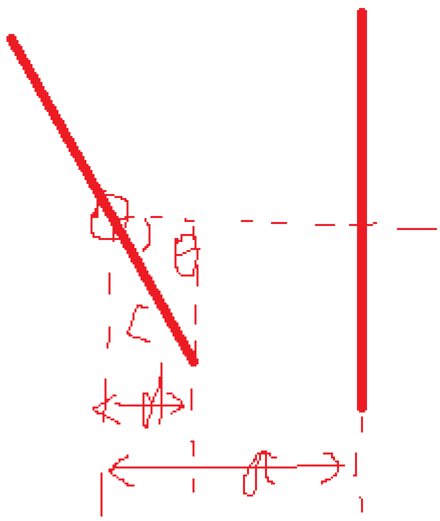
一些经典的概率问题

1. 布丰针问题

问题：给定间距为 2a 的平行线，将长度为 2c(c<a)的棒随机投向地板（随机的含义是独立随机的 x,y 坐标和角度），问相交概率。

解答：

限定棒的中心和线的距离不超过 a 的情况下，考虑棒的一端和某一条特定的直线相交的概率：



显见在**特定的角度下**，相交的概率是心、线距离$x \le d(x \in [0,a])$的概率，也就是$\frac{d}{a}$，计算得$d = c|\cos\theta|$。注意到θ和 x 的分布是独立的、均匀的，它们的分布函数互相不影响，所以我们在计算概率的时候将这两个变量分离，进行累次积分（如果互相影响，要先解方程找出至少一个独立的，再积分）：

$$P(\theta) = \frac{\int_0^{c|\cos\theta|} 1dx + \int_{c|\cos\theta|}^{a} 0dx}{a} = \frac{c|\cos\theta|}{a}$$

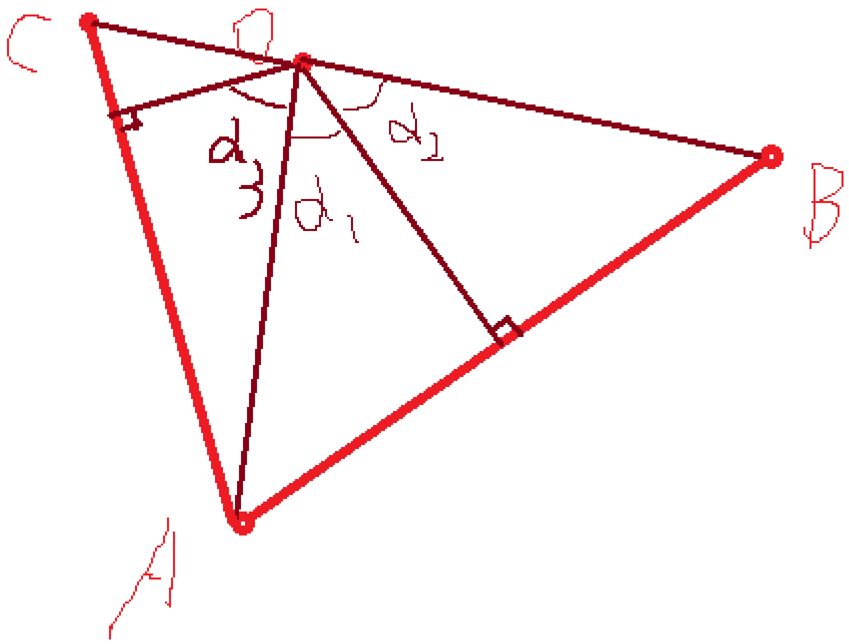
$$P = \frac{\int_0^{2\pi} P(\theta)d\theta}{2\pi} = \frac{2c}{\pi a}$$

最后的 P 就是答案。

2. 多边形布丰针问题（HDU4978）

问题：给定间距为 2a 的直线和直径不超过 2a 的凸多边形，随机投掷凸多边形，问相交概率。

解：我们假定不知道上一问的答案（实际上这道题有现成的结论），完整地再推一遍。当然我们可以认为是对连续多条边的积分，不过这里我们改成对点的积分，考虑一条直线从 a 距离处不断向着中心靠拢，最先碰到的是哪个顶点呢？



