CS70–Spring 2024 — Discussion 0A Solutions

吴彦祖, SID 20211003341

June 19, 2025

Collaborators: 吴彦祖

1. 命题练习

将以下句子转化为命题逻辑，并将以下命题转化为中文。说明每个语句是否为真，并给出简要理由。

(a) 存在一个不是有理数的实数。

命题逻辑表达：$\exists x \in \mathbb{R},\ x \notin \mathbb{Q}$
真。理由：如 $\sqrt{2}$ 就是一个无理数。

(b) 所有整数要么是自然数，要么是负数，但不能两者兼是。

命题逻辑表达：$\forall x \in \mathbb{Z},\ (x \in \mathbb{N}) \vee (x < 0)$，且 $(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 0)$ 不成立。
真。理由：自然数和负数没有交集，所有整数要么属于自然数（通常指非负整数），要么是负数。

(c) 如果一个自然数能被 6 整除，那么它能被 2 整除或能被 3 整除。

命题逻辑表达：$\forall x \in \mathbb{N},\ 6|x \implies (2|x \vee 3|x)$
真。理由：6 的倍数必然是 2 和 3 的倍数之一。

(d) $(\forall x \in \mathbb{Z})(x \in \mathbb{Q})$

中文翻译：所有整数都是有理数。
真。理由：每个整数都可以写成分数形式（如 $n = \frac{n}{1}$）。

(e) $(\forall x \in \mathbb{Z})(((2 \mid x) \vee (3 \mid x)) \implies (6 \mid x))$

中文翻译：所有整数中，只要能被 2 或 3 整除，就能被 6 整除。
假。理由：反例：$x = 2$ 能被 2 整除但不能被 6 整除。

(f) $(\forall x \in \mathbb{N})(x > 7 \implies (\exists a, b \in \mathbb{N})(a + b = x))$

中文翻译：所有大于 7 的自然数都可以表示为两个自然数之和。
真。理由：取 $a = 1, b = x - 1$ 即可。

2. 真值表

通过写出真值表，判断以下等价关系是否成立。明确说明每对是否等价。

(a) $P \wedge (Q \vee P) \equiv P \wedge Q$

P	Q	$Q \vee P$	$P \wedge (Q \vee P)$	$P \wedge Q$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	F

不等价。理由：当 P 为真，Q 为假时，左边为真，右边为假。

(b) $(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$	$P \wedge R$	$Q \wedge R$	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

等价。理由：分配律，两边恒等。

(c) $(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

等价。理由：吸收律，两边恒等。

3. 蕴含

以下哪些蕴含无论 P 取何值总是为真？对于每个假的断言，给出一个反例（即找出一个 $P(x,y)$ 使得蕴含为假）。

(a) $\forall x \forall y P(x,y) \implies \forall y \forall x P(x,y)$

恒真。理由：量词顺序互换不影响全称命题。

(b) $\forall x \exists y P(x,y) \implies \exists y \forall x P(x,y)$

不恒真。反例：设 $P(x,y)$ 表示 “$x<y$”，则对每个 x 存在 y 使得 $x<y$，但不存在某个 y 使得对所有 x 都有 $x<y$。

(c) $\exists x \forall y P(x,y) \implies \forall y \exists x P(x,y)$

恒真。理由：如果存在某个 x 对所有 y 都成立，则对每个 y 取这个 x 即可。