第 11 章微分方程建模

韩建伟

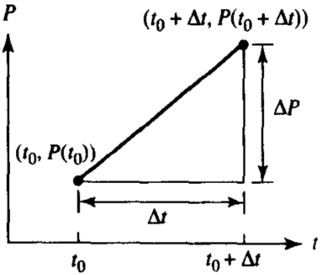
信息学院
hanjianwei@zjgsu.edu.cn

2019/12/11

人口增长问题

P 代表时刻 t 的人数数量，假设人口随时间的变化率依赖于当前人口数 P 及其它一些因素，则：

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) = kP\Delta t$$



变化率

- 平均变化率

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = kP$$

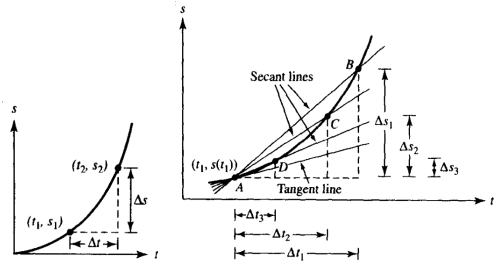
- 瞬时变化率 (让 $\Delta t \to 0$):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = kP$$

导数起着两种不同的作用:

1. 在连续问题中表示瞬时变化率
2. 在离散问题中表示平均变化率

导数作为变化率



$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_1} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

人口增长

问题

$t=t_0$ 时刻人口数量为 P_0，预测在未来某个 $t=t_1$ 时刻的人口数量 P。即，对于 $t_0 \le t \le t_1$，找到人口关于时间的函数 $P(t)$，满足 $P(t_0)=P_0$.

- 主要因素：出生率 (b) 和死亡率 c
- 次要因素（忽略）：迁入迁出、生存空间的限制、可利用的水与食物、传染病

$$P(t+\Delta t) = P(t) + bP(t)\Delta t - cP(t)\Delta t$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = bP - cP = kP$$

$$\frac{dP}{dt} = kP, P(t_0) = P_0, t_0 \le t \le t_1$$

马尔萨斯人口增长模型

- 18 世纪末马尔萨斯发表了著作《人口论》

$$\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow \frac{dP}{P} = kdt$$

两边积分得:

$$\ln P = kt + C$$

利用条件 $P(t_0) = P_0$ 得:

$$\ln P_0 = kt_0 + C \Rightarrow C = \ln P_0 - kt_0$$

将 C 带入方程:

$$\ln P = kt + \ln P_0 - kt_0 \Rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = k(t - t_0)$$

马尔萨斯人口增长模型

$$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$$

- 美国 1970 的人口为 203211926，1990 年人口为 248710000
- 预测 2000 的人口为 330775080，而实际为 281400000，误差为 8%
- 预测 2300 年的美国人口数量为552090 亿
- 为什么？
- 个体竞争食物、生存空间和其他自然资源

逻辑斯谛增长

- 人口增长率的比例因子 k 不再是常数，而是人口的函数

$$k = r(M - P), r > 0$$

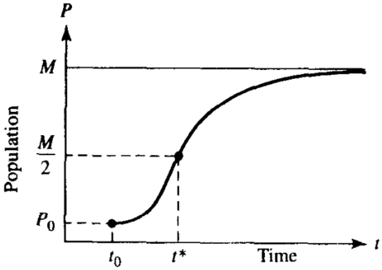
代入增长函数：

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P, P(t_0) = P_0$$

- 最早由丹麦生物数学家 Pierre-Francois Verhulst 提出，称为逻辑斯谛模型

逻辑斯谛增长

$$P(t) = \frac{P_0 M e^{rM(t-t_0)}}{M - P_0 + P_0 e^{rM(t-t_0)}}$$

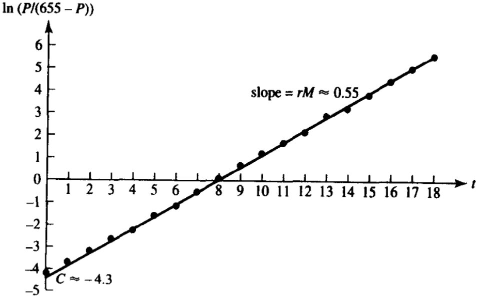


酵母增长模型

Time (hr)	Observed yeast biomass	Biomass calculated from logistic equation (10.13)	Percent error
0	9.6	8.9	−7.3
1	18.3	15.3	−16.4
2	29.0	26.0	−10.3
3	47.2	43.8	−7.2
4	71.1	72.5	2.0
5	119.1	116.3	−2.4
6	174.6	178.7	2.3
7	257.3	258.7	0.5
8	350.7	348.9	−0.5
9	441.0	436.7	−1.0
10	513.3	510.9	−4.7
11	559.7	566.4	1.2
12	594.8	604.3	1.6
13	629.4	628.6	−0.1
14	640.8	643.5	0.4
15	651.1	652.4	0.2
16	655.9	657.7	0.3
17	659.6	660.8	0.2
18	661.8	662.5	0.1

