

# 第 13 章连续模型的优化

韩建伟

信息学院

hanjianwei@zjgsu.edu.cn

2019/12/17

# 线性规划模型

$$\begin{array}{ll} \text{Opt } f(X) \\ \text{s.t.} \\ g_i(X) \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} b_i \quad i \in I \end{array}$$

- $f$  是决策变量（即向量  $X$  的分量）的线性函数
- 约束函数  $g_i$  也必须是线性的

# 连续模型

$$\begin{array}{ll} \text{Opt } f(X) \\ \text{s.t.} \\ g_i(X) = b_i \quad i \in I \end{array}$$

- $f$  连续但非线性
- 约束函数  $g_i$  也是非线性的, 但必须是等式约束

# 库存问题：送货费用和储存费用最小化

- 公司希望利润最大化

# 库存问题：送货费用和储存费用最小化

- 公司希望利润最大化
- 假设短期内汽油的需求和价格是常数

# 库存问题：送货费用和储存费用最小化

- 公司希望利润最大化
- 假设短期内汽油的需求和价格是常数
- 最小化成本就能最大化利润

## 库存问题：送货费用和储存费用最小化

- 公司希望利润最大化
- 假设短期内汽油的需求和价格是常数
- 最小化成本就能最大化利润
- 问题：每个加油站在保证持有足够多的汽油满足顾客需求的前提下，使每天平均的送货和库存持货成本最小

## 库存问题：送货费用和储存费用最小化

- 公司希望利润最大化
- 假设短期内汽油的需求和价格是常数
- 最小化成本就能最大化利润
- 问题：每个加油站在保证持有足够多的汽油满足顾客需求的前提下，使每天平均的送货和库存持货成本最小

日平均成本 =  $f(\text{存储费用}, \text{送货费用}, \text{产品需求率})$

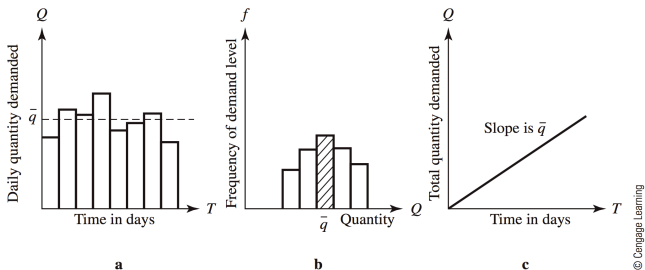


# 需求子模型

**存储费用** 假设单位产品的储存费用是常数

**送货费用** 假设送货费用是常数，与送货量无关

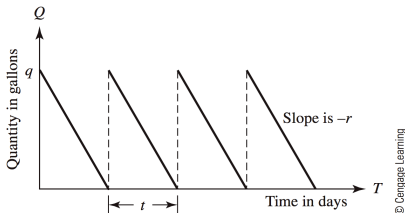
**需求** 假设需求量是函数



## 模型建立

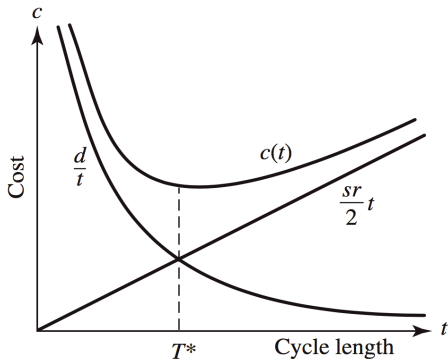
- $s$ : 每加仑汽油储存一天的费用
- $d$ : 每次送货的费用
- $r$ : 需求率 (加仑/天)
- $Q$ : 每次订货的汽油量
- $t$ : 时间 (天)

$$\text{每个周期的费用} = d + s\frac{q}{2}t$$



## 日均费用

$$c = \frac{d}{t} + \frac{sq}{2} = \frac{d}{t} + \frac{srt}{2}$$



© Cengage Learning

## 模型求解

$$c' = -\frac{d}{t^2} + \frac{sr}{2} = 0$$

求得：

$$T^* = \sqrt{\frac{2d}{sr}}$$

$$c'' = \frac{2d}{t^3}$$

# 多变量函数的优化方法

$$P_1 = 3390 - 0.1x_1 - 0.03x_2$$

$$P_2 = 3990 - 0.04x_1 - 0.1x_2$$

$$R = P_1x_1 + P_2x_2$$

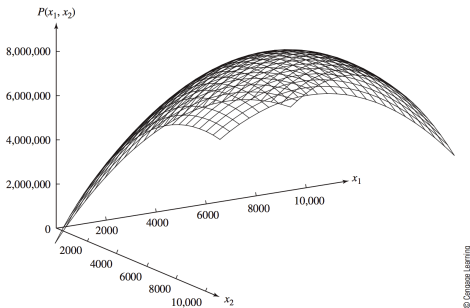
$$C = 400000 + 1950x_1 + 2250x_2$$

$$P = R - C$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# 多变量函数的求解

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0$$



- 最速下降法

# 连续约束优化

**问题** 在满足有限的存储空间约束的前提下，分配和维持足够的石油以满足需求，使总费用最小。

- $x_i$ : 储存第  $i$  类石油的数量
- $a_i$ : 第  $i$  类石油的成本
- $b_i$ : 单位时间取走第  $i$  类石油的速率
- $h_i$ : 第  $i$  类石油单位时间的储存费
- $t_i$ : 每单位第  $i$  类石油占用的储存空间
- $T$ : 储存的总容量

## 优化模型

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x_1, x_2) &= \left( \frac{a_1 b_1}{x_1} + \frac{h_1 x_1}{2} \right) + \left( \frac{a_2 b_2}{x_2} + \frac{h_2 x_2}{2} \right) \\ \text{s.t. } g(x_1, x_2) &= t_1 x_1 + t_2 x_2 = T \end{aligned}$$

### 拉格朗日乘子法

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(g(x_1, x_2) - T)$$

令：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$