

# 关于在初中数学竞赛操作题中的不变量的求解方法及其用途的探究

## RESEARCH ABOUT THE COMPUTATION OF INVARIANTS AND ITS USES IN SECONDARY SCHOOL MOS

Moyan Liang(a.k.a. 梁莫言),张江集团学校奥数班成员

### 摘要

在初中数学竞赛中常常会出现一种操作题,如移动硬币,分发糖果等.他们皆是先描述某些日常物品的移动,而最后问由一种物品状态到另一种状态的转移的可能性. 本文主要探究了在初中数学竞赛操作题中的变量与"不变量"之间的有趣的关系,同时通过一些经典及崭新的问题,让读者了解在初中数学操作题中不变量的求解及使用方法,并分享自己在解此类问题的心得,并抒发自己的愚见.

### §1 引言

在数月前,我为了解答USAJMO-2019的第一题而询问罗家亮老师,老师给予了回答.

**引题.** 有 $a+b$ 个碗排成一行,编号为1至 $a+b$ , $a$ 与 $b$ 为给定正整数.最初的时候,前 $a$ 个碗各包含一个苹果,后 $b$ 个碗各包含一个梨.一个合法的移动包含将一个苹果从碗 $i$ 移动到碗 $i+1$ ,并将一个梨从碗 $j$ 移动到碗 $j-1$ ,只要差 $i-j$ 是偶数.我们的目标是:将最初的梨和苹果的顺序颠倒位置(即,前 $b$ 个碗各包含一个梨,后 $a$ 个碗各包含一个苹果.)证明这在且仅在乘积 $ab$ 是偶数时是可能的.

(Translator: Moyan Liang)

在这道题的证明中充分运用了"不变量"的思想,从而完成了本题的证明.证明将在§2中给出<sup>1</sup>. 本

<sup>1</sup>值得一提的是:此题的完整解答须包含证明与构造可行的移动规则两个部分.笔者只完成了构造部分而被老师称为"本末倒置".

文共分三节,第一节介绍了一系列基础记法及定义,以及此文引题.第二节通过一系列问题引入"不变量"这一概念,同时介绍"不变量"的求解方法.第三节介绍"不变量"方法在现代数学竞赛中的应用与本人在研究此课题时的愚见.

### §2 "不变量"的求解方法

我们先通过一例来说明,在代数问题中不变量亦是极其有用的.

**题 2.1.** <sup>2</sup> 已知三个数89,12,3,进行一种运算 $Q$ :

$$Q(a, b, c) = \left( \frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c^2. \right) \quad (1)$$

问:能否经过若干次运算 $Q$ ,得到3个数90,14,10?证明它.

此题初看没有头绪,而此类问题的一般解法是从(1)中寻找不变量.

<sup>2</sup>出自:奥数教程(八年级),§8,例5.有改动.

**证明.** 答案显然是否定的. 接下来给出证明. 我们知道

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2. \quad (2)$$

(2)就是说,经过一次运算 $Q$ 之前与之后的三个数的平方和是不变的.至此,我们找到了此题中的"不变量":平方和. 而

$$89^2 + 12^2 + 3^2 = 8074,$$

$$90^2 + 14^2 + 10^2 = 8396 > 8074.$$

故经过题中题中规定的运算不能由已知的三个数得到90, 14, 10三个数.

□

从上例中我们可以看出"不变量"实际上是一种思想,要找到并证明它需要的是各种数学方法,如判别式,恒等变形等.下面分几类详细讨论.

### 1. 奇偶不变量与余数不变量

在一些情况下,我们不能找到恒为定值的量,但我们可以考虑模算术.常见的模有:2(奇偶性),4(平方数的判断)等. 接下来分一些模型来讨论.

#### (i) 存取模型

所谓"存取模型"是指在某些物品在被使用去某些数量后会自动填充,求最后会不会用完.这种题目主要是通过同余的方法来解决.

下一道题中就是通过 (mod 3)找出不变量,并解决问题.

**题 2.2.** 一条龙有100个头.一名武士一剑可以砍掉它的15,17,20或5个头,就在这四种情况下,在龙的肩

上又分别会长出24,2,14或17个新的头.如果把头都砍光时,龙就死了.龙会死吗?

