第 13 章连续模型的优化

韩建伟

信息学院
mm@hanjianwei.com

2016/12/20

线性规划模型

$$\text{Opt } f(X)$$
$$\text{s.t.}$$
$$g_i(X) \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} \right\} b_i \quad i \in I$$

- f 是决策变量（即向量 X 的分量）的线性函数
- 约束函数 g_i 也必须是线性的

连续模型

$$
\begin{aligned}
&\text{Opt } f(X) \\
\text{s.t.} \\
&g_i(X) = b_i \quad i \in I
\end{aligned}
$$

- f 连续但非线性
- 约束函数 g_i 也是非线性的，但必须是等式约束

库存问题：送货费用和储存费用最小化

- 公司希望利润最大化

库存问题：送货费用和储存费用最小化

- 公司希望利润最大化
- 假设短期内汽油的需求和价格是常数

库存问题：送货费用和储存费用最小化

- 公司希望利润最大化
- 假设短期内汽油的需求和价格是常数
- 最小化成本就能最大化利润

库存问题：送货费用和储存费用最小化

- 公司希望利润最大化
- 假设短期内汽油的需求和价格是常数
- 最小化成本就能最大化利润
- 问题：每个加油站在保证持有足够多的汽油满足顾客需求的前提下，使每天平均的送货和库存持货成本最小

库存问题：送货费用和储存费用最小化

- 公司希望利润最大化
- 假设短期内汽油的需求和价格是常数
- 最小化成本就能最大化利润
- 问题：每个加油站在保证持有足够多的汽油满足顾客需求的前提下，使每天平均的送货和库存持货成本最小

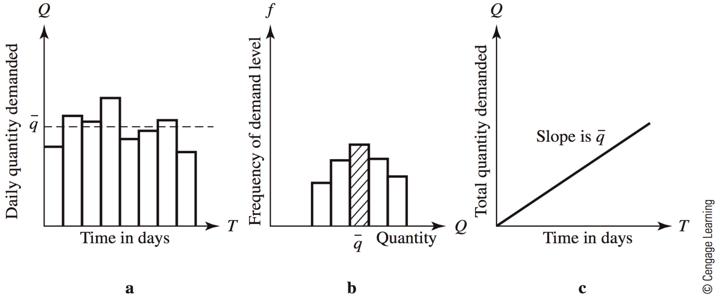
$$\text{日平均成本} = f(\text{存储费用}, \text{送货费用}, \text{产品需求率})$$

需求子模型

存储费用 假设单位产品的储存费用是常数

送货费用 假设送货费用是常数，与送货量无关

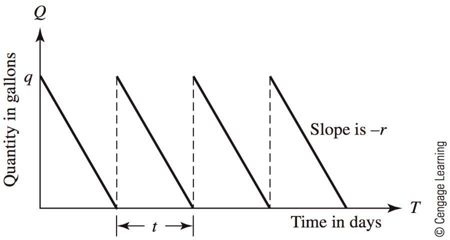
需求 假设需求量是函数



模型建立

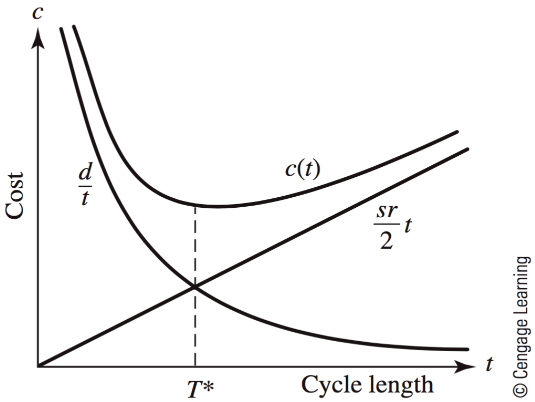
- s: 每加仑汽油储存一天的费用
- d: 每次送货的费用
- r: 需求率 (加仑/天)
- Q: 每次订货的汽油量
- t: 时间（天）

$$\text{每个周期的费用} = d + s\frac{q}{2}t$$



日均费用

$$c = \frac{d}{t} + \frac{sq}{2} = \frac{d}{t} + \frac{srt}{2}$$



模型求解

$$c' = -\frac{d}{t^2} + \frac{sr}{2} = 0$$

求得:

$$T^* = \sqrt{\frac{2d}{sr}}$$

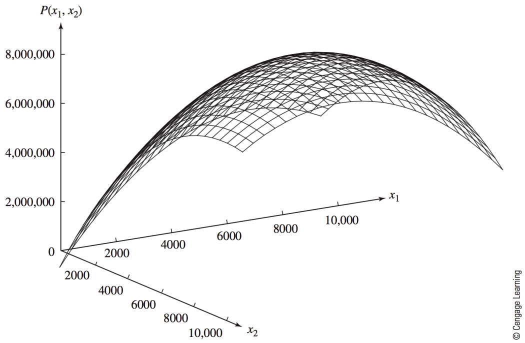
$$c'' = \frac{2d}{t^3}$$

多变量函数的优化方法

$$P_1 = 3390 - 0.1x_1 - 0.03x_2$$
$$P_2 = 3990 - 0.04x_1 - 0.1x_2$$
$$R = P_1x_1 + P_2x_2$$
$$C = 400000 + 1950x_1 + 2250x_2$$
$$P = R - C$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

多变量函数的求解

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0$$



- 最速下降法

连续约束优化

问题 在满足有限的存储空间约束的前提下，分配和维持足够的石油以满足需求，使总费用最小。

- x_i: 储存第 i 类石油的数量
- a_i: 第 i 类石油的成本
- b_i: 单位时间取走第 i 类石油的速率
- h_i: 第 i 类石油单位时间的储存费
- t_i: 每单位第 i 类石油占用的储存空间
- T: 储存的总容量

优化模型

$$\text{Min } f(x_1, x_2) = (\frac{a_1 b_1}{x_1} + \frac{h_1 x_1}{2}) + (\frac{a_2 b_2}{x_2} + \frac{h_2 x_2}{2})$$

s.t.

$$g(x_1, x_2) = t_1 x_1 + t_2 x_2 = T$$

拉格朗日乘子法

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(g(x_1, x_2) - T)$$

令:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$