关于在初中数学竞赛操作题中的不变量的求解方法及其用途的探究

Moyan Liang,张江集团学校奥数班成员

摘要

在初中数学竞赛中常常会出现一种操作题,如移动硬币,分发糖果等.他们皆是先描述某些日常物品的移动,而最后问由一种物品状态到另一种状态的转移的可能性. 本文主要探究了在初中数学竞赛操作题中的变量与"不变量"之间的有趣的关系, 同时通过一些经典及崭新的问题,让读者了解在初中数学操作题中不变量的求解及使用方法,并分享自己在解此类问题的心得,并抒发自己的愚见.

§1 引言

在数月前,我为了解答USAJMO-2019的第一题而询问罗家亮老师,老师给予了回答.

引题. There are $a+b$ bowls arranged in a row, numbered 1 through $a+b$, where a and b are given positive integers. Initially, each of the first a bowls contains an apple, and each of the last b bowls contains a pear.
A legal move consists of moving an apple from bowl i to bowl $i+1$ and a pear from bowl to j bowl $j-1$, provided that the difference $i-j$ is even. We permit multiple fruits in the same bowl at the same time. The goal is to end up with the first b bowls each containing a pear and the last a bowls each containing an apple. Show that this is possible if and only if the product ab is even.
(译:有$a+b$个碗排成一行,编号为1至$a+b$,a与b为给定正整数.最初的时候,前a个碗各包含一个苹果,后b个碗各包含一个梨.一个合法的移动包含将一个苹果从碗i移动到碗$i+1$,并将一个梨从碗j移动到碗$i-1$,只要差$i-j$是偶数.我们的目标是:将最初的梨和苹果的顺序颠倒位置(即,前b个碗各包含一个梨,后a个碗各包含一个苹果.)证明这在且仅在乘积ab是偶数时是可能的.)

(Translator:Moyan Liang)

在这道题的证明中充分运用了"不变量"的思想,从而完成了本题的证明[1].

今介绍一系列记法与定义,他们将会贯穿全文.

1. 我们将一个数集S'为另一个数集S的排列记作$S' = \mathbb{P}\{S\}$.
2. 我们将一个数集R'为另一个数集R中元素的组合记作$R' = \mathbb{C}(\forall e \in R)$,或直接简单地记作$R'$为另一个数集$R$中元素的组合记作$R' = \mathbb{C}\{R\}$.

本文共分三节,第一节介绍了一系列基础记法及定义,以及此文引题.第二节通过一系列问题引入"不变量"这一概念,同时介绍"不变量"的求解方

[1] 值得一提的是:此题的完整解答须包含证明与构造可行的移动规则两个部分.笔者只完成了构造部分而被老师称为"本末倒置".

法.第三节介绍"不变量"方法在现代数学竞赛中的应用与本人在研究此课题时的愚见.

§2 "不变量"的求解方法

下面给出引题的证明.

引题的证明. [2][3] 记奇数号碗中苹果和梨的总数分别为A_1, P_1,偶数号碗的苹果和梨的总数分别为A_2, P_2.由于$(i-j)$时偶数,故每次操作都是将奇(偶)数号碗中的一个梨和苹果换到偶(奇)数号碗中,于是$(A_1 - A_2)$ 与$(P_1 - P_2)$同时增加2或-2,这表明

$$M = (A_1 - A_2) - (P_1 - P_2) \tag{1}$$

是本题合法操作的不变量.若ab为奇数,则a, b皆为奇数,初始状态下由(1) 得$M = 1 - (-1) = 2$,结束时$M = -1 - 1 = -2$,由M为不变量推出矛盾,命题获证.

□

此题的证明充分的利用了不变量的性质(就是说,它是不会变的),从而推出矛盾.事实上,在代数问题中不变量亦是极其有用的.

题 2.1. [4] 已知三个数89,12,3,进行一种运算Q:

$$Q(a, b, c) = (\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c^2.) \tag{2}$$

问:能否经过若干次运算Q,得到3个数90,14,10?证明它.

此题初看没有头绪,而此类问题的一般解法是从(2)中寻找不变量.

[2]此证明出自AOPS,由罗老师整理及翻译.

[3]这证明不包括构造过程,请参考本文附录.

[4]出自:奥数教程(八年级),§8,例5.有改动.

证明. 答案显然是否定的.接下来给出证明. 我们知道

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2. \tag{3}$$

(3)就是说,经过一次运算Q之前与之后的三个数的平方和是不变的.至此,我们找到了此题中的"不变量":平方和. 而

$$89^2 + 12^2 + 3^2 = 8074,$$

$$90^2 + 14^2 + 10^2 = 8396 > 8074.$$

故经过题中题中规定的运算不能由已知的三个数得到90, 14, 10三个数.

□

从上两例中我们可以看出"不变量"实际上是一种思想,要找到并证明它需要的是各种数学方法,如判别式,恒等变形等.下面分几类详细讨论.

(i). 一般不变量

题 2.2. [5] 在某部落的语言中一共只有两个字母A与B,并且该语言具有以下性质: 如果从单词中删去相邻的字母串AB,词义保持不变.或者说:单词中添加字母串BA 或$AABB$,词义保持不变.

问:$ABB = BAA$吗?

解. 记每个单词为(a, b),其中,a为该单词中A的个数,b为该单词中B的个数. 现寻找"不变量".显然,在一串

[5]选自罗老师提供的资料.

参考文献

[1] 梅斌新. 一类竞赛题的巧妙解法——启发性问题解决策略之不变量原理. *数学学习与研究*, (3):69–69, 2009.

[2] 费茸. 操作题中的不变量. *数理天地(高中版)*, (1), 2007.

[3] 赵雄辉. *奥数教程(八年级)*. 2014.