0)}{\partial x}}}_{H_{jacobian}} (x - x_0)$$

多维的雅可比式的推导过程有兴趣的同学可以自己研究一下，这里我们直接使用其结论：

$$H_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \frac{\partial h_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

求得非线性函数 h(x')对 px，py，vx，vy 的一阶偏导数，并排列成的矩阵，最终得到雅克比（Jacobian）矩阵 H：

$$H = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & H_{02} & H_{03} \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{20} & H_{21} & H_{22} & H_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial px} & \frac{\partial \rho}{\partial py} & \frac{\partial \rho}{\partial vx} & \frac{\partial \rho}{\partial vy} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial px} & \frac{\partial \varphi}{\partial py} & \frac{\partial \varphi}{\partial vx} & \frac{\partial \varphi}{\partial vy} \\ \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial px} & \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial py} & \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial vx} & \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial vy} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{px}{\sqrt{px^2+py^2}} & \frac{py}{\sqrt{px^2+py^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{py}{px^2+py^2} & \frac{px}{px^2+py^2} & 0 & 0 \\ \frac{py(vx \cdot py - vy \cdot px)}{\left(px^2+py^2\right)^{3/2}} & \frac{px(vy \cdot px - vx \cdot py)}{\left(px^2+py^2\right)^{3/2}} & \frac{px}{\sqrt{px^2+py^2}} & \frac{py}{\sqrt{px^2+py^2}} \end{pmatrix}$$

根据以上公式可知，在每次预测障碍物的状态后，需要根据预测的位置和速度计算出对应的测量矩阵 H，这个测量矩阵为非线性函数 h(x')在 x'所在位置进行求导的结果。

再看卡尔曼滤波器接下来的两个公式

$$S = HP'H^T + R$$
$$K = P'H^TS^{-1}$$

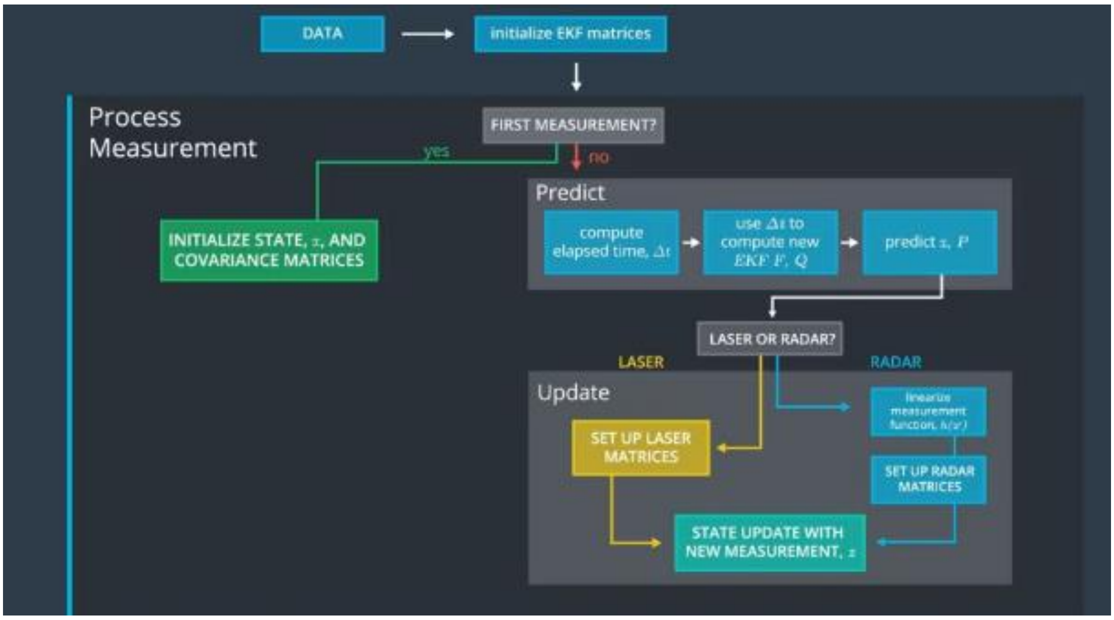
这两个公式求的是卡尔曼滤波器中一个很重要的量——卡尔曼增益 K（Kalman Gain），用人话讲就是求差值 y 的权值。第一个公式中的 R 是测量噪声矩阵（measurement covariance matrix），这个表示的是测量值与真值之间的差值。一般情况下，传感器的厂家会提供。如果

厂家未提供，我们也可以通过测试和调试得到。S 只是为了简化公式，写的一个临时变量，再看卡尔曼滤波器的最后两个公式

$$x = x^{'} + Ky$$
$$P = (I - KH)P^{'}$$

这两个公式，实际上完成了卡尔曼滤波器的闭环，第一个公式是完成了当前状态向量 x 的更新，不仅考虑了上一时刻的预测值，也考虑了测量值，和整个系统的噪声，第二个公式根据卡尔曼增益 K，更新了系统的不确定度 P，用于下一个周期的运算，该公式中的 I 为与状态向量同维度的单位矩阵。

扩展卡尔曼（EKF）与经典卡尔曼（KF）的区别在于测量矩阵 H 的计算。EKF 对非线性函数进行泰勒展开后，进行一阶线性化的截断，忽略了其余高阶项，进而完成非线性函数的近似线性化。正是由于忽略了部分高阶项，使得 EKF 的状态估计会损失一些精度。



参考：https://mp.weixin.qq.com/s/Nta9ksUkAVoX8arBGm7qqg