以 A 顶点为例，显然是$\alpha_1 + \alpha_3$。这里我们把它拆分开，对于凸多边形的每一条边，计算它的两个端点：

$$P=\frac{1}{2\pi a}\sum_{AB}\left\{\int_{\pi-\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}\rangle}^{0}|OA|\cos\theta\,d\theta+\int_{0}^{\pi-\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AB}\rangle}|OB|\cos\theta\,d\theta\right\}$$

$$P=\frac{1}{2\pi a}\sum_{AB}\left\{|OB|\sin\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AB}\rangle-|OA|\sin\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}\rangle\right\}=\frac{1}{2\pi a}\sum_{AB}|AB|$$

3. 拉普拉斯针问题

问题:给定正交的间距为2a和2b的平行线,将长度为2c(c<a<b)的棒随机投向地板，问相交概率。

答案：$P=\frac{[2l(a+b)]-l^2}{\pi ab}$

4. 圆上的布丰针问题（原作者 M.F.NEUTS）

问题:给定一个半径为R的圆,将长度为2d的棒随机投向圆中,分d<R和d>R讨论交点个数z=0、1、2的概率。

解答：这里“随机”是有两种理解的。一种是点随机（先x坐标再y坐标)，一种是矢径角随机（先取中心到针的距离u再取角度)。就像我们在一个棒上取两个点，是同时取还是先后取概率会不一样。当然，交度在这一题中没有意义。为了计算方便，我们采取第一种理解方法，这样圆内每一块区域取到的概率和它的面积成正比，而 u 的概率分布函数为:

$$g(u)=\begin{cases}\frac{2u}{R^2}, & 0\le x\le R\\ 0, & x>R\end{cases}$$

分类讨论如下：

A.d>2R

显然 P(z=2)=1,P(z=1)=P(z=0)=0

B.2R>=d>R

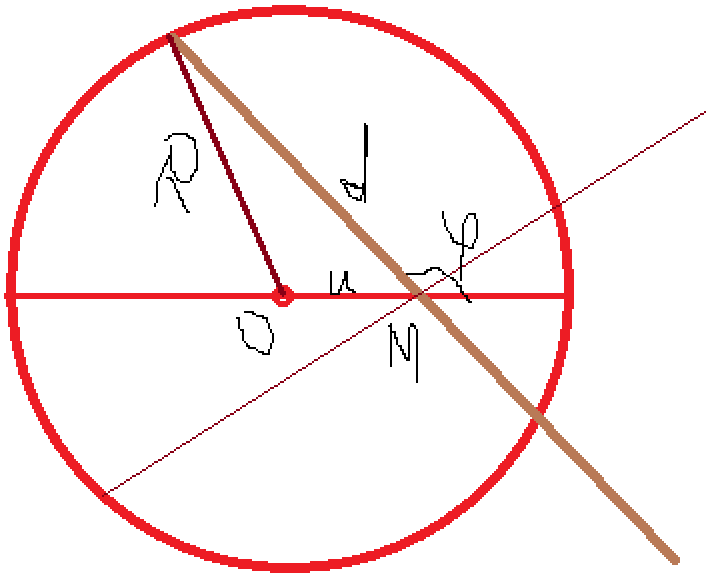
此时一定有 P(z=0)=0

B1.0<u<=d-R

此时一定有两个交点 p1(u)=0,p2(u)=1

B2.d-R<u<=R

此时如图：



有$p_2(u)=\frac{2\varphi}{\pi}-1, p_1(u)=2-\frac{2\varphi}{\pi}$，由余弦定理：

$$p_2(u)=\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{R^2-d^2-u^2}{2du}\right)-1$$

因此

$$P(z=2)=\int_0^{d-R} 1\times g(u)du+\int_{d-R}^{R} p_2(u)\times g(u)du$$

$$P(z=2)=\int_0^{d-R}\frac{2udu}{R^2}+\int_{d-R}^{R}\left[\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{R^2-d^2-u^2}{2du}\right)-1\right]\frac{2udu}{R^2}$$

令$\gamma=\frac{d}{R}$，积分得：

$$P(z=2)=\frac{\gamma}{\pi}\sqrt{4-\gamma^2}-1+\frac{4}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{\frac{2+\gamma}{4}}-\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{\gamma}{2}$$