**解.** 显然是不会的,下面给出证明.由于

$$15 - 24 \equiv 17 - 2 \equiv 20 - 14 \equiv 5 - 17 \equiv 0 \pmod{3},$$

故头 mod 3的余数不会变.而 $100 \equiv 1 \pmod{3}$ ,龙不会死.

□

#### (ii) 博弈模型

在不变量原理中的博弈模型就是指从任何一种初状态皆能到最终状态的可能性.

下一道题中就是通过 (mod 2)找出不变量,并解决问题.

**题 2.3.** 一个圆分为6个扇形(图2).每个扇形中放有一枚棋子.每一步允许将任何两枚棋子分别移入相邻的扇形.试问,能否通过这种操作,把6枚棋子全都移到一个扇形之中?

**解.** 不能.设第 $n$ 个扇形中有棋子 $p_n$ 个.考察量

$$M := \sum n \cdot p_n$$

在将一枚棋子移入相邻的扇形中时 $M$ 的奇偶性改变了.这说明每一次移动时 $M \pmod{2}$ 不变.但是,

$$M_{\text{初始}} = 21, \quad M_{\text{目标}} = 6N (N \in \mathbb{Z}^+).$$

21不被6整除,故目标不能达成.

□

#### (iii) 绝对值模型

**题 2.4.** 有一台单功能计算器,对任意两个整数只能完成求差后再取绝对值的运算,其运算过程是:输入

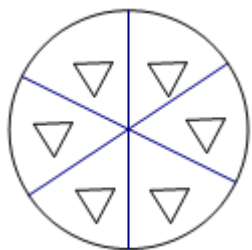


图 1: 初始状态

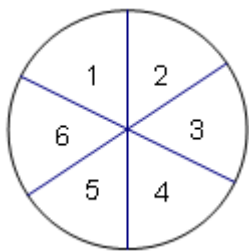


图 2: 分析

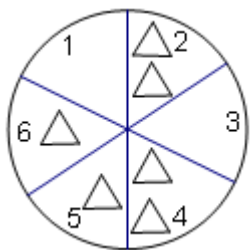


图 3: 移动后状态

第一个整数 $x_1$ ,只显示不运算,接着再输入整数 $x_2$ 后则显示 $|x_1 - x_2|$ 的结果.比如依次输入1,2,则输出的结果是 $|1 - 2| = 1$ ;此后每输入一个整数都是与前次显示的结果进行求差后再取绝对值的运算.

现将1  $n$ 这 $n(n \geq 3)$ 个整数输入计算器中,其结果为 $m$ .求 $m$ 的最大与最小值.

**解.** 首先,我们指出,在任意的组合下

$$m \equiv \sum x_i \pmod{2}. \quad (3)$$

**证明.** 在 $m$ 的展开式中有一些带负号,记为 $x_n^-$ .另一些带正号,记为 $x_n^+$ .则

$$\begin{aligned} \sum x_i &\equiv \sum x_i^+ - \sum x_i^- + 2\left(\sum x_i^-\right) \\ &\equiv \sum x_i^+ - \sum x_i^- \pmod{2}. \end{aligned}$$

此时只需分两种情况讨论即可.

$$1. \sum x_i = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ 为奇数.此时}$$

$$2. \sum x_i = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ 为偶数.此时}$$

□

(iv) 移动不变模型

在一些问题中,常通过一些物品的移动以混淆视听,而这时需要解题者"动中取静",从变量中找出不变量.引题就属于这一类题目.下面给出引题的证明.

引题的证明.<sup>34</sup> 记奇数号碗中苹果和梨的总数分别为 $A_1, P_1$ ,偶数号碗的苹果和梨的总数分别为 $A_2, P_2$ .由于 $(i - j)$ 为偶数,故每次操作都是将奇(偶)数号碗中的一个梨和苹果换到偶(奇)数号碗中,于是 $(A_1 - A_2)$ 与 $(P_1 - P_2)$ 同时增加2或-2,这表明

$$M = (A_1 - A_2) - (P_1 - P_2) \quad (4)$$

是本题合法操作的不变量.若 $ab$ 为奇数,则 $a, b$ 皆为奇数,初始状态下由(4)得 $M = 1 - (-1) = 2$ ,结束时 $M = -1 - 1 = -2$ ,由 $M$ 为不变量推出矛盾,命题获证.

□

此题的证明充分的利用了不变量的性质(就是说,它是不会变的),从而推出矛盾.

