

CDQ分治概述

论如何AC基本不会做的题

1120132001

概览

- 先看这样的题：
- 给定 N 个数，每个数有一个存在时间 $[S_i, E_i]$ ，在这个时间之外视为不存在。要求查询 $1, 2, 3, \dots, T-1, T$ 每一个时间点上存在的所有数字的和以及最大最小值。
- 显然线段树。

概览

- 改成这样：
- 有一个边有权无向图，每一条边有一个存在时间 $[S_i, E_i]$ ，在这个时间之外视为不存在。要求查询 $1, 2, 3, \dots, T-1, T$ 每一个时间点上动态图的最小生成树。
- 线段树？
- 每个节点维护一个并查集 -> 时间、内存都不够

概览

- 注意到一个只有按秩压缩、没有路径合并的并查集，它的所有操作是可以回退的。
- 虽然我们不能删除任意一条之前添加的边，但是我们可以删除最后一次添加的边，而不破坏这个结构。
- 合并的时刻记录下并查集所有的修改。
- 线段树只打标记，表示这个线段对应时间段内完整存在的边，不维护任何东西。
- DFS这棵线段树，每次进入一个节点的时候，把节点的所有标记加到并查集里；离开节点的时候，回退删掉所有刚加的边。

概览

- 再想想看，其实线段树都是没必要的，每次DFS到一个时间区间，只需要把这个区间内完整存在的边都加进并查集去，把这个区间根本不出现的边丢弃，把部分存在于这个区间的边保留，然后把时间区间二分继续DFS，离开的时候回退并查集所有操作。
- 于是就解决了。
- 代码看上去是一个对时间轴的分治
- 其实可以理解为深搜线段树

HDU4126

- 被当作2015年软院院赛的1004题。
- 一个N个点的无向图，先生成一棵最小生成树，然后给你Q次询问，每次询问都是x,y,z的形式，表示的意思是在原图中将x,y之间的边增大(一定是变大的)到z时，此时最小生成树的值是多少。最后求Q次询问最小生成树的平均值。 $N \leq 3000$, $Q \leq 10000$
- 最小生成树的边是动态变化的，把变化的边权融入图中只做一次Prim的思想不可取。

HDU4126

- 每次询问 \Rightarrow 时间点
- i 时刻边权从 C 变成 C' \Rightarrow $1..i-1$ 时间段内是权 C 的边, i 时间段内是权 C' 的边, $i+1..Q$ 时间段内又是权 C 的边
- 离线读入所有询问, 把它们变成每条边的存续时间
- 然后CDQ分治, $O(N^2 + Q \log Q \log N)$
- 就水过去了。
- 正解其实是树形DP, 在线的, 复杂度 $O(N^2)$, 并不好想。

PKU Campus 2014 C

- 一个无向图，每条边都有一个时刻不能经过，其他时刻可以经过。
- 求每时刻连通的点的对数。
- 维护的内容从最小生成树变成了不相交森林的连通支大小。
- 其实没差。
- CDQ分治 $O(Q\log Q\log N)$ 水过。
- 正解是其实是LCT，在线的，复杂度 $O(Q\log N)$ ，并不好写。

网教⑨EX

- 若干个数，每一个会动态变化，某一时刻可以选出若干张来使其总和模9为0，求每一时刻的选择方案数。
- 记录 $\text{cnt}[i]$ 表示某些牌选出和模9余数为 i 的方案数
- 如果在这些牌里加入一张模9为 j 的牌，会变成对所有 i ， $\text{cnt}[(i+j)\%9] += \text{cnt}[i]$ 。
- 从中拿走一张模9为 j 的牌的时候.....
- 似乎不太好算。
- 怎么办？

网教⑨EX

- cnt数组大小只有9，暴力记录每次修改前的值，可以回退最后一次的修改操作。
- 离线处理每个数字的存在时间，CDQ分治就解决了。
- 时间 $O(N \cdot \log Q \cdot 9)$ ，水过
- 正解：仔细想想，拿走一张模9为j的牌真的不能算么？
- 时间 $O(N \cdot 9 \cdot 9)$
- 绿哥哥和PQ大神各有一种 $O(N \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9)$ 的做法也可过。

总结

- 对时间（或者某个数据维度）整体二分
- 对（假想）线段树的DFS搜索
- 用于处理一部分数据会对一大段时间造成整体影响的情况
- 用于处理可以单步倒退但是没有逆运算的情况
- 起到约化数据维度的作用
- 用于离线水过正解很难想或者很难写的问题。