P(z=1)的结果是 1 减去上述值。

C.0<d<=R

C1.0<u<R-d

此时没有交点。

C2.$R-d\le u<\sqrt{R^2-d^2}$

此时最多一个交点，定义φ同上，有：

$$p_0(u)=1-\frac{2\varphi}{\pi}, p_1(u)=\frac{2\varphi}{\pi}, p_2(u)=0$$

C3. $\sqrt{R^2-d^2}\le u\le R$

此时至少一个交点，有：

$$p_0(u)=0, p_1(u)=2-\frac{2\varphi}{\pi}, p_2(u)=\frac{2\varphi}{\pi}-1$$

积分结果是：

$$P(z=0)=2-\frac{2\gamma}{\pi}\sqrt{1-\gamma^2}-\frac{4}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}$$

$$P(z=1)=\frac{4}{\pi}\sqrt{1-\gamma^2}-\frac{\gamma}{4}\sqrt{4-\gamma^2}-2+\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{\gamma}{2}+\frac{8}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}$$
$$-\frac{4}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{\frac{2+\gamma}{4}}$$
$$P(z=2)=1-\frac{2\gamma}{\pi}\left(\frac{1}{2}\sqrt{4-\gamma^2}-\sqrt{1-\gamma^2}\right)-\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{\gamma}{2}$$
$$-\frac{4}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}+\frac{4}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{\frac{2+\gamma}{4}}$$

5. 连续切圆的期望（[ZOJ3744]）

问题：有一个半径不超过 2 的圆，每次随机在圆内取一个点，然后在圆内切一个最大的圆，新的圆必须把旧的圆排除在外，问新圆半径小于等于 1 所需的步数的期望。

解：显见$E(x\leq 1)=0$，假设半径出现在距圆心距离为 r 处，则概率为$P(r)=\frac{2\pi r}{\pi x^2}=\frac{2r}{x^2}$，新半径为$\frac{r+x}{2}$，因此期望为$E(x)=1+\int_0^x P(r)E(\frac{r+x}{2})dr=1+4\int_1^x\frac{2t-x}{x^2}E(t)dt$，这个方程微分两次可以变成普通二阶微分方程，此处不加求解。

6. 有向图中删点期望（[HDU5036]）

问题：给定一个定向图，每次操作随机在图内取一个顶点，然后删除这个点和所有这个点能到达的点。问期望的操作次数是多少。

解：考虑每一个点可以被它的所有直接的和间接的父亲删除（有环也无所谓）。假设这些点一共有 k 个，那么这个点直接被删的概率

就是 1/k，因此只要将原图反向之后求出可达矩阵，然后判断每个点的可达点有多少个，取倒数相加即可。

7. 连通图的概率（POJ3557）

问题：先确定顶点的个数 N 和一个概率 p，然后遍历所有的点对(i,j)，如果生成的 0 到 1 之间的随机实数小于 p，那么就会有一条边连接这两个顶点。问最后得到的图是连通图的概率有多少?

解：dp[i]为在当前情况下，构成 i 个点的连通点集的概率。计算时我们反过来考虑不能连通的情况。从(i-1)个点中，划分出一个(j-1)的子集，共有C_{i-1}^{j-1}种；将这个子集加上新加入的点，若使这 j 个点构成连通点集，概率为 dp[j]；若使这 i 个点不连通，则在上面所说的两个子集之间没有连通的边，因为一共可能有$j \times (i - j)$种连边方式，所以概率为$(1 - p)^{j \times (i-j)}$。综合考虑得：

$$dp[i] = 1 - \sum_{j=1}^{i-1} C_{i-1}^{j-1} \times dp[j] \times (1 - p)^{j \times (i-j)}$$

8. 走出迷宫的期望（HDU4035）

问题：迷宫是一个树形图，从 1 开始，每个点有k_i概率回到 1，有e_i概率逃脱，剩下的情况以均等概率走一步到达任何一个相邻点。问逃脱迷宫的期望步数。

解：设E_i表示 i 点走出的期望，P_i表示 i 点的父亲节点，C_{ij}表示 i 的第 j 个孩子，m_i表示 i 的度数，那么有

叶子节点：$E_i=k_iE_1+e_i\cdot 0+(1-k_i-e_i)\left(E_{P_i}+1\right)=k_iE_1+(1-k_i-e_i)E_{P_i}+(1-k_i-e_i)$

非叶子节点：$E_i=k_iE_1+e_i\cdot 0+\frac{1-k_i-e_i}{m}\left(\left(E_{P_i}+1\right)+\sum\left(E_{C_{ij}}+1\right)\right)=k_iE_1+\frac{1-k_i-e_i}{m}E_{P_i}+\frac{1-k_i-e_i}{m}\sum E_{C_{ij}}+(1-k_i-e_i)$

另：$E_i=A_iE_1+B_iE_{P_i}+C_i$，则有：

$$A_i=\frac{mk_i+(1-k_i-e_i)\sum A_{C_{ij}}}{m-(1-k_i-e_i)\sum B_{C_{ij}}}$$

$$B_i=\frac{1-k_i-e_i}{m-(1-k_i-e_i)\sum B_{C_{ij}}}$$

$$C_i=\frac{m(1-k_i-e_i)+(1-k_i-e_i)\sum C_{C_{ij}}}{m-(1-k_i-e_i)\sum B_{C_{ij}}}$$

从叶子节点开始做树状 DP，直到计算出 1 的值，答案为$\frac{C_1}{1-A_1}$

9. 状压期望问题（HDU4921）

问题：给定若干条链，每条链可以从头开始选取若干长度（可以是 0）的一段。链条上的每个点有一个分数。总得分首先由全部选取的点的分数和构成。若每条链长度为 i 的元素被选取个数y_i大于 1，而一共有x_i个这样的点，那么你还会额外得到$\frac{y_iS_i}{x_i}$的奖励分，式中S_i是这一层选取的点分数和。问最终得分的期望。

解：分层考虑每一层的可能选取方法，状压枚举之，统计每一种分布对应的得分以及在总选取方案中占的比例即可。

10. 放棋子期望问题（ZOJ3822）

问题：给定 NxM 的空棋盘，每次随机选取一个空格放上棋子，

直到每行每列都至少有一个棋子为止，问棋子个数的期望。

解：三维概率 DP，dp[i][j][k]表示放了 i 个棋子占据 j 行 k 列的概率 (注意：不是从那个状态开始到达目标的期望)。于是得到方程：

$$
\begin{aligned}
dp[i][j][k] = & \frac{jk-i+1}{NM-i+1} dp[i-1][j][k] \\
& + \frac{k(N-j+1)}{NM-i+1} dp[i-1][j-1][k] \\
& + \frac{j(M-k+1)}{NM-i+1} dp[i-1][j][k-1] \\
& + \frac{(N-j+1)(M-k+1)}{NM-i+1} dp[i-1][j-1][k-1]
\end{aligned}
$$

最后计算 i*(dp[i][N][M]-dp[i-1][N][M])之和即可。

11. 钝角三角形概率问题

问题：给定 1xL 的矩形，每次随机选取三个点，问这三个点构成的三角形为钝角的概率。

解：记答案为 P(L)，记三点为$P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), P_3(x_3,y_3)$，显见六个变量各自独立服从均匀分布。于是有

$$P(L) = 3P\left(\text{角}P_1\text{是钝角}\right) = 3P(X+Y<0)$$

$$X = (x_2-x_1)(x_3-x_1)$$

$$Y = (y_2-y_1)(y_3-y_1)$$

设 F(x)是 X 的累计分布函数 (具体解法是先设 x1=a 然后在直角坐标系中画出 x2x3，计算满足条件的区域所占面积，最后对 a 积分)，那么有

$$P(L) = 3\int_{-\infty}^{+\infty} F\left(-\frac{x}{L^2}\right) dF(x)$$

此处积分计算较为繁琐。

总结

概率论中的多个连续变量的问题通常可以转化成连续的积分问题，把握住概率密度函数就可以迎刃而解。原问题不便于计算的，求解其反面。期望的计算，可以列出当前点和可以到达的点然后递推，也可以有定义求解。可以分解的问题，用指示器随机变量求解。概率问题的 DP，大多从初状态开始递推；而期望问题的 DP，大多以到达终点还需要多少为基准逆向递推。