## II. 定值不变量

**题 2.5.**<sup>5</sup> 在某部落的语言中一共只有两个字母A与B,并且该语言具有以下性质: 如果从单词

□ <sup>3</sup>此证明出自AOPS,由罗老师整理及翻译.

<sup>4</sup>这证明不包括构造过程,请参考本文附录.

<sup>5</sup>选自罗老师提供的资料.

中删去相邻的字母串 $AB$ ,词义保持不变.或者说:单词中添加字母串 $BA$ 或 $AABB$ ,词义保持不变.

问: $ABB = BAA$ 吗?

解. 记每个单词为 $(a, b)$ ,其中, $a$ 为该单词中 $A$ 的个数, $b$ 为该单词中 $B$ 的个数. 现寻找"不变量".显然,在一串"保义变换"中的 $a - b$ 都是不会变的.而

$$ABB : (1, 2), 1 - 2 = -1; \quad BAA : (2, 1), 2 - 1 = 1.$$

故

$$ABB \neq BAA.$$

重复作这样的运算,能把 $x^2 - x - 2$ 换成 $x^2 - x - 1$ 吗?

解. 我们考虑判别式 $\Delta$ .第一种运算显然不改变 $\Delta$ .第二种运算不改变多项式两根之差.现有

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^2 - 4 \frac{c}{a} \right]$$

,而 $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2, \frac{c}{a} = x_1 x_2$ ,从而 $\delta = a^2 (x_1 - x_2)^2$ .即第二种运算不改变 $\delta$ .而两个二次三项式的判别式为9与5,不能达到.

□

□ (ii) 整式的加减

在此题中由于原本的条件是不足以使用的,因为字母数太少了,故考虑寻找"不变量".

在寻找不变量的过程中,我们需要在变量之中看出规律来.如题2.1,是从无理式(准确的来说,是根式)中寻找规律;在此类题目中,我们需要求运算前的三个数与运算后的三个数的 $n^6$ 次方和的关系.

### III. 多项式中的"不变量"

(i) 判别式

在下一题中,我们会发现纯粹的寻找不变量的方法是无用的;我们必须通过寻找判别式中的规律中的不变量来寻找答案.

**题 2.6.** 对于二次三项式 $ax^2 + bx + c$ ,允许做下面的运算:

1. 将 $a$ 与 $c$ 对换;
2. 把 $x$ 换成 $(x + t)$ ,其中, $t$ 为任意实数.重复作这样的运算,能把 $x^2 - x - 2$ 换成 $x^2 - x - 1$ 吗?

<sup>6</sup>此 $n$ 是根式的次数.例如,在题2.1中,就是通过求其平方和.

**题 2.7.**<sup>7</sup> 若多项式 $f(x), g(x)$ 分别为:

1.  $f(x) = x^2 + x, g(x) = x^2 + 2$ ;
2.  $f(x) = 2x^2 + x, g(x) = 2x$ ;
3.  $f(x) = x^2 + x, g(x) = x^2 - 2$ ;

用加,减,乘能否从 $f(x), g(x)$ 中得 $h(x) = x$ ?

解. 对 $f, g$ 用这三种运算,我们得到多项式

$$P(f(x), g(x)) = x, \quad (5)$$

它应该对任意 $x$ 成立,对于(1),(2),我们给出特定的 $x$ 的值,使(5)不成立.

1. 在(1)中 $f(2) = g(2) = 6$ ,在对6反复用三种运算时,总是得到6的倍数,但(5)的右边是2.
2. 在(2)中 $f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) = 1$ , (5)左边为整数,右边为分数.
3. 在(3)中

$$(f - g)^2 + 2g - 3f = x.$$

□

<sup>7</sup>选自罗老师提供的资料.

## IV. 半不变量:函数的单调性与有界性

在某些"连续"的问题中,例如函数问题中,我们的初始值与目标可能超出整数范围<sup>8</sup>,甚至于扩大到全部实数域.这时,余数与一般不变量都起不了作用;我们可以通过寻找问题中单调变化的量以及有界的量<sup>9</sup>从而解决问题.

**题 2.8.** 在十个容器中分别装有1,2,3,4,5,6,7,8,9,10毫升的水.每次操作可由盛水多的甲容器向盛水少的乙容器注水,注水量恰好等于乙容器原有的水量.问:能否在若干次操作后,使得5个容器都装有3毫升的水,而其余容器分别装有6,7,8,9,10毫升的水?如果能,请说明操作程序;如果不能,请说明理由.