模型拟合

$$\ln \frac{P}{M - P} = rMt + C$$



逻辑斯谛模型的另一种形式

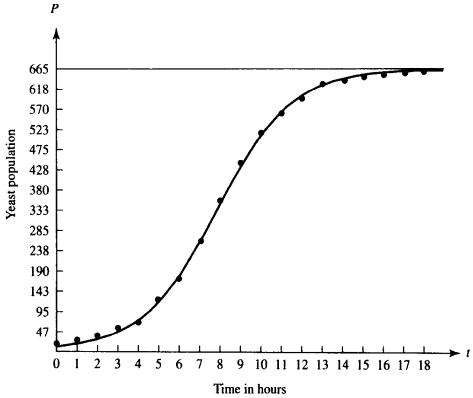
设 t^* 表示 P 达到极限值 M 一半的时刻，即 $P(t^*) = M/2$:

$$t^* = t_0 - \frac{1}{rM} \ln \frac{P_0}{M - P_0}$$

化简得:

$$P(t) = \frac{M}{1 + e^{-rM(t-t^*)}}$$

酵母模型拟合结果


P
665
618
570
523
475
428
380
333
285
238
190
143
95
47
Yeast population
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
t
Time in hours

美国人口预测

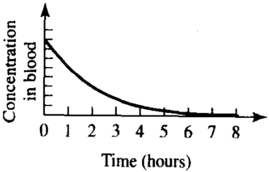
Year	Observed population	Predicted population	Percent error
1790	3,929,000	3,929,000	0.0
1800	5,308,000	5,336,000	0.5
1810	7,240,000	7,227,000	−0.2
1820	9,638,000	9,756,000	1.2
1830	12,866,000	13,108,000	1.9
1840	17,069,000	17,505,000	2.6
1850	23,192,000	23,191,000	−0.0
1860	31,443,000	30,410,000	−3.3
1870	38,558,000	39,370,000	2.1
1880	50,156,000	50,175,000	0.0
1890	62,948,000	62,767,000	−0.3
1900	75,995,000	76,867,000	1.1
1910	91,972,000	91,970,000	−0.0
1920	105,711,000	107,393,000	1.6
1930	122,755,000	122,396,000	−0.3
1940	131,669,000	136,317,000	3.5
1950	150,697,000	148,677,000	−1.3
1960	179,323,000	159,230,000	−11.2
1970	203,212,000	167,943,000	−17.4
1980	226,505,000	174,941,000	−22.8
1990	248,710,000	180,440,000	−27.5
2000	281,416,000	184,677,000	−34.4

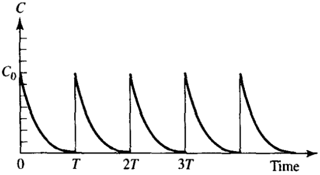
对药剂量开处方

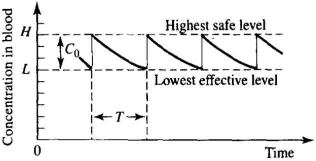
问题

药的剂量和用药时间应如何调节，才能保证在血液中维持安全有效的药物浓度

- 药物浓度应介于 L 和 H 之间
- 如何确定用药剂量及间隔时间？







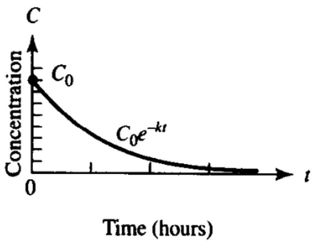
药物减少模型

- 实验表明，血液中药物浓度的减少与浓度成正比：
  $C'(t) = -kC(t)$
- 初始浓度 $C_0 = H - L$

故：

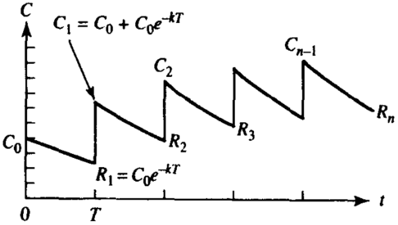
$$\frac{dC}{dt} = -kC, C = C_0$$

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$



多次用药的药物积累

- $t = 0$ 时刻用药 C_0
- T 小时后，剩余浓度 $R_1 = C_0 e^{-kT}$
- 再服药浓度变为 $C_1 = C_0 + C_0 e^{-kT}$



