关于在初中数学竞赛操作题中的不变量的求解方法及其用途的探究

RESEARCH ABOUT THE COMPUTATION OF INVARIANTS AND ITS USES IN SECONDARY SCHOOL MOS

Moyan Liang(a.k.a. 梁莫言),张江集团学校奥数班成员

摘要

在初中数学竞赛中常常会出现一种操作题,如移动硬币,分发糖果等.他们皆是先描述某些日常物品的移动,而最后问由一种物品状态到另一种状态的转移的可能性. 本文主要探究了在初中数学竞赛操作题中的变量与"不变量"之间的有趣的关系, 同时通过一些经典及崭新的问题,让读者了解在初中数学操作题中不变量的求解及使用方法,并分享自己在解此类问题的心得,并抒发自己的愚见.

§1 引言

在数月前,我为了解答USAJMO-2019的第一题而询问罗家亮老师,老师给予了回答.

引题. There are $a+b$ bowls arranged in a row, numbered 1 through $a+b$, where a and b are given positive integers. Initially, each of the first a bowls contains an apple, and each of the last b bowls contains a pear.
A legal move consists of moving an apple from bowl i to bowl $i+1$ and a pear from bowl to j bowl $j-1$, provided that the difference $i-j$ is even. We permit multiple fruits in the same bowl at the same time. The goal is to end up with the first b bowls each containing a pear and the last a bowls each containing an apple. Show that this is possible if and only if the product ab is even.
(译:有$a+b$个碗排成一行,编号为1至$a+b$,a与b为给定正整数.最初的时候,前a个碗各包含一个苹果,后b个碗各包含一个梨.一个合法的移动包含将一个苹果从碗i移动到碗$i+1$,并将一个梨从碗j移动到碗$i-1$,只要差$i-j$是偶数.我们的目标是:将最初的梨和苹果的顺序颠倒位置(即,前b个碗各包含一个梨,后a个碗各包含一个苹果.)证明这在且仅在乘积ab是偶数时是可能的.)

(Translator:Moyan Liang)

在这道题的证明中充分运用了"不变量"的思想,从而完成了本题的证明[1].

今介绍一系列记法与定义,他们将会贯穿全文.

1. 我们将一个数集S'为另一个数集S的排列记作$S'=\mathbb{P}\{S\}$.
2. 我们将一个数集R'为另一个数集R中元素的组合记作$R'=\mathbb{C}(\forall e\in R)$,或直接简单地记作$R'$为另一个数集$R$中元素的组合记作$R'=\mathbb{C}\{R\}$.

[1]值得一提的是:此题的完整解答须包含证明与构造可行的移动规则两个部分.笔者只完成了构造部分而被老师称为"本末倒置".

本文共分三节,第一节介绍了一系列基础记法及定义,以及此文引题.第二节通过一系列问题引入"不变量"这一概念,同时介绍"不变量"的求解方法.第三节介绍"不变量"方法在现代数学竞赛中的应用与本人在研究此课题时的愚见.

§2 "不变量"的求解方法

下面给出引题的证明.

引题的证明. [2][3] 记奇数号碗中苹果和梨的总数分别为A_1, P_1,偶数号碗的苹果和梨的总数分别为A_2, P_2.由于$(i-j)$时偶数,故每次操作都是将奇(偶)数号碗中的一个梨和苹果换到偶(奇)数号碗中,于是$(A_1 - A_2)$ 与$(P_1 - P_2)$同时增加2或-2,这表明

$$M = (A_1 - A_2) - (P_1 - P_2) \tag{1}$$

是本题合法操作的不变量.若ab为奇数,则a, b皆为奇数,初始状态下由(1) 得$M = 1 - (-1) = 2$,结束时$M = -1 - 1 = -2$,由M为不变量推出矛盾,命题获证.

□

此题的证明充分的利用了不变量的性质(就是说,它是不会变的),从而推出矛盾.事实上,在代数问题中不变量亦是极其有用的.

题 2.1. [4] 已知三个数89,12,3,进行一种运算Q:

$$Q(a,b,c) = (\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c^2.) \tag{2}$$

问:能否经过若干次运算Q,得到3个数90,14,10?证明它.

[2]此证明出自AOPS,由罗老师整理及翻译.

[3]这证明不包括构造过程,请参考本文附录.

[4]出自:奥数教程(八年级),§8,例5.有改动.

此题初看没有头绪,而此类问题的一般解法是从(2)中寻找不变量.

证明. 答案显然是否定的.接下来给出证明. 我们知道

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2. \tag{3}$$

(3)就是说,经过一次运算Q之前与之后的三个数的平方和是不变的.至此,我们找到了此题中的"不变量":平方和. 而

$$89^2 + 12^2 + 3^2 = 8074,$$

$$90^2 + 14^2 + 10^2 = 8396 > 8074.$$

故经过题中题中规定的运算不能由已知的三个数得到90, 14, 10三个数.

□

从上两例中我们可以看出"不变量"实际上是一种思想,要找到并证明它需要的是各种数学方法,如判别式,恒等变形等.下面分几类详细讨论.

*I.*一般不变量

题 2.2. [5] 在某部落的语言中一共只有两个字母A与B,并且该语言具有以下性质: 如果从单词中删去相邻的字母串AB,词义保持不变.或者说:单词中添加字母串BA 或$AABB$,词义保持不变.

问:$ABB = BAA$吗?

解. 记每个单词为(a, b),其中,a为该单词中A的个数,b为该单词中B的个数. 现寻找"不变量".显然,在一串"保义变换"中的$a - b$都是不会变的.而

$$ABB : (1,2), 1-2 = -1; \quad BAA : (2,1), 2-1 = 1.$$

[5]选自罗老师提供的资料.