**解.** 不能.设甲容器水量为 $a$ ,乙容器水量为 $b$ ,转注前后两容器水量相等,故

表 1: 转注前

甲容器	乙容器
奇	奇
奇	偶
偶	偶
偶	奇

从以上可见,每次操作后,水量为奇数的容器数目不增.由于初始状态有五个杯中水量是奇数毫升,因此无论多少次操作,水量为奇数毫升

<sup>8</sup>需要指出的是,在整数域内一般不变量与取余也有可能解决不了问题.

<sup>9</sup>从高等数学的角度,函数的单调性与有界性是紧紧的联系着的:例如, $f(x)$ 在 $X$ 内单调递增,其导函数

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}(x)$$

恒大于0.

表 2: 转注后

甲容器	乙容器
偶	偶
奇	偶
偶	偶
奇	偶

的容器数总不能比5多,所以5个容器有3毫升水,其余容器分别装有6, 7, 8, 9, 10毫升水(总计有7个容器水量为奇数毫升)的状态不可能出现.

□

## §3 关于不变量的最新竞赛题

下面给出若干题,给读者参考.

**题 3.1** (USAJMO-2018,第二天,第6题). 卡尔在桌子上摆了 $n$ 张编号为1,2,3, $\dots$ , $n$ 的卡片.他将一对卡片 $(a,b)$ 称为**逆序对**,当 $a > b$ 且 $a$ 在 $b$ 的左边.

例如,在卡列3,1,4,2中,有3对逆序对:

$$(3,1),(3,2),(4,2).$$

接下来,卡尔拿起编号为1的卡片,并将其放置在"相反"的位置:就是说,之前这张卡片之左有 $i$ 张卡片,现在其右有 $i$ 张卡片.然后,卡尔拿起编号为2的卡片,亦将其放置在"相反"的位置.他依次拿起编号为1,2,3, $\dots$ , $n$ 的卡片执行该操作.

证明:无论卡尔的卡片的最初摆放顺序如何,他的卡片的最终排列有与最初摆放顺序相同个数的逆序对.

## 附录

## 参考文献

## I. 引题(1)的构造方法

先从最简单的情况说起.记每个碗为 $(A, P, \dots)$ ,其中, $A$ 是苹果, $P$ 是梨. $a = 1, b = 2$ 时:

$$\begin{aligned}(A)(P)(P) &\Rightarrow ()(A, P, P)() \\ &\Rightarrow (P)(P)(A).\end{aligned}$$

将这种情形推广到 $a = n, b = 2$ 时(其中 $n$ 为任意正整数),便成

$$\begin{aligned}\underbrace{(A) \cdots (A)}_n (P)(P) &\Rightarrow \underbrace{(A) \cdots (A)}_{n-1} (A, P, P)() \\ &\Rightarrow \underbrace{(A) \cdots (A)}_{n-1} (P)(P)(A) \\ &\Rightarrow \cdots \\ &\Rightarrow (P)(P) \underbrace{(A) \cdots (A)}_n.\end{aligned}$$

这让我们很易推广到 $a = n, b = 2j$ ( $n, j$ 皆为正整数)的情况:

$$\begin{aligned}\underbrace{(A) \cdots (A)}_n \underbrace{(P) \cdots (P)}_{2j} &\Rightarrow \cdots \\ &\Rightarrow (P)(P) \underbrace{(A) \cdots (A)}_n \underbrace{(P) \cdots (P)}_{2j-2} \\ &\Rightarrow \cdots \\ &\Rightarrow \underbrace{(P) \cdots (P)}_{2j} \underbrace{(A) \cdots (A)}_n.\end{aligned}$$

若梨子数是偶数而苹果数为奇,则将这算法反过来操作就可以了.

[1] 佚名. 不变量原理.

[2] 梅斌新. 一类竞赛题的巧妙解法——启发性问题解决策略之不变量原理. 数学学习与研究, (3):69-69, 2009.

[3] 费茸. 操作题中的不变量. 数理天地(高中版), (1), 2007.

[4] 赵雄辉. 奥数教程(八年级). 2014.

## 插图

1	初始状态	3
2	分析	3
3	移动后状态	3

## 表格

1	转注前	5
2	转注后	5