剩余浓度的计算

i	C_{i-1}	R_i
1	$C_0 \xrightarrow{\text{multiply by } e^{-kT}} C_0 e^{-kT}$	
	add C_0	
2	$C_0 + C_0 e^{-kT}$	$C_0 e^{-kT} + C_0 e^{-2kT}$
3	$C_0 + C_0 e^{-kT} + C_0 e^{-2kT}$	$C_0 e^{-kT} + C_0 e^{-2kT} + C_0 e^{-3kT}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n		$C_0 e^{-kT} + \cdots + C_0 e^{-nkT}$

$$R_n = C_0 e^{-kT}(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) = \frac{C_0 e^{-kT}(1 - e^{-nkT})}{1 - e^{-kT}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} R_n = \frac{C_0 e^{-kT}}{1 - e^{-kT}} = \frac{C_0}{e^{kT} - 1}$$

确定用药时间表

第 n 次间隔开始时的浓度为:

$$C_{n-1} = C_0 + R_{n-1}$$

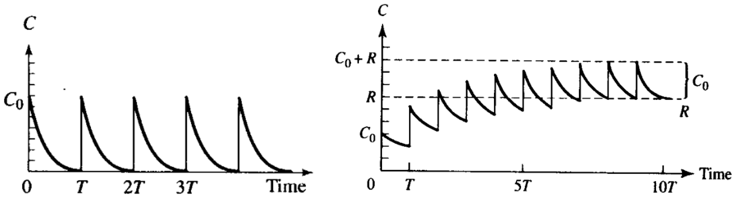
我们希望 n 很大时，C_{n-1} 趋近于 H:

$$H = \lim_{n\to\infty} C_{n-1} = \lim_{n\to\infty}(C_0 + R_{n-1}) = C_0 + R$$

同时 $C_0 = H - L$，故 $R = L$

用药时间对浓度的影响

$$\frac{R}{C_0} = \frac{1}{e^{kT} - 1}$$



确定用药策略

$$\begin{cases} C_0 = H - L \\ R = \frac{C_0}{e^{kT}-1} \\ R = L \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{k} \ln \frac{H}{L}$$

用药策略

第一次用药，称为承载剂量，就立即使血液中的药物浓度达到 H，然后按照每次用药时间间隔 $T = (1/k)\ln(H/L)$，将浓度提高 $C_0 = H - L$

微分方程解法

- 图形解
- 数值近似方法
- 分离变量法
- 线性方程

Matlab 解法

- dsolve(' 方程 1', ' 方程 2', ..., ' 方程 n', ' 初始条件', ' 自变量')
- 用字母 D 表示求微分，D2、D3 表示求高阶微分，如 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 表示为 D2y=0

求解 $\frac{du}{dt} = 1 + u^2$ 的通解

- 输入命令：dsolve('Du=1+u^2', 't')
- 输出结果： u=tan(t-c)

Matlab 解法

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 29y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 15 \end{cases}$$

- **输入命令**: dsolve('D2y + 4*Dy + 29*y=0', 'y(0)=0, Dy(0)=15', 'x')
- **结果**: $y = 3e^{-2x} sin(5x)$

微分方程组模型

设想一个小池塘，它的环境足以维持一些野生动物的存活，我们想在池塘里放置一些供垂钓的鱼，如鳟鱼和鲈鱼。设 $x(t)$ 表示鳟鱼在 t 时刻的数量，$y(t)$ 表示 t 时刻鲈鱼的数量。问这两种鱼在池塘中能否共存？如果是的话，那么这两种鱼的数量的最终解受一开始放入池塘的鱼的数量及外部干扰的敏感程度有多大？

$$
\begin{cases}
\frac{dx}{dt} = (a - by)x \\
\frac{dy}{dt} = (m - nx)y \\
x(0) = x_0 \\
y(0) = y_0
\end{cases}
$$

微分方程组的 Matlab 解法

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y + 3z \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 5y + 3z \\ \frac{dz}{dt} = 4x - 4y + 2z \end{cases}$$

- 输入命令: dsolve('Dx=2*x-3*y+3*z', 'Dy=4*x-5*y+3*z', 'Dz=4*x-4*y+2*z', 't')
- 结果: ....

Matlab 求微分方程的数值解

[t, x] = solver('f', ts, x0, options)

- **t** 自变量
- **x** 函数值
- **solver** ode23: 组合的二三阶的龙格-库塔-芬尔格算法， ode45: 组合的四五阶的龙格-库塔-芬尔格算法,...
- **f** 由待解方程写成的 m 文件名
- **ts** 自变量的初值和终值
- **x0** 函数的初值
- **options** 设定误差...