故
$$ABB \neq BAA.$$
□

在此题中由于原本的条件是不足以使用的,因为字母数太少了,故考虑寻找"不变量".

在寻找不变量的过程中,我们需要在变量之中看出规律来.如题2.1,是从无理式(准确的来说,是根式)中寻找规律; 在此类题目中,我们需要求运算前的三个数与运算后的三个数的n[6]次方和的关系.

II.多项式中的"不变量"

(i) 判别式

在下一题中,我们会发现纯粹的寻找不变量的方法是无用的;我们必须通过寻找判别式中的规律中的不变量来寻找答案.

题 2.3. 对于二次三项式ax^2+bx+c,允许做下面的运算:

1. 将a与c对换;
2. 把x换成$(x+t)$,其中,t为任意实数.重复作这样的运算,能把x^2-x-2换成x^2-x-1吗?

重复作这样的运算,能把x^2-x-2换成x^2-x-1吗?

解. 我们考虑判别式Δ.第一种运算显然不改变Δ.第二种运算不改变多项式两根之差.现有
$$\Delta = b^2-4ac = a^2\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}\right]$$
,而$-\frac{b}{a}=x_1+x_2, \frac{c}{a}=x_1x_2$,从而$\delta=a^2(x_1-x_2)^2$.即第二种运算不改变$\delta$.而两个二次三项式的判别式为9与5,不能达到.
□

[6]此n是根式的次数.例如,在题2.1中,就是通过求其平方和.

(ii) 整式的加减

题 2.4. [7] 若多项式$f(x),g(x)$分别为:

1. $f(x)=x^2+x, g(x)=x^2+2$;
2. $f(x)=2x^2+x, g(x)=2x$;
3. $f(x)=x^2+x, g(x)=x^2-2$;

用**加,减,乘**能否从$f(x),g(x)$中得$h(x)=x$?

解. 对f,g用这三种运算,我们得到多项式
$$P(f(x),g(x))=x, \tag{4}$$
它应该对任意x成立,对于(1),(2),我们给出特定的x的值,使(4)不成立.

1. 在(1)中$f(2)=g(2)=6$,在对6反复用三种运算时，总是得到6的倍数，但(4)的右边是2.
2. 在(2)中$f(\frac{1}{2})=g(\frac{1}{2})=1$,(4)左边为整数,右边为分数.
3. 在(3)中
$$(f-g)^2+2g-3f=x.$$

□

III.奇偶不变量与余数不变量

在一些情况下,我们不能找到恒为定值的量,但我们可以考虑模算术.常见的模有:2(奇偶性),4(平方数的判断)等. 接下来分一些模型来讨论.

[7]选自罗老师提供的资料.

(i) 存取模型

所谓"存取模型"是指在某些物品在被使用去某些数量后会自动填充,求最后会不会用完.这种题目主要是通过同余的方法来解决.

下一道题中就是通过 (mod 3)找出不变量,并解决问题.

题 2.5. 一条龙有100个头.一名武士一剑可以砍掉它的15,17,20或5个头,就在这四种情况下,在龙的肩上又分别会长出24,2,14或17个新的头.如果把头都砍光时,龙就死了.龙会死吗?

解. 显然是不会的,下面给出证明.由于

$$15 - 24 \equiv 17 - 2 \equiv 20 - 14 \equiv 5 - 17 \equiv 0 \pmod 3,$$

故头 mod 3的余数不会变.而$100 \equiv 1 \pmod 3$,龙不会死.

□

(ii) 博弈模型

在不变量原理中的博弈模型就是指从任意一种初状态皆能到最终状态的可能性.

下一道题中就是通过 (mod 2)找出不变量,并解决问题.

题 2.6. 一个圆分为6个扇形(图2).每个扇形中放有一枚棋子.每一步允许将任何两枚棋子分别移入相邻的扇形.试问,能否通过这种操作,把6枚棋子全都移到一个扇形之中?

解. 不能.设第n个扇形中有棋子p_n个.考察量

$$M := \sum n \cdot p_n$$

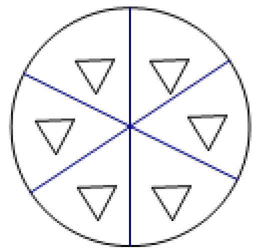

图 1: 初始状态

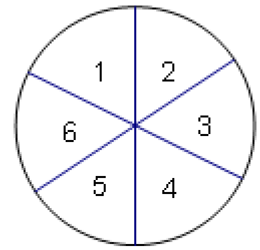

图 2: 分析

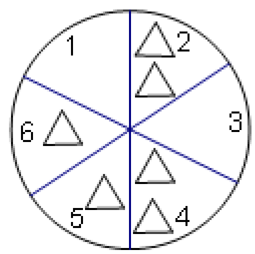

图 3: 移动后状态

在将一枚棋子移入相邻的扇形中时M的奇偶性改变了.这说明每一次移动时$M \pmod 2$不变. 但是,

$$M_{初始} = 21, \quad M_{目标} = 6N(N \in \mathbb{Z}^+).$$

21不被6整除,故目标不能达成.

□

参考文献

[1] 佚名. 不变量原理.

[2] 梅斌新. 一类竞赛题的巧妙解法——启发性问题解决策略之不变量原理. 数学学习与研究, (3):69–69, 2009.

[3] 费茸. 操作题中的不变量. 数理天地(高中版), (1), 2007.

[4] 赵雄辉. 奥数教程(八年级). 2014.