常见的 DP 优化类型

1 单调队列直接优化

$\mathrm{dp[i]} = \min\{\mathrm{f[j]} + \mathrm{a[i]}\}$

如果 a[i]单调增的话，显然可以用减单调队列直接存 f[j]进行优化。

2 斜率不等式

$\mathrm{dp[i]} = \min\{\mathrm{f[j]} + \mathrm{b[j]} * \mathrm{a[i]}\}, \mathrm{j} < i$

即实现转移方程中的 i,j 分离。b 单调减，a 单调增（可选）。

令：

$$\mathrm{g[j,k]} = \frac{\mathrm{f[j]} - \mathrm{f[k]}}{\mathrm{b[j]} - \mathrm{b[k]}}(\mathrm{j} < k)$$

在队首，如果 g[j,k]>=-a[i]，那么 j 优于 k，而且以后 j 也优于 k，因此 k 可以重队列中直接删去。在队尾，如果 x<y<z,且 g[x,y]<=g[y,z]，也就是说只要 y 优于 x 一定可以得出 z 优于 y 的，我们就删去 y。

经过队尾的筛选，我们在队列中得到的是一个斜率递减的下凸包，每次寻找从上往下被-a[i]斜率的线所扫到的第一个点，a[i]单调的话通过队首的维护我们可以在均摊 O(1)的时间内找到这个点。值得注意的是，即使 a[i]不单调，我们仍然可以通过二分在 O(log n)的时间内找到转移点。

高维的场合和低维并没有区别。只要使用斜率和单调队列优化，一定可以降一维。高维时可以没有 j<i 的限制，这时我们理解成若干条 b[j]*x+f[j]的直线形成一个下凸包求值器，然后带入一个 a[i]作为 x 计算得的结果就是答案，时间是 O(nlogn)。

3 下凸包求值(CF-455E)

这是一种很奇怪的情况。有些时候，问题可以转化成给定一堆直线 K[i]*X+B[i]，每次询问选择连续的一段[a..b]和一个 x，求最小值。

做法是构造一个下凸包求值，实现对给定 x 求值和合并两个功能，内部实现是按 K 排好序的线段序列。然后线段树每个节点维护一个求值器。这样可以在 O(nlognlogn)的时间内解决问题。

4 分治优化

$$\mathrm{dp}[\mathrm{i},\mathrm{j}] = \min\{\mathrm{dp}[\mathrm{i}-1,\mathrm{k}] + \mathrm{C}[\mathrm{k},\mathrm{j}]\}$$

$$\mathrm{A}[\mathrm{i},\mathrm{j}] = \min\{\mathrm{k}|(\mathrm{dp}[\mathrm{i},\mathrm{j}] = \mathrm{dp}[\mathrm{i}-1,\mathrm{k}] + \mathrm{C}[\mathrm{k},\mathrm{j}])\}$$

元素的分组合并问题通常拥有以上的形式。优化的条件是 A[i,j]的单调性，也就是说 A[i,j]<=A[i,j+1]。也即要求 C[k,j]满足四边形不等式 C[a,c]+C[b,d]<=C[a,d]+C[b,c] 。(含义是：越晚并入新元素，并入的组尺寸越小，其额外代价越小。这里四边形不等式已经是充分条件了，不需要区间单调)

优化的伪代码如下：

compute(i,l,r,ol,or)

1. 令 m=(l+r)>>1
2. 寻找 k=ol..or,使得 dp[i,m]=dp[i-1,k]+C[k,m]最小
3. 如果 l==r，返回。否则执行 compute(i,l,m-1,ol,k);compute(i,m+1,r,k,or);

5 四边形不等式

四边形不等式优化应用于区间 DP：

$$\mathrm{dp}[i,j]=\min_{i\le k\le j}\{\mathrm{dp}[i,k]+\mathrm{dp}[k,j]\}+C[i,j]$$

$$A[i,j]=\min\{k|(\mathrm{dp}[i,j]=\mathrm{dp}[i,k]+\mathrm{dp}[k,j]+C[i,j])\}$$

要求 C[i,j]满足四边形不等式 C[a,c]+C[b,d]<=C[a,d]+C[b,c]和区间单调性 C[b,c]<=C[a,d]。注意这里的 C 不在转移方程的内部，而是一个定值。

满足上件的前提下，有 A[i,j-1]<=A[i,j]<=A[i+1,j]（关键条件），因此可以优化。优化方法为以|i-j|的递增顺序 DP，同时记录各个 A[i,j]值，枚举时在 A[i,j-1]和 A[i+1,j]的区间卡内枚举。

6 矩阵优化

一眼能看出来就是快速幂。多为期望或概率 DP。

7 线段树优化

通常是有不确定的强制转移的场合。如 FAFU1231。

$$\mathrm{dp}[i]=\max_{i+A[i]\le j\le i+B[i]}\{F[j]\}+G[i]$$

此时因 A[i],B[i]欠缺单调性，单调队列的使用受到限制，用线段树即可解决。如斜率优化中掺杂此种限制，则